

Svolgimento degli esercizi
proposti sui moti relativi (e urti)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_{O'} \rightarrow \text{Posizione}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{tr} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \rightarrow \text{Velocità}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{tr} + \mathbf{a}_c \rightarrow \text{Accelerazione}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rightarrow \text{accelerazione assoluta}$$

$\mathbf{a}' \rightarrow$ accelerazione relativa, accelerazione del punto "vista" dal sistema mobile

$$\mathbf{a}_{tr} = \mathbf{a}_{O'} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \rightarrow \text{accelerazione di trascinamento}$$

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \rightarrow \text{accelerazione complementare (di Coriolis)}$$

Quando studiamo il moto di un punto materiale in un sistema non inerziale oltre alla forza $\mathbf{F}$ dobbiamo tener conto delle **forze di inerzia o forze apparenti**

$$\mathbf{F}_a = -m\mathbf{a}_{tr} - m\mathbf{a}_c \rightarrow$$

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_a = m\mathbf{a}'$$

Che possiamo scrivere come somma di due contributi

Forza di trascinamento

$$\mathbf{F}_{tr} = -m\mathbf{a}_{tr}$$

Forza di Coriolis

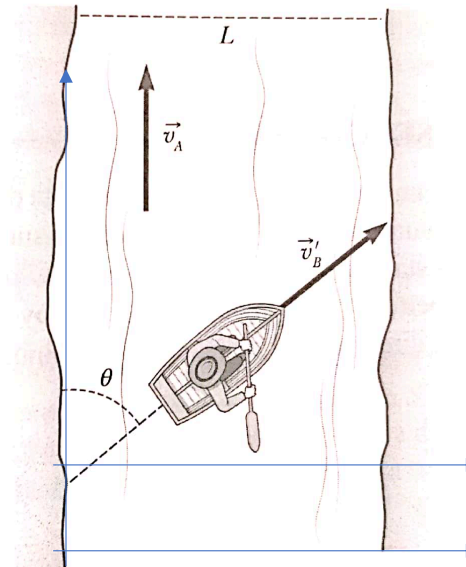
$$\mathbf{F}_c = -m\mathbf{a}_c$$

Quindi in un sistema di riferimento non inerziale $\mathbf{F} + \mathbf{F}_{tr} + \mathbf{F}_c = m\mathbf{a}'$

ESERCIZIO 9.1

Una barca deve attraversare un fiume di larghezza $L = 10$ m nel minor tempo possibile. L'acqua si muove parallelamente alla riva e la sua velocità ha modulo $v_A = 1$ m/s. La velocità della barca rispetto all'acqua ha modulo $v'_B = 0.5$ m/s ed è inclinata di un angolo $\theta = 45^\circ$ rispetto alla riva. Entrambe le velocità sono costanti in direzione e verso. Si determinino:

- la velocità della barca, in modulo, rispetto alla riva;
- il tempo impiegato dalla barca per attraversare il fiume;
- il punto di approdo della barca sull'altra riva, rispetto al punto di partenza;
- l'angolo θ e l'equazione della traiettoria che dovrebbe avere la barca per attraversare il fiume nel minor tempo possibile.



Soluzione

- a) Applicando la legge della trasformazione delle velocità, con $\vec{V} = \vec{v}_A$ [velocità di S' (l'acqua) rispetto a S (la riva)] e $\vec{v}' = \vec{v}'_B$ (velocità relativa della barca rispetto a S'), la velocità assoluta della barca ($\vec{v} = \vec{v}_B$) risulta

$$\vec{v} = v'_B \cos \theta \vec{u}_x + (v_A + v'_B \sin \theta) \vec{u}_y$$

Traccia di svolgimento discussa a ricevimento....

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}'_B + \mathbf{v}_A$$

$$v_{Bx} = v'_{Bx} + v_{Ax}$$

$$v_{Ax}=0$$

$$v_{By} = v'_{By} + v_{Ay}$$

$$v_{Bx} = v'_{Bx} = v'_B \sin \vartheta$$

$$t_a = \frac{L}{v'_B \sin \vartheta}$$

$\frac{dt_a}{d\vartheta}$ cerco per quali valori di ϑ si annulla

$$\frac{dt_a}{d\vartheta} = -\frac{L \cos \vartheta}{v'_B \sin^2 \vartheta} = 0$$

Nota: Nello svolgimento dettagliato delle slide successive ho ruotato di 90 gradi il sistema (il fiume scorre in direzione x invece di y), ma i risultati sono gli stessi!

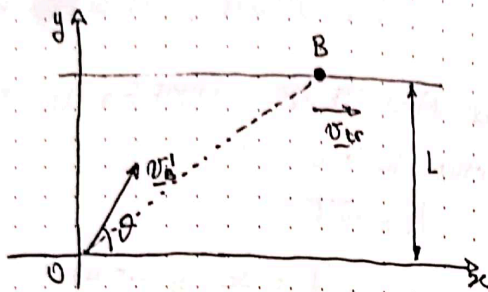
ESERCIZI DA ZANI-DUO-TARDONI SUI MOTI RELATIVI
ESERCIZIO 9.1

$$v'_B = 0.5 \text{ m/s}$$

$$v_{tr} = 1 \text{ m/s}$$

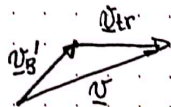
$$\theta = 45^\circ$$

$$L = 10 \text{ m}$$



2) CALCOLO DELLA VELOCITA' v_B DELLA BARCA RISPETTO ALLA RIVA

$$v_B = v'_B + v_{tr}$$



IN COMPONENTI CARTESIANE

$$v_{Bx} = v'_B \cos \theta$$

$$v_{By} = v'_B \sin \theta$$

$$v_{trx} = v_{tr}$$

$$v_{try} = 0$$

$$\rightarrow v_{Bx} = v'_{Bx} + v_{trx} = v'_B \cos \theta + v_{tr}$$

$$v_{By} = v'_{By} = v'_B \sin \theta$$

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = 1.399 \text{ m/s}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{v_{By}}{v_{Bx}}\right) = \arctan\left(\frac{v'_B \sin \theta}{v'_B \cos \theta + v_{tr}}\right)$$

1) TEMPO IMPIEGATO DALLA BARCA PER ATTRAVERSARE IL FIUME

INDICO CON T_A IL TEMPO CERCATO

$$v_{By} T_A = L \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{IL MOTO E' RETTILINEO UNIFORME SIA SU} \\ \text{X CHE SU Y, SU Y DEVO PERCORRERE} \\ \text{LA DISTANZA L ALLA VELOCITA' } v_{By} \end{array} \right.$$

$$T_A = \frac{L}{v_{By}} = \frac{L}{v'_B \sin \theta} = 28.28 \text{ s}$$

3) IL PUNTO DI APPRODO SULLA SPONDA OPPOSTA

- INDICO CON B IL PUNTO DI APPRODO

SEGUENDO COME ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO IL PUNTO DI PARTENZA, AUREMO

$$y_B = L$$

$$x_B = v_{Bx} T_A = (v'_B \cos \theta + v_{tr}) T_A =$$

$$= (v'_B \cos \theta + v_{tr}) \frac{L}{v'_B \sin \theta} = 38.28 \text{ m}$$

4) L'ANGOLO θ E L'EQUAZIONE DELLA TRAIETTORIA

CHE DOVREBBE AVERE LA BARCA PER ATTRAVERSARE IL FIUME NEL MINOR TEMPO POSSIBILE

RIPRENDIAMO L'ESPRESSIONE DI T_A CHE ABBIAMO TROVATO AL PUNTO PRECEDENTE, QUESTA VOLTA

STUDIAMO COME VARIA T_A AL VARIARE DI θ , IN PARTICOLARE CERCHIAMO IL MINIMO DELLA FUNZIONE $T_A(\theta)$ AL VARIARE DI θ NELL'INTERVALLO $0 \leq \theta \leq \pi$

$$T_A = \frac{L}{v_B' \sin \theta}$$

• PER θ COMPRESO TRA 0 e π $\sin \theta \geq 0$, QUINDI

$$T_A \geq 0$$

• ~~SIN~~ IN PARTICOLARE ~~SIN~~ $0 \leq \sin \theta \leq 1$

$\sin \theta = 0$ PER $\theta = 0$ e $\theta = \pi$

$\sin \theta = 1$ PER $\theta = \pi/2$

• $\sin \theta$ È A DENOMINATORE QUINDI QUANDO

$\sin \theta$ È MINIMO, T_A È MASSIMO e VICEVERSA

• QUINDI T_A SARÀ MINIMO QUANDO $\sin \theta$ È MASSIMO, CIOÈ $\sin \theta = 1$, $\theta = \pi/2$

IL VALORE DI θ PER IL QUALE IL TEMPO DI

PERCORRENZA È MINIMO È $\theta = \pi/2$, IL TEMPO DI PERCORRENZA MINIMO È

$$T_{\min} = L/v_B' = 2.0 \text{ s}$$

PER QUESTO VALORE DI θ ABBIAMO ~~LA~~ LE COMPONENTI DELLA VELOCITÀ SEGUENTI

$$v_{Bx} = v_B' \cos \theta + v_{tr} = v_{tr} = 1 \text{ m/s}$$

$$v_{By} = v_B' \sin \theta = v_B' = 0.5 \text{ m/s}$$

INTEGRIAMO RISPETTO AL TEMPO A PARTIRE

DA $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$ (ABBIAMO SCELTO L'ORIGINE NEL PUNTO DI PARTENZA)

$$x(t) = v_{Bx} t = v_{tr} t$$

$$y(t) = v_{By} t = v_B' t$$

PER TROVARE L'EQUAZIONE DELLA TRAIETTORIA

RICAVIAMO t DALLA PRIMA E SOSTITUIAMO NELLA SECONDA

$$t = \frac{x}{v_{tr}}$$

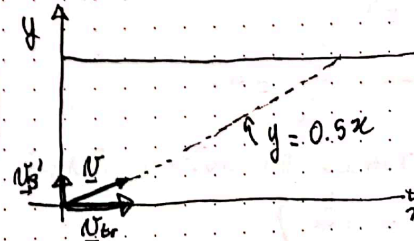
$$y = \frac{v_B'}{v_{tr}} x$$

L'EQUAZIONE DELLA TRAIETTORIA È QUINDI

$$y = 0.5x$$

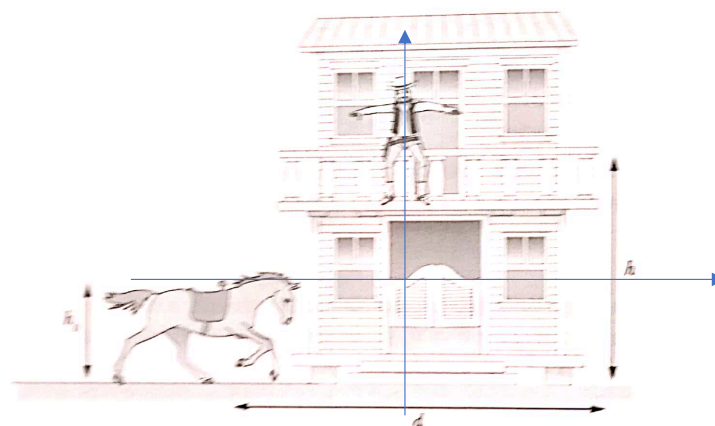
LA TRAIETTORIA È RETTI LINEA

(NOTA: NEL LIBRO GLI ASSI x e y SONO SCAMBIATI e LA SOLUZIONE HA QUINDI UN'ESPRESSIONE DIVERSA)



ESERCIZIO 9.2

In un film western, un cowboy salta da una finestra, posta ad altezza $h = 3$ m rispetto al suolo, e vuole andare a cadere in sella al suo cavallo, di altezza $h_0 = 1.5$ m al garrese, mentre questi si sta avvicinando di corsa. Il cavallo parte, all'istante iniziale, da una distanza $d = 20$ m rispetto al punto di caduta del cowboy. Supponendo che quest'ultimo si lasci cadere, da fermo, in direzione verticale, si determinino:



- l'istante nel quale il cowboy si deve lasciare cadere, supponendo che il cavallo si muova di moto rettilineo uniforme con velocità di modulo $v_0 = 5$ m/s;
- le espressioni della velocità e dell'accelerazione del cowboy rispetto al cavallo, nell'istante immediatamente precedente a quando gli cade in sella, nell'ipotesi dal caso (a);
- l'istante nel quale il cowboy si deve lasciare cadere, supponendo che il cavallo, partendo da fermo, si muova di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione di modulo $a_0 = 1$ m/s²;
- le espressioni della velocità e dell'accelerazione del cowboy rispetto al cavallo, nell'istante immediatamente precedente a quando gli cade in sella, nell'ipotesi dal caso (c).

Soluzione

- Il cavallo, in moto rettilineo uniforme, arriva sulla verticale del cowboy all'istante t dopo aver percorso la distanza d :

$$d = v_0 t \Rightarrow t = \frac{d}{v_0} = 4 \text{ s}$$

Traccia di svolgimento discussa a ricevimento....

Calcolo quanto tempo impiega il cowboy a raggiungere $z = 0$ (moto unif accelerato con acc. g e pos iniziale $h-h_0$) $\rightarrow t_1$

Moto uniforme v_0 partendo da $x(0) = -20$ m

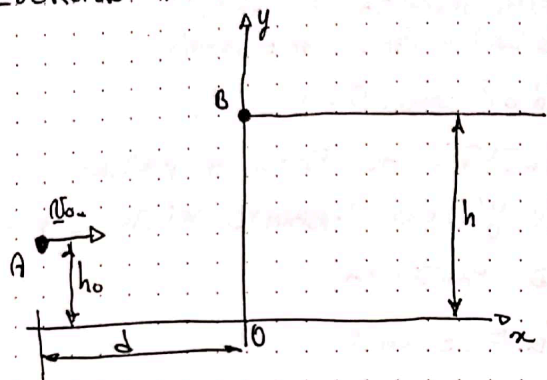
Per arrivare a $x = 0$ impiega

$$T_c = -x(0) / v_0$$

Quando devo saltare?

$$T_s = T_c - t_1$$

ESERCIZIO 9.2



A → CAVALLO

B → CON BOY

$$v_0 = 5 \text{ m/s}$$

$$d = 20 \text{ m}$$

$$h = 3 \text{ m}$$

$$h_0 = 1.5 \text{ m}$$

a) CALCOLIAMO L'ISTANTE NEL QUALE IL CON BOY SI DEVE LANCIARE PER ATTERRARE ESATTAMENTE SUL CAVALLO

• IL CAVALLO PARTE IN $t = 0$ CON VELOCITÀ v_0 . RAGGIUNGERÀ LA $x = 0$ DOPO AVER PERCORSO LA DISTANZA d , IMPIEGANDO UN TEMPO

$$t_c = \frac{d}{v_0} = 4 \text{ s}$$

(IL CAVALLO HA MOTO UNIFORME QUINDI $d = v_0 t_c$)

• IL CON BOY SI LANCIA CON VELOCITÀ INIZIALE NULLA, IL SUO MOTO È UNIFORMEMENTE ACCELERATO CON ACCELERAZIONE g

$$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

PER ARRIVARE ALL'ALTEZZA DEL CAVALLO ($y = h_0$) AL CON BOY OCCORRE UN TEMPO t_g TALE CHE

$$h_0 = h - \frac{1}{2} g t_g^2$$

$$t_g = \sqrt{\frac{2(h-h_0)}{g}} = 0.55 \text{ s}$$

PER ATTERRARE ESATTAMENTE SUL CAVALLO, IL CON BOY DEVE LANCIARSI DOPO UN TEMPO t_d DALLA PARTENZA DEL CAVALLO PAR: A

$$t_d = t_c - t_g = \frac{d}{v_0} - \sqrt{\frac{2(h-h_0)}{g}} = 3.65 \text{ s}$$

b) LA VELOCITÀ ~~DEL CON BOY~~ E L'ACCELERAZIONE DEL CON BOY VISTA DAL CAVALLO NELL'ISTANTE IMMEDIATO PRECEDENTE A QUANDO CADE SULLA SELLA

VELOCITÀ DEL CON BOY NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO SOLIDALE AL SUOLO

$$\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = -g t \end{cases} \quad \text{PER } t = t_g \quad \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = -g t_g \end{cases}$$

NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CAVALLO

$$\underline{v} = \underline{v}' + \underline{v}_{tr} \quad \leftarrow \text{RELAZIONE DEI MOTI RELATIVI}$$

$$\underline{v}_{tr} = \underline{v}_0 \quad \text{VELOCITÀ DEL CAVALLO}$$

$$\underline{v}' \rightarrow \text{VELOCITÀ DEL COWBOY VISTA DAL CAVALLO}$$

$$\underline{v}' = \underline{v} - \underline{v}_{tr}$$

$$v'_x = v_x - v_0 = -v_0$$

$$v'_y = v_y = -gt_c = -\sqrt{2g(h-h_0)}$$

PER QUANTO RIGUARDA L'ACCELERAZIONE, DATO CHE IL CAVALLO PROCEDE A VELOCITÀ COSTANTE,

$$\underline{a} = \underline{a}' + \underline{a}_{tr} + \underline{a}_c$$

$\uparrow$ Moto rettilineo
 $\uparrow$ Moto di trascinamento
 uniforme

QUINDI

$$\underline{a}' = \underline{a} = \underline{g} \quad (\text{ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ})$$

② IL TEMPO IN CUI IL COWBOY SI DEVE LASCIARE CADERE, SUPPONENDO CHE IL CAVALLO PARTA DA FERMO CON ACCELERAZIONE $a_0 = 1 \text{ m/s}^2$

$\rightarrow$ VELOCITÀ DEL CAVALLO IN FUNZIONE DEL TEMPO

$$v_c(t) = a_0 t \quad \text{DIREZIONE } x, \text{ VERSO COWBOY}$$

$\rightarrow$ DISTANZA PERCORSA DAL CAVALLO IN FUNZIONE DEL TEMPO

$$x_c = x_c(0) + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$x_c(0) = -d \quad (\text{VEDI DISEGNO, IL PUNTO DI PARTENZA A DEL CAVALLO È A DISTANZA } d \text{ DALL'ORIGINE})$$

$$x_c = -d + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

TEMPO NECESSARIO AL ^{CAVALLO} ~~COWBOY~~ PER RAGGIUNGERE $x=0$ (PUNTO DI CADUTA DEL COWBOY)

$$0 = -d + \frac{1}{2} a_0 t_c^2$$

$$t_c = \sqrt{\frac{2d}{a_0}} = 6.32 \text{ s}$$

IL TEMPO DI CADUTA DEL COWBOY È ANCORA

$$t_g = \sqrt{\frac{2(h-h_0)}{g}} = 0.55 \text{ s}$$

QUINDI IL RITARDO CON CUI DEVE LANCIARSI QUESTA VOLTA È

$$t_d = t_c - t_g = 5.77 \text{ s}$$

VELOCITÀ e ACCELERAZIONE DEL CON BOY VISTO
DAL CAVALLO NELLE CONDIZIONI ②

$$\underline{v}' = \underline{v} - \underline{v}_{tr}$$

QUESTA VOLTA CAMBIA $\underline{v}_{tr}$

$$v_{trx} = a_0 t_c = a_0 \sqrt{\frac{z d}{g_0}} = \sqrt{z a_0 d}$$

$$v_{try} = 0$$

QUINDI

$$v'_x = -v_{trx} = -\sqrt{z a_0 d}$$

$$v'_y = v_y = -\sqrt{z g (h - h_0)}$$

PER QUANTO RIGUARDA L'ACCELERAZIONE,

$$\underline{a} = \underline{a}' + \underline{a}_{tr}$$

$$\underline{a}' = \underline{a} - \underline{a}_{tr} = \underline{g} - \underline{a}_0$$

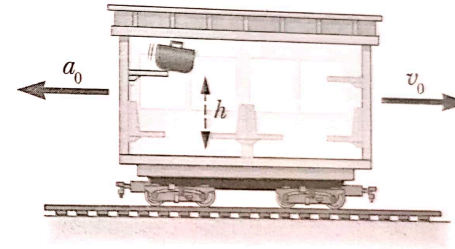
QUINDI

$$a'_x = -a_0$$

$$a'_y = -g$$

ESERCIZIO 9.4

Una borsa è appoggiata sulla cappelliera di un treno, posta ad altezza h rispetto al pavimento del treno. Il treno si muove inizialmente di moto rettilineo uniforme con velocità di modulo v_0 , poi, ad un certo istante, inizia a frenare con accelerazione costante di modulo a_0 . In tale istante, la borsa esce dalla cappelliera, per l'effetto della frenata, e comincia a cadere. Si determinino, sia rispetto a un osservatore solidale con la stazione sia rispetto a un osservatore solidale con il treno:

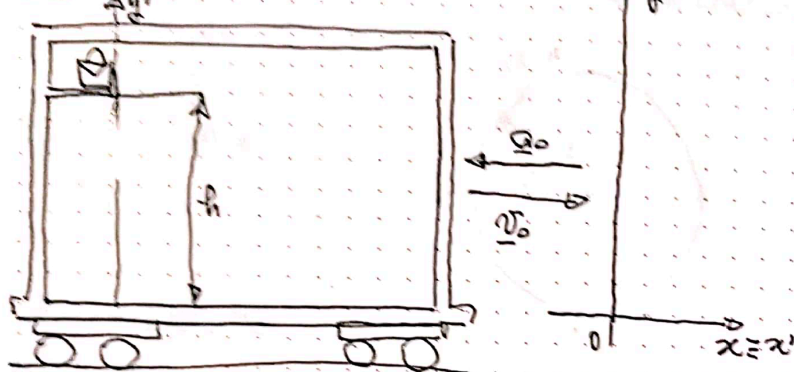


a) l'accelerazione della borsa;

Moti relativi

- b) la velocità della borsa;
- c) la traiettoria della borsa;
- d) l'istante e la distanza di caduta della borsa sul pavimento del treno.

ESERCIZIO n° 9.4



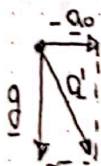
⊙ ACCELERAZIONE DELLA BORSA

→ VISTA DALL'OSSERVATORE SUL BINARIO

$$\begin{cases} a = g \\ a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

→ VISTA DALL'OSSERVATORE SUL TRENO

$$\begin{aligned} a' &= a - a_{tr} \\ a_{tr} &= a_0 \\ a' &= g - a_0 \end{aligned}$$



$$\begin{cases} a'_x = a_0 \\ a'_y = -g \end{cases}$$

⊙ VELOCITÀ DELLA BORSA

NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL BINARIO

• MOTO DI UN GRAVE IN CADUTA LIBERA
CON VELOCITÀ INIZIALE v_0

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{a}t \quad \underline{v}_0 = v_0 \underline{i}$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -gt \end{cases}$$

NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO SUL VAGONE

CALCOLIAMO LA VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO

$$\underline{v}_{tr} = \underline{v}_0 + \underline{a}_0 t$$

$$\begin{cases} v_{trx} = v_0 - a_0 t \\ v_{try} = 0 \end{cases}$$

LA VELOCITÀ RELATIVA $\underline{v}'$

$$\begin{aligned} \underline{v}' &= \underline{v} - \underline{v}_{tr} = \underline{v}_0 + \underline{a}t - \underline{v}_0 - \underline{a}_0 t \\ &= (\underline{a} - \underline{a}_0)t = \underline{a}'t \end{aligned}$$

$$v'_x = a_0 t$$

$$v'_y = -gt$$

POSIZIONE DELLA BORSA

NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL
BINARIO

ANALIZZIAMO IL MOTO DEL CORPO
IN CADUTA LIBERA

$$\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + \int_0^t \underline{v}(t) dt$$

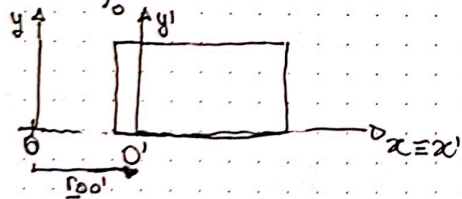
↑
posizione iniziale

assumiamo $x(0) = 0$ e $y(0) = h$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

MOTO DI TRASCINAMENTO

$$\underline{r}_{od} = \underline{r}_{oo'}(t) + \int_0^t \underline{v}_{tr}(t) dt$$



SUPPONIAMO $O \equiv O'$ PER $t = 0$

$$\text{QUINDI } \underline{r}_{oo'}(0) = 0$$

IN COMPONENTI CARTESIANE

$$x_{oo'}(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$y_{oo'}(t) = 0$$

POSIZIONE DELLA BORSA NEL SISTEMA
DI RIFERIMENTO DEL TRENO

$$\underline{r}' = \underline{r} - \underline{r}_{oo'}$$

$$\begin{cases} x'(t) = v_0 t - v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 = \frac{1}{2} a_0 t^2 \\ y'(t) = h - g t^2 \end{cases}$$

TRAJETTORIA DELLA BORSA NEL SISTEMA DI
RIFERIMENTO DEL BINARIO

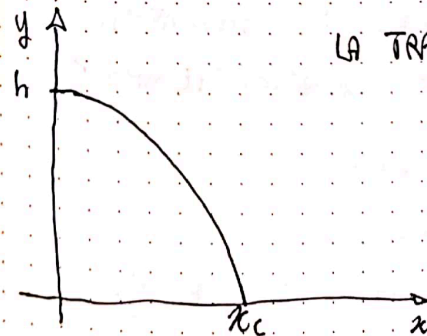
$$x(t) = v_0 t$$

$$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\rightarrow t = \frac{x}{v_0} \quad \left(\begin{array}{l} \text{ricavo } t \text{ dalle} \\ x \text{ e sostituisco} \\ \text{nelle } y \end{array} \right)$$

$$y = h - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2}$$

LA TRAIETTORIA È UNA PARABOLA



TRAJETTORIA DELLA BORSA NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL VAGONE

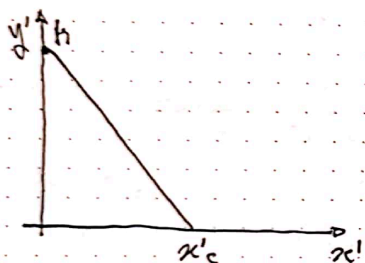
$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 \\ y'(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{ricavo } t^2 \text{ dalle } x' \text{ e} \\ \text{sostituisco nella } y' \end{array}$$

$$t^2 = \frac{2x'}{a_0}$$

$$y' = h - \frac{1}{2} g \cdot \frac{2x'}{a_0} = h - \frac{g}{a_0} x'$$

$$y' = h - \frac{g}{a_0} x'$$

↑ LA TRAIETTORIA È RETTILINEA



2) DOVE CADE LA BORSA SUL PAVIMENTO DEL TRENO e DOPO QUANTO TEMPO?

→ TEMPO DI CADUTA

$$y'(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

~~VALUTIAMO~~ VALUTIAMO t PER $y = 0$

$$0 = h - \frac{1}{2} g t_c^2 \quad 2h = g t_c^2$$

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

→ DOVE CADE LA BORSA SUL PAVIMENTO?

$$x'_c = x'(t_c) = \frac{1}{2} a_0 t_c^2 = \frac{1}{2} a_0 \cdot \frac{2h}{g} = \frac{a_0 h}{g}$$

TORNA? → PROVIAMO A SOSTITUIRE x_c NELL'ESPRESSIONE DELLA TRAIETTORIA

$$y' = h - \frac{g}{a_0} x'$$

$$y'_c = h - \frac{g}{a_0} x_c = h - \frac{g}{a_0} \frac{a_0 h}{g} = 0 \quad \text{Ok!}$$

$$\vec{v}' = (v_0 - gt)\vec{u}_y = -v_0\vec{u}_y$$

Non è altro che la velocità di lancio della palla rispetto al carrello, con verso opposto.

ESERCIZIO 9.6

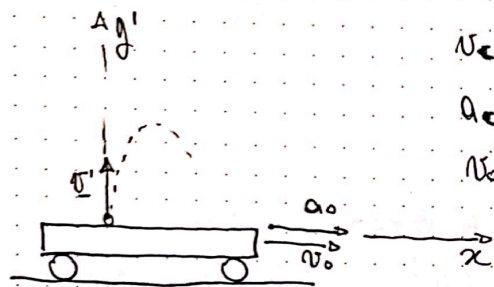
Un carrello si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione $a_c = 3 \text{ m/s}^2$ e velocità iniziale $v_c = 18 \text{ km/h}$. Sul carrello si trova un bambino, fermo rispetto ad esso, che all'istante $t = 0$ lancia verso l'alto una palla con velocità $v_0 = 6.5 \text{ m/s}$. Trascurando l'altezza del braccio del bambino rispetto al piano del carrello, si determinino:

- la distanza a cui cade la palla, rispetto al punto di lancio, in un riferimento solidale con l'osservatore fisso;
- la distanza a cui cade la palla, rispetto alla posizione del bambino, in un riferimento solidale con il carrello;
- la velocità della palla rispetto al carrello nel momento in cui cade su di esso.

Soluzione

- In un sistema di riferimento cartesiano S solidale con l'osservatore fisso, la velocità della palla al momento del lancio ha due componenti: $v_c\vec{u}_x$, che viene fornita dal carrello in tale istante, nel quale la palla è in mano al bambino che si muove solidale con il carrello; $v_0\vec{u}_y$, che è la componente verticale fornita dal braccio del bambino. Le espressioni di velocità e posizione (quest'ultima ottenibile integrando la velocità nel tempo) sono quindi

ESERCIZIO n° 9.6



$$v_c = 18 \text{ km/h} = 5 \text{ m/s}$$

$$a_c = 3 \text{ m/s}^2$$

$$v_0 = 6.5 \text{ m/s}$$

a) DISTANZA A CUI CADE LA PALLA NEL SISTEMA

DI RIF. FISSO

NEL SISTEMA FISSO È UN MOTO BALISTICO

CON VELOCITÀ INIZIALE DATA DA

$$\vec{v}_{0in} = \vec{v}_0' + \vec{v}_{tr}(0)$$

$$\vec{v}_{0in} = v_0 \hat{j}$$

$$\vec{v}_{tr}(0) = \vec{v}_c(i)$$

$$v_{inx} = v_c = 5 \text{ m/s}$$

$$v_{iny} = v_0 = 6.5 \text{ m/s}$$

CALCOLO LA VELOCITÀ

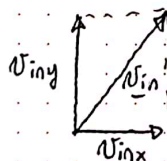
$$\begin{cases} v_x(t) = v_{inx} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_y(t) = v_{iny} - gt \end{cases}$$

CALCOLO LA POSIZIONE

$$\begin{cases} x(t) = v_{inx} t \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t) = v_{iny} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$



AVVIENE AL TEMPO t_c TALE CHE
L'ATTERRAGGIO

$$0 = v_{iny} t_c - \frac{1}{2} g t_c^2$$

$$t_c (v_{iny} - \frac{1}{2} g t_c) = 0 \quad t_c = 0 \text{ (ISTANTE INIZIALE, NON CI INTERESSA)}$$

$$t_c = \frac{2 v_{iny}}{g} = \frac{2 v_0}{g}$$

LA PALLA ATTERRA NEL PUNTO

$$x_c = v_c t_c = \frac{2 v_c v_0}{g} = 6.626 \text{ m}$$

b) DISTANZA A CUI CADE LA PALLA NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CARRELLO

→ NEL TEMPO t_c , IL CARRELLO PERCORRE

LA DISTANZA

$$x_{tr} = v_c t_c + \frac{1}{2} a_c t_c^2$$

RISPETTO AL CARRELLO IL PUNTO DI CADUTA

SI TROVA A UNA DISTANZA

$$\begin{aligned} x_c' &= x_c - x_{tr} = v_c t_c - v_c t_c - \frac{1}{2} a_c t_c^2 = \\ &= -\frac{1}{2} a_c t_c^2 = -\frac{1}{2} a_c \left(\frac{2 v_0}{g} \right)^2 = -\frac{2 a_c v_0^2}{g^2} \end{aligned}$$

$$x_c' = -2 a_c \frac{v_0^2}{g^2} = -2.634 \text{ m}$$

c) VELOCITÀ DELLA PALLA ALLA CADUTA RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CARRELLO

$$\underline{v}' = \underline{v} - \underline{v}_{tr}$$

$\underline{v}$ VELOCITÀ NEL SISTEMA FISSO

$$\begin{cases} v_x = v_c \\ v_y = v_0 - gt \end{cases}$$

$\underline{v}_{tr}$ VELOCITÀ DEL CARRELLO (TRASCINAMENTO)

$$\begin{cases} v_{trx} = v_c + a_c t \\ v_{try} = 0 \end{cases}$$

$\underline{v}'$ VELOCITÀ DELLA PALLA A VISTA DAL CARRELLO (VEL RELATIVA)

$$\underline{v}' = \underline{v} - \underline{v}_{tr}$$

$$\begin{cases} v_x' = v_c - v_c - a_c t = -a_c t \\ v_y' = v_0 - gt \end{cases}$$

AL TEMPO $t = t_c$ ABBIAMO

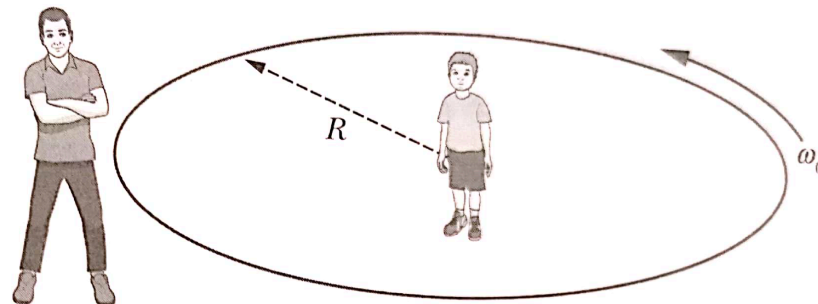
$$v_x' = -a_c t_c = -a_c \frac{2v_0}{g} = -3.976 \text{ m/s}$$

$$v_y' = v_0 - gt_c = v_0 - 2g \frac{v_0}{g} = -v_0 = -6.5 \text{ m/s}$$

$$(\vec{r} = \vec{r}' = R\vec{u}_r \text{ poiché } O \text{ e } O' \text{ coincidono})$$

ESERCIZIO 9.9

Un bambino è in piedi al centro di una piattaforma circolare che sta ruotando con velocità angolare uniforme ω_0 . Suo padre lo osserva, da fermo, da un punto a distanza R dal bambino. Si determinino la velocità e l'accelerazione del padre viste dal bambino.



Soluzione

Il padre è fermo in un sistema di riferimento fisso S con l'origine O nel centro della giostra, pertanto $\vec{v} = 0$ e $\vec{a} = 0$. In un sistema S' in moto con la giostra, con l'origine nel centro della giostra (cioè in corrispondenza del bambino) e velocità angolare $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{u}_z$, la velocità del padre vale

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_T = -\vec{v}_T = -\vec{\omega} \times \vec{r}' = -\vec{\omega} \times \vec{r} = -\omega_0 R \vec{u}_\theta$$

dove la velocità di trascinamento di S' rispetto a S è

$$\vec{v}_T = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega_0 R \vec{u}_\theta$$

ESERCIZIO N° 9.9

→ OSSERVATORE AL CENTRO DI UN DISCO CHE RUOTA A VELOCITÀ ANGOLARE ω_0

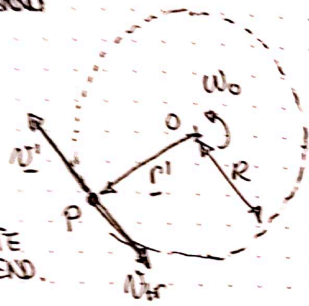
(BAMBINO) OSSERVA UN PUNTO FISSATO NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE

$$\underline{v} = 0$$

$$\underline{v}_{tr} = \underline{\omega}_0 \times \underline{r}'$$

$$|\underline{v}_{tr}| = \omega_0 R$$

DIREZIONE TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA (PERPEND. A $\underline{r}'$)



$$\underline{v}' = \underline{v} - \underline{v}_{tr} = -\underline{\omega}_0 \times \underline{r}'$$

↑
IL BAMBINO VEDI IL PADRE COME SE RUOTASSE INTORNO A LUI CON VELOCITÀ ANGOLARE $-\omega_0$

CALCOLO L'ACCELERAZIONE

$$\underline{a} = 0$$

$$\underline{a} = \underline{a}' + \underline{a}_{tr} + \underline{a}_c$$

$$\underline{a}_{tr} = \underline{\omega}_0 \times \underline{\omega}_0 \times \underline{r}' = -\omega_0^2 \underline{r}'$$

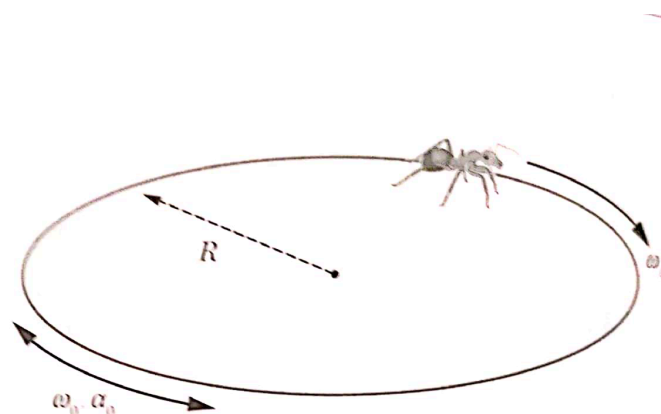
$$\begin{aligned} \underline{a}_c &= 2\underline{\omega}_0 \times \underline{v} = \\ &= 2\underline{\omega}_0 \times (-\underline{\omega}_0 \times \underline{r}') = \\ &= -2\underline{\omega}_0 \times \underline{\omega}_0 \times \underline{r}' = -2\underline{a}_{tr} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{a}' &= \underline{a} - \underline{a}_{tr} - \underline{a}_c = \\ &= 0 - \underline{a}_{tr} + 2\underline{a}_{tr} = \underline{a}_{tr} = \underline{\omega}_0 \times \underline{\omega}_0 \times \underline{r}' = -\omega_0^2 \underline{r}' \end{aligned}$$

L'ACCELERAZIONE CON CUI IL BAMBINO VEDE IL PADRE È $\underline{a}'$, CON MODULO $\omega_0^2 R$ e DIREZIONE CENTRIPETA (INFATTI IL BAMBINO VEDE IL PADRE MUOVERSI DI MOTO CIRCOLARE)

ESERCIZIO 9.10

Una formica di massa m cammina lungo il bordo di un disco di raggio R , in rotazione in verso orario con velocità angolare di modulo ω_0 . Si determinino le espressioni della velocità e dell'accelerazione relativa (rispetto a un osservatore solidale con il disco) e assoluta (rispetto a un osservatore inerziale fisso) della formica nei seguenti casi:



- il disco ruota in verso orario con velocità angolare ω_0 ;
- il disco ruota in verso antiorario con velocità angolare ω_0 ;
- il disco, inizialmente fermo, accelera con accelerazione angolare costante α_0 diretta in verso antiorario.

Soluzione

- In un sistema di riferimento S' centrato nel centro del disco e che ruota con esso, la formica si muove di moto circolare uniforme con velocità angolare $\vec{\omega}_0$:

$$\vec{v}' = \vec{\omega}_0 \times \vec{r}' = -\vec{\omega}_0 R \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}' = -\omega_0^2 R \vec{u}_r$$

Il segno – nell'espressione della velocità deriva dal verso di rotazione della formica (orario, assumendo il versore $\vec{u}_\theta$ antiorario), e $|\vec{r}'| = R$.

In un sistema di riferimento S centrato nel centro del disco e fisso, il moto della formica

ESERCIZIO n° 9.10



• MOTO RELATIVO

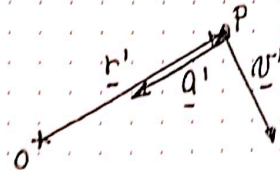
(FORMICA RISPETTO AL DISCO)

- VELOCITÀ

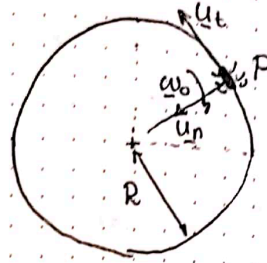
$$\begin{aligned}\underline{v}' &= \underline{\omega}_0 \times \underline{r}' \\ &= -\omega_0 \underline{k} \times (-R \underline{u}_n) = -\omega_0 R \underline{u}_t\end{aligned}$$

- ACCELERAZIONE

$$\underline{a}' = \underline{\omega}_0 \times \underline{\omega}_0 \times \underline{r}' = -\omega_0^2 R \underline{u}_n \quad (\text{CENTRIPETA})$$

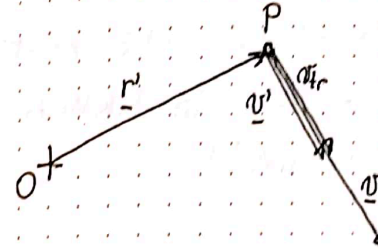


IL DISCO RUOTA IN SENSO ORARIO CON VELOCITÀ ANGOLARE ω_0 . (OSSERV. IL MOTO È CONCORDE CON QUELLO DELLA FORMICA, IN ASPETTO DAL SISTEMA DI RIF. FISSO UNA VELOCITÀ DOPPIA... VERIFICHIAMO)



$$\underline{v}_{tr} = \underline{\omega}_0 \times \underline{r}' = -\omega_0 \underline{k} \times (-R \underline{u}_n) = -\omega_0 R \underline{u}_t$$

$$\underline{v} = \underline{v}' + \underline{v}_{tr} = -2\omega_0 R \underline{u}_t$$



$$\underline{a} = \underline{a}' + \underline{a}_{tr} + \underline{a}_c$$

$$\underline{a}' = -\omega_0^2 R \underline{u}_n$$

$$\underline{a}_{tr} = \underline{\omega}_0 \times \underline{\omega}_0 \times \underline{r}' = -\omega_0^2 R \underline{u}_n$$

$$\underline{a}_c = 2 \underline{\omega}_0 \times \underline{v}' = 2 \underline{\omega}_0 \times (-\omega_0 R \underline{u}_n) = 2\omega_0^2 R \underline{u}_n$$

$$\underline{a} = 4\omega_0^2 R \underline{u}_n$$

↑ IL SISTEMA FISSO VEDE LA FORMICA MUOVERSI IN MOTO CIRCOLARE UNIFORME CON VELOCITÀ ANGOLARE ω_0 , (COME AVEVAMO PREVISTO...)

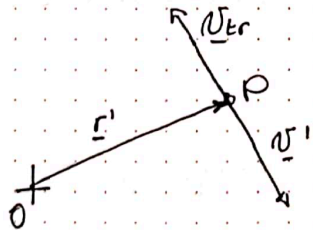
b) IL DISCO RUOTA CON VELOCITÀ ANGOLARE ω_0 IN SENSO ANTICLOCKWISE, OPPOSTO A QUELLO DELLA FORMICA (OSSERVAZIONE: IN QUESTO CASO DA ASPETTO CHE RISPETTO ALL'OSSERVATORE INERZIALE LA FORMICA SIA FERMA... VERIFICHIAMO!).

$$\underline{\omega}_D = -\underline{\omega}_0 = \omega_0 \underline{k}$$

↑ VELOCITÀ ANGOLARE DEL DISCO

$$\underline{v}_{tr} = \underline{\omega}_D \times \underline{r}' = -\underline{\omega}_0 \times \underline{r}' = \omega_0 \underline{k} \times (-R \underline{u}_n) = \omega_0 R \underline{u}_t$$

$$\underline{v} = \underline{v}' + \underline{v}_{tr} = -\omega_0 R \underline{u}_t + \omega_0 R \underline{u}_t = 0$$



ACCELERAZIONE

$$\underline{a} = \underline{a}' + \underline{a}_{tr} + \underline{a}_c$$

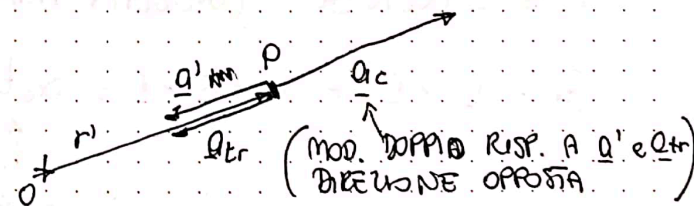
CALCOLIAMO I VARI TERMINI

$$\underline{a}_{tr} = \underline{\omega}_D \times \underline{\omega}_D \times \underline{r}' = \omega_0^2 R \underline{u}_n \quad (\text{DIR. CENTRIFUGA})$$

$$\underline{a}' = \omega_0^2 R \underline{u}_n \quad (\text{DIR. CENTRIFUGA})$$

$$\begin{aligned} \underline{a}_c &= 2\underline{\omega}_D \times \underline{v}' = \\ &= 2\underline{\omega}_D \times (\underline{\omega}_0 \times \underline{r}') = -2\underline{\omega}_0 \times \underline{\omega}_0 \times \underline{r}' = \\ &= -2\omega_0^2 R \underline{u}_n \rightarrow (\text{DIR. CENTRIFUGA}) \end{aligned}$$

$$\underline{a} = \underline{a}' + \underline{a}_{tr} + \underline{a}_c = 0$$



$\underline{a} = 0, \underline{v} = 0$ L'OSSERVATORE NEL SIST. INERZIALE VEDE LA FORMICA FERMA, COME AVEVAMO PREVISTO

IL DISCO INIZIALMENTE FERMO ACCELERAZIONE ANGOLARE α_0 COSTANTE IN SENSO ANTICLOCKWISE

ANALIZZIAMO IL MOTO AL GENERICO TEMPO t DEL DISCO

$\underline{\omega} = \alpha_0 t \underline{k}$ ACCEL. ANGOLARE COSTANTE

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}(0) + \int_0^t \underline{\alpha} dt = \alpha_0 t \underline{k}$$

DISCO INIZIALMENTE FERMO

MOTO DELLA FORMICA - VELOCITA'

$$\underline{v} = \underline{v}' + \underline{v}_{tr}$$

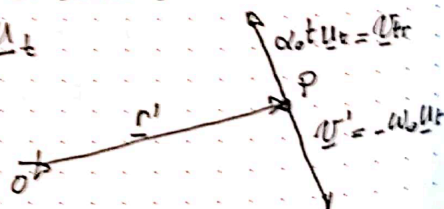
$$\underline{v}' = -\omega_0 R \underline{u}_t \quad (\text{CALCOLATA PRIMA})$$

$$\underline{v}_{tr} = \underline{\omega} \times \underline{r}' = \alpha_0 t \underline{k} \times \underline{r}' = \alpha_0 t R \underline{u}_t$$

IL MODULO AUMENTA LINEARMENTE CON t LA DIREZIONE E' TANG.

SOMMANDO I TERMINI OTTIENIAMO

$$\underline{v} = (\alpha_0 t - \omega_0) R \underline{u}_t$$



ACCELERAZIONE

$$\underline{a} = \underline{a}' + \underline{a}_{tr} + \underline{a}_c$$

$$\underline{a}' = +\omega_0^2 R \underline{u}_n \quad (\text{CALCOLATA PRIMA})$$

$$\underline{a}_{tr} = \underline{\omega} \times \underline{\omega} \times \underline{r}' + \underline{\alpha} \times \underline{r}' = -\omega^2 \underline{r}' + \underline{\alpha} \times \underline{r}'$$

QUESTA VOLTA ABBIAMO ANCHE LA COMPONENTE TANGENZIALE

$$= \omega^2 R \underline{u}_n + \alpha_0 R \underline{u}_t =$$

$$= \alpha_0^2 t^2 R \underline{u}_n + \alpha_0 R \underline{u}_t$$

MODULO COSTANTE, DIR. TANGENZIALE

MODULO CHE AUMENTA PROP. A t^2 , DIREZIONE CENTRIFUGA

$$\underline{a}_c = 2\underline{\omega} \times \underline{v}' = 2(\alpha_0 t) \underline{k} \times (-\omega_0 R \underline{u}_t)$$

$$= -2\alpha_0 t \omega_0 R \underline{u}_n$$

MODULO AUMENTA LINEARMENTE CON t , DIREZIONE CENTRIFUGA

$$\underline{Q} = \omega_0^2 R \underline{u}_n +$$

$$+ \alpha_0^2 t^2 R \underline{u}_n + \alpha_0 R \underline{u}_t +$$

$$- 2\alpha_0 \omega_0 t \underline{u}_n =$$

$$= (\omega_0^2 R - 2\alpha_0 \omega_0 t + \alpha_0^2 t^2 R) \underline{u}_n + \alpha_0 R \underline{u}_t$$

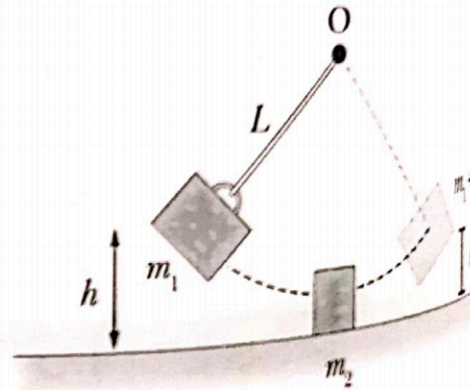
$$= (\alpha_0 t - \omega_0)^2 R \underline{u}_n + \alpha_0 R \underline{u}_t$$

Esercizi sui sistemi di punti e
urti tra punti materiali

ESERCIZIO 11.6

Un corpo di massa $m_1 = 1 \text{ kg}$ è appeso ad una fune ideale di lunghezza $L = 0.5 \text{ m}$ vincolata ad un punto fisso nel piano verticale. Il pendolo viene lasciato libero da un'altezza $h = 0.25 \text{ m}$ dal suolo e quando si trova nel punto più basso della sua traiettoria urta una massa $m_2 = 0.1 \text{ kg}$ in quiete. Sapendo che l'urto è completamente anelastico si determinino:

- la tensione T della fune un istante prima dell'urto;
- l'altezza massima h_f raggiunta dal pendolo dopo l'urto.



Traccia di svolgimento discussa a ricevimento

- Prima dell'urto $\rightarrow$ pendolo di lunghezza L lasciato libero da una posizione iniziale ϑ_0
- $L - L \cos \vartheta_0 = h$
- $\rightarrow \vartheta_0$

- $v_{1,in} = \sqrt{2gh}$
- $v_{2,in} = 0$
- $v_{CM} = \frac{m_1 v_{1,in} + m_2 \cdot 0}{m_1 + m_2}$
- Urto anelastico
- $v_{1,fin} = v_{2,fin} = v_{CM}$
- $m = m_1 + m_2$
- $mgh_f = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$

