

Esercizi su urti e moti relativi

Esercizio n. 1

Una molla con costante elastica k di massa trascurabile è utilizzata per lanciare un corpo di massa m_1 approssimabile come un punto materiale su una superficie orizzontale. La compressione iniziale della molla è x_0 . Dopo il lancio il punto materiale percorre un tratto liscio, al termine del quale urta contro un secondo corpo di massa m_2 . A seguito dell'urto, che è completamente anelastico, la velocità dei due corpi è pari a $\frac{1}{4}$ di quella che aveva il primo corpo prima dell'urto. Dopo l'urto, i due corpi scivolano lungo un piano orizzontale scabro di lunghezza L , arrestandosi a una distanza d dall'inizio del tratto stesso.

Q1: quanto vale la massa m_2 del secondo corpo?

Q2: quali sono le velocità dei corpi prima e dopo l'urto? Qual è la percentuale di energia cinetica dissipata durante l'urto?

Q2: quanto vale il coefficiente di attrito dinamico μ_d tra i corpi e la superficie scabra?

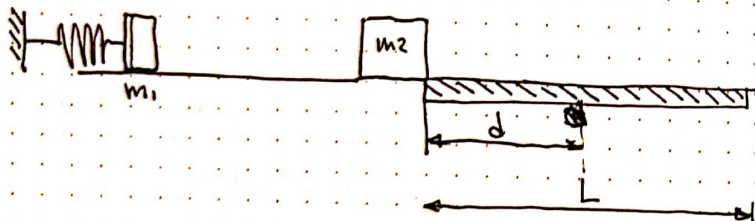
Q3: di quanto devo comprimere la molla affinché i due corpi riescano ad attraversare tutta la superficie scabra senza fermarsi? [Valori numerici: $x_0 = 1\text{ cm}$, $k = 10000\text{ N/m}$, $m_1 = 0.1\text{ kg}$, $d = 0.16\text{ m}$, $L = 0.3\text{ m}$]

SVOLGIMENTO DELLA PROVA SCRITTA DEL
17/06/2021 - PARTE DI MECCANICA

ESERCIZIO n° 1

FASI DEL MOTO

- IL PUNTO MATERIALE m_1 È LANCIATO DA UNA MOLLA CON COSTANTE ELASTICA k SU UNA SUPERFICIE ORIZZONTALE LISCIA
- IL PUNTO URTA CON UN SECONDO CORPO, L'URTO È COMPLETAMENTE ANELASTICO
- I DUE CORPI, UNITI, SCIVOGLIANO SU UNA SUPERFICIE CON ATRITO, PERCORRENDO LA DISTANZA d



Q1 QUANTO VALE LA MASSA DEL SECONDO CORPO?

- L'URTO È COMPLETAMENTE ANELASTICO, DOPO L'URTO I DUE CORPI RIMANGONO UNITI E LA LORO VELOCITÀ È $v_1 = \frac{v_0}{4}$ ESSENDO v_0 LA VELOCITÀ DI m_1 PRIMA DELL'URTO.

DURANTE L'URTO SI CONSERVA ~~ENERGIA~~ LA QUANTITÀ DI MOTO DEL SISTEMA, QUINDI

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v_1$$

RICORDANDO CHE $v_1 = v_0/4$

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) \frac{v_0}{4}$$

$$4m_1 = m_1 + m_2$$

$$m_2 = 3m_1 = 0.3 \text{ kg}$$

Q2 QUALI SONO LE VELOCITÀ DEI CORPI PRIMA E DOPO L'URTO?

PRIMA DELL'URTO, IL CORPO m_2 È IN QUIETE, MENTRE IL CORPO m_1 SI MUOVE ALLA VELOCITÀ v_0 . PER CALCOLARE v_0 , DATO CHE LA SUPERFICIE SU CUI SCORRE m_1 È LISCIA POSSIAMO UTILIZZARE IL FATTO CHE L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA.

NELL'ISTANTE IN CUI IL CORPO È LANCIATO DALLA MOLLA

$E_k = 0$ (IL CORPO m_1 È INIZIALMENTE FERMO)

$E_p = \frac{1}{2} k x_0^2$ (LA MOLLA È COMPRESSA LA SUA DEFORMAZIONE INIZIALE È x_0)

DURANTE LO SCIVOLAMENTO SULLA SUPERFICIE LISCIA.

$E_k = \frac{1}{2} m v_0^2$ (IL CORPO SCIVOLA CON VELOCITÀ v_0)

$E_p = 0$ (LA MOLLA NON È PIÙ A CONTATTO, LA SUPERFICIE È ORIZZONTALE)

PER LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA ABBIAMO PERTANTO

$$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} x_0 =$$

DOPO L'URTO ABBIAMO CHE LE DUE MASSE ($m_1 + m_2$) SI MUOVONO CON VELOCITÀ

$$v_1 = v_0/4 =$$

~~ORA~~ CALCOLIAMO LA PERCENTUALE DI ENERGIA CINETICA DISSIPATA DURANTE L'URTO

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} k x_0^2$$

$$E_{kfin} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4m_1 \left(\frac{v_0}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} m_1 \frac{v_0^2}{4}$$

VARIAZIONE PERCENTUALE

$$p = \frac{E_{kin} - E_{kfin}}{E_{kin}} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_0^2 - \frac{1}{2} m_1 \frac{v_0^2}{4}}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} =$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} \left(1 - \frac{1}{4}\right)}{\cancel{\frac{1}{2} m_1 v_0^2}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$p\% = p \cdot 100 = 75\%$$

DURANTE L'URTO SI DISSIPA IL 75% DELL'ENERGIA CINETICA

Q3 QUANTO VALE IL COEFFICIENTE DI
ATTRITO DINAMICO μ_0 TRA I CORPI E LA
SUPERFICIE?

ALL'INIZIO DEL TRATTO CON ATTRITO
L'ENERGIA CINETICA DEL SISTEMA E

$$E_{k0} = E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{8} m_1 v_0^2$$

DOPO AVER PERCORSO UNA DISTANZA d ,
I CORPI SI FERMANO, SI ANNULLA QUINDI
L'ENERGIA CINETICA

$$E_{kf} = 0$$

LA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA E
PARI AL LAVORO DELLA FORZA DI ATTRITO

$$W_{ad} = -\mu_0 (4m_1) g d$$

$\uparrow$
($m_1 + m_2 = 4m_1$)

QUINDI

$$E_{kf} - E_{k0} = W_{ad}$$

$$-\frac{1}{8} m_1 v_0^2 = -\mu_0 (4m_1) g d$$

$$\rightarrow \mu_0 = \frac{v_0^2}{32 g d}$$

Q4 DI QUANTO DEVO COMPRIMERE LA MOLLA
AFFINCHÉ I CORPI POSSANO ATTRAVERSARE
IL TRATTO DI LUNGHEZZA L SENZA FERMARSI?

→ PER ATTRAVERSARE TUTTO IL TRATTO
DI LUNGHEZZA L , LA FORZA DI ATTRITO
COMPIRA UN LAVORO

$$W_{ad} = -4\mu_0 m_1 g L$$

SUPPONENDO CHE LA VELOCITA' FINALE
QUANDO E' STATO SUPERATO TUTTO IL
TRATTO CON ATTRITO, SIA NULLA,

L'ENERGIA CINETICA CON CUI I DUE
CORPI INIZIANO AD ATTRAVERSARE IL
TRATTO E

$$E_{k0} = \frac{1}{2} (4m_1) v_i^2$$

TALE CHE

$$\frac{1}{2} (4m_1) v_i^2 = -4\mu_0 m_1 g L$$

$$v_i^2 = 2\mu_0 g L$$

TORNANDO INDIETRO, AFFINCHÉ I
DUE PUNTI SI MUOVANO, DOPO L'URTO,
CON VELOCITA' v_i , IL PUNTO m_1 PRIMA

DELL'URTO DEVE AVERE UNA VELOCITÀ v_0
TALE CHE

$$m_1 v_0 = 4 m_1 v_1$$

$$v_0 = 4 v_1$$

$$v_0^2 = 16 v_1^2 = 32 \mu_d g L$$

AFFINCHÉ IL PUNTO M_1 ABBA VELOCITÀ v_0
PRIMA DELL'URTO, DEVO ~~ANZI COMPRENDERE~~
~~LA SOLA FORZA~~ APPLICARE ALLA MOLLA UNA
DEFORMAZIONE x_0 TALE CHE

$$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \quad (\text{CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA})$$

$$x_0^2 = \frac{m_1}{k} \cdot v_0^2 = \frac{m_1}{k} \cdot 32 \mu_d g L$$

$$\rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{32 m_1}{k} \mu_d g L}$$

Esercizio n. 3

Su un disco, che ruota su un piano orizzontale con velocità angolare ω costante rispetto a un sistema di riferimento inerziale con origine nel centro del disco e assi x e y , è stata realizzata una guida con direzione radiale in cui scorre senza attrito un cursore, con velocità costante di modulo v' , assimilabile a un punto materiale di massa m . Nell'istante iniziale la guida è allineata con l'asse x e il cursore si trova nell'origine del sistema di riferimento, al centro del disco. Dopo un tempo t_0 la guida è allineata con l'asse y e il cursore si è spostato di una quantità in modulo pari a r' . Analizziamo nel dettaglio questa configurazione:

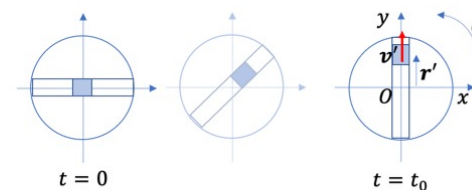
1: Qual è la velocità $\mathbf{v}'$ del cursore vista da un osservatore solidale al disco? Qual è la velocità angolare ω del disco? Qual è la velocità $\mathbf{v}$ del cursore vista da un osservatore solidale al sistema di riferimento inerziale?

2: Qual è l'accelerazione relativa $\mathbf{a}'$? Qual è l'accelerazione $\mathbf{a}$ vista da un osservatore inerziale?

3: Quali sono le forze apparenti sul cursore? Quanto vale la risultante delle forze applicate al cursore?

4: Il moto del cursore è realizzato tramite un attuatore che può applicare solo forze in direzione radiale, il cursore scorre senza attrito nella guida, quanto vale la forza applicata dall'attuatore? Quanto vale la reazione vincolare della guida?

Nota: per le quantità vettoriali, occorre specificare modulo, direzione e verso oppure le componenti cartesiane. [Valori numerici: $m = 0.1 \text{ kg}$, $t_0 = 0.25 \text{ s}$, $r' = 10 \text{ cm}$]



ESERCIZIO n° 3

Q1

Scegliamo il sistema di riferimento

- inerziale

- origine nell'asse di rotazione del disco

- asse x allineato con la guida nella posizione iniziale

- asse y sul piano del disco

- asse z perpendicolare al piano del moto

nota: il piano xy è orizzontale

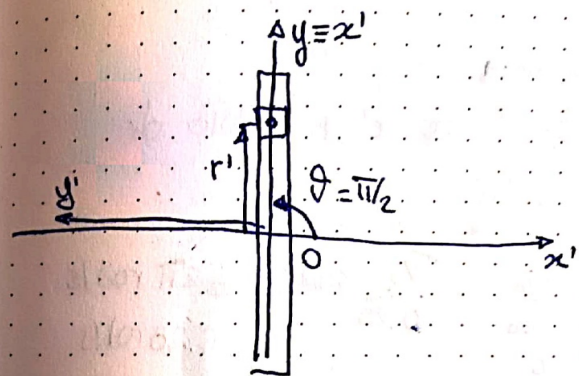
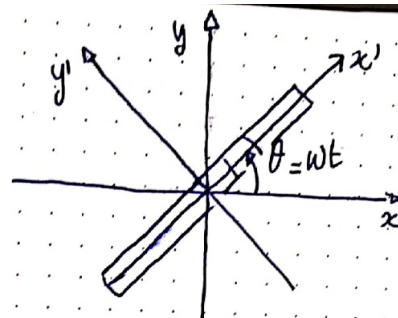
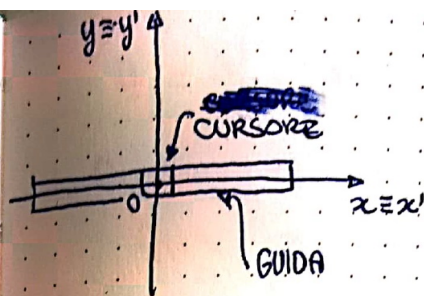
- solidale al disco

- origine coincidente con il sistema inerziale

- asse x' allineato con la guida durante il moto

- asse y' sul piano del disco

- asse z' coincidente con z



• VELOCITÀ DEL CURSORE visto da un osservatore solidale al disco, $\underline{v}'$

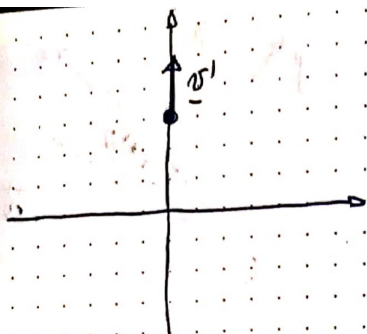
• modulo

$$v' = r' / t_0 = 0.4 \text{ m/s}$$

• direzione: allineato con l'asse x'

$$\underline{v}' = v' \underline{x}' = v' \underline{j}'$$

(nella configurazione analizzata l'asse x' coincide con y)



• VELOCITÀ ANGOLARE

nel tempo t_0 l'asse x' è ruotato di un angolo $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$\rightarrow \omega = \frac{\theta_0}{t_0} = \frac{\pi/2}{0.25} \text{ rad/s} = 2\pi \text{ rad/s} = 6.28 \text{ rad/s}$$

Q2 $\left\{ \begin{array}{l} \omega = \omega k \\ \uparrow \text{IL VETTORE } \omega \text{ È DIRETTO COME L'ASSE } z \end{array} \right.$

Accelerazione a' del cursore "visto" dal sistema di riferimento solidale al disco

- Rispetto al disco il cursore si muove con velocità costante, quindi:

$$a' = 0$$

- Rispetto al sistema di riferimento inerziale

$$\underline{a} = \underline{a}' + \underline{a}_{tr} + \underline{a}_c = \underline{a}_{tr} + \underline{a}_c$$

Accelerazione di trascinamento

$$\underline{a}_{tr} = \underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}' + \underline{\omega} \times \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

ω è costante

L'origine del sistema di riferimento del disco è fissa e coincide con o

$$= \underline{\omega} \times \underline{\omega} \times \underline{r}' = -\omega^2 \underline{r}'$$

nella configurazione analizzata.

$$\underline{a}_{tr} = -\omega^2 \underline{r}'$$

in modulo

$$a_{tr} = 3.95 \text{ m/s}^2$$

accelerazione complementare (Coriolis)

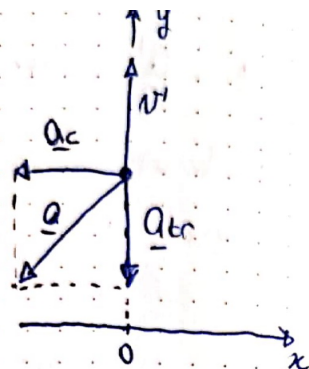
$$\underline{a}_c = 2\omega \times \underline{r}'$$

in modulo

$$a_c = 2\omega r' = 1.26 \text{ m/s}^2$$

direzione $\rightarrow$ come y' (con le regole della mano destra).

$$\underline{a}_c = -a_c \underline{i}$$



Complessivamente

$$\underline{a} = \underline{a}_{tr} + \underline{a}_c$$

$$= a_x \underline{i} + a_y \underline{j}$$

$$a_x = -a_c = -0.126 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = -a_{tr} = -0.395 \text{ m/s}^2$$

Q3

Forze opposte agenti sul cursore

$$\underline{F}_{tr} = -m \underline{a}_{tr} = m \omega^2 r \underline{j}$$

$$\underline{F}_c = -m \underline{a}_c = m \omega^2 r \underline{i}$$

forza di Coriolis

forza di trascinamento



In modulo

$$F_{tr} = 0.395 \text{ N}$$

$$F_c = 0.126 \text{ N}$$

Calcoliamo la risultante delle forze applicate al cursore

$$\underline{F} = m \underline{a}$$

$$\rightarrow F_x = m a_x = -0.126 \text{ N}$$

$$F_y = m a_y = -0.395 \text{ N}$$

Q4

Se il cursore può applicare forze solo in direzione della guida

$$\underline{F}_a = F_a \underline{j}$$

la guida è priva di attrito quindi

$$\underline{F}_r = F_r \underline{i} + F_{rk} \underline{k}$$

la reazione è perpendicolare alla guida quindi perpend. a $\underline{j}$

Il piano è orizzontale (il peso agisce in direzione z)

$$\underline{F} = \underline{F}_a + \underline{F}_{ao} + \underline{F}_p + \underline{F}_{az}$$

$$\underline{F} = m \underline{a}$$

↑ forza peso

Quindi risulta

$$\underline{F}_a = F_{aj} = -0.395 \text{ Nj}$$

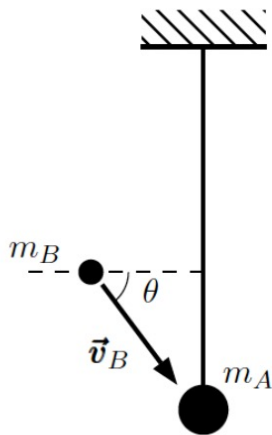
$$\underline{F}_z = F_{zo} \underline{i} + F_{az} \underline{k}$$

~~Quindi~~

$$\textcircled{a} \quad F_{ax} = -0.126 \text{ N}$$

$$F_{az} = mg = 0.981 \text{ N}$$

Esercizio n. 3



Un corpo di massa m_A appeso al soffitto tramite un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza l si trova inizialmente in quiete nella configurazione di equilibrio in cui il filo è verticale. Ad un certo istante il corpo è urtato o da un secondo corpo di massa m_B proveniente dall'alto da una direzione che forma un angolo θ con l'orizzontale. L'urto è completamente anelastico. Dopo l'urto i due corpi rimangono fissati al filo che ruota di un angolo φ rispetto alla verticale, per poi tornare indietro. Calcolare:

- l'energia cinetica del sistema subito dopo l'urto;
- il modulo della velocità di B immediatamente prima dell'urto e la percentuale di energia cinetica dissipata durante l'urto;
- l'impulso della reazione vincolare tra il filo e il supporto fisso durante l'urto

e il valore medio della tensione del filo durante l'urto, supponendo che esso si sviluppi in un tempo Δt_u ;

d) la tensione del filo nell'istante in cui il sistema, durante l'oscillazione conseguente all'urto, ripassa dalla configurazione in cui il filo è verticale.

[$m_A = 5.00 \text{ kg}$, $m_B = 3.00 \text{ kg}$, $\theta = 60^\circ$, $\varphi = 60^\circ$, $l = 60 \text{ cm}$, $\Delta t_u = 0.05 \text{ s}$]

ESERCIZIO n° 3

① Dopo l'urto, i due corpi rimangono uniti tra loro (urto perfettamente anelastico) e collegati al filo inestensibile, che ruota fino ad raggiungere un angolo φ rispetto alla verticale.

Possiamo studiare il moto del sistema in questa fase come un pendolo semplice di lunghezza l e massa $(m_A + m_B)$.

In particolare, se consideriamo l'energia meccanica nelle configurazioni di massima ampiezza di rotazione del filo e immediatamente dopo l'urto abbiamo

→ quando il filo raggiunge il

massimo angolo di rotazione

$$E_m = E_p + E_k = \begin{matrix} \text{(quando la rotazione} \\ \text{è massima la} \\ \text{vel. è nulla)} \end{matrix} \\ = (m_A + m_B) g l (1 - \cos \varphi)$$

→ immediatamente dopo l'urto abbiamo invece

$$E_m = E_p + E_k = \\ = \frac{1}{2} (m_A + m_B) v_{AB}^2$$

L'energia cinetica del sistema ^{immediatamente} dopo l'urto risulta quindi

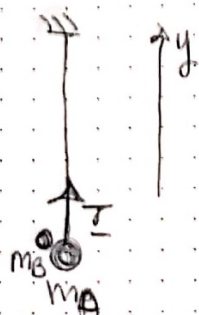
$$E_k = \frac{1}{2} (m_A + m_B) v_{AB}^2 = \quad (1) \\ = (m_A + m_B) g l (1 - \cos \varphi)$$

② Analizziamo l'urto

- l'urto è perfettamente anelastico, quindi l'energia cinetica non si conserva

- la massa m_A è collegata a un filo che esercita una tensione

I (incognita per il momento), quindi la quantità di moto Totale
? Non si conserva ma...



So che nell'istante in cui avviene l'urto il filo è in posizione verticale, quindi $\vec{T}$ sarà diretto come l'asse y (verticale). Quindi l'eventuale variazione delle quantità di moto sarà in direzione y .

$$\Delta \vec{P} \neq 0 \quad \Delta \vec{P} = \vec{J} \text{ impulso delle forze esterne durante l'urto}$$

$$\Delta \vec{P} = \Delta P_x \vec{i} + \Delta P_y \vec{j}$$

$$\rightarrow \Delta P_x = 0$$

$$\Delta P_y = J_T \rightarrow \text{impulso di } T \text{ durante l'urto}$$

lungo x le quantità di moto si conservano

$$\underbrace{m_B v_B \cos \theta}_{P_{\text{fin } x}} = \underbrace{(m_A + m_B) v_{AB}}_{P_{\text{fin } x}} \quad (2)$$

Il termine v_{AB} possiamo calcolarlo grazie alle considerazioni fatte nello sviluppo del punto (a)

In particolare dall'equazione (1) delle pagine precedenti otteniamo

$$\frac{1}{2} (m_A + m_B) v_{AB}^2 = (m_A + m_B) g l (1 - \cos \theta)$$

$$\rightarrow v_{AB} = \sqrt{2 g l (1 - \cos \theta)}$$

Sostituendo nell'equazione (2) possiamo calcolare le velocità v_B (in modulo)

$$m_B v_B \cos \theta = (m_A + m_B) \sqrt{2 g l (1 - \cos \theta)}$$

$$v_B = \frac{(m_A + m_B)}{m_B \cos \theta} \sqrt{2 g l (1 - \cos \theta)}$$

Passiamo a calcolare quindi la variazione di energia cinetica durante l'urto

- Dopo l'urto

$$E_{\text{kin}} = (m_A + m_B) g l (1 - \cos \varphi)$$

- Prima dell'urto

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_B v_B^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_B (m_A + m_B)^2}{m_B^2 \cos^2 \theta} \cdot 2 g l (1 - \cos \varphi)$$

Variazione

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{E_{\text{kin}} - E_{\text{kin}}}{E_{\text{kin}}} \cdot 100 =$$

$$= \frac{(m_A + m_B) g l (1 - \cos \varphi) - \frac{(m_A + m_B)^2}{m_B \cos^2 \theta} g l (1 - \cos \varphi)}{\frac{(m_A + m_B)^2}{m_B \cos^2 \theta} g l (1 - \cos \varphi)}$$

③ Nel punto B abbiamo già visto che $\Delta p_y \neq 0$

$$\Delta p_y = 0 - (-m_B v_B \sin \theta)$$

$$\rightarrow \underline{J} = J_y \underline{j}$$

$$\text{con } J_y = m_B v_B \sin \theta$$

Se l'urto avviene in un tempo

$\Delta t_u = 0.055$, il valore medio della tensione T durante l'urto vale

$$T = \frac{J_y}{\Delta t_u} = \frac{m_B v_B \sin \theta}{\Delta t_u}$$

④ durante il moto oscillatorio, quando le masse ripassano dalla configurazione in cui il filo è verticale, abbiamo

$$(m_A + m_B) a = T - (m_A + m_B) g$$

$$\rightarrow T = (m_A + m_B)(a + g) =$$

$$= (m_A + m_B) \left(\frac{v_{AB}^2}{l} + g \right)$$

Esercizio n. 2

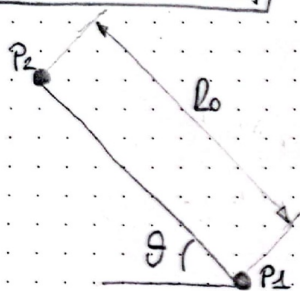
Due punti materiali di uguale massa $m = 1.5 \text{ kg}$ si trovano alle estremità opposte di un piano inclinato di un angolo $\theta = \pi/4$ rad rispetto all'orizzontale, ad una distanza $l_0 = 1.5 \text{ m}$ tra loro. In un determinato istante $t = 0$, il punto posto nella posizione più in alto viene lasciato libero di scivolare lungo il piano a partire da una velocità nulla, mentre quello più in basso è lanciato verso l'alto con una

velocità iniziale $v_0 = 2 \text{ m/s}$ con direzione parallela al piano inclinato [si assuma $g = 9.81 \text{ m/s}^2$].

1. Determinare dopo quanto tempo i due punti si incontrano, a che distanza dalle rispettive posizioni iniziali e con quali velocità.
2. L'urto tra i due punti è perfettamente anelastico. Studiare il moto dei due punti dopo l'urto, calcolare l'energia cinetica dissipata durante l'urto.
3. Vengono ripetuti in seguito lanci successivi, in cui la velocità iniziale del punto più in alto è sempre nulla, mentre quella del punto in basso è fatta variare. Per quali valori di v_0 i punti effettivamente urtano tra loro in un punto lungo il piano inclinato? Esistono dei valori di v_0 per i quali l'urto non avviene?
4. Risolvere il punto 1. Supponendo che tra i punti materiali e il piano inclinato sia presente attrito, caratterizzato da un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.2$.

SVOLGIMENTO COMMENTATO
DEL COMPITO DI FISICA 1 DEL 5/11/2021
- PARTE DI MECCANICA -

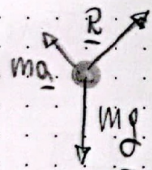
ESERCIZIO n° 2



Moto del punto P_1

$$\underline{F} = m \underline{a}$$

$$m \underline{g} + \underline{R} = m \underline{a}$$



Considerando le componenti
nelle direzioni parallele e perpendicolare
al piano si ha

$$\begin{cases} m a = -m g \sin \theta \\ R + m g \cos \theta = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene
 $a = g \sin \theta$

→ il punto P_1 si muove con moto
uniformemente accelerato con accelera-
zione $a_1 = -g \sin \theta$

→ velocità $v_1 = v_0 - g \sin \theta t$

→ spostamento $s_1(t) = v_0 t - g \sin \theta \frac{t^2}{2}$

Per il punto P_2 , analogamente, risulta

$$a_2 = a_1 = -g \sin \theta$$

$$v_2(t) = -g \sin \theta t$$

$$s_2(t) = l_0 - \frac{g \sin \theta}{2} t^2$$

I due punti P_1 e P_2 si incontrano quando

$$s_1(t) = s_2(t)$$

Quindi:

$$v_0 t - g \sin \theta \frac{t^2}{2} = l_0 - \frac{g \sin \theta}{2} t^2$$

Calcolare la distanza percorsa dal primo disco, la velocità del suo centro di massa e la velocità angolare nell'istante in cui
 si separa (perdita di aderenza)?
 - Calcola mantenendo il limite di attrito

Sviluppando l'equazione si ottiene

$$v_0 t - l_0 = 0$$

Risolvendo l'equazione nell'incognita t troviamo dopo quanto tempo dall'istante iniziale i due punti si incontrano.

$$\textcircled{1} \quad t_i = \frac{l_0}{v_0} = 0.55$$

⚠ Attenzione - nel testo del compito era indicato $v_0 = 2 \text{ m/s}$ ma era un errore di battitura, il valore corretto era 3 m/s

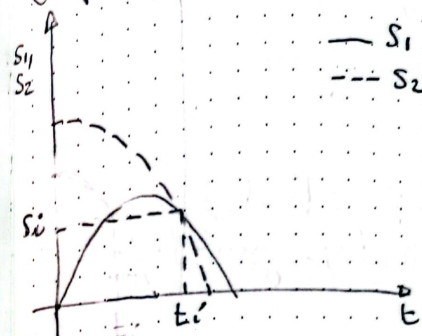
A questo punto, la posizione in cui i due punti si incontrano la passo a trovare

$$s_1 = s_2(t_i) = s_2(t_i) = l_0 - g \sin \theta \frac{t_i^2}{2}$$

$$s_i = 0.632 \text{ m} \textcircled{1}$$

⚠ Sviluppando il calcolo con $v_0 = 2 \text{ m/s}$ ottengo un valore negativo $\rightarrow$ i punti non si incontrano sul piano

Graficamente



⚠ questa parte non era richiesta nel compito, era solo per spiegare

Calcoliamo la velocità con cui si incontrano

$$v_1 = v_0 - g \sin \theta t_i = -0.46 \text{ m/s}$$

$$v_2 = -g \sin \theta t_i = -3.46 \text{ m/s} \textcircled{1}$$

Studiamo l'urto

- Le quantità di moto si conservano
- l'urto è perfettamente anelastico, dopo l'urto i punti hanno la stessa velocità

$$m v_1 + m v_2 = 2m v_{12}$$

$$v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{2} = -1.968 \text{ m/s} \textcircled{2}$$

Dopo l'urto i due punti si muovono insieme, dalla posizione s_i , con velocità v_{12} e accelerazione $-g \sin \theta$.

$$\textcircled{2} \begin{cases} a_{12} = -g \sin \theta \\ v(t) = v_{12} - g \sin \theta (t - t_i) \\ s(t) = s_i - v_{12}(t - t_i) - \frac{g \sin \theta (t - t_i)^2}{2} \end{cases}$$

Calcoliamo l'energia cinetica dissipata durante l'urto

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v_{12}^2 + \frac{1}{2} m v_{12}^2 = 9.19 \text{ J}$$

$$E_{kfin} = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot v_{12}^2 = 5.81 \text{ J}$$

$$\textcircled{2} \Delta E_k = E_{kfin} - E_{kin} = -3.375 \text{ J}$$

Per verificare per quali valori di v_0 può avvenire l'urto, riprendiamo le espressioni di t_i e s_i :

$$t_i = l_0 / v_0$$

$$s_i = l_0 - g \sin \theta \frac{t_i^2}{2}$$

Scriviamo s_i in funzione di v_0 .

$$s_i = l_0 - g \sin \theta \frac{l_0^2}{v_0^2}$$

Affinché l'urto possa avvenire lungo il piano è necessario che

$$0 \leq s_i \leq l_0$$

sicuramente $s_i \leq l_0$ (basta osservare la sve espressione).

Quindi studiamo per quali valori di v_0 risulta $s_i \geq 0$

$$l_0 - g \sin \theta \frac{l_0^2}{2v_0^2} \geq 0$$

(moltiplico per v_0^2 e divido per l_0)

$$v_0^2 - \frac{g \sin \theta l_0}{2} \geq 0$$

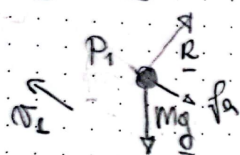
$$v_0^2 \geq \frac{g \sin \theta l_0}{2}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} v_0 \geq \sqrt{\frac{g \sin \theta l_0}{2}} \\ v_{0\min} = \sqrt{\frac{g \sin \theta l_0}{2}} = 2.28 \text{ m/s} \end{cases}$$

(per questo con $v_0 = 2 \text{ m/s}$ il punto ha due soluzioni negative)

maximale il moto dei due punti in presenza di attrito

$$F = ma$$



Punto P_1 : finché la sua velocità è positiva

→ in direzione perpendicolare al piano

$$R - mg \cos \theta = 0$$

$$R = mg \cos \theta$$

→ in direzione parallela al piano

$$ma_1 = -mg \sin \theta - \mu R$$

$$a_1 = -g \sin \theta - \mu g \cos \theta$$

Quando P_1 inizia a scendere la forza di attrito cambia segno

$$a_1 = -g \sin \theta + \mu g \cos \theta$$

Il punto P_2 scende, quindi $v_2 < 0$ e la sua accelerazione è quindi

$$a_2 = -g \sin \theta + \mu g \cos \theta$$

Velocità

Punto P_1 , fase iniziale del moto (salito)

$$v_{t_5} = v_0 + a_1 t$$

$$s_{t_5} = v_0 t + a_1 \frac{t^2}{2}$$

(per $t_5 = \frac{v_0}{a_1}$)

il moto si inverte

$$s_{top} = v_0 t_5 - a_1 \frac{t_5^2}{2}$$

Fase successiva, discesa

$$v_{id} = +a_{id}(t - t_5)$$

$$s_{id} = s_{top} + a_{id} \frac{(t - t_5)^2}{2}$$

Il punto P_2 scende durante tutto il moto

$$v_2 = +a_2 t$$

$$s_2 = l_0 + a_2 \frac{t^2}{2}$$

L'urto avviene quando

$$s_{id} = s_2$$

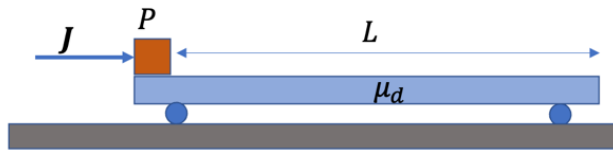
$$l_0 + a_2 \frac{t^2}{2} = s_{top} + a_{id} \frac{(t - t_5)^2}{2}$$

$$(a_{id} = a_2)$$

$$l_0 + a_2 \frac{t^2}{2} = s_{top} + \frac{a_2 t^2}{2} - \frac{a_2 t_5^2}{2} + a_2 t t_5$$

... Risolvendo calcolo il tempo t_i in cui si incontrano...

Esercizio n. 2



Un punto materiale di massa M_p si trova all'estremità di un carrello di lunghezza L e massa M_c . Il contatto tra punto materiale e carrello è caratterizzato da un coefficiente di attrito dinamico μ_d . Il carrello scorre senza attrito su una superficie orizzontale. Il sistema è inizialmente in quiete. Al tempo $t = 0$ s sul punto materiale viene

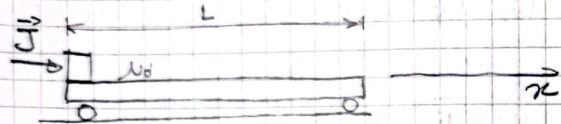
applicata un'azione impulsiva, caratterizzata da un impulso diretto come indicato nella figura e con un modulo pari a J . Determinare:

- L'accelerazione del punto materiale e del carrello dopo l'applicazione dell'impulso
- Il tempo impiegato dal punto materiale per scivolare lungo il carrello
- La velocità con cui il punto materiale cade dal carrello, vista da un osservatore solidale al carrello
- Il valore dell'impulso affinché il punto materiale si arresti esattamente all'estremità opposta del carrello, senza cadere.

[Valori numerici: $M_p = 0.1$ kg, $M_c = 5$ kg, $L = 1.3$ m, $\mu_d = 0.2$, $g = 9.81$ m/s², $J = 2$ Ns]

PROVA SCRITTA DEL 24/2/23
SOLUZIONE PARTE DI MECCANICA
(COMMENTATA)

ESERCIZIO n° 2



- A. All'istante $t=0s$ viene applicato un impulso $\vec{J}$ al punto materiale di massa M_p , inizialmente in quiete
→ Per il teorema dell'impulso risulta

$$\vec{J} = \Delta \vec{p}$$

Proiettando in direzione x

$$J = M_p(v_0 - v_{in})$$

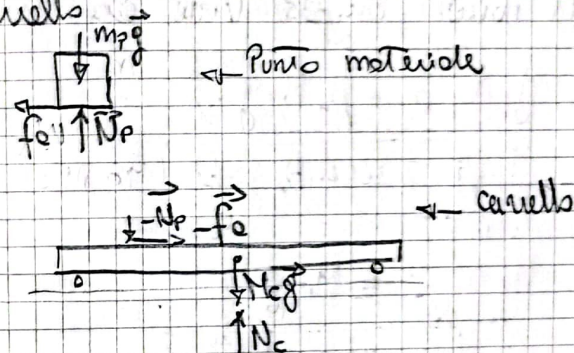
↑ velocità iniziale nulla

velocità del punto materiale dopo l'impulso (componente lungo x)

$$\rightarrow v_0 = \frac{J}{M_p} = 20 \text{ m/s}$$

B. ACCELERAZIONE PUNTO MAT. E CARRELLO

Dopo l'impulso, il punto materiale scorre lungo il carrello (anch'esso inizialmente in quiete), tra punto e carrello è presente attrito, caratterizzato da coefficiente di attrito dinamico μ_d .
Forze agenti su punto materiale e carrello



il moto avviene in direzione x , quindi risulta

$$\begin{cases} -M_p g + N_p = 0 \rightarrow N_p = M_p g \\ -N_p - M_c g + N_c = 0 \rightarrow N_c = (M_p + M_c)g \end{cases}$$

equazione di moto di punto materiale e carrello, proiettate in direzione x

Modello di attrito di Coulomb

$$f_a = -\mu_s N_p = -\mu_s M_p g$$

dato che il moto si svolge
in direzione concorde con x

Equazioni di moto del punto materiale
e del carrullo, comprese in direzione x

$$M_p a_p = -\mu_s M_p g$$

$$\rightarrow a_p = -\mu_s g = -1.96 \text{ m/s}^2$$

$$M_c a_c = \mu_s M_p g$$

$$a_c = \mu_s \frac{M_p}{M_c} g = 0.0392 \text{ m/s}^2$$

2) Tempo impiegato dal punto materiale
per scivolare lungo il carrullo

SOLUZIONE POSSIBILE $\rightarrow$ studio il moto
osservando da un sistema di riferimento
"esterno" a carrullo e punto materiale

Punto materiale

- $\rightarrow$ moto uniformemente accelerato con
- $\rightarrow$ posizione iniziale $x_p(0) = 0$
- $\rightarrow$ velocità iniziale v_0
- $\rightarrow$ accelerazione $a_p = -\mu_s g$

$$\text{risultato } x_p(t) = v_0 t - \frac{\mu_s g}{2} t^2$$

Carrullo

- $\rightarrow$ moto uniformemente accelerato con
- $\rightarrow$ posizione iniziale $x_c(0) = L$ (punto lo
spigolo a destra come riferimento)
- $\rightarrow$ velocità iniziale nulla
- $\rightarrow$ accelerazione $a_c = \mu_s \frac{M_p}{M_c} g$

risultato

$$x_c(t) = L + \frac{1}{2} \mu_s \frac{M_p}{M_c} g t^2$$

Il punto materiale raggiunge lo spigolo
del carrullo quando

$$x_p(t) = x_c(t)$$

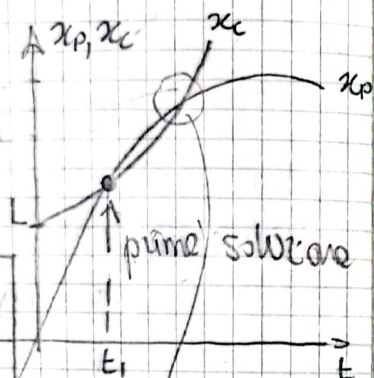
$$N_0 t - \frac{1}{2} \mu g t^2 = L + \frac{1}{2} \mu g \frac{M_p}{M_c} t^2$$

Risolvere per calcolare t

$$\frac{1}{2} \mu g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) t^2 - N_0 t + L = 0 \quad (*)$$

L'equazione ammette due soluzioni positive, scelgo la minore

$$t_1 = \frac{N_0 - \sqrt{N_0^2 - 2 \mu g L \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right)}}{\mu g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right)} = 0.0651 \text{ s}$$



Questa soluzione non ha significato fisico perché dopo t_1 il punto materiale cade dal corello e le leggi di moto trascritte non sono più valide

ALTRA SOLUZIONE POSSIBILE: avrei potuto studiare il moto rispetto a un sistema di riferimento solidale al corello, considerando il moto relativo del punto materiale e tenendo conto del moto di trascinamento uniformemente accelerato

③ Velocità del punto materiale alla caduta

$$N_p(t_1) = N_0 - \mu g t_1 = 19.9 \text{ m/s}$$

$$N_c(t_1) = \mu g \frac{M_p}{M_c} t_1 = 2.55 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

$$*2 \quad N'(t_1) = N_p(t_1) - N_c(t_1) = N_0 - \mu g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) t_1 = 19.8 \text{ m/s}$$

velocità del punto materiale uscite dal corello (velocità relativa)

④ Impulso che dovrei dare per fermare il punto materiale all'estremità

Riprendo le equazioni (*) e *2 imponendo $N'=0$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \mu g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) t^2 - N_0 t + L = 0 \\ N_0 - \mu g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) t = 0 \end{cases}$$

Questa volta risolvo imponendo $v' = 0$
e ricavando t (che non mi serve)
e v_0 (che mi serve per calcolare
l'impulso)

nella 82 ricavo v_0

$$v_0 = \mu_0 g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) t$$

Sostituisco nella $\otimes$ e ricavo t

$$\frac{1}{2} \mu_0 g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) t^2 - \mu_0 g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) t^2 + L = 0$$

$$-\frac{1}{2} \mu_0 g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) t^2 + L = 0$$

$$t = \sqrt{\frac{2L}{\mu_0 g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right)}}$$

Posso quindi calcolare v_0

$$v_0 = \sqrt{2 \mu_0 g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) L}$$

e quindi l'impulso

$$J = M_p v_0 = M_p \sqrt{2 \mu_0 g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) L}$$

Esercizio n. 3

Ad un punto materiale A di massa M inizialmente in quiete, appoggiato su un piano orizzontale liscio, viene applicata una forza di tipo impulsivo con impulso J di modulo noto, diretta come nella figura e di conseguenza inizia a muoversi lungo il piano. Dopo un tempo t_0 dall'applicazione dell'impulso urta contro un secondo punto materiale B , inizialmente in quiete, di massa doppia rispetto ad A , collegato ad una molla ideale con costante elastica k fissata a un estremo ad un punto fisso. L'urto tra A e B è perfettamente anelastico e a seguito di esso le due masse iniziano a oscillare, con moto armonico con periodo T . Determinare:

- Il tipo di moto del punto A e la distanza L percorsa dallo stesso punto tra l'applicazione dell'impulso e l'urto con B ;
- La velocità dei punti materiali dopo l'urto;
- La costante elastica k della molla;
- L'ampiezza dell'oscillazione.

[Valori numerici: $M = 2 \text{ kg}$; $t_0 = 5 \text{ s}$; $J = 3 \text{ Ns}$; $T = 0.0025 \text{ s}$]



ESERCIZIO n° 3

a) Il punto A è inizialmente in quiete.
A seguito dell'impulso la sua quantità di moto subirà una variazione pari a

$$\Delta p = \underline{J}$$

Quindi la velocità di A è

$$\underline{v}_A = \frac{1}{M} \underline{J}$$

in modulo $v_A = \frac{J}{M} = 1.5 \text{ m/s}$

la direzione di $\underline{v}_A$ è parallela a $\underline{J}$,
quindi all'asse x (orizzontale)

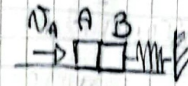
Il piano è liscio, sul punto A non agiscono forze in direzione x , quindi l'accelerazione di A è nulla

Il moto è quindi RETTILINEO UNIFORME
in direzione x con velocità v_A

Nel tempo t_0 la distanza L percorsa sarà

$$L = v_A t_0 = 1.5 \text{ m}$$

b)



L'urto tra A e B è perfettamente elastico,
quindi si conserva la quantità di moto.

Considerando la componente in direzione x
della quantità di moto

$$M v_A = (M + 2M) v_{AB}$$

$$\rightarrow v_{AB} = \frac{M v_A}{M + 2M} = \frac{v_A}{3} = 0.5 \text{ m/s}$$

c) Costante elastica della molla

Dopo l'urto il sistema si muove di moto
armonico con periodo T .

Per il moto armonico risulta

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

↑ pulsazione (frequenza angolare)

quindi

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Per il sistema massa-molla la pulsazione ω dipende dalle caratteristiche di massa e rigidità, in particolare risulta

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{3M}}$$

Da cui possiamo ricavare

$$k = 3M\omega^2 = 3M\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 3,79 \cdot 10^7 \text{ N/m}$$

3) Ampiezza dell'oscillazione

- Immediatamente dopo l'urto l'energia meccanica del sistema è

$$E_{m0} = E_{k0} + E_{p0} =$$

$$= \frac{1}{2} (3M) v_{AB}^2 + 0$$

↑
la molla non è
ancora compressa

- Alle massime compressioni

$$E_{m1} = E_{k1} + E_{p1} =$$

$$= 0 + \frac{1}{2} k x_0^2 \leftarrow \text{energia potenziale}$$

↑
la velocità è nulla
alle massime compressioni

Per la conservazione dell'energia meccanica risulta

$$\frac{1}{2} (3M) v_{AB}^2 = \frac{1}{2} k x_0^2$$

Da cui ricaviamo

$$x_0 = \sqrt{\frac{3M}{k}} v_{AB} = 0,000499 \text{ m} = 0,499 \text{ mm}$$

Allo stesso risultato potevo arrivare analizzando il moto armonico

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = x_0 \omega \cos(\omega t + \varphi) =$$

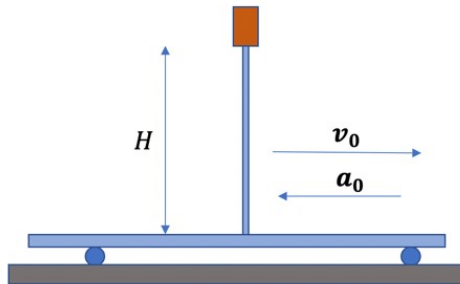
$$= v_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\rightarrow x_0 = \frac{v_0}{\omega}$$

$$\text{ma } \omega = \sqrt{\frac{k}{3M}}, \quad v_0 = v_{AB}$$

$$\rightarrow x_0 = v_{AB} \cdot \sqrt{\frac{3M}{k}} = 0,499 \text{ mm}$$

Esercizio n. 2



Un carrello che si muove con velocità v_0 orizzontale inizia al tempo $t = 0$ s a decelerare con accelerazione a_c diretta in verso opposto alla velocità. Nello stesso istante $t = 0$ s un corpo di massa m_c cade da un supporto sul carrello avente altezza H rispetto alla base del carrello. Determinare:

1. lo spazio percorso dal carrello durante il tempo di caduta del corpo;
2. la distanza a cui il corpo cade sul pavimento del carrello rispetto alla verticale del punto di distacco;
3. l'accelerazione (rispetto ad un sistema di riferimento solidale al carrello e rispetto a un sistema di riferimento esterno ad esso, approssimativamente inerziale) che agisce sul corpo quando esso si trova ad un'altezza h dal pavimento e subito prima del contatto con il pavimento del carrello.
4. la velocità del corpo (in modulo ed angolo rispetto alla verticale) rispetto al carrello al momento del contatto con il pavimento.

$$[v_0 = 50 \frac{km}{h}, a_c = 2.5 \frac{m}{s^2}, m_c = 120 g, H = 2 m, h = 1 m, g = 9.81 \frac{m}{s^2}]$$

Esercizio n° 2

①

- ① Il corpo cade con moto unif. accelerato (acc. g) e velocità iniziale v_0 orizzontale rispetto a un sistema inerziale. Quindi:

$$t_c = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 0.638 \text{ s} \quad \text{è il tempo che impiega il corpo a cadere sul pavimento del cervello}$$

Il cervello si muove in direzione x con velocità iniziale v_0 e accelerazione a_x . Nel tempo t_c il suo spostamento sarà

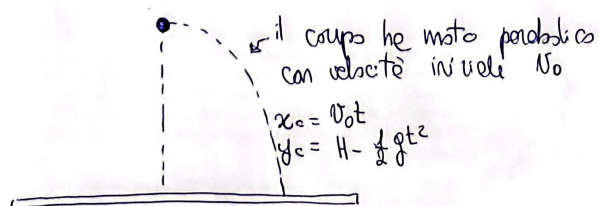
$$x_0 = v_0 t_c - \frac{1}{2} a_c t_c^2 = 8.35 \text{ m}$$

- ② Nel tempo t_c , il corpo si sposta in direzione x di una quantità

$$x_c = v_0 t_c = 8.87 \text{ m}$$

Rispetto al pavimento del cervello, il corpo cade a una distanza

$$x' = x_c - x_0 = \frac{1}{2} a_c t_c^2 = 0.510 \text{ m}$$



il cervello si muove di moto unif. accelerato lungo x

$$x_0 = v_0 t - \frac{1}{2} a_c t^2$$

- ③ Il corpo cade (moto rettilineo libero), rispetto al sistema di riferimento esterno al carrello
 risulta $\underline{a} = \underline{g}$ (l'accelerazione del corpo è pari all'accelerazione di gravità)

Il carrello ha accelerazione nota $\underline{a}_c$, orizzontale

L'accelerazione del corpo rispetto al carrello

senza

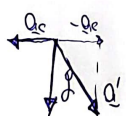
$$\underline{a}' = \underline{g} - \underline{a}_c$$

In componenti cartesiane

$$a'_x = a_c = 2.5 \text{ m/s}^2$$

$$a'_y = -g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$|a'| = 10.12 \text{ m/s}^2$$



(è costante durante tutta la caduta quindi anche quando il corpo si trova e me distanziato dal pavimento)

- ④ Al momento della caduta la velocità del corpo è (in componenti cartesiane)

$$v_{cx} = v_0$$

$$v_{cy} = -gt_c$$

mentre il carrello

$$v_{0x} = v_0 - a_c t_c$$

$$v_{0y} = 0$$

la velocità del corpo rispetto al carrello è

$$\underline{v}' = \underline{v}_c - \underline{v}_0$$

in componenti cartesiane

$$v'_x = +a_c t_c$$

$$v'_y = -g t_c$$

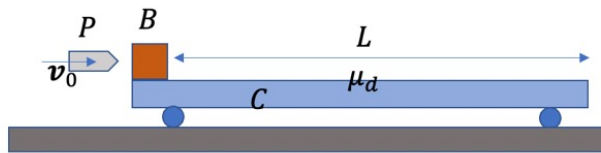
Il modulo è

$$|v'| = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = 6.46 \text{ m/s}$$

e l'angolo rispetto alla verticale

$$\theta = \arctan\left(\frac{v_x'}{v_y'}\right) = 0.24 \text{ rad} = 14.3^\circ$$

Esercizio n. 3



Un punto materiale B di massa M_B si trova all'estremità di un carrello di lunghezza L e massa M_C . Il contatto tra punto materiale e carrello è caratterizzato da un coefficiente di attrito dinamico μ_d . Il carrello scorre senza attrito su una superficie orizzontale. Il sistema è inizialmente in quiete. Al tempo $t = 0$ s il punto materiale è colpito da un proiettile, anch'esso di massa M_B , che viaggia alla velocità v_0 .

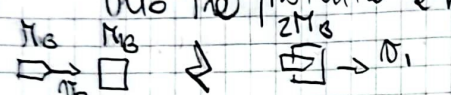
L'urto è perfettamente anelastico. Determinare:

- La velocità del punto materiale B immediatamente dopo l'urto.
- L'accelerazione del punto materiale e del carrello durante la fase di scivolamento di B lungo il carrello.
- Il tempo impiegato dal punto materiale per scivolare lungo tutto il carrello.
- L'energia cinetica dissipata nell'urto e durante lo scivolamento di B lungo tutto il carrello.

[Valori numerici: $M_p = 0.1$ kg, $M_c = 5$ kg, $L = 1.3$ m, $\mu_d = 0.2$, $g = 9.81$ m/s², $v_0 = 20$ ms]

ESERCIZIO n° 3

① Uto tra proiettile e masse M_B



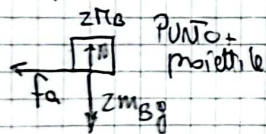
L'uto è perfettamente anelastico

Per la conservazione della qdm risulta

$$M_A v_0 = 2M_B v_1$$

$$v_1 = \frac{v_0}{2}$$

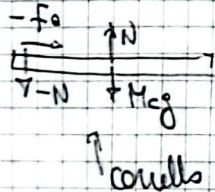
② Dopo l'uto - Eq. Newton direzione orizzontale punto



$$2M_A a_p = -2M_A g \mu_d$$

$$a_p = -g \mu_d$$

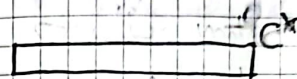
Eq. Newton direzione orizzontale



$$M_C a_c = 2M_A g \mu_d$$

$$a_c = \frac{2M_A}{M_C} g \mu_d$$

③ punto materiale: moto w/f accelerato
con accel. a_p e vel. iniziale v_1

$$x_p(t) = v_1 t - g \mu_d \frac{t^2}{2}$$


moto del punto C del carrello:

moto w/f accelerato con pos. iniziale
 $x_c(0) = L$, vel. iniziale nulla

$$x_c(t) = L + \frac{1}{2} a_c t^2$$

Per calcolare il tempo necessario al punto
per raggiungere C imponiamo

$$x_p(t) = x_c(t) \text{ e calcoliamo } t$$

$$v_1 t - g \mu_d \frac{t^2}{2} = L + \frac{1}{2} a_c t^2$$

$$\frac{1}{2} (a_c + g \mu_d) t^2 - v_1 t + L = 0$$

Risolvendo troviamo due valori di
 t positivi, prendiamo quello minore

⑥ Energie cinetica dissipate durante l'urto

$$\Delta E_{ku} = \frac{1}{2} M_B v_0^2 - \frac{1}{2} (2M_B) v_1^2$$

Energie cinetica dissipate durante lo scioglimento

$$E_{kin} = \frac{1}{2} (2M_B) v_1^2$$

$$E_{kfin} = \frac{1}{2} (2M_B) v_{cfin}^2 + \frac{1}{2} M_C v_{cfin}^2$$

Dac

$$v_{cfin} = v_1 - g \mu_s t_s$$

$$v_{cfin} = a_c t_s$$

essendo t_s il tempo calcolato al punto 3

Aver anche potuto calcolarlo considerando il lavoro fatto dalle forze di attrito (attenzione allo spostamento!)