

Appello Straordinario Novembre Analisi 2, 09/11/23

Esercizio 1: Si consideri $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ il dominio definito da

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 2)^2 < 4, x^2 + (y - 1)^2 > 1\}.$$

- (a) Si disegni Ω , se ne calcoli l'area e si calcoli il volume del solido ottenuto ruotando Ω intorno all'asse y ;
- (b) Si consideri la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

e si dica se è continua su $\mathbb{R}^2$;

- (c) Si dica se f è continua su $\overline{\Omega}$, la chiusura di Ω .

Soluzione: (a): Il dominio Ω si può scrivere come $B_2((0, 2)) \setminus \overline{B_1((0, 1))}$, ovvero consiste dei punti interni alla palla di raggio 2 e centro $(0, 2)$, ma al tempo stesso esterni alla palla chiusa di raggio 1 e centro $(0, 1)$. Di conseguenza l'area di Ω sarà $4\pi - \pi = 3\pi$. Inoltre, il solido ottenuto ruotando Ω intorno all'asse y sarà quindi la sfera di raggio 2 e centro $(0, 2, 0)$ a cui è stata sottratta la sfera di raggio 1 e centro $(0, 1, 0)$ (dove abbiamo aggiunto uno 0 nelle coordinate dei centri perchè il solido ruotato vive in $\mathbb{R}^3$). Di conseguenza, il volume ottenuto sarà la differenza dei due volumi delle sfere, e quindi

$$8 \cdot \frac{4}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi = \frac{28}{3}\pi.$$

Rispondiamo ora al punto (b): la funzione non è continua su $\mathbb{R}^2$. Infatti, sulla retta $x = 0$ essa vale costantemente 1, tranne nel punto $(0, 0)$, in cui pertanto non sarà continua. Sarà tuttavia continua in tutti gli altri punti. In merito al punto (c) possiamo dire che f è continua su $\overline{\Omega}$. Infatti, l'unico punto di discontinuità di f in $\mathbb{R}^2$ è $(0, 0)$, quindi basta verificare che su $\overline{\Omega}$ la funzione è continua in $(0, 0)$. Se $(x, y) \in \overline{\Omega}$ e vicino a $(0, 0)$, si ha

$$\sqrt{4 - x^2} - 2 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} - 1,$$

da cui (in particolare dalla seconda disuguaglianza) si ricava

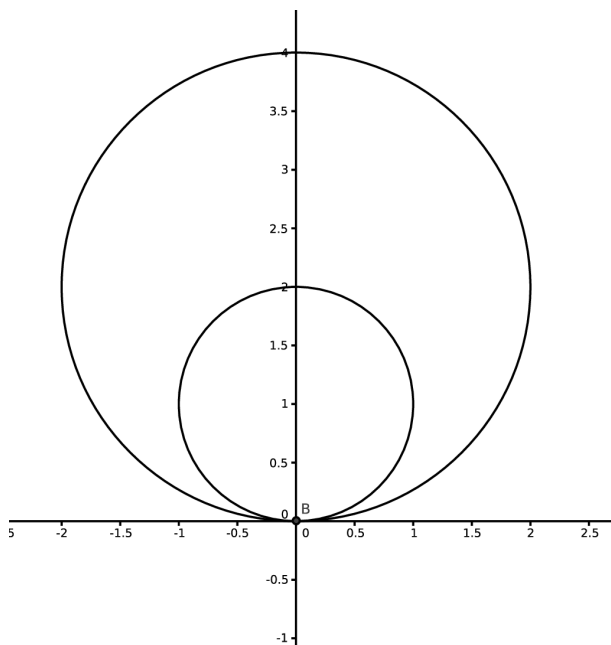
$$y^2 \leq (\sqrt{1 - x^2} - 1)^2.$$

Pertanto

$$|f(x, y)| = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{y^2}{x^2} \leq \frac{(\sqrt{1 - x^2} - 1)^2}{x^2}.$$

Ed ora, un immediato esercizio di analisi 1 mostra che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x^2} - 1}{x} = 0$, e concludiamo

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 - x^2} - 1)^2}{x^2} = 0.$$



Esercizio 2: Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u' = t^2 u \\ u(0) = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = \frac{1}{t} u + 3t \\ u(1) = -1. \end{cases}$$

Si dica se esiste una soluzione v del problema di Cauchy

$$\begin{cases} v' = \arctan(v) + |v + \arctan(t)| \\ v(0) = \pi, \end{cases}$$

e in caso affermativo, se è unica e se è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione: L'equazione differenziale del primo problema di Cauchy è a variabili separabili

$$u'/u = t^2 \quad \Rightarrow \quad \log(|u|) = \frac{1}{3}t^3 + c \quad \Rightarrow \quad |u| = \alpha e^{\frac{t^3}{3}} \quad \text{con } \alpha > 0.$$

Essendo il dato iniziale $u(0) = -1$ negativo, avremo $u(t) = -e^{\frac{t^3}{3}}$. In merito alla seconda equazione, si tratta di un'equazione lineare, la cui formula risolutiva dà

$$u(t) = e^{A(t)} \left(\int b(s) e^{-A(s)} ds + c \right),$$

con $A(t)$ primitiva di $\frac{1}{t}$ e $b(t) = 3t$. Otteniamo $A(t) = \log(|t|)$, $e^{A(t)} = |t|$, e

$$\int 3s e^{-\log|s|} ds = 3 \int \frac{s}{|s|} ds = 3|t| \quad \Rightarrow \quad u(t) = 3t^2 + c|t|.$$

Imponendo il dato iniziale si avrà $3 + c = -1$, da cui $u(t) = 3t^2 - 4|t|$.

In merito all'ultimo problema di Cauchy, la funzione $f(t, v) = \arctan(v) + |v + \arctan(t)|$ è localmente Lipschitziana nella v . Infatti, $\arctan(v)$ è regolare e quindi lo è, mentre $|v + t|$ lo è grazie alla disuguaglianza

$$\left| |v_1 + \arctan(t)| - |v_2 + \arctan(t)| \right| \leq |v_1 - v_2| \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}.$$

Per verificare che la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ basta applicare il teorema di esistenza globale fatto a lezione che richiede di verificare che

$$|f(t, v)| \leq C(|v| + 1)$$

per qualche costante $C > 0$. Ricordando che $|\arctan(x)| < \frac{\pi}{2}$, otteniamo

$$|f(t, v)| \leq \frac{\pi}{2} + |v + \arctan(t)| \leq \frac{\pi}{2} + |v| + \frac{\pi}{2} \leq |v| + \pi.$$

Quindi la verifica è completa con $C = \pi$.

Esercizio 3: Si consideri la superficie $\phi : [0, \pi] \times [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\phi(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$.

- (a) Si dica se ϕ è una superficie regolare e se ne calcoli l'area;
- (b) Si dica se esistono il massimo e minimo assoluti di $f(x, y, z) = z + xy$ sul sostegno della superficie e si calcolino.

Soluzione: La funzione ϕ è regolare, e iniettiva come mostra il fatto che $\cos \theta$ è iniettiva su $[0, \pi]$ e lo è anche z su $[-5, 5]$. Calcoliamo

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0), \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = (0, 0, 1) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial z} = (\cos \theta, \sin \theta, 0).$$

Pertanto $|\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial z}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$, e la superficie è regolare. Per calcolarne l'area devo risolvere

$$\int_0^\pi \int_{-5}^5 \left| \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial z} \right| dz d\theta = \int_0^\pi \int_{-5}^5 1 dz d\theta = 10\pi.$$

(b): essendo la superficie definita su $[0, \pi] \times [-5, 5]$ che è compatto, anche il suo sostegno sarà compatto e f assumerà massimo e minimo assoluti. Per calcolarli consideriamo la funzione composta $g(\theta, z) = f(\phi(\theta, z)) = z + \cos \theta \sin \theta$, il cui gradiente è

$$\nabla g(\theta, z) = (-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta, 1)$$

che non si annulla mai. Pertanto, non essendoci punti critici, g assumerà massimo e minimo sul bordo del dominio. Analizziamo i casi $z = 5$ e $z = -5$: nel primo caso si ha $g(\theta, 5) = 5 + \cos \theta \sin \theta$, e al variare di $\theta \in [0, \pi]$ si osserva (esercizio di Analisi 1) che il massimo e minimo vengono assunti in $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$, rispettivamente. I valori corrispondenti di g saranno

$$g(\pm \frac{\pi}{2}, 5) = 5 \pm \frac{1}{2}.$$

Similmente, quando $z = -5$ troviamo i massimi e i minimi

$$g(\pm \frac{\pi}{2}, 5) = -5 \pm \frac{1}{2}.$$

Sulla restante parte del bordo di $[0, \pi] \times [-5, 5]$, ovvero per $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ risulta $g = z$ e il massimo e minimo vengono assunti in $z = 5$ e $z = -5$ rispettivamente, in cui g vale appunto ± 5 rispettivamente. Allora vediamo che il massimo assoluto di g si assumono in $(\theta, z) = (\frac{\pi}{2}, 5)$ e $(\theta, z) = (\frac{3\pi}{2}, -5)$, in cui la g vale $5 + \frac{1}{2}$ e $-5 - \frac{1}{2}$, rispettivamente.

Esercizio 4: Si consideri la serie di funzioni $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

- (a) Si calcoli raggio di convergenza R e si dica se c'è convergenza per $|x| = R$;
- (b) Si consideri la serie $g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1-y)^n}$, e si dimostri che converge uniformemente su ogni semiretta $(-\infty, a)$ con $a < 0$;
- (c) Si determini il valore esatto di $f(x)$.

Soluzione: Per un noto teorema fatto a lezione si ha $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Nel caso $x = 1$ la serie diverge, mentre per $x = -1$ la serie comunque non converge perchè il termine generale $n(-1)^n$ non tende a zero.

(b): dalla teoria delle serie di potenze si evince che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ converge uniformemente su ogni intervallo $[-r, r]$ se $r \in (0, R)$, ovvero $r \in (0, 1)$. Ponendo $x = \varphi(y) = \frac{1}{1-y}$, ovvero $y = 1 - \frac{1}{x}$, si osserva che $g(y) = f(\frac{1}{1-y}) = f \circ \varphi(y)$, e la funzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ risulta Lipschitziana su $(-\infty, a)$ e mappa $(-\infty, a)$ in $(0, \frac{1}{1-a}] \subset [-r, r]$ (per $r = \frac{1}{1-a} < 1$). Quindi la serie $g(y)$ converge anch'essa uniformemente.

(c): scriviamo $f(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, e integrando membro a membro la serie che compare, si ottiene, denotando con G una sua primitiva,

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

La serie precedente è geometrica, e per $|x| < 1$ converge a

$$G(x) = \frac{x}{1-x} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = G'(x) = \frac{(1-x) + x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Pertanto $f(x) = xG'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Esercizio 5: Si studi convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $f_n(x) = \frac{nx+1}{x^{n+1}}$ sui seguenti insiemi:

- gli intervalli della forma $[1, R]$ con $R > 1$;
- gli intervalli della forma $[a, b]$ con $b > a > 1$.

Soluzione: Per $x = 1$ si ha $f_n(1) = \frac{n+1}{2} \rightarrow +\infty$. Se invece $x > 1$ avremo $f_n(x) = \frac{nx+1}{x^{n+1}} \leq (nx+1)\frac{1}{x^n} \leq 2x\frac{n}{x^n}$, ed ora $\frac{n}{x^n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, visto che $x > 1$. Quindi f_n converge puntualmente alla costante 0 su $(1, R]$, mentre diverge in $x = 1$. Di conseguenza non potrà neppure esserci convergenza uniforme.

Sugli intervalli $[a, b]$, se $a > 1$ la convergenza puntuale di f_n a $f(x) = 0$ è quindi dimostrata; mostriamo la convergenza uniforme.

Anzitutto, come prima, osserviamo che $0 \leq f_n(x) = \frac{nx+1}{x^{n+1}} \leq \frac{nx+1}{x^n} \leq \frac{nb+1}{a^n}$ per ogni $x \in [a, b]$. E adesso

$$\frac{nb+1}{a^n} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

grazie al fatto che $a > 1$.