

Esercizi proposti

Capitoli 5 e 6 Dinamica del punto materiale

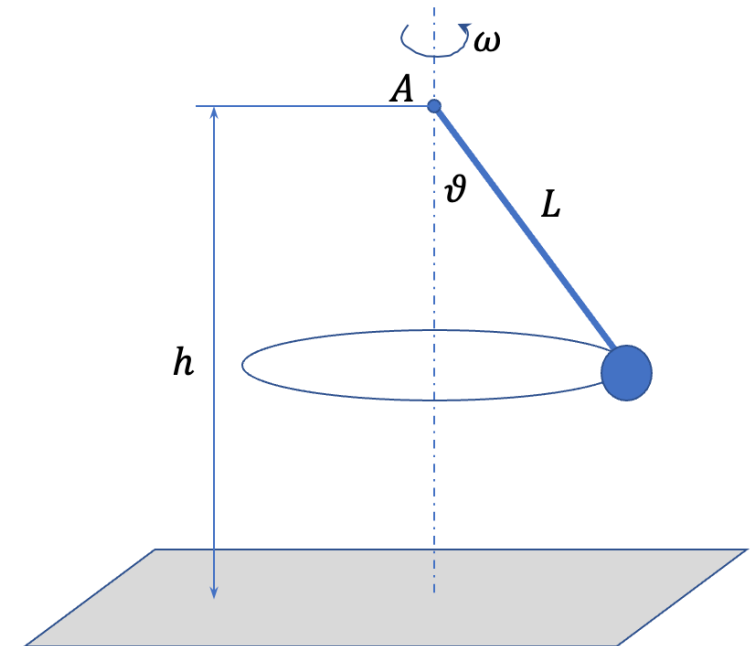
Esercizio #1

Un corpo di massa $M = 1\text{ kg}$ è sospesa al soffitto tramite una fune inestensibile, di massa trascurabile e lunghezza $L = 40\text{ cm}$. La pallina ruota in un piano orizzontale, con la fune che forma un angolo $\theta = 35^\circ$ con la verticale.

Determinare:

- La tensione nella fune;
- Il modulo della velocità della pallina.

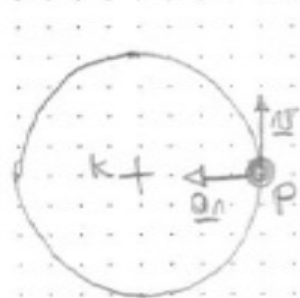
Ad un certo istante di tempo t la fune viene tagliata, calcolare il modulo della velocità della pallina quando la sua quota è diminuita di 70 cm rispetto al piano di rotazione iniziale.



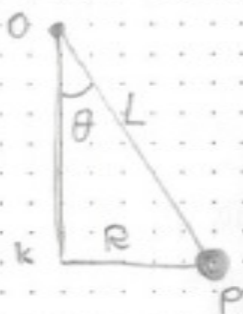
LA PALLINA SI MUOVE DI MOTO CIRCOLARE UNIFORME SUL PIANO ORIZZONTALE, QUINDI LA SUA ACCELERAZIONE È:

$$\underline{a} = \underline{a}_n = \frac{v^2}{R} \underline{u}_n$$

$\underline{u}_n \rightarrow$ VERSORE SUL PIANO DELLA CIRCONFERENZA, DIREZIONE CENTRIPETA



VISTA DA
SOPRA



VISTA DA
DAVANTI

DALLA GEOMETRIA DEL SISTEMA
ABBIAMO

$$R = L \sin \theta \quad \text{RAGGIO CIRCONF.}$$

FORZE AGENTI SU P

- FORZA PESO $\underline{F}_p = m \underline{g}$

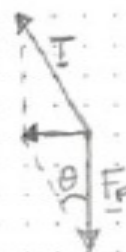
- TENSIONE DEL FILO $\underline{T}$
DIRETTA COME $\underline{OP}$, MODULO
INCIGNITO

SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

$$\underline{F} = m \underline{a}$$

$$\underline{F} = \underline{F}_p + \underline{T}$$

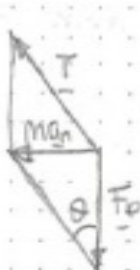
$$\underline{a} = \underline{a}_n$$



$\hookrightarrow$ LA RISULTANTE
DI $\underline{F}_p$ (NOTA) e
 $\underline{T}$ (NOTA IN DIREZIONE
DEVE AVERE LA DIRE-
ZIONE DI $\underline{a}_n$ (NOTA)

INTERPRETAZIONE
GRAFICA

CONOSCIENDO IL MODULO DI $F_p = mg$
E L'ANGOLO θ HO



$$T = \frac{F_p}{\cos \theta} = \frac{mg}{\cos \theta}$$

$$m a_n = m g \tan \theta$$

$$\rightarrow a_n = g \tan \theta$$

RICORDANDO CHE

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

POSSO RICAVARE

$$v^2 = a_n R = g R \tan \theta$$

$$v = \sqrt{g R \tan \theta}$$

→ modulo
DELLA VELO-
CITA'

DEL MOMENTO IN CUI TAGLIO
IL FILO

$$E_p = m g z = 0 \quad (\text{PRENDO COME
RIFERIMENTO
IL PIANO DELLA
CIRCONFERENZA})$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \\ = \frac{1}{2} m g R \tan \theta$$

$$E_m = E_p + E_k = \frac{1}{2} m g R \tan \theta$$

QUANDO LA DISTANZA DEL PUNTO È
DIMINUITA DI $h = 70 \text{ cm}$

$$E_p = -mgh$$

↑ DATO CHE IL RIFERIMENTO
ERA SULLA CIRCONFERENZA E IL
PUNTO È CADUTO VERSO IL
BASSO

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

↑ VELOCITA'

SUL PUNTO AGISCE SOLO LA FORZA
PESO

Em SI CONSERVA

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgh = \frac{1}{2}mgR\sin\theta$$

$$\rightarrow v^2 = 2gh + gR\sin\theta$$

$$v = \sqrt{2gh + gR\sin\theta}$$

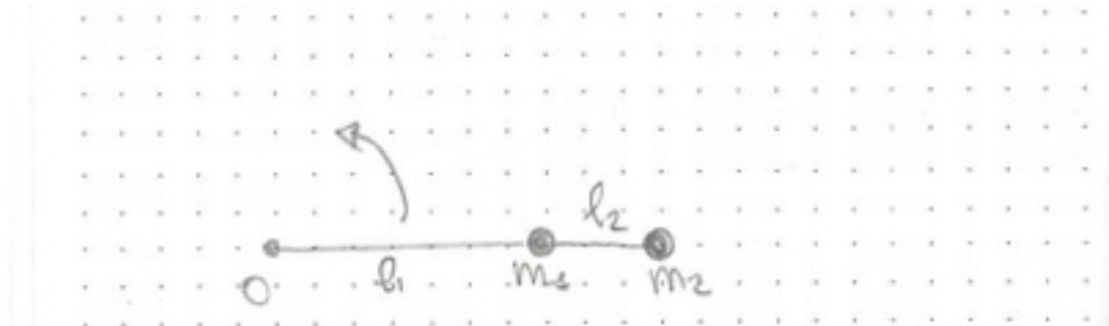
APPLICANDO LA CONSERVAZIONE DELL'ENER-
GIA MECCANICA TROVO IL MODULO MA
NON LA DIREZIONE DI v , SE FOSSE
RICHIESTA DOVREI STUDIARE IL MOTO
DI CADUTA LIBERA CON VELOCITÀ
INIZIALE NOTA.

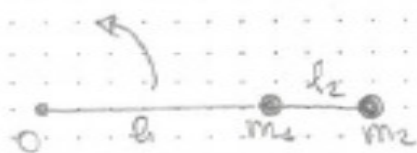
Esercizio #2

Due masse m_1 ed m_2 sono collegate da un filo di lunghezza l_2 . La massa m_1 è collegata a un altro filo di lunghezza l_1 fissato in un punto O . Le due masse ruotano su un piano orizzontale privo di attrito con velocità angolare ω costante. Determinare

- Le velocità e le accelerazioni (in modulo) delle due masse durante il moto.
- Le tensioni nei due fili.

[Dati numerici $l_1 = 1\text{ m}$, $l_2 = 0.2\text{ m}$, $m_1 = 2\text{ kg}$, $m_2 = 3\text{ kg}$, $\omega = 200\text{ giri/minuto}$.]





m_1 ed m_2 SONO COLLEGATE DA UN FILO
COME IN FIGURA, FISSATO AL PUNTO O.
LE DUE MASSE SI MUOVONO DI MOTO
CIRCOLARE UNIFORME CON PERIODO $T=2s$.
QUANTO VALGONO LE TENSIONI NEI DUE
TRATTI DEL FILO?

$$l_1 = 1m$$

$$l_2 = 0.2m$$

RICORDIAMO CHE

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ rad/s}$$

È OVVIAMENTE LO STESSO
PER LE DUE MASSE

→ CALCOLO LE VELOCITÀ

$$v_1 = \omega l_1$$

$$v_2 = \omega(l_1 + l_2)$$

IL MOTO È CIRCOLARE UNIFORME, POSSO
CALCOLARE LE ACCELERAZIONI

$$a_{n1} = \frac{v_1^2}{l_1} = \frac{\omega^2 l_1^2}{l_1} = \omega^2 l_1$$

$$a_{n2} = \frac{v_2^2}{l_1 + l_2} = \frac{\omega^2 (l_1 + l_2)^2}{l_1 + l_2}$$

$a_{t1} = 0$
 $a_{t2} = 0$ } NEL MOTO CIRCOLARE UNIFORME
LE COMPONENTI TANGENZIALI
DELL'ACCELERAZIONE SONO
NULLE

FORTE AGENTI SULLE DUE MASSE



ANALIZZIAMO LA MASSA m_2

$$m_2 a_{n2} = T_2 \rightarrow T_2 = m_2 \omega^2 (l_1 + l_2)$$

ANALIZZIAMO LA MASSA m_1

$$m_1 a_{n1} = T_1 - T_2$$

$$\rightarrow T_1 = m_1 a_{n1} + T_2$$

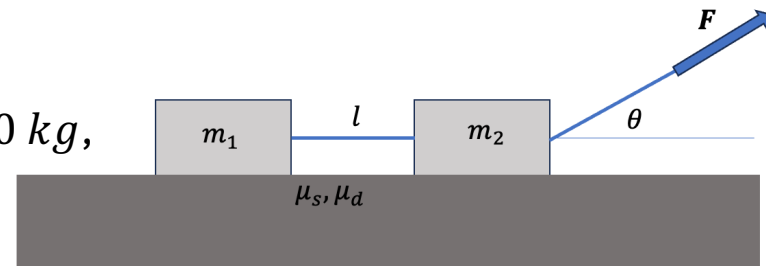
$$= m_1 l_1 \omega^2 + m_2 \omega^2 (l_1 + l_2) \\ = (m_1 l_1 + m_2 (l_1 + l_2)) \omega^2$$

Esercizio #3

Due masse m_1 ed m_2 collegate tra loro da un filo di lunghezza l scorrono su un piano orizzontale scabro, con coefficiente di attrito dinamico μ_d . La massa m_2 è trascinata da una forza di modulo F , inclinata di un angolo θ rispetto alla direzione orizzontale. Le due masse sono ferme nella configurazione iniziale. Determinare:

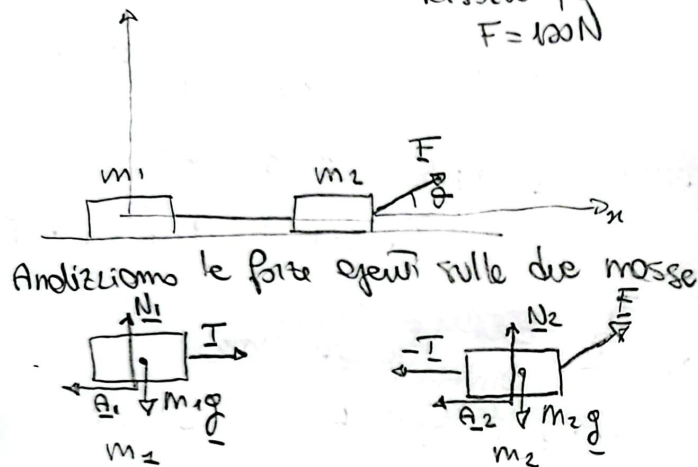
- L'accelerazione delle due masse durante il moto.
- La tensione del filo che collega le due masse.
- Il tempo impiegato dalle due masse per percorrere una distanza L rispetto alla posizione iniziale.
- Sapendo che il coefficiente di attrito statico tra le masse e il piano è μ_s , determinare il modulo minimo della forza F per far muovere le due masse.
- La tensione del filo in questa configurazione.

[Dati numerici $l = 20 \text{ cm}$, $L = 3 \text{ m}$, $m_1 = 5 \text{ kg}$, $m_2 = 10 \text{ kg}$, $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\theta = 30^\circ$, $\mu_s = \mu_d = 0.2$, $F = 200 \text{ N}$]



ESERCIZIO #3

Risolvo per
 $F = 100 \text{ N}$



Applichiamo la seconda legge di Newton
alle masse

$$m_2 a_2 = F + N_2 + A_2 - T + m_2 g$$

Componente dei vettori in direzione x

$$m_2 a_2 = F \cos \theta - T - A_2 \quad (*)$$

Componenti dei vettori in direzione y

$$0 = F \sin \theta - m_2 g + N_2$$

Dalla seconda ricaviamo

$$N_2 = m_2 g - F \sin \theta$$

In condizioni dinamiche il modulo delle
forze di attrito vale

$$A_2 = \mu_d N_2 = \mu_d (m_2 g - F \sin \theta)$$

Sostituisce nell'equazione (*)

$$(*) \quad m_2 a_2 = F \cos \theta - T - \mu_d (m_2 g - F \sin \theta)$$

Analizziamo le masse m_1

$$m_1 a_1 = T + N_1 + A_1 + m_1 g$$

Componente in direzione y

$$N_1 - m_1 g = 0$$

$$\rightarrow N_1 = m_1 g$$

Componente in direzione x

$$(*) \quad m_1 a_1 = T - A_1$$

in condizioni dinamiche

$$A_1 = \mu_d N_1 = \mu_d m_1 g$$

Sostituendo nelle (*) otteniamo

$$(*) \quad m_1 a_1 = T - \mu_d m_1 g$$

Dato che il filo è inestensibile

$$a_1 = a_2 = a$$

Riprendo le equazioni ② e ④

$$\begin{cases} m_2 a = F \cos \theta - T - \mu_s (m_2 g - F \sin \theta) \\ m_1 a = T - \mu_s (m_1 g) \end{cases}$$

Sommando membro a membro ottengo

$$(m_1 + m_2) a = F \cos \theta - \mu_s (m_1 g + m_2 g - F \sin \theta)$$

da cui ricaviamo

$$a = \frac{F \cos \theta - \mu_s (m_1 g + m_2 g - F \sin \theta)}{m_1 + m_2} = 4.48 \text{ m/s}^2$$

Possiamo quindi calcolare la tensione T

$$T = m_1 a + \mu_s (m_1 g) = 32.2 \text{ N}$$

Portando da fermo, le due masse si muovono secondo un moto uniformemente accelerato

$$x_1(t) = \frac{1}{2} a t^2$$

$$x_2(t) = l + \frac{1}{2} a t^2$$

Prendendo come riferimento le masse esse impiegheranno un tempo t_1 per percorrere una distanza L , tale che

$$L = \frac{1}{2} a t_1^2$$

da cui ricaviamo

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{a}} = 1.16 \text{ s}$$

Analizziamo il problema in condizioni critiche, $a_1 = a_2 = 0$

Riprendiamo le equazioni di moto delle masse m_1 e poniamo $a = 0$

$$T_1 - A_1 = 0$$

in condizioni limite, $A_{1\text{lim}} = \mu_s m_1 g$
da cui troviamo $T_{\text{lim}} = \mu_s m_1 g$

Riprendiamo l'equazione delle
masse m_2

$$F \cos \theta - A_z - T = 0$$

il valore limite di A_z è

$$A_{z\lim} = \mu_s (m_2 g - F \sin \theta)$$

Il valore limite di F sarà quindi
tale che

$$\begin{aligned} F_{\lim} \cos \theta &= T_{\lim} A_{z\lim} = \\ &= \mu_s (m_1 g + m_2 g - F_{\lim} \sin \theta) \end{aligned}$$

risolto per trovare $F_{\lim}$

$$F_{\lim} (\cos \theta + \mu_s \sin \theta) = \mu_s (m_1 g + m_2 g)$$

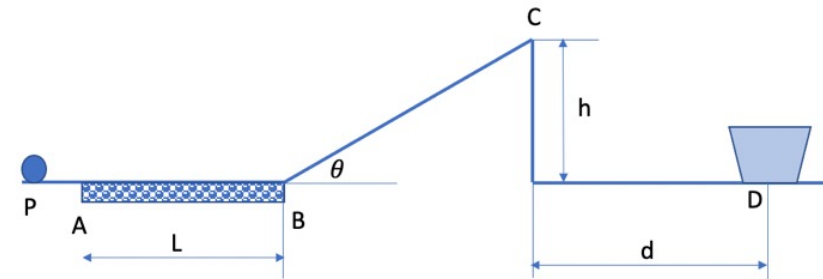
$$\rightarrow F_{\lim} = \frac{\mu_s (m_1 g + m_2 g)}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta} = 30.5 \text{ N}$$

In questa configurazione la tensione
del filo vale

$$T_{\lim} = \mu_s m_1 g = 9.8 \text{ N}$$

Esercizio #4 (dalla prima prova in itinere AA 2021/22)

Un corpo assimilabile a un punto materiale P di massa M è lanciato lungo una guida costituita da un tratto orizzontale di lunghezza L , scabro, con coefficiente di attrito dinamico μ_d , un tratto in salita con inclinazione θ e altezza h rispetto alla quota iniziale, un tratto orizzontale alla stessa quota del tratto iniziale. Il punto P , dopo il salto dal tratto inclinato, atterra nel punto D posto a una distanza d dalla fine del tratto inclinato. Il

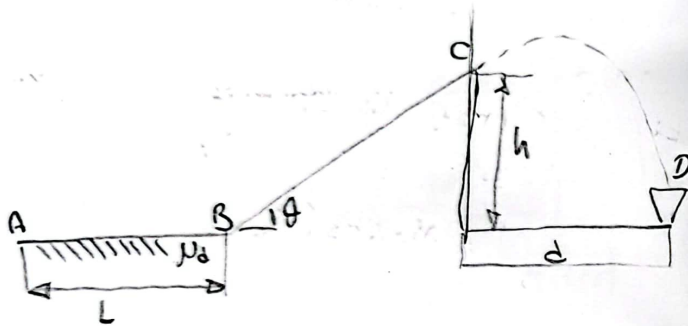


punto parte da fermo dalla posizione A , a seguito dell'applicazione di un impulso J . Determinare:

- La velocità di P quando raggiunge la posizione C .
- La velocità di P quando raggiunge la posizione B e l'accelerazione nel tratto $\overline{BC}$.
- l'accelerazione nel tratto $\overline{AB}$.
- L'impulso J applicato al punto per poter eseguire il moto discusso nei punti precedenti.

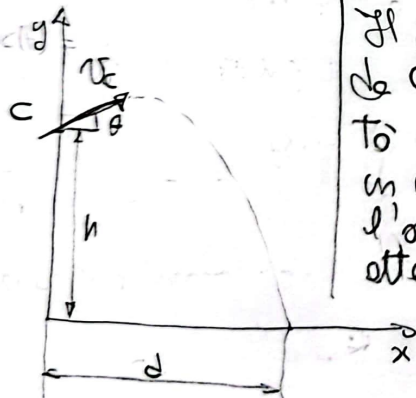
[Valori numerici $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$, $d = 1.5 m$, $h = 1 m$, $M = 3 kg$, $\theta = 30^\circ$, $L = 1.5 m$, $\mu_d = 0.2$]

ESERCIZIO #4 (Prove in itinere 2022)



— PUNTO 1

Analizziamo il moto parabolico nel tratto CD



Il punto parte da C con velocità v_c che fanno un angolo θ con l'orizzontale e atterra in D

$$\begin{cases} x(t) = v_c \cos \theta t \\ y(t) = h + v_c \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Coordinate del punto in funzione del tempo

— per percorrere la distanza d occorre un tempo t_d tale che

$$d = v_c \cos \theta t_d$$

$$\rightarrow t_d = \frac{d}{v_c \cos \theta}$$

nel tempo t_d la quota passa da h a 0, quindi

$$0 = h + v_c \sin \theta t_d - \frac{1}{2} g t_d^2$$

sostituendo l'espressione di t_d otteniamo

$$0 = h + \frac{v_c \sin \theta \cdot d}{v_c \cos \theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{v_c \cos \theta} \right)^2$$

risolvendo possiamo calcolare v_c

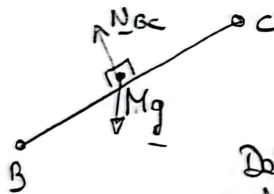
$$h + d \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{d^2 g}{v_c^2 \cos^2 \theta} = 0$$

$$h + d \tan \theta = \frac{1}{2} \frac{d^2 g}{v_c^2 \cos^2 \theta}$$

$$V_c^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2 g}{(h + d \tan \theta) \cos^2 \theta}$$

$$V_c = \sqrt{\frac{d^2 g}{2(h + d \tan \theta) \cos^2 \theta}} = 2.89 \text{ m/s}$$

PUNTO 2, RISOLVO CON LE FORZE E ACCELERAZIONE
Tratto BC, piano inclinato privo di attrito



Dalla seconda legge di Newton abbiamo

$$M a_{BC} = N_{\perp} - M g$$

$N_{\perp} \rightarrow$ normale al piano

$mg \rightarrow$ verticale

$a_{BC} \rightarrow$ parallelo al piano



Osservando il triangolo (rettangolo) costituito dai vettori si ottiene

$$N_{\perp} = M g \cos \theta$$

$$M a_{BC} = M g \sin \theta$$

$$a_{BC} = g \sin \theta = 4.91 \text{ m/s}^2$$

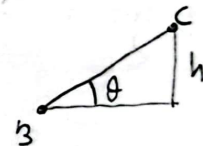
Lungo BC il moto è uniformemente accelerato con accel. a_{BC}

$$V(t) = V_B - a_{BC} t$$

$$s(t) = V_B t - \frac{1}{2} a_{BC} t^2$$

Il piano è lungo

$$l_{BC} = \frac{h}{\sin \theta}$$



Per percorrere il piano il punto impiega un tempo pari t_{BC} tale che

$$l_{BC} = V_B t_{BC} - \frac{1}{2} a_{BC} t_{BC}^2$$

al tempo t_{BC} la velocità è V_c

$$V_c = V_B - a_{BC} t_{BC}$$

ricorriamo a l_{BC} dalle seconde

$$l_{BC} = \frac{v_B - v_C}{a_{BC}}$$

Sostituiamo nelle prime

$$l_{BC} = \frac{v_B (v_B - v_C)}{a_{BC}} - \frac{1}{2} a_{BC} \frac{(v_B - v_C)^2}{a_{BC}^2}$$

$$= \frac{2v_B^2 - 2v_B v_C - v_B^2 + 2v_B v_C - v_C^2}{2a_{BC}}$$

$$l_{BC} = \frac{v_B^2 - v_C^2}{2a_{BC}}$$

A questo punto, conoscendo l_{BC} , v_C e a_{BC} , posso calcolare v_B

$$v_B^2 = v_C^2 + 2a_{BC} l_{BC}$$

$$= v_C^2 + 2g \sin \theta \frac{h}{\sin \theta} =$$

$$= v_C^2 + 2gh$$

$$\rightarrow v_B = \sqrt{v_C^2 + 2gh} = 5.29 \text{ m/s}$$

- PUNTO 2 - RISOLVO con lavoro e EN. CINETICA (VERIFICA)

Posizione B

$$E_{KB} = \frac{1}{2} M v_B^2$$

$$E_{PB} = 0$$

Posizione C

$$E_{KC} = \frac{1}{2} M v_C^2$$

$$E_{PC} = Mgh$$

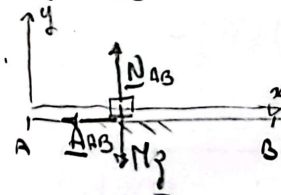
Lungo il tratto BC agiscono solo forze conservative, l'energia meccanica si conserva

$$\frac{1}{2} M v_B^2 = \frac{1}{2} M v_C^2 + Mgh$$

$$\rightarrow v_B^2 = v_C^2 + 2gh$$

$$\rightarrow v_B = \sqrt{v_C^2 + 2gh}$$

- PUNTO 3 -



$$M_{QAB} = M_g + N_{AB} A_{AB}$$

Componente in direzione x

$$M_{QAB} = -A$$

Componente in direzione y

$$0 = -M_g + N \rightarrow N = M_g$$

Attrito dinamico $A = \mu_d N = \mu_d M_g$

$$\rightarrow M a_{AB} = -\mu_0 M g$$

$$\boxed{a_{AB} = -\mu_0 g = 1,96 \text{ m/s}^2}$$

- PUNTO 4 -

Calcoliamo v_A

$\rightarrow$ con il lavoro e l'energia cinetica

in A $E_{KA} = \frac{1}{2} M v_A^2$

$$E_{PA} = 0$$

in B $E_{KB} = \frac{1}{2} M v_B^2$

$$E_{PB} = 0$$

Lavoro perso per attrito nel tratto AB

$$W_{0AB} = \int_0^L -A dz = -\mu_0 M g L$$

Per il teorema dell'energia cinetica
risulta

$$\frac{1}{2} M v_B^2 - \frac{1}{2} M v_A^2 = -\mu_0 M g L$$

Da cui otteniamo

$$\boxed{v_A = \sqrt{v_B^2 + 2\mu_0 g L} = 5,98 \text{ m/s}}$$

Il punto materiale è inizialmente in quiete e viene messo in movimento applicando una forza con impulso $\underline{J}$ per il teorema dell'impulso abbiamo

$$\underline{J} = \Delta \underline{p}$$

$$= \underline{p}_A - \underline{p}_0 = M \underline{v}_A - M \underline{v}_0 = M v_A$$

In modulo

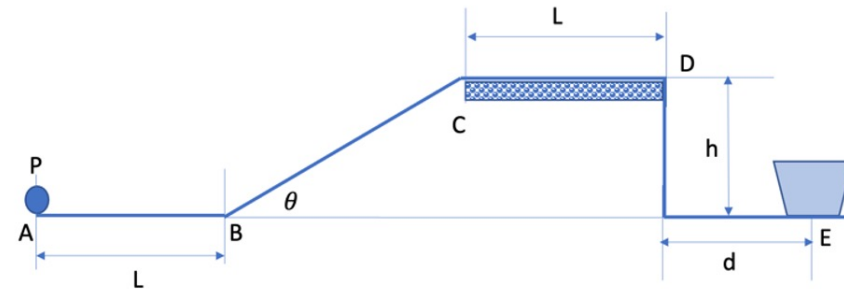
$$\boxed{J = M v_A = 8,97 \text{ Ns}}$$

Esercizio #5 (dalla prima prova in itinere AA 2022/23)

Un punto materiale P di massa m_p percorre una guida costituita da vari tratti come mostrato nella figura: un tratto AB orizzontale liscio (privo di attrito), un tratto BC inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo θ in salita, un tratto orizzontale CD con attrito (caratterizzato da coefficiente di attrito dinamico μ_d), un tratto DE in caduta libera con altezza h (moto parabolico). Il modulo della velocità del punto materiale quando esso raggiunge la posizione D è v_A , la direzione della velocità in D è orizzontale. Determinare:

- L'accelerazione del punto materiale nei tratti AB , BC , CD e DE .
- La distanza d del punto di atterraggio E dal salto (vedi figura).
- Il lavoro dissipato dalla forza di attrito nel tratto CD e la velocità nel punto C .
- La velocità di P alla partenza, nella posizione A .

[Valori numerici: $m_p = 1.5 \text{ kg}$, $L = 2 \text{ m}$, $h = 1 \text{ m}$, $\theta = 15^\circ$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $\mu_d = 0.15$, $v_A = 2 \text{ m/s}$]



Soluzione

Punto n.1

Nel tratto AB

$$a_{AB} = 0$$

Nel tratto BC

$a_{BC} = g \sin \theta$, direzione parallela al piano inclinato, verso discendente

Nel tratto CD

$a_{CD} = \mu_d g$, direzione orizzontale, verso opposto al moto del punto materiale

Nel tratto DE

$a_{DE} = g$, direzione verticale discendente

Punto n. 2

Analizziamo il moto del punto materiale nel tratto DE. Moto in caduta libera (moto parabolico) con velocità iniziale v_D , orizzontale.

Sistema di riferimento: origine in D, asse x orizzontale in direzione del moto, asse y verticale ascendente

Componenti dell'accelerazione

$$\begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= -g \end{aligned}$$

Punto n. 2

Analizziamo il moto del punto materiale nel tratto DE. Moto in caduta libera (moto parabolico) con velocità iniziale v_D , orizzontale.

Sistema di riferimento: origine in D, asse x orizzontale in direzione del moto, asse y verticale ascendente

Componenti dell'accelerazione

$$\begin{aligned}a_x &= 0 \\a_y &= -g\end{aligned}$$

Componenti della velocità

$$\begin{aligned}v_x &= v_D \\v_y &= -gt\end{aligned}$$

Posizione del punto materiale

$$\begin{aligned}x(t) &= v_D t \\y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

Il punto materiale atterra quando

$$y(t) = -h$$

Risolvo per calcolare il tempo di atterraggio t_a

$$-h = -\frac{1}{2}gt_a^2$$

$$t_a = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

La distanza percorsa in orizzontale nel tempo t_a vale quindi

$$d = v_D \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Punto n. 3

Sistema di riferimento: origine in C, asse x orizzontale in direzione del moto, asse y verticale

La forza di attrito ha componente lungo x pari ad $A = -\mu_d m_p g$

Il lavoro fatto dalla forza di attrito nel tratto CD è pari a

$$W_{CD} = \int_0^L -\mu_d m_p g dx = -\mu_d m_p g L$$

Punto n. 4

Nel tratto CD la variazione di energia cinetica vale

$$\begin{aligned}\Delta E_k &= \frac{1}{2} m_p v_D^2 - \frac{1}{2} m_p v_C^2 \\ W_{CD} &= \frac{1}{2} m_p v_D^2 - \frac{1}{2} m_p v_C^2 \\ -\mu_d m_p g L &= \frac{1}{2} m_p v_D^2 - \frac{1}{2} m_p v_C^2 \\ v_C^2 &= v_D^2 + 2\mu_d g L\end{aligned}$$

$$v_C = \sqrt{v_D^2 + 2\mu_d g L}$$

Nel tratto BC la velocità varia (nel punto 1 abbiamo visto che l'accelerazione è pari a $a_{BC} = g \sin \theta$)

Risolvero analizzando la conservazione dell'energia meccanica nel tratto BC, dato che non sono presenti forze non conservative

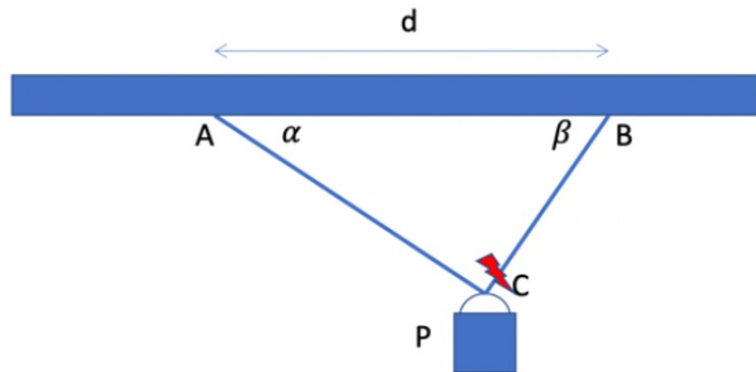
$$\begin{aligned}\frac{1}{2} m_p v_B^2 &= \frac{1}{2} m_p v_C^2 + m_p g h \\ v_B^2 &= v_C^2 + 2gh \\ v_B &= \sqrt{v_C^2 + 2gh}\end{aligned}$$

Nel tratto AB la velocità è costante

$$v_A = v_B = \sqrt{v_D^2 + 2\mu_d g L + 2gh}$$

Esercizio #6 (dalla prima prova in itinere AA 2021/22)

Esercizio 1

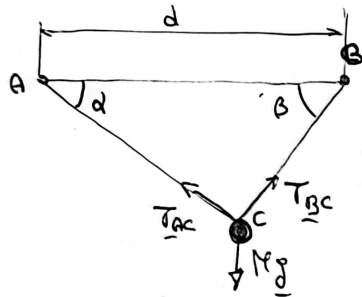


Un corpo assimilabile a un punto materiale P di massa M è fissato al soffitto tramite due funi ideali $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ come riportato in figura. Sono noti la distanza d tra i punti A e B e gli angoli α e β che le funi formano con la superficie del soffitto. A partire dalla configurazione di equilibrio riportata nella figura, la fune $\overline{BC}$ viene tagliata in prossimità del punto C e il corpo, rimasto fissato solo al punto A , inizia ad oscillare. Determinare:

- Le tensioni delle due funi nella configurazione di equilibrio iniziale
- L'accelerazione di P immediatamente dopo al taglio della fune $\overline{BC}$
- La velocità di P quando la fune $\overline{AC}$ assume configurazione verticale
- La tensione della fune $\overline{AC}$ in quest'ultima configurazione.

[Valori numerici $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$, $d = 1 m$, $M = 3 kg$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$]

ESERCIZIO #6



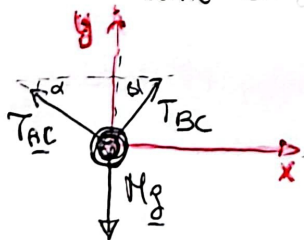
① Analisi statica del sistema. In condizioni statiche la risultante delle forze agenti sul primo materiale è nulla

$$Mg + T_{AC} + T_{BC} = 0$$

$Mg \rightarrow$ forze peso

$T_{AC} \rightarrow$ tensione fune AC, diretta come AC stesso

$T_{BC} \rightarrow$ tensione fune BC, diretta come BC



Scomponiamo i vettori nelle direzioni x e y indicate nello schema precedente

$$x \rightarrow T_{BC} \cos \beta - T_{AC} \cos \alpha = 0$$

$$y \rightarrow T_{BC} \sin \beta + T_{AC} \sin \alpha - Mg = 0$$

Ricavo T_{BC} dalla prima e sostituisco nella seconda

$$T_{BC} = T_{AC} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

$$T_{AC} \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} + T_{AC} \sin \alpha - Mg = 0$$

Posso ricavare T_{AC}

$$T_{AC} \left(\frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} + \sin \alpha \right) = Mg$$

$$T_{AC} = \frac{Mg}{\frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} + \sin \alpha} =$$

$$= \frac{Mg \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta} =$$

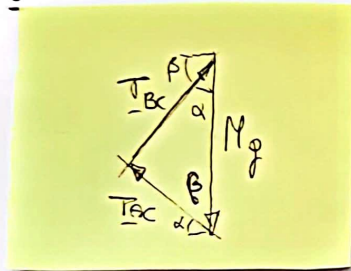
$$= \frac{Mg \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{Mg \cos \beta}{\sin(\frac{\pi}{2})} \quad (\text{dato che } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ rad})$$

Posso calcolare quindi T_{BC}

$$T_{BC} = T_{AC} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = Mg \cos \beta \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = Mg \cos \alpha$$

Verifichiamo il risultato ottenuto tramite una costruzione grafica

$$Mg + T_{AC} + T_{BC} = 0$$



I vettori T_{AC} , T_{BC} e Mg costituiscono un triangolo rettangolo di cui Mg è ipotenusa. Osservando la costruzione grafica si verifica facilmente che

$$T_{AC} = Mg \cos \beta$$

$$T_{BC} = Mg \sin \beta = Mg \cos \alpha$$

② Togliendo la fune BC, T_{BC} si annulla, il sistema non è più in equilibrio

$$Ma = T_{AC} + Mg$$

Il moto del punto materiale è quello di un pendolo semplice di lunghezza

$$L = d \cos \alpha$$

L'accelerazione si scompone in componente normale e tangenziale

$$\underline{a} = \underline{a}_n + \underline{a}_t$$

$$Ma_n = T_{AC} - Mg \cos \beta$$

$$\text{ma me } a_n = \frac{v^2}{L} = 0$$

nell'istante iniziale, dato che quando taglio il filo $v = 0$

$$T_{AC} = Mg \cos \beta \quad (\text{è lo stesso risultato dell'analisi statica})$$

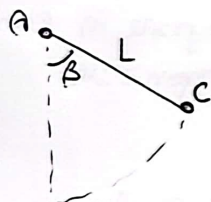
in direzione tangenziale

$$M a_t = -Mg \sin \beta$$

$$\rightarrow a_t = -g \sin \beta$$

③ In un pendolo semplice l'energia meccanica si conserva. Analizziamo due configurazioni:

1. config. iniziale 2. config. verticale



$$E_{k1} = 0$$

$$E_{p1} = MgL(1 - \cos \beta)$$



$$E_{k2} = \frac{1}{2} M v_2^2$$

$$E_{p2} = 0$$

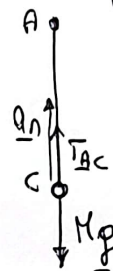
Dato che $E_{m1} = E_{m2}$

$$MgL(1 - \cos \beta) = \frac{1}{2} M v_2^2$$

Da cui calcoliamo la velocità massima

$$v_2 = \sqrt{2gL(1 - \cos \beta)}$$

④ Nella configurazione verticale



$$M a_n = T_{Ac} - Mg$$

$$T_{Ac} = M a_n + Mg =$$

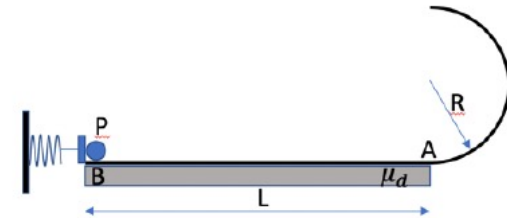
$$= M \frac{v_2^2}{L} + Mg =$$

$$= M \frac{2gL(1 - \cos \beta)}{L} + Mg =$$

$$= 3Mg - 2Mg \cos \beta$$

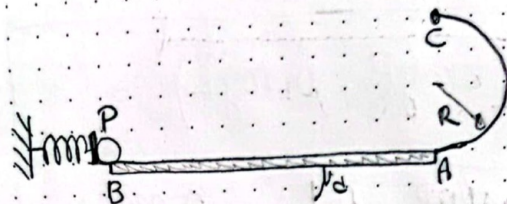
Esercizio #7

Un punto materiale P di massa m viene lanciato tramite una molla con costante elastica k lungo una guida che ha un tratto iniziale rettilineo orizzontale di lunghezza L , seguito da un tratto semicircolare di raggio R su un piano verticale come indicato in figura. Il tratto orizzontale è scabro, con coefficiente di attrito dinamico μ_d , nel tratto circolare e nel tratto in cui la molla viene compressa l'attrito è trascurabile.



- Calcolare il valore minimo della compressione della molla x_{m1} affinché il punto materiale riesca a raggiungere la sommità della guida, supponendo che la guida sia in grado di esercitare una reazione normale con entrambi i versi (vincolo bilaterale).
- Calcolare il valore minimo della compressione della molla x_{m2} affinché il punto materiale riesca a raggiungere la sommità della guida, supponendo che la guida sia in grado di esercitare una reazione normale solo in direzione uscente - centripeta (vincolo unilaterale).
- Calcolare la distanza da A del punto di atterraggio di P quando viene lanciato con una compressione della molla x_{m2} .
- Calcolare il valore della compressione della molla affinché il punto P dopo il lancio atterri in corrispondenza del punto B .
- All'atterraggio, l'urto del punto contro il piano è perfettamente anelastico e avviene in un tempo Δt . Calcolare il valore medio della forza che si genera tra il punto P e il piano durante l'urto e l'energia cinetica dissipata.

[Valori numerici: $m = 0.05 \text{ kg}$, $L = 1 \text{ m}$, $\Delta t = 0.01 \text{ s}$, $R = 20 \text{ cm}$, $k = 1000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $\mu_d = 0.1$, $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$]



• Per poter raggiungere il punto C, l'energia potenziale della molla deve compensare il lavoro dissipato per attrito nel tratto orizzontale e l'energia potenziale della forza peso.

→ Configurazione iniziale

$$E_p = \frac{1}{2} k x_0^2$$

$$E_k = 0$$

→ Configurazione finale

$$E_p = m g \cdot 2R$$

$$E_k = 0 \quad (\text{sto cercando il valore limite})$$

→ Lavoro dissipato per attrito

$$L_a = - \mu_0 m g L$$

bilancio energie meccanica

$$\frac{1}{2} k x_1^2 = 2mgR + \mu_0 mgL$$

①

$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{k} (2mgR + \mu_0 mgL)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{k} mg (2R + \mu_0 L)} = 0.0221 \text{ m}$$

Se il vincolo della guida è unilaterale, le reazioni vincolari che agiscono, lungo il tratto circolare, direzione centripeta, in altri termini il vincolo non può impedire che il punto si allontani. Dobbiamo quindi valutare le reazioni vincolari lungo la guida e assicurarci che nel punto C sia diretta verso il centro della circonferenza.

In un punto generico della guida, identificato dall'angolo θ indicato nello schema, applicando la seconda legge

di Newton e considerando la componente centripeta delle forze e delle accelerazioni, risulta:



$$M a_n = R - mg \cos \theta$$

a_n è la componente normale dell'accelerazione, che vorremmo essere pari a

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$m \frac{v^2}{R} = R - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{R} + mg \cos \theta$
Affinché il punto rimanga a contatto con la guida deve risultare $R > 0$ quindi

$$m \frac{v^2}{R} + mg \cos \theta \geq 0$$

in particolare, nel punto C risulta $\theta = \pi$ e quindi $\cos(\pi) = -1$

$$m \frac{v^2}{R} - mg \geq 0$$

$$v^2 \geq gR \quad v \geq \sqrt{gR}$$

Il punto P deve essere nel punto C
con una velocità maggiore del valore limite

$$v_c = \sqrt{gR}$$

Quindi la sua energia cinetica deve essere almeno pari a

$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{1}{2} m g R$$

Riprendiamo quindi il bilancio dell'energia meccanica in questa nuova configurazione

Configurazione iniziale

$$E_p = \frac{1}{2} k x_z^2$$

$$E_k = 0$$

Configurazione finale

$$E_p = 2mgR$$

$$E_k = \frac{1}{2} m g R$$

$$E_m = \frac{5}{2} m g R$$

Lavoro dissipato per attrito (lavoro delle forze non conservative)

$$L_a = -\mu_b m g L$$

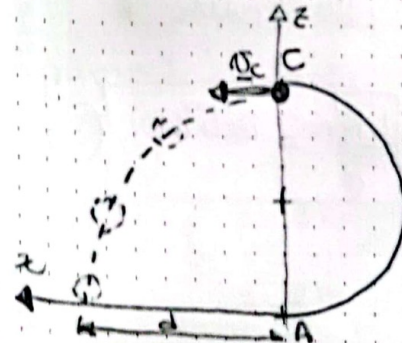
Dal bilancio dell'energia meccanica risulta

$$\frac{1}{2} k x_z^2 = \frac{5}{2} m g R + \mu_b m g L$$

Da cui ricaviamo

$$x_z = \sqrt{\frac{m g (5R + 2\mu_b L)}{k}} = 0.0243 \text{ m} \quad (2)$$

Una volta arrivato nel punto C, P segue un moto di caduta libera con velocità iniziale v_c diretta orizzontalmente



per praticità fisso in sistema di riferimento con origine in A e assi x e z orientati come nella figura

Velocità

$$v_x = v_c$$

$$v_z = -gt$$

Moto uniformemente
accelerato con accelerazione g

Posizione

$$x(t) = v_c t$$

$$z(t) = 2R - \frac{1}{2}gt^2$$

Il punto ottiene dopo un tempo t_c
da quando è partito da C, tale che

$$0 = 2R - \frac{1}{2}gt_c^2$$

$$gt_c^2 = 4R$$

$$t_c = \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

e la distanza da A allo caduto è
quindi

$$d = v_c t_c = v_c \sqrt{\frac{4R}{g}} = 0.6 \text{ m} \quad (3)$$

Riprendendo il risultato del punto
precedente, la distanza tra il punto
di caduta ed A per un valore generico
della velocità di partenza v_c è tale

$$d(v) = v \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

se voglio che il punto ottenga in B
devo imporre

$$L = v_B \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

Quindi il punto deve lasciare la guida
con una velocità pari a

$$v_B = \sqrt{\frac{g}{4R}} L = 3.50 \text{ m/s}$$

Riprendendo il bilancio dell'energia meccanica
in questa configurazione

$$\frac{1}{2} k x_3^2 = 2mgR + \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$= 2mgR + \frac{1}{2} \frac{mg}{4R} L^2$$

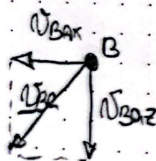
Da cui possiamo calcolare la compressione della molla

$$\textcircled{4} \quad x_3 = \sqrt{\frac{2mg(2R + \frac{L^2}{8R})}{k}} = 0.0317 \text{ m}$$

Calcoliamo la velocità del punto all'atterraggio in B, $\underline{v}_{Ba}$

$$v_{Bax} = v_B = 3.50 \text{ m/s}$$

$$v_{Baz} = -gt_c = -2.80 \text{ m/s}$$



il tempo di caduta è lo stesso dato che la quota, e le componenti di vel. in direzione verticale e l'accelerazione sono le stesse

Le quantità di moto prima dell'urto valgono quindi

$$\underline{p}_{Ba} = m \underline{v}_{Ba} = p_{Bax} \underline{i} + p_{Baz} \underline{k}$$

$$p_{Bax} = m v_{Bax} = 3.50 \text{ Ns}$$

$$p_{Baz} = m v_{Baz} = -2.80 \text{ Ns}$$

L'urto è perfettamente anelastico quindi

$$p_{Bx} = 0$$

Quindi per il Teorema dell'impulso, l'impulso delle forze che agiscono sul punto materiale durante l'urto, vale

$$\underline{J} = \underline{p}_{Bx} - \underline{p}_{Ba}$$

Ricordando la definizione di impulso e di valore medio di una funzione, possiamo valutare il valore medio delle forze come

$$\underline{F} = \frac{1}{\Delta t} \underline{J}$$

Quindi risulta

$$F_x = -350 \text{ N}$$

$$F_z = 280 \text{ N}$$

Esercizio #8

Una ragazzina gioca in giardino con un pallone di massa m , legato con una fune di lunghezza L alla ringhiera del terrazzo. Facendo oscillare leggermente il pallone, la ragazzina osserva che questo compie n_{tot} oscillazioni complete in un tempo T_{tot} .

Riportato il pallone in quiete, la ragazzina lo calcia, imprimendogli un impulso J con direzione orizzontale, che porta il filo a ruotare di un angolo θ_0 rispetto alla direzione verticale.

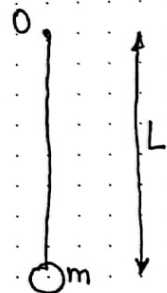
- Qual è la lunghezza L della fune?
- Quanto vale il modulo dell'impulso J del calcio dato al pallone?
- Determinare il valore massimo T_M e minimo T_m della tensione del filo durante l'oscillazione conseguente al calcio e riportare su un grafico l'andamento della tensione in funzione dell'angolo θ nell'intervallo $[0, \theta_0]$.
- Supponendo che la tensione massima del filo a cui è appeso il pallone sia T_{Max} , qual è il massimo impulso con cui la ragazzina può calciare il pallone senza rompere il filo e quale sarà l'altezza massima dal suolo raggiunta dal pallone in questo caso?

[Valori numerici: $m = 0.450 \text{ kg}$, $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $n_{tot} = 3$, $T_{tot} = 10 \text{ s}$, $\theta_0 = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$, $T_{Max} = 15 \text{ N}$]

COMPITO DI FISICA 1 DEL 26 GENNAIO 22

ESERCIZIO n° 2

SVOLGIMENTO
COMMENTATO DELLA
PARTE DI MECCANICA



① $N_{TOT} = 3$ $T_{TOT} = 10s$
 → PERIODO DELL'OSCUZIONE
 $T = T_{TOT} / N_{TOT}$

Ricordando che in un pendolo semplice la relazione tra lunghezza L e periodo T è data da

$$T = 2\pi \sqrt{L/g}$$

possiamo calcolare L come

② → $L = (T/2\pi)^2 \cdot g = 2.76 \text{ m}$

② Sul ~~pendolo~~ ~~pendolo~~ massa m agiscono solo forze conservative, possiamo calcolare l'energia meccanica, che rimane costante durante il moto.

→ subito dopo il calcio

$$E_{min} = E_{kin} + E_{pin}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v_{in}^2$$

↑ velocità del pallone dopo il calcio, iniziale

$$E_{pin} = 0$$

(prendiamo come riferimento per il calcolo dell'energia potenziale la configurazione di equilibrio)

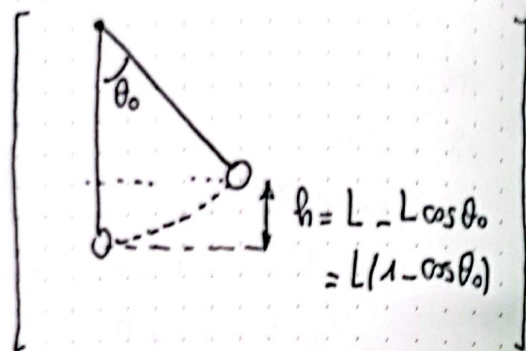
$$\rightarrow E_{min} = \frac{1}{2} m v_{in}^2$$

→ Nel punto in cui il pallone raggiunge l'altezza massima

$$E_{mpin} = E_{kfin} + E_{pfin}$$

$$E_{kfin} = 0 \quad (\text{nel punto in cui l'altezza è massima la velocità è nulla})$$

$$E_{pfin} = mgl(1 - \cos\theta_0)$$



$$E_{mfin} = mgl(1 - \cos\theta_0)$$

L'energia meccanica si conserva durante l'oscillazione

$$E_{min} = E_{mfin}$$

$$\frac{1}{2} m v_{in}^2 = mgl(1 - \cos\theta_0)$$

$$v_{in} = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta_0)}$$

Durante il colpo, la quantità di moto varia in modulo delle quantità

$$\Delta P = |P_{fin} - P_{in}| \quad \text{(perché il pallone è in quiete)}$$

$$= P_{fin} = m v_{in}$$

$$= m \sqrt{2gL(1 - \cos\theta_0)}$$

Per il Teorema dell'impulso risulta

$$\underline{J} = \Delta \underline{P}$$

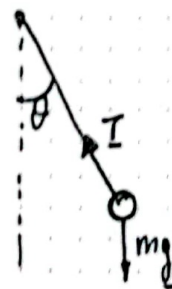
e in modulo

$$J = \Delta P$$

quindi il modulo dell'impulso applicato durante il colpo è

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad J &= m \sqrt{2gL(1 - \cos\theta_0)} \\ &= 1.79 \text{ kg m/s} \\ &= 1.79 \text{ N}\cdot\text{s} \end{aligned}$$

Consideriamo il pendolo in una generica configurazione, identificata dall'angolo θ e analizziamo le forze applicate sulla massa



$T \rightarrow$ tensione del filo

$mg \rightarrow$ forza peso

Applichiamo la seconda legge di Newton, considerando le componenti dei vettori forze e accelerazioni in direzione radiale

$$T - mg \cos \theta = m a_n$$

↑
componente radiale
dell'accelerazione

$$\rightarrow T = m a_n + mg \cos \theta$$

$$= m (a_n + g \cos \theta)$$

Nel moto circolare risulta anche

$$a_n = \frac{v^2}{L}$$

Considerando inoltre la conservazione dell'energia meccanica in una generica configurazione, risulta

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g L (1 - \cos \theta) = m g L (1 - \cos \theta_0)$$

$$\rightarrow v^2 = 2 g L (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

Sostituendo queste relazioni nell'espressione di T

$$T = m \left(\frac{v^2}{L} + g \cos \theta \right) =$$

$$= m \left(\frac{2 g L (\cos \theta - \cos \theta_0)}{L} + g \cos \theta \right)$$

$$= m (2 g \cos \theta - 2 g \cos \theta_0) =$$

$$= m g (2 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$$

Il valore massimo della Tensione si ha quando $\theta = 0$, il minimo quando $\theta = \theta_0$

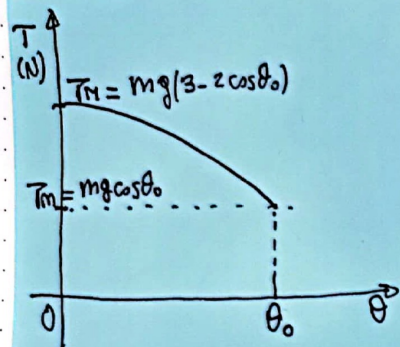
$$T_{\max} = m g (2 - 2 \cos \theta_0)$$

$$= 7.00 \text{ N}$$

$$T_{\min} = m g (2 \cos \theta_0 - 2 \cos \theta_0)$$

$$= m g \cos \theta_0 = 3.12 \text{ N}$$

Il grafico della Tensione T al variare di θ nell'intervallo $[0, \theta_0]$ è quindi:



- ④ Abbiamo visto nel punto precedente che la tensione massima è raggiunta quando $\theta = 0$. Se il valore massimo della Tensione è T_{max} (risultante del fib), risulta

$$T_{max} = m \left(\frac{v_{max}^2}{L} + g \right)$$

$$\frac{T_{max}}{m} = \frac{v_{max}^2}{L} + g$$

$$v_{max}^2 = \left(\frac{T_{max}}{m} - g \right) L$$

→ $v_{max} = \sqrt{\left(\frac{T_{max}}{m} - g \right) L}$
 Il massimo impulso con cui posso colpire il pallone è:

$$J_{max} = m \sqrt{\left(\frac{T_{max}}{m} - g \right) L}$$

$$= 3.63 \text{ N}\cdot\text{s}$$

Per la conservazione dell'energia meccanica risulta

$$\frac{1}{2} m v_{max}^2 = m g h_{max}$$

$$h_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_{max}^2}{g} = 3.31 \text{ m}$$

Esercizio #9

Esercizio 9,

Un corpo approssimabile a punto materiale di massa m è appeso tramite un filo ideale inestensibile di lunghezza l ad un supporto fisso O ed è lasciato libero di oscillare in un piano verticale. Il filo si trova inizialmente in posizione orizzontale, quando il corpo è lasciato libero con velocità iniziale nulla. Determinare:

1. La velocità massima del punto materiale durante l'oscillazione.
2. La tensione massima del filo.

Il filo viene sostituito con uno della stessa lunghezza ma con minore resistenza e la prova viene ripetuta. Questa volta, quando la tensione nel filo raggiunge il valore T_m il filo si spezza e il punto cade su una superficie orizzontale fissa posta ad una distanza pari a $2l$ rispetto ad O . L'urto contro la superficie orizzontale è perfettamente anelastico.

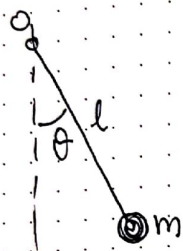
Determinare:

3. L'angolo θ_m tra il filo e la direzione verticale in corrispondenza della rottura del filo.
4. L'impulso della reazione vincolare tra la superficie e la massa durante l'urto.

[Valori numerici: $m = 50 \text{ kg}$, $l = 2.5 \text{ m}$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $T_m = 1000 \text{ N}$]

SVOLGIMENTO DEL COMPITO SCRITTO DEL
21/09/2021 - MECCANICA

ESERCIZIO n° 1



Punto 1 velocità massima del punto materiale durante l'oscillazione

Sul sistema agiscono forze conservative (forza peso) e forze che non compiono lavoro (tensione del filo). Possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica.

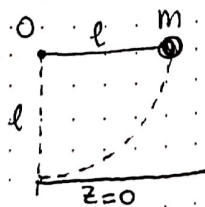
• Configurazione iniziale

$$E_p = mgl$$

$$E_k = 0$$

il filo è in conf. orizzontale

↑
energia cinetica iniziale nulla



$$E_{min} = 0$$

• In una generica configurazione, in cui il filo è inclinato di un angolo θ rispetto alla verticale.

$$E_p = mgl(1 - \cos\theta)$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_{tot} = mgl(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2$$

Per la conservazione dell'energia meccanica risulta quindi:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos\theta) = mgl$$

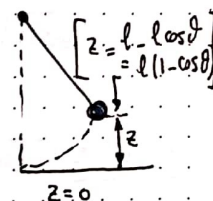
da cui posso determinare $v(\theta)$:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl - mgl(1 - \cos\theta)$$

$$v^2 = 2gl \cos\theta$$

$$v(\theta) = \sqrt{2gl \cos\theta}$$

Per trovare il massimo dovrei studiare questa funzione al variare dell'angolo θ .



Osservo però che $\cos \theta$ è massimo per $\theta = 0$, valore per cui risulta $\cos \theta = 1$

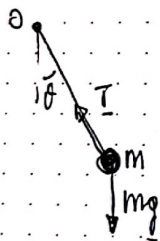
quindi posso dire che

$$v_{\max} = v(\theta=0) = \sqrt{2gl \cos(0)} = \sqrt{2gl}$$

Sostituendo i valori numerici ottengo

$$v_{\max} = 7.00 \text{ m/s}$$

Punto 2 - Tensione massima del filo



Applichiamo le seconde leggi di Newton, considerando le componenti dei vettori forze e accelerazione in direzione radiale

$$m a_n = T - mg \cos \theta$$

↑
componente radiale (centripeta)

dell'accelerazione

$$a_n = \frac{v^2}{l}$$

$$m \frac{v^2}{l} = T - mg \cos \theta$$

dal punto precedente ricordo che

$$v^2 = 2gl \cos \theta$$

sostituisco

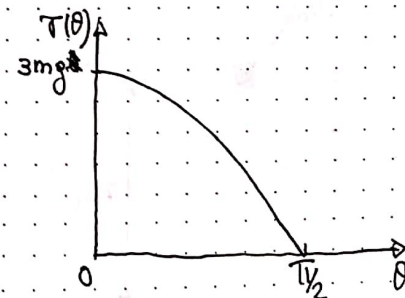
$$2mg \cos \theta = T - mg \cos \theta$$

Da cui ricavo che

$$T = 3mg \cos \theta$$

Analizziamo come varia T al variare di θ :

per $\theta = 0$ risulta $\cos \theta = 1$ e T assume valore massimo, mentre per $\theta = \frac{\pi}{2}$ abbiamo $\cos \theta = 0$ quindi $T = 0$ (valore minimo)



Quindi

$$T_{\max} = T(0) = 3mg = 1471 \text{ N}$$

Punto ③ Determiniamo il valore θ_m per il quale la tensione assume il valore massimo T_m e la fune si rompe.

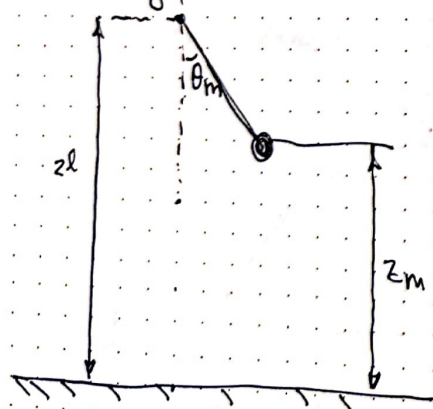
$$T_m = 3mg \cos \theta_m$$

$$\rightarrow \theta_m = \arccos\left(\frac{T_m}{3mg}\right) = 0.823 \text{ rad} = 47.18^\circ$$

In questa configurazione la velocità delle masse è

$$v_m = \sqrt{2gl \cos \theta} = 5.77 \text{ m/s}$$

Punto ④ Analizziamo il moto di caduta e l'urto contro la superficie.



Nell'istante in cui il filo si rompe il punto materiale si trova a una distanza z_m dalla superficie, pari a

$$z_m = 2l - l \cos \theta_m = 2l - l \left(\frac{T_m}{3mg} \right) = 3.30 \text{ m}$$

la velocità è pari a

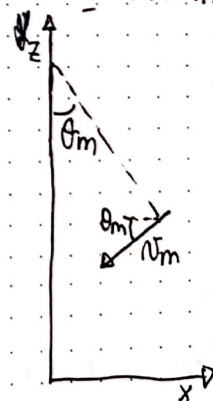
$$v_m = \sqrt{2gl \cos \theta_m} =$$

$$= \sqrt{2gl \frac{T_m}{3mg}} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{T_m l}{m}} = 5.77 \text{ m/s}$$

e le componenti

$$v_{mx} = -v_m \cos \theta_m = -3.92 \text{ m/s}$$

$$v_{my} = -v_m \sin \theta_m = -4.23 \text{ m/s}$$



Dopo la rottura del filo il punto materiale ha un moto di caduta libera con velocità iniziale $\underline{v}_m$ di componenti v_{mx} orizzontale e v_{mz} verticale.

Analizziamo il moto di caduta

$$v_x = v_{mx} = -3.92 \text{ m/s}$$

~~velocità~~

$$v_z = v_{mz} - gt$$

posizioni

$$\begin{cases} x(t) = x_m + v_{mx}t \\ z(t) = z_m - v_{mz}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

~~non lo so~~ non lo abbiamo calcolato perché non ci serve...

calcoliamo il tempo di caduta t_c

$$0 = z_m - v_{mz}t_c - \frac{1}{2}gt_c^2$$

$$t_c = \frac{-v_{mz} + \sqrt{v_{mz}^2 + 2gz_m}}{g} = 0.495 \text{ s}$$

risolvo l'equazione di secondo grado

La velocità al momento dell'impatto ha componenti:

$$v_{cx} = v_x = -3.92 \text{ m/s}$$

$$v_{cz} = v_{mz} - gt_c = -17.6 \text{ m/s}$$

La quantità di moto del sistema prima dell'impatto è quindi $\underline{P}_c$, con componenti cartesiane

$$P_x = m v_{cx}$$

$$P_z = m v_{cz}$$

L'urto è anelastico, il punto materiale rimane inascelato alla superficie, quindi la sua quantità di moto sarà

$$P_{fin} = 0$$

Per il Teorema dell'impulso, avremo

$$\underline{J} = \Delta \underline{P} = \underline{P}_{fin} - \underline{P}_c$$

quindi $J_x = -m v_{cx} = 196 \text{ N}\cdot\text{s}$

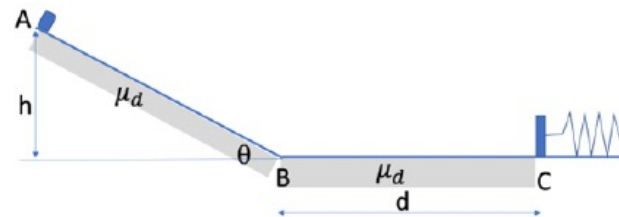
$$J_z = -m v_{cz} = 878 \text{ N}\cdot\text{s}$$

Esercizio #10

Un punto materiale viene lasciato scivolare, con velocità iniziale nulla, a partire da un'altezza h (posizione A) lungo un piano inclinato scabro con angolo di inclinazione θ e coefficiente di attrito dinamico μ_d . Alla fine del piano inclinato (posizione B), il punto percorre un tratto orizzontale scabro di lunghezza d , con lo stesso coefficiente di attrito dinamico μ_d . Giunto alla fine di tale tratto (posizione C) il punto entra a contatto con una molla di costante elastica k , che si comprime fino alla posizione D.

Trascurando l'attrito dinamico nel tratto in cui agisce la forza della molla, calcolare:

- 1) la velocità al termine del piano inclinato (posizione B);
- 2) l'accelerazione nel tratto AB;
- 3) la variazione dell'energia cinetica nel tratto BC;
- 4) il massimo valore della compressione della molla.

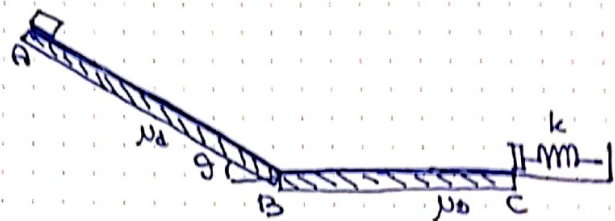


[Valori numerici: $m = 3 \text{ kg}$; $h = 1 \text{ m}$; $\theta = 45^\circ$; $\mu_d = 0.2$; $d = 1 \text{ m}$; $k = 2000 \text{ N/m}$; $g = 9.81 \text{ m/s}^2$].

SVOLGIMENTO DEL COMPITO DEL 20/07/2021

PARTE DI MECCANICA

ESERCIZIO n° 2



1) CALCOLIAMO LA VELOCITÀ AL TERMINE DEL PIANO INCLINATO (PUNTO B)

→ la variazione di energia meccanica lungo il tratto AB sarà pari al lavoro delle forze non conservative

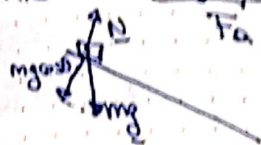
$$\underbrace{E_{MB} - E_{MA}}_{\text{VARIATIONE EN. MECCANICA}} = \underbrace{W_{AB}}_{\substack{\text{LAVORO F. NON CONSERV.} \\ \text{(ATTRITO)}}}$$

Analizziamo i vari termini

$$E_{MB} = \frac{1}{2} m v_B^2 \quad (\text{energia cinetica})$$

$$E_{MA} = mgh \quad (\text{energia potenziale nulla, il punto parte da fermo})$$

$$W_{AB} = - \frac{mg \cos \theta}{F_a} \mu_d \bar{AE}$$

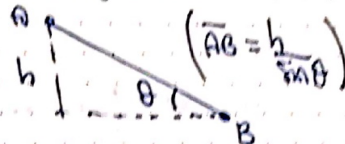


($F_a = N \mu_d$)

$$N = mg \cos \theta$$

~~spostamento~~

$$W_{AB} = - mg \cos \theta \mu_d \frac{h}{\sin \theta}$$



Riscriviamo l'equazione della variazione dell'energia meccanica

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - mgh = - mg \cos \theta \mu_d \frac{h}{\sin \theta}$$

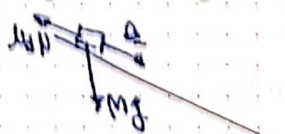
Semplifichiamo e calcoliamo v_B

$$v_B^2 = 2gh - 2g \mu_d \frac{\cos \theta}{\sin \theta} h$$

$$v_B = \sqrt{2gh \left(1 - \frac{\mu_d}{\tan \theta} \right)} = 3.96 \text{ m/s}$$

Nota sul punto 4
 Allo stesso risultato si sarebbe arrivati applicando la seconda legge di Newton

$$ma = mg \sin \theta - \mu_s mg \cos \theta$$



(Considera la componente lungo il piano inclinato)

$$a = g(\sin \theta - \mu_s \cos \theta)$$

Il punto scende lungo il piano con accelerazione $a = g(\sin \theta - \mu_s \cos \theta)$
 (moto uniformemente accelerato)

$$v = v(0) + at$$

↑
 componente della velocità lungo la direzione del piano inclinato)

$$s = v(0)t + \frac{at^2}{2}$$

↑
 distanza percorsa in funzione del tempo

Quanto tempo impiega il punto per percorrere il piano inclinato?

→ Sostituisci a 3 il valore di $AB = \frac{h}{\sin \theta}$ nell'espressione precedente

$$\frac{h}{\sin \theta} = \frac{a t_B^2}{2}$$

$$t_{AB} = \sqrt{\frac{2h}{a \sin \theta}}$$

la velocità del punto quando raggiunge la posizione B sarà quindi:

$$v_B = a t_B = a \sqrt{\frac{2h}{a \sin \theta}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2ah}{\sin \theta}} = \sqrt{\frac{2g(\sin \theta - \mu_s \cos \theta)h}{\sin \theta}} =$$

$$= \sqrt{2gh(1 - \mu_s / \tan \theta)}$$

↑
 Abbiamo trovato (ovviamente!) lo stesso risultato

② ACCELERAZIONE LUNGO IL TRATTO AB
 Appliciamo la seconda legge di Newton

$$m\vec{a} = \vec{R}$$

↑ Risultante delle forze applicate
 al punto materiale

$$\vec{R} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_a$$

↑
 forze peso

↑
 forze attrito, direzione
 parallele al piano,
 modulo μN

↑
 Componente normale delle
 reazioni vincolari del piano

Proiettiamo in direzione parallela ~~al~~ e perpendi-
 colare al piano

in direzione perpendicolare

$$-mg \cos \theta + N = 0$$

↑ il punto scorre
 sul piano quindi
 le componenti di acceler.
 in direzione perp. è nulla

$$\rightarrow N = mg \cos \theta$$

in direzione parallela al piano

$$ma = mg \sin \theta - F_a$$

Ricordiamo che

$$F_a = \mu N = \mu mg \cos \theta$$

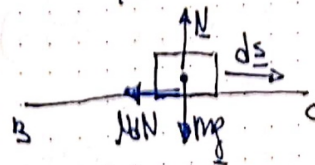
$$\rightarrow ma = mg \sin \theta - mg \cos \theta \mu$$

$$\rightarrow \boxed{a = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) = 5.55 \text{ m/s}^2}$$

③ VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA LUNGO
 IL TRATTO ~~AB~~ BC

Il tratto BC è orizzontale, la forza di
 attrito compie lavoro
 $\neq 0$

$$\Delta E_{kBC} = W_{BC}$$



$$W_{BC} = -\mu_d mgd$$

$$\rightarrow \Delta E_{kbc} = -\mu mgd = -5.89 \text{ J}$$

④ COMPRESSIONE DELLA MOLLA NEL TRATTO FINALE

Nel punto precedente abbiamo calcolato la variazione di energia cinetica nel tratto BC, l'energia cinetica nella posizione C sarà quindi

$$E_{kc} = E_{kb} + \Delta E_{kbc} = \\ = \frac{1}{2} m v_b^2 - \mu mgd$$

Nel tratto finale non è presente attrito quindi l'energia meccanica si conserva (spesso soltanto forze conservative o forze che non compiono lavoro)

$$E_{mc} = E_{mo}$$

↑ punto di massima compressione della molla

$$E_{mc} = E_{kc}$$

$$E_{mo} = \frac{1}{2} k x_0^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m v_c^2$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{m}{k}} v_c$$

~~non~~ abbiamo calcolato E_{kc} ma non v_c

$$x_0 = \sqrt{\frac{2 E_{kc}}{k}} = 0.133 \text{ m}$$

Esercizio #11

Una cassa di massa M scivola su una superficie orizzontale con velocità iniziale v_0 . Durante il moto attraversa un tratto scabro con coefficiente di attrito dinamico μ_d e lunghezza L , e successivamente impatta contro una molla ideale con costante elastica k , inizialmente nella posizione di riposo, comprimendola di una quantità x_0 . La superficie orizzontale in prossimità della molla è liscia, dopo l'impatto la massa rimane attaccata alla molla.

Determinare

- Il lavoro perso per attrito durante l'attraversamento della parte scabra della superficie.
- La lunghezza L del tratto scabro
- Il lavoro fatto dalla molla durante la prima compressione.
- La frequenza dell'oscillazione, la massima velocità e la massima accelerazione della massa durante l'oscillazione.

[Valori numerici: $M = 50 \text{ kg}$, $v_0 = 3.5 \text{ m/s}$, $\mu_d = 0.2$, $k = 20 \text{ kN/m}$, $x_0 = 15 \text{ cm}$]

SVOLGIMENTO DELLA PROVA SCRITTA DI
FISICA 1 DEL 6/9/2024

- MECCANICA -

ESERCIZIO n° 1

① LAVORO DELLA FORZA DI ATTRITO

- Energia meccanica iniziale

$$E_{\text{in}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{p}} = E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} M v_0^2 = 306.25 \text{ J}$$

- Energia meccanica finale (nel punto di massima compressione della molla)

$$E_{\text{fin}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{p}} = \frac{1}{2} k x_0^2 = 225 \text{ J}$$

LAVORO DELLE FORZE DI ATTRITO (NON CONSERVATIVE)

$$W_{\text{nc}} = E_{\text{fin}} - E_{\text{in}} = -81.25 \text{ J}$$

$$\rightarrow \boxed{W_{\text{nc}} = -81.25 \text{ J}}$$

② LUNGHEZZA DEL TRATTO CON ATTRITO

Dato che la superficie è orizzontale, risulta

$$W_{\text{nc}} = -\mu_d M g L$$

Da cui si ricave

$$\boxed{L = -\frac{W_{\text{nc}}}{\mu_d M g} = 0.828 \text{ m}}$$

③ LAVORO FATTO DALLA MOLLA DURANTE LA PRIMA COMPRESSIONE

La forza elastica è conservativa e risulta quindi

$$W_{\text{el}} = -\Delta E_{\text{p}} = -(E_{\text{pfin}} - E_{\text{pin}}) =$$

$$= -\frac{1}{2} k x_0^2 = -225 \text{ J}$$

$$\boxed{W_{\text{el}} = -225 \text{ J}}$$

④ Frequenza angolare, massima velocità e massima accelerazione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = 20 \text{ rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 3.18 \text{ Hz}$$

$$v_{\text{max}} = \omega x_0 = 3 \text{ m/s}$$

$$a_{\text{max}} = \omega^2 x_0 = 60 \text{ m/s}^2$$

Esercizio #12

Un'automobile di massa m che si muove su una strada orizzontale e rettilinea. Oltre alla spinta $\mathbf{F}$ del motore, la cui direzione è quella del moto, sull'automobile agisce una forza resistente $\mathbf{R}$ dovuta all'attrito con l'asfalto e alla resistenza dell'aria, la cui direzione è opposta a quella del moto e il cui modulo R dipende dalla velocità istantanea secondo la relazione $R = R_0 + kv^2$.

- a) determinare la potenza sviluppata dal motore nel caso in cui il veicolo si muova di moto uniforme con velocità v_0 .
- b) determinare la velocità finale raggiunta dal veicolo, la distanza percorsa e il valore finale del modulo della spinta del motore nel caso in cui il veicolo, partendo da fermo, si muova di moto uniformemente accelerato con accelerazione a per un intervallo di tempo t_a ;
- c) l'espressione della potenza sviluppata dal motore in funzione del tempo per il caso b);
- d) il lavoro compiuto dal motore durante tutta la fase di accelerazione.

[Valori numerici: $m = 500 \text{ kg}$, $R_0 = 150 \text{ N}$ e $k = 1.50 \text{ N s}^2/\text{m}^2$, $v_0 = 100 \text{ km/h}$, $a = 5.00 \text{ m/s}^2$, $t_a = 10.0 \text{ s}$]

SVOLGIMENTO DELLA PROVA SCRITTA DI
FISICA 1 DEL 31/12/2021 *MECCANICA*
ESERCIZIO n° 2



Approssimiamo l'auto come un punto materiale che si muove lungo una direzione x orizzontale. Applichiamo la seconda legge di Newton al veicolo, ipotizzando i vettori forza e accelerazione in direzione x .

$$ma = F - R \quad \begin{matrix} (F \text{ forza generata dal motore}) \\ (R \text{ resistenza aerodinamica}) \end{matrix}$$

a) Nella prima fase a velocità costante
 $a = 0$ (velocità costante $\rightarrow$ accelerazione nulla)

quindi

$$F = R \rightarrow F = R_0 + kv_0$$

La potenza erogata dal motore nella fase a velocità costante sarà

quindi

$$P = Fv_0 = (R_0 + kv_0)v_0 \\ = R_0v_0 + kv_0^2$$

b) Moto uniformemente accelerato
 $a = 5 \text{ m/s}^2$

$$v = \int_0^t a \, dt = at \quad \begin{matrix} \text{ricordiamo che il} \\ \text{veicolo parte da fermo} \\ \text{in questo caso!} \end{matrix}$$

$$v(t_0) = at_0 = 50 \text{ m/s}$$

$$x(t) = x(0) + v(t)t + \frac{1}{2}at^2 \\ = \frac{1}{2}at^2$$

$$x(t_0) = \frac{1}{2}at_0^2 = 250 \text{ m}$$

In questa fase le forze di trazione sviluppate dal motore sono

$$F = ma + R = ma + R_0 + kv(t)$$

$$F(t) = ma + R_0 + kat$$

Al tempo t_0 risulta quindi

$$F(t_0) = R_0 + ma + k a t_0 = 3400 \text{ N}$$

③ Nel moto uniformemente accelerato nei punti precedenti abbiamo visto che

$$F(t) = R_0 + ma + k a t$$

$$v(t) = at$$

La potenza vale in funzione del tempo secondo la legge seguente

$$\begin{aligned} P(t) &= F(t)v(t) = (R_0 + ma + k a t)at \\ &= (R_0 + ma)at + k a^2 t^2 \end{aligned}$$

④ Il lavoro compiuto dal motore nella fase di accelerazione

Ricordiamo che la potenza è data anche da

$$P = \frac{dW}{dt}$$

nel punto precedente abbiamo calcolato

la potenza, possiamo quindi calcolare il lavoro come

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_0^t P(t) dt = \\ &= \int_0^t [(R_0 + ma)at + k a^2 t^2] dt = \\ &= (R_0 + ma)a \frac{t^2}{2} + k \frac{a^2 t^3}{3} \end{aligned}$$

In particolare, al tempo t_0 risulta

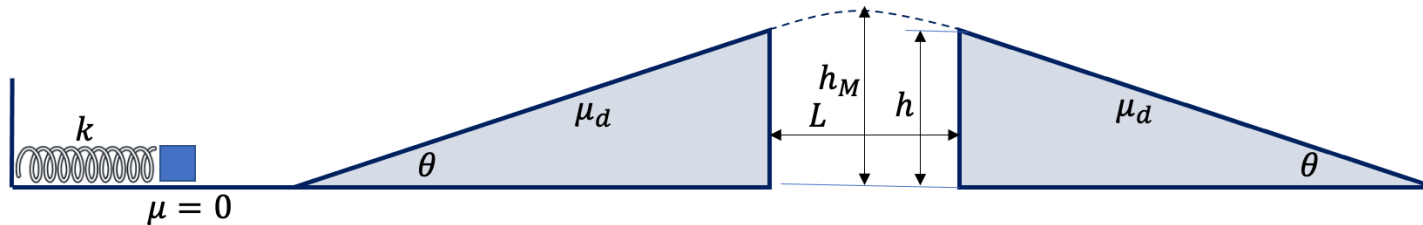
$$W(t_0) = (R_0 + ma)a \frac{t_0^2}{2} + k \frac{a^2 t_0^3}{3}$$

Esercizio #13

Due piani inclinati di altezza h e angolo d'inclinazione θ , sono disposti specularmente come schematizzato in figura ad una distanza L l'uno dall'altro. Un corpo puntiforme di massa M viene lanciato lungo la parte inclinata del cuneo di sinistra per mezzo di una molla ideale, disposta orizzontalmente, avente costante elastica k . In seguito al lancio, dopo aver raggiunto la sommità del piano inclinato di sinistra, il corpo prosegue di moto parabolico raggiungendo il punto più in alto del cuneo di destra tangenzialmente alla sua superficie e quindi scivola fino in fondo ad esso. Sapendo che le superfici dei piani inclinati presentano un coefficiente di attrito dinamico μ_d , mentre il tratto iniziale orizzontale a sinistra è liscio, determinare:

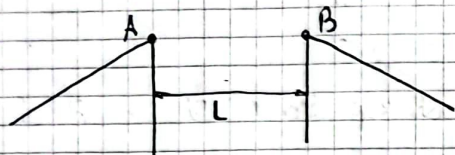
- la velocità con cui il punto materiale lascia il piano inclinato di sinistra;
- la massima altezza rispetto alla quota iniziale raggiunta dal corpo durante il suo moto;
- la deformazione della molla al momento del lancio del corpo;
- la velocità dello stesso quando raggiunge il punto più basso del piano inclinato di destra.

[Valori numerici: $h = 1 \text{ m}$, $\theta = 30^\circ$, $L = 1 \text{ m}$, $M = 1 \text{ kg}$, $k = 1.5 \cdot 10^3 \text{ N/m}$, $\mu_d = 0.1$]



ESERCIZIO 2

a) Calcolare la velocità con cui il punto materiale lascia il piano di lancio



Tra i due piani il punto materiale segue un moto parabolico, parte da A con velocità v_A (incognita) inclinata di θ rispetto all'orizzontale e atterra in B

Analizziamo il moto parabolico

$$\begin{cases} v_x = v_A \cos \theta \\ v_y = v_A \sin \theta - gt \end{cases}$$

velocità

Coordinate del punto durante il volo

$$x(t) = v_A \cos \theta t$$

$$y(t) = v_A \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

Nel punto di atterraggio $y(b) = 0$

TUTTA QUESTA PARTE POTREVO
EVITARLA SE AVESSI RICORDATO
L'ESPRESSIONE DELLA GITTATA
NEL MOTO PARABOLICO

$$0 = v_A \sin \theta t_B - \frac{1}{2} g t_B^2$$

$$(v_A \sin \theta - \frac{1}{2} g t_B) t_B = 0$$

$$t_B = 0 \text{ (soluzione banale)}$$

$$t_B = \frac{2 v_A \sin \theta}{g}$$

Sostituisco nell'espressione di x per trovare la gittata

$$v_A \cos \theta t_B = L$$

$$v_A \cos \theta \cdot \frac{2 v_A \sin \theta}{g} = L$$

$$L = \frac{2 v_A^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_A^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$L = \frac{v_A^2 \sin 2\theta}{g}$$

Nel nostro caso, sono noti θ ed L , posso ricavare v_A

$$v_A = \sqrt{\frac{L g}{\sin 2\theta}} = 3.37 \text{ m/s}$$

b) Massime altezza rispetto alla quota iniziale raggiunta dal punto durante il volo

- Anche in questo caso, devo analizzare il moto parabolico tra A e B

L'altezza massima viene raggiunta quando v_y si annulla quindi quando

$$v_A \sin \theta = g t_m$$

$$\rightarrow t_m = \frac{v_A \sin \theta}{g}$$

Per questo valore di t , la quota y del punto è pari a

$$y_M = v_A \sin \theta t_m - \frac{1}{2} g t_m^2 =$$

$$= \frac{v_A^2 \sin^2 \theta}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_A^2 \sin^2 \theta}{g^2} =$$

$$y_M = \frac{1}{2} \frac{v_A^2 \sin^2 \theta}{g}$$

Sapendo che il punto A si trova a quota h rispetto al riferimento iniziale, risulta

$$h_{\text{tot}} = h + \frac{1}{2} \frac{v_A^2 \sin^2 \theta}{g} = 1.16 \text{ m}$$

ALREI POTUTO SALTARE QUESTA PARTE SE AVESSI RICORDATO LE PROPRIETA' DEL MOTO PARABOLICO

c) Deformazione della molla al momento del lancio del corpo

- Al momento del lancio

$$E_{k0} = 0$$

$$E_{p0} = \frac{1}{2} k x_0^2$$

$$E_{m0} = \frac{1}{2} k x_0^2$$

- Nel punto A

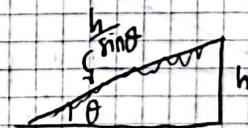
$$E_{kA} = \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$E_{mA} = \frac{1}{2} m v_A^2 + mgh$$

$$E_{pA} = mgh$$

- Durante il moto le forze di attrito compiono lavoro negativo

$$L_{nc} = - \underbrace{\mu_s m g \cos \theta}_{\text{forza di attrito}} \cdot \underbrace{\frac{h}{\sin \theta}}_{\text{spostamento (lunghezza del piano inclinato)}}$$



$$L_{nc} = - \mu_s \frac{m g h}{\tan \theta}$$

Risulta quindi:

$$E_{m1} - E_{m0} = L_{nc}$$

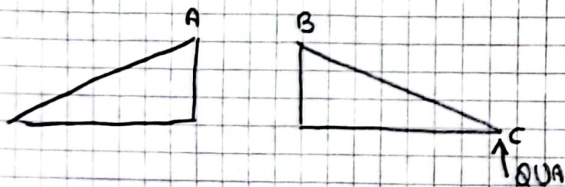
$$\frac{1}{2} m v_A^2 + mgh - \frac{1}{2} k x_0^2 = - \mu_d \frac{mgh}{\tan \theta}$$

Da cui posso ricavare x_0

$$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + mgh + \mu_d \frac{mgh}{\tan \theta}$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{2m}{k} \left(\frac{1}{2} v_A^2 + gh \left(1 + \frac{\mu_d}{\tan \theta} \right) \right)} = 0.151 \text{ m}$$

③ Velocità del punto materiale quando raggiunge il punto più basso del secondo piano



$$E_{m0} = \frac{1}{2} k x_0^2 \rightarrow \text{energia meccanica iniziale}$$

Energia meccanica finale

$$E_{mc} = \frac{1}{2} m v_c^2$$

Lavoro delle forze non conservative

$$L_{nc} = - 2 \mu_d \frac{mgh}{\tan \theta}$$

↑ Doppio rispetto e prime dato che ho 2 tratti, uno in salita e uno in discesa, di uguale lunghezza

$$\rightarrow \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{1}{2} k x_0^2 - 2 \mu_d \frac{mgh}{\tan \theta}$$

Posso quindi calcolare v_c

$$v_c = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{1}{2} k x_0^2 - 2 \mu_d \frac{mgh}{\tan \theta} \right)} = 5.25 \text{ m/s}$$

Esercizio #14

Un'automobile di massa M si muove su un tracciato rettilineo (privo di curve). Il tracciato ha un tratto iniziale in salita di lunghezza L con inclinazione θ rispetto all'orizzontale, seguito da un tratto orizzontale. Oltre alla spinta $\mathbf{F}$ del motore, il cui modulo è F e la cui direzione è quella del moto, e alla componente della forza peso nel tratto in salita, sull'automobile agisce una forza resistente $\mathbf{R}$ dovuta all'attrito con l'asfalto e alla resistenza dell'aria, la cui direzione è opposta a quella del moto e il cui modulo R dipende dalla velocità istantanea secondo la relazione $R = R_0 + kv^2$.

- a) Determinare la potenza sviluppata dal motore nel caso in cui il veicolo si muova di moto uniforme con velocità v_0 nel tratto in salita.
- b) Supponendo che, raggiunta la fine del tratto in salita, la spinta $\mathbf{F}$ rimanga in modulo costante, quanto vale l'accelerazione a dell'automobile all'inizio del tratto orizzontale?
- c) Supponendo che l'automobilista mantenga il valore di accelerazione a nel tratto successivo per un tempo t_a , in corrispondenza del quale viene raggiunto il limite di velocità v_{lim} . Determinare come deve essere regolata la spinta del motore in funzione del tempo, il tempo t_a necessario per raggiungere il limite di velocità e la distanza percorsa sul tratto orizzontale quando viene raggiunto il limite.
- d) Determinare l'espressione della potenza sviluppata dal motore in funzione del tempo per il tratto analizzato nel punto c);

[Valori numerici: $L = 500$ m $M = 500$ kg, $R_0 = 150$ N e $k = 1.50$ Ns²/m², $v_0 = 100$ km/h, $v_{lim} = 120$ km/h, $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$, $\theta = 3^\circ$]

Per la conservazione dell'energia meccanica
(non abbiamo elementi dissipativi)

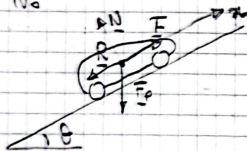
$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

Da cui otteniamo

$$\begin{aligned} E_{k2} &= E_{k1} + E_{p1} - E_{p2} = \\ &= \frac{1}{2} I \omega_1^2 + M g \frac{l}{2} \end{aligned}$$

ESERCIZIO n° 3 - SVOLGIMENTO COMMENTATO

1) POTENZA DEL MOTORE NEL TRATTO IN
SALITA CON MOTO UNIFORME A VELOCITÀ
 v_0



Sull'auto agiscono - forza motrice F
- forza peso F_p (direzione verticale discendente)
- resistenza al moto R (direzione parallela al tracciato, verso opposto a quello del moto)

reazione vincolare del tracciato N

(direzione perpendicolare al piano), le componenti dissipative e comprese in R)

Applicando la seconda legge della dinamica

$$M a = F_p + R + N + F$$

Consideriamo le componenti dell'equazione
in direzione x

$$M a = \underbrace{-M g \sin \theta}_{\text{componente delle forze peso in direzione } x} - R + F$$

R e F sono diretti come x

Se il moto è uniforme con velocità v_0

risulta

• $a = 0$ (uniforme $\rightarrow$ velocità costante
 $\rightarrow$ accelerazione nulla)

$$R = R_0 + k v_0^2$$

Sostituendo otteniamo

$$0 = -M g \sin \theta - R_0 - k v_0^2 + F$$

da cui possiamo ricavare F

$$F = M g \sin \theta + R_0 + k v_0^2$$

La potenza sviluppata dal motore è data da

③ AL TERMINE DELLA SALITA, SE LA MACCHINA HA VELOCITÀ v_0 , RISULTA

$$\begin{aligned}
 Ma &= -R + F \\
 &= \underbrace{-R_0 - kv_0^2}_{-R} + \underbrace{R_0 + kv_0^2}_F + Mg \sin \theta = \\
 &= Mg \sin \theta
 \end{aligned}$$

Da cui si ottiene

$$a = g \sin \theta$$

④ NEL TRATTO SUCCESSIVO MANTIENGO ACCELERAZIONE $a \rightarrow$ MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$v(t) = v_0 + at$$

la velocità aumenta linearmente nel tempo, il tempo necessario per raggiungere il limite

è

$$v_{lim} = v_0 + at_a$$

$$t_a = \frac{v_{lim} - v_0}{a} = \frac{v_{lim} - v_0}{g \sin \theta}$$

distanza percorsa

$$d = v_0 t_a + \frac{1}{2} a t_a^2$$

per il nuovo equilibrio

$$Ma = -R + F$$

obteniamo visto che

$$a = g \sin \theta$$

$$v = v_0 + at$$

$$R = R_0 + kv^2$$

sostituendo otteniamo

$$Ma = -R_0 - k(v_0 + at)^2 + F$$

per mantenere l'accelerazione a la forza F deve essere regolata in questo modo

$$F = Ma + R_0 + k(v_0 + at)^2$$

⑤ POTENZA SVILUPPATA DAL MOTORE IN FUNZIONE DEL TEMPO

$$P = Fv = (Ma + R_0 + k v_0^2 + 2k at + k a^2 t^2)(v_0 + at)$$

(cioè nel tempo secondo una legge di tipo polinomiale di terzo grado)

Esercizio #15 (dalla prima prova in itinere AA 2021/22)

Esercizio n. 2

Un corpo assimilabile a un punto materiale P di massa M è lanciato lungo una guida costituita da un tratto AB in discesa liscio con inclinazione θ e altezza h , un tratto orizzontale BC di lunghezza L , scabro, con coefficiente di attrito dinamico μ_d , un salto di altezza h e un tratto finale orizzontale. Il punto P , dopo il salto, atterra nel punto D posto a una distanza d dal salto. Il punto parte da fermo dalla posizione A , a seguito dell'applicazione di un impulso J . Determinare:

- La velocità di P quando raggiunge la posizione C .
- Il lavoro perso per attrito e l'accelerazione nel tratto $\overline{BC}$.
- L'accelerazione nel tratto $\overline{AB}$ e la velocità nella posizione A .
- L'impulso J applicato al punto per poter eseguire il moto discusso nei punti precedenti.

[Valori numerici $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$, $d = 1.5 m$, $h = 0.8 m$, $M = 5 kg$, $\theta = 30^\circ$, $L = 1.5 m$, $\mu_d = 0.2$]

