

Appello Gennaio, 29/01/24

Esercizio 1: Si considerino i due insiemi $C, P \subset \mathbb{R}^3$ definiti da

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\} \quad P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}.$$

(a) Si calcoli il volume di P ;

(b) Si dica se

$$\Omega := C \cap P$$

è compatto in $\mathbb{R}^3$ e se ne calcoli il volume;

(c) Si consideri la funzione $f(x, y, z) = 2xy - z$ e si calcolino i massimi e minimi relativi e assoluti di f su Ω .

Soluzione: Per il calcolo del volume di P usiamo coordinate cilindriche: posto $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ avremo $P = \{(\rho, z, \theta) : \rho \in (0, \sqrt{2}), z \in (-1, 1 - \rho^2), \theta \in [0, 2\pi)\}$. Per trovare il massimo valore di ρ abbiamo usato che $-1 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$ e quindi $1 - \rho^2 \geq -1$ da cui $\rho^2 \leq 2$. Pertanto abbiamo

$$\text{Vol}(P) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1-\rho^2} \rho dz d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} 2\rho - \rho^3 d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} (2 - 1) d\theta = 2\pi.$$

Punto (b): E' chiaro che gli insiemi C e P sono chiusi, inoltre P è limitato, quindi P risulta compatto, e $C \cap P$ sarà allora compatto, essendo intersezione di un compatto con un chiuso. Calcoliamone il volume: a tale scopo osserviamo che

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z \in [-1, 0]\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}.$$

Allora il volume sarà la somma dei volumi degli insiemi sopra. Il primo insieme è un cilindro con base un cerchio di raggio 1 e altezza 1, quindi il suo volume è π . Il secondo insieme ha volume pari a (è sempre un paraboloide come nel caso di P)

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\rho^2} \rho dz d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho - \rho^3 d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Punto (c): il gradiente di f è $\nabla f = (2y, 2x, -1)$ che non si annulla mai, quindi i massimi e minimi di f (relativi e assoluti) sono da cercarsi sul bordo di Ω . Il bordo di Ω consiste di 3 pezzi: $A_1 := \{z = -1, x^2 + y^2 \leq 1\}$, $A_2 := \{z \in [-1, 0], x^2 + y^2 = 1\}$ e $A_3 := \{z = 1 - x^2 - y^2, z \in [0, 1]\}$. Possiamo calcolare allora f su A_1 , quindi sostituendo $z = -1$ otteniamo $f(x, y, z) = 2xy + 1$ su A_1 , e le variabili x, y variano nel dominio $C := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. La funzione di due variabili $2xy + 1$ ha gradiente $(2y, 2x)$ che quindi si annulla in $(0, 0)$. Tale punto corrisponde al punto $(0, 0, -1) \in A_1$, in cui f vale 1. Visto che per valori di x e y arbitrariamente vicini a $(0, 0)$ la funzione $2xy + 1$ assume valori sia maggiori che minori di 1, si vede subito che il punto $(0, 0, -1)$ non può essere né di minimo né di massimo, ed è quindi un punto di sella. Restringendoci ora al bordo del cerchio ∂C dobbiamo trovare i massimi e minimi relativi di $2xy + 1$ sul vincolo $x^2 + y^2 = 1$. Questo esercizio, svolto tante volte nei compiti passati, dà come uniche soluzioni le coppie di punti

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ per i massimi, e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ per i minimi. Nei primi due, che corrispondono ai punti $P_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1)$ e $P_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$ la funzione f vale 2. Negli altri $P_3 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$ e $P_4 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$ vale 0. I punti P_1 e P_2 sono candidati ad essere punti di massimo, mentre P_3 e P_4 di minimo. Dobbiamo però capire cosa succede alla funzione f nelle vicinanze di tali punti. Per il punto P_3 , prendiamo il punto $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, z)$ per valori di $z > -1$ ma vicini a -1 , così che la funzione f assume valore $-1 - z < 0$, e vediamo subito che P_3 non può essere un minimo relativo. Stessa cosa per P_4 . Questi ultimi due punti saranno allora punti di sella. Dimosteremo tra poco che invece P_1 e P_2 sono massimi assoluti per f .

Torniamo ora all'analisi su A_2 . In tal caso, essendo $\frac{\partial f}{\partial z} = -1$, i punti di massimo e minimo per f su A_2 bisogna cercarli nei casi estremi in cui $z = -1$ o $z = 0$. Il primo caso corrisponde all'analisi fatta su ∂C , nel secondo caso dobbiamo cercare i max e min su $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$. L'analisi è identica a quella svolta nel caso di ∂C , e troviamo i punti critici $P_5 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e $P_6 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ su cui f vale 1, e $P_7 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e $P_8 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ su cui f vale -1 . Considerando $z < 0$ ma vicino a 0 vediamo, come nel caso precedente, che P_5 e P_6 non sono massimi locali. Mostriamo tra poco che invece P_7 e P_8 sono minimi assoluti.

Analizziamo ora f su A_3 . Su questo insieme, sostituendo $z = 1 - x^2 - y^2$, f diventa $2xy - 1 + x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 1 \geq -1$, con il vincolo $x^2 + y^2 < 1$ (il caso $x^2 + y^2 = 1$ corrisponde ai punti su $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$). Il gradiente di questa funzione è $(2(x + y), 2(x + y))$ che si annulla sul luogo di punti $x = -y$. In tal caso il valore della funzione è costantemente -1 , ed essendo la funzione ≥ -1 questi i punti della forma $(x, -x, 1 - 2x^2)$ saranno di minimo relativo per $|x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Veniamo ora a mostrare che P_1 e P_2 sono di massimo assoluto, e P_7 e P_8 di minimo assoluto. Per questi ultimi, avendo già verificato che $f \geq -1$ su A_3 , basta far vedere che $f \geq -1$ su $A_1 \cup A_2$. Ma in tal caso, essendo $z \leq 0$ su questi insiemi, avremo

$$2xy - z \geq 2xy \geq -x^2 - y^2 \geq -1.$$

Infine, per P_1 e P_2 , per i quali abbiamo, essendo $z \geq -1$

$$2xy - z \leq 2xy + 1 \leq x^2 + y^2 + 1 \leq 2.$$

Esercizio 2: Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u' = -2e^{2t}u^2 \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

e si trovi la formula generale per le soluzioni dell'equazione differenziale $u''' - u'' + u' = u$.

Soluzione: La soluzione del problema di Cauchy è fornita dalla funzione $u(t) = 0$ per ogni t . L'equazione differenziale $u''' - u'' + u' - u = 0$ ha polinomio caratteristico $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = \lambda^2(\lambda - 1) + (\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$. Le radici sono quindi $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$. Quindi le soluzioni generiche sono della forma

$$u(t) = \alpha e^t + \beta \cos t + \gamma \sin t.$$

Esercizio 3: Sia, per ogni $n \geq 1$, $f_n : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f_n(x) := n - ne^{-x/n^2}.$$

Si studi convergenza puntuale e uniforme della successione f_n sui seguenti domini:

- (a) sull'intervallo $(0, R)$, con $R > 0$;
- (b) sulla semiretta $(0, +\infty)$.

Soluzione: Conoscendo il limite notevole $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1-e^y}{y} = -1$ possiamo scrivere $f_n(x) = n(1 - e^{-x/n^2}) = -\frac{x}{n} \cdot \frac{1-e^{-x/n^2}}{-x/n^2}$ e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \cdot \frac{1 - e^{-x/n^2}}{-x/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0 \quad \forall x > 0.$$

Pertanto $f_n(x)$ tende puntualmente alla funzione nulla. Utilizzando lo stesso limite notevole, osserviamo che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = 0$, e quindi la funzione $f_n(x)$ è limitata in ogni intervallo della forma $(0, R]$. Vediamo che il massimo della funzione su tale intervallo viene assunto in $x = R$; a questo scopo basta osservare che f è crescente, come dimostra il fatto che $f'_n(x) = \frac{1}{n}e^{-x/n^2} > 0$ per ogni $x > 0$. Quindi

$$\sup_{x \in (0, R)} f_n(x) = f_n(R) = n(1 - e^{-R/n^2}) \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Quindi la convergenza su $(0, R)$ a 0 è anche uniforme. Vediamo invece che la convergenza non può essere uniforme su tutta la semiretta $(0, +\infty)$, perchè in questo caso

$$\sup_{x \in (0, R)} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} n(1 - e^{-R/n^2}) = n,$$

e quest'ultimo valore non tende a zero quando $n \rightarrow \infty$.

Esercizio 4: Si considerino le serie di funzioni $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ e $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} x^n$.

- (a) Si calcoli il raggio di convergenza R di g e si dica se g converge in $|x| = R$;
- (b) Supponiamo che i coefficienti a_n soddisfano la condizione $a_n e^n \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$. Si dimostri che il raggio di convergenza di g coincide con R ;
- (c) Dimostrare che il raggio di convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - e^{-n})x^n$ è $\geq$ di R . Possiamo dire che è maggiore stretto?

Soluzione: Grazie ad un noto teorema calcoliamo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{-n}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$, quindi $R = e$. Se $x = e$ avremo $g(e) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$, mentre se $x = -e$ avremo $g(e) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ che non converge.

(b): Utilizzando lo stesso teorema di prima, basterà far vedere che $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{e}$. Ma sappiamo che

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{e} |a_n e^n|^{\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1}{e}.$$

Per verificare l'ultima convergenza, abbiamo usato che $t^{\frac{1}{n}} \geq t$ se $t \in (0, 1)$, mentre $t^{\frac{1}{n}} \leq t$ se $t > 1$, e quindi se $t = |a_n e^n| \rightarrow 1$ il limite sopra segue.

(c): Basta stimare $|a_n - e^{-n}| \leq |a_n| + |e^{-n}|$ e quindi $\sqrt[n]{\frac{|a_n - e^{-n}|}{2}} \leq \sqrt[n]{\frac{|a_n| + |e^{-n}|}{2}} \leq \frac{|a_n|^{\frac{1}{n}} + e^{-1}}{2}$, da cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n - e^{-n}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{|a_n - e^{-n}|}}{2^{\frac{1}{n}}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|^{\frac{1}{n}} + e^{-1}}{2} = \frac{1}{e},$$

e quindi il raggio di convergenza è $\geq e$. Il risultato può essere sicuramente maggiore stretto, nel caso in cui ad esempio $a_n = e^{-n}$, la serie in (c) è quella costantemente nulla che ha raggio di convergenza $+\infty$. Però non possiamo sempre concludere che è maggiore stretto. Infatti, se ad esempio $a_n = (1 + \frac{1}{n})e^{-n}$, allora $a_n e^n = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$, ma $a_n - e^{-n} = \frac{1}{n}e^{-n}$ e il raggio di convergenza della serie in (c) sarà sempre e , visto che è il reciproco di

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}e^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{ne}} = \frac{1}{e}.$$

Esercizio 5: Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = \max\{x, y\}$.

- Si mostri che f è continua;
- Si dica se è derivabile e se è differenziabile in $(1, 0)$;
- Si dica se è derivabile e se è differenziabile in $(0, 0)$.

Soluzione: La funzione f prenderà la forma

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } x > y, \\ y & \text{se } x \leq y. \end{cases}$$

Essendo x e y funzioni continue, lo sarà anche f sui domini $\{x > y\}$ e $\{x < y\}$. Controlliamo la continuità sulla retta $\{x = y\}$. Qui è evidente, visto che le due funzioni x e y , su tale retta, coincidono.

Essendo $(1, 0) \in \{x > y\}$, la funzione $f(x, y) = x$ in un intorno di $(1, 0)$. Quindi è derivabile (anzi differenziabile). Controlliamo cosa accade in $(0, 0)$. Nei punti $(h, 0)$ per $h > 0$ la funzione vale $f(h, 0) = h$, mentre per $h < 0$ avremo $f(h, 0) = 0$. Quindi avremo

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$

mentre

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0}{h} = 0,$$

e quindi essendo tali limiti diversi, la funzione non è derivabile rispetto a x . Pertanto non sarà neppure differenziabile.