

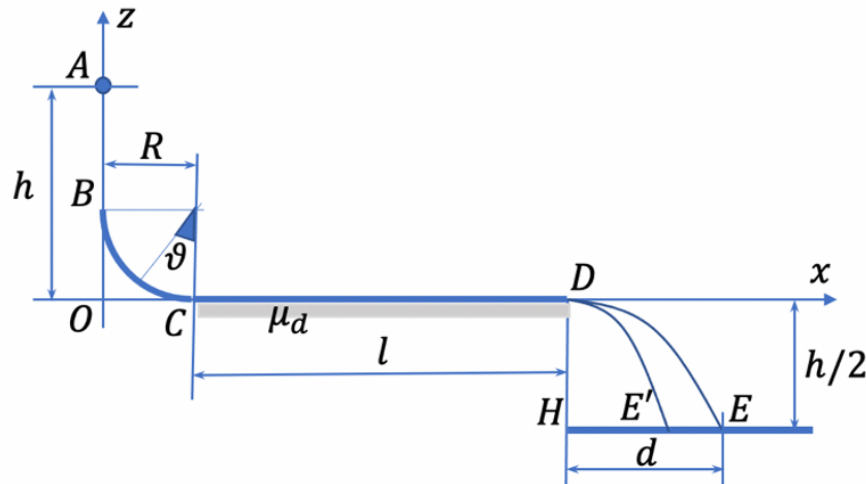
Svolgimento esercizi della prima prova in itinere

Parte di Meccanica

Esercizio n. 2

Un punto materiale viene lasciato cadere da fermo dal punto A , posto ad un'altezza h rispetto al pavimento identificato tramite l'asse x in figura. Dopo che è sceso verticalmente di una quantità $h - R$ il punto si immette in una guida circolare liscia BC di raggio R che termina con un tratto orizzontale CD di lunghezza l , anch'esso liscio. Al termine della guida il punto cade su una seconda superficie posta a una quota $-h/2$ rispetto all'asse x .

Q1. con riferimento ai punti indicati nella figura, determinare la velocità (in componenti cartesiane rispetto al sistema di riferimento in figura) del punto materiale quando esso raggiunge le posizioni B , C , D ed E e la distanza d tra i punti E ed H .



Q2. Il modulo della reazione vincolare della guida nel tratto circolare BC , in funzione dell'angolo θ , il suo valore minimo e il valore massimo.

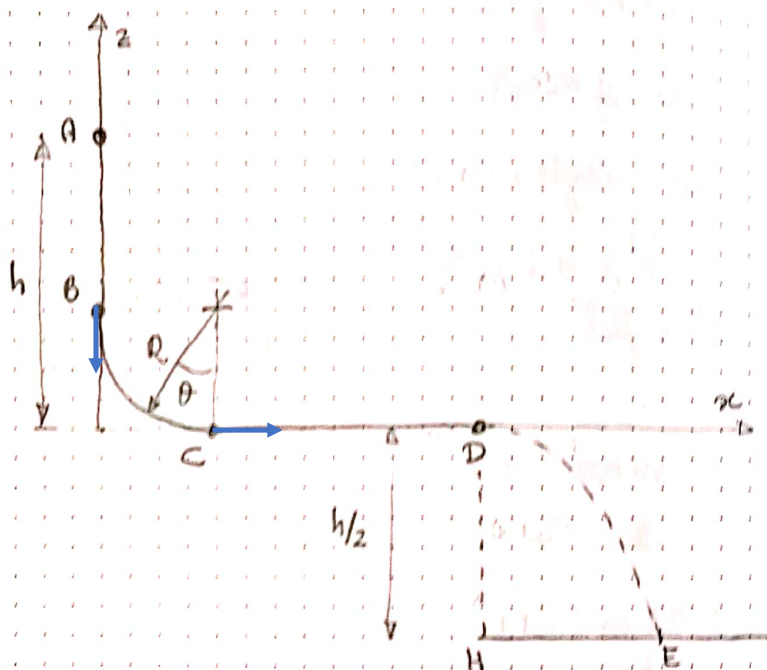
Q3. Sostituisco il tratto CD della guida con un materiale scabro, ripetendo il lancio da A osservo che il punto materiale atterra sulla superficie piu' bassa nel punto E' , ad una distanza $d' = 3/4d$ rispetto ad H . Quanto vale il coefficiente di attrito dinamico μ_d tra la guida e il punto materiale?

Q4. In questa nuova condizione, di quanto devo alzare rispetto ad A il punto di partenza affinché il punto di arrivo

sia di nuovo E ?

Valori numerici da utilizzare nei calcoli: $h = 1\text{ m}$, $R = 0.3\text{ m}$, $l = 1.5\text{ m}$, $m = 1.5\text{ kg}$, $g = 9.81\text{ m/s}^2$

ESERCIZIO n° 2 PROVA 27/04



Q1

$$E_{mA} = mgh$$

$$E_{mB} = mgr + \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$E_{mC} = \frac{1}{2} m v_C^2$$

→ VELOCITÀ IN B

$$E_{mA} = E_{mB}$$

$$mgh = mgr + \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$v_B^2 = 2g(h-r)$$

$$v_B = 3.71 \text{ m/s}$$

$$v_B = \sqrt{2g(h-r)}$$

$$\underline{v}_B = -v_B \underline{k}$$

(DIREZIONE z,
VERSO DISCEND.)

→ VELOCITÀ IN C

$$E_{mA} = E_{mC}$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v_C^2$$

$$v_C^2 = 2gh$$

$$v_C = \sqrt{2gh}$$

$$v_C = 4.43 \text{ m/s}$$

$$\underline{v}_C = v_C \underline{i}$$

(DIREZIONE COME
ASSE x)

→ VELOCITÀ IN D

$$E_{mc} = E_{md}$$

$$\frac{1}{2} m \vec{v}_c^2 = \frac{1}{2} m \vec{v}_d^2 \rightarrow v_d = v_c$$

$$v_d = v_c = v_c \hat{e} \quad v_d = 4.43 \text{ m/s}$$

→ VELOCITÀ IN E e DISTANZA d

DA D AD E IL PUNTO HA UN MOTO DI CADUTA LIBERA, PER CUI

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \quad \begin{cases} \text{COMPONENTI} \\ \text{ACCELERAZIONE} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_x = \vec{v}_d \\ v_z = -gt \end{cases} \quad \begin{cases} \text{COMPONENTI} \\ \text{VELOCITÀ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = v_d t \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{POSIZIONE IN} \\ \text{FUNZIONE DEL} \\ \text{TEMPO} \end{cases}$$

RISPETTO A D

$$\rightarrow t = \frac{x}{v_d} \quad (\text{DALLA } \textcircled{*})$$

SOSTITUISCO NELLA $\textcircled{**}$

$$z(t) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_d} \right)^2$$

$$\text{QUANDO } z(t) = -\frac{h}{2}, \quad x = d$$

$$-\frac{h}{2} = -\frac{1}{2} g \left(\frac{d}{v_d} \right)^2$$

$$h = g \frac{d^2}{v_d^2}$$

$$d^2 = \frac{h v_d^2}{g} \rightarrow d = \sqrt{\frac{h v_d^2}{g}}$$

MA RICORDO CHE

$$v_d^2 = v_c^2 = 2gh$$

$$d = \sqrt{\frac{h \cdot 2gh}{g}} = \sqrt{2h} \quad d = 1.41 \text{ m}$$

IL PUNTO RAGGIUNGE E TORO UN TEMPO
E DALL' INIZIO DELLA CADUTA

$$t_E = \frac{d}{v_D} = \frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{h}{g}}$$

QUINDI LE COMPONENTI DELLA VELOCITÀ QUANDO IL PUNTO RAGGIUNGE E SONO

$$v_{Ex} = v_D$$

$$v_{Ex} = v_D = 4.43 \text{ m/s}$$

$$v_{Ez} = -gt_E = -\sqrt{hg}$$

$$v_{Ez} = -3.13 \text{ m/s}$$

Q2

ANALIZZIAMO IL TRATTO CIRCOLARE IN UN GENERICO PUNTO IDENTIFICATO DALL'ANGOLO θ , ABBIAMO

$$E_{m\theta} = \frac{1}{2} m v_{\theta}^2 + mgR(1 - \cos\theta)$$

PER LA CONSERVAZIONE DELL'EN. MECCANICA

$$E_{m\theta} = E_{m0}$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v_{\theta}^2 + mgR(1 - \cos\theta)$$

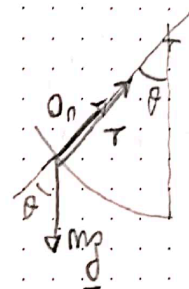
$$v_{\theta}^2 = g(h - R(1 - \cos\theta))$$

ANALIZZO IL MOTO LUNGO LA GUIDA

→ COMPONENTE NORMALE ACCELERAZ.

$$a_n = \frac{v_{\theta}^2}{R}$$

$$ma_n = T - mg \cos\theta$$



$$T(\theta) = ma_n + mg \cos\theta$$

$$= m \frac{v_{\theta}^2}{R} + mg \cos\theta =$$

$$= m \frac{g}{R} (h - R(1 - \cos\theta)) + mg \cos\theta$$

$$= mgh \frac{1}{R} - mg + 2mg \cos\theta$$

PER $\theta = 0$ $\cos\theta = 1$ T MASSIMA

$$T = \frac{mgh}{R} + mg \quad T_{\max} = 63.8 \text{ N}$$

PER $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta = 0$ T MINIMA

$$T = mg \frac{h}{R} - mg \quad T_{\min} = 34.33 \text{ N}$$

Q3

SE NEL TRATTO CD E' PRESENTE
ATTRITO, AVRO' UNA PERDITA DI ENER-
GIA MECCANICA PARI A

$$W_{nc} = \frac{1}{2} m v_D^2 - \frac{1}{2} m v_C^2$$

$$W_{nc} = -\mu_0 mgL \quad \rightarrow \text{LAVORO DELLE
FORZE DI ATTRITO
NEL TRATTO CD}$$

ANALIZZIAMO IL MOTO DI CADUTA
AVEVAMO TROVATO CHE SENZA ATTRITO

$$d = \sqrt{\frac{h v_D^2}{g}}$$

CON ATTRITO HO

$$d' = \frac{3}{4} d$$

$$d' = \sqrt{\frac{h v_D'^2}{g}}$$

$$d'^2 = \frac{h v_D'^2}{g}$$

SE IL PUNTO E' CADUTO A DISTANZA
d' SIGNIFICA CHE AVEVA VELOCITA'

$$v_D'^2 = \frac{d'^2 g}{h} = \frac{9}{16} \frac{d^2 g}{h} = \frac{9}{8} gh$$

($d = \sqrt{2}h$)

QUINDI A CAUSA DELL'ATTRITO HO PERSO
UNA QUANTITA' DI EN. MECCANICA (CINETICA)
PARI A

$$\frac{1}{2} m v_D'^2 - \frac{1}{2} m v_C^2 =$$

$$\frac{9}{16} mgh - mgh = -\frac{7}{16} mgh$$

QUESTO E' IL LAVORO PERSO PER ATTRITO

$$-\mu_0 mgL = -\frac{7}{16} mgh$$

$$\mu_0 = \frac{7}{16} h/L$$

$$\mu_{ud} = 0.29$$

Q4.

AFFINCHÉ IL PUNTO CADA DI NUOVO
IN E È NECESSARIO CHE IN D
LA SUA VELOCITÀ SIA v_D
QUINDI

$$E_{KD} = \frac{1}{2} m v_D^2$$

$$E_{mA'} = mgh'$$

$$\frac{1}{2} m v_D^2 - mgh' = W_{nc}$$

$$mg(h - h') = W_{nc}$$

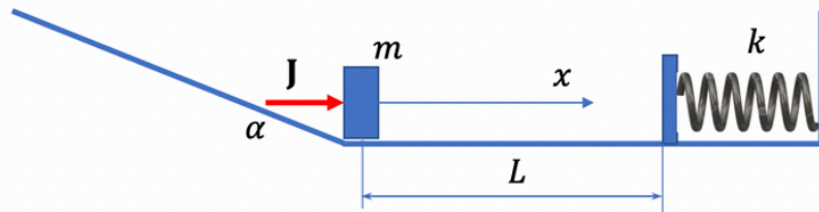
$$h' - h = -\frac{W_{nc}}{mg} = -\frac{\mu_D mgL}{mg} = -\mu_D L$$

↑
QUESTA QUANTITÀ
RAPPRESENTA DI QUANTO MI DEVO
ALZARE RISPETTO AD A AFFINCHÉ
IL PUNTO RAGGIUNGA DI NUOVO E

Esercizio n. 3

Ad un punto materiale di massa m viene applicato un impulso di modulo J , direzione e verso come in figura 2. Dopo aver percorso una distanza L su una superficie liscia, il punto entra in contatto con una molla con costante elastica k di massa trascurabile, collegata a un punto fisso.

Q1. Qual è la massima compressione x_m della molla?



Q2. Quanto tempo passa dall'istante in cui applico l'impulso all'istante di massima compressione della molla?

Q3. Quanto vale l'accelerazione del punto materiale nell'istante di massima compressione della molla?

Q4. Una volta ripassato dal punto di partenza, il punto materiale inizia a salire su una superficie liscia inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo α rispetto all'orizzontale.

Quale sarà la distanza totale percorsa dal punto materiale dall'istante della partenza al punto in cui raggiunge la massima altezza sulla superficie inclinata?

Valori numerici da utilizzare nei calcoli: $m = 100 \text{ g}$, $L = 0.8 \text{ m}$, $k = 100 \text{ N/m}$, $J = 10 \text{ Ns}$, $\alpha = 30^\circ$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

ESERCIZIO N° 3 PROVA 23/4

01 MASSIMA COMPRESSIONE MOLLA

$$\underline{J} = \Delta p \quad (\text{TEOREMA DELL'IMPULSO})$$

COMPONENTE LUNGO x

$$m v_0 - m \cdot 0 = J \quad (*)$$

↑ VELOCITÀ DOPO L'IMPULSO

$$v_0 = \frac{J}{m} = \frac{10}{0.1} \text{ m/s} = 100 \text{ m/s}$$

t_1 ISTANTE IN CUI ENTRA IN CONTATTO CON LA MOLLA

$$E_{m1} = E_{k1} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

t_2 ISTANTE MASSIMA COMPRESSIONE DELLA MOLLA

$$E_{m2} = E_{p2} = \frac{1}{2} k x_m^2$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k x_m^2 \quad -D$$

$$x_m = \sqrt{\frac{m}{k}} v_0 \quad x_m = 3.63 \text{ m}$$

Q2

DOPO CHE HO APPLICATO L'IMPULSO
 → IL PUNTO MATERIALE PERCORRE
 IL TRATTO L A VELOCITA' COSTANTE
 IMPIEGANDO IL TEMPO

$$t_1 = \frac{L}{v_0}$$

→ IL PUNTO INCONTRA LA MOLLA E
 INIZIA IL MOTO ARMONICO
 CON PULSAZIONE

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

E PERIODO $T = \frac{2\pi}{\omega}$

DALL'ISTANTE IN CUI INCONTRA LA
 MOLLA ALL'ISTANTE DI MASSIMA
 COMPRESSIONE IL TEMPO NECESSA-
 RIO È

$$t_2 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

QUINDI LA RISPOSTA AL Q2 È

$$t_{\text{tot}} = t_1 + t_2$$

Q3

ACCELERAZIONE NEL PUNTO DI MASSIMA
 COMPRESSIONE

$$F_m = -k x_m \quad \leftarrow \text{FORZA ESERC. DALLA MOLLA}$$

$$a_m = \frac{F_m}{m} = -\frac{k}{m} x_m$$

Q4

FORZE CONSERVATIVE, L'EN. MECCANICA
 SI CONSERVA

QUANDO RAGGIUNGO LA MASSIMA ALTEZZA

$$mgh = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$h = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}$$

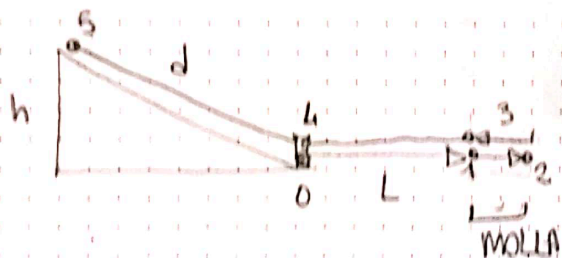
E QUINDI PERCORRO SUL PIANO
INCLINATO UNA DISTANZA

$$d = \frac{h}{\sin \alpha}$$



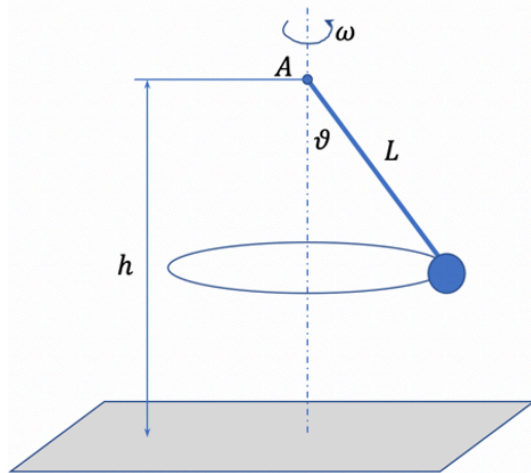
LA DISTANZA TOTALE DEL Q6
SARA' QUINDI

$$D_{QA} = \underbrace{L + x_m}_{\text{ANDATA}} + \underbrace{x_m + L}_{\text{RITORNO}} + \underbrace{d}_{\text{SALITA}}$$



Esercizio n. 2

Il regolatore di Watt, o tachimetro centrifugo è un dispositivo utilizzato in passato per misurare (e regolare) la velocità angolare ω di un albero rotante. Consideriamo il modello del tachimetro rappresentato dal sistema in figura, costituito da una massa m collegata ad una sbarretta di lunghezza L vincolata nel punto A all'albero rotante, che supponiamo verticale. L'angolo ϑ tra la sbarretta e l'albero varia durante il moto al variare della velocità di rotazione dell'albero ω . In una prima fase, l'angolo di apertura è costante e vale θ_1 . Da un certo istante in poi, osservo che in un tempo Δt l'angolo



di apertura del regolatore aumenta di una quantità $\Delta\vartheta$ rispetto al valore iniziale, per poi rimanere costante.

Q1. Analizziamo la configurazione iniziale: quanto vale la velocità angolare dell'albero? Quanto vale il modulo della velocità della massa?

Q2. Supponendo che l'accelerazione angolare $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ dell'albero sia costante durante la variazione di apertura $\Delta\vartheta$, quanto vale α ?

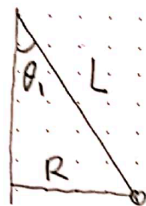
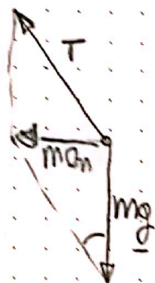
Q3. Supponendo di poter rilevare un angolo minimo di apertura di θ_{min} , e che la tensione massima che può essere sopportata dalla sbarretta sia T_{max} , quali sono le velocità angolari minima ω_{min} e massima ω_{max} che possono essere misurate con lo strumento?

Q4. Durante una rotazione dell'albero a velocità ω_{max} la massa si stacca e cade sul pavimento, posto a distanza h dal punto A . Qual è il modulo della velocità con cui la massa atterra sul pavimento?

Valori numerici da utilizzare nei calcoli: $m = 0.5 \text{ kg}$, $L = 0.3 \text{ m}$, $\Delta t = 3 \text{ s}$, $\theta_1 = 30^\circ$, $\Delta\vartheta = 15^\circ$, $\theta_{min} = 10^\circ$, $T_{max} = 100 \text{ N}$, $h = 2 \text{ m}$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

ESERCIZIO n° 2 PROVA 28/04

Q1 - ANGOLO DI APERTURA INIZIALE θ_1



$$a_{n1} = g \tan \theta_1 \quad R_1 = L \sin \theta_1 = 0.15 \text{ m}$$

$$MA \quad a_{n1} = \frac{v_1^2}{R_1}$$

$$v_1 = \sqrt{a_{n1} R_1} = \sqrt{g R_1 \tan \theta_1} = 0.92 \text{ m/s}$$

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R_1} = \sqrt{\frac{g}{R_1} \tan \theta_1} = 6.14 \text{ rad/s}$$

Q2 - RIPETO PER

$$\theta_2 = \theta_1 + \Delta \theta \quad R_2 = L \sin \theta_2 = 0.212 \text{ m}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R_2} \tan \theta_2} = 6.80 \text{ rad/s}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = 0.219 \text{ rad/s}^2$$

Q3

$$\theta = \theta_{\min}$$

$$R_{\min} = L \sin \theta_{\min} = 0.0776 \text{ m}$$

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{R_{\min}} \tan \theta_{\min}} = 5.82 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{mg}{\cos \theta}$$

$$T_{\max} = \frac{mg}{\cos \theta_{\max}}$$

$$\theta_{\max} = \arccos\left(\frac{mg}{T_{\max}}\right)$$

$$R_{\max} = L \sin \theta_{\max} = 0.2996 \text{ m}$$

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{R_{\max}} \tan \theta_{\max}} = 25.8 \text{ rad/s}$$

Q4

$$v_{\max} = R_{\max} \omega_{\max}$$

$$E_{\min} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 + mg(h - L \cos \theta_{\max})$$

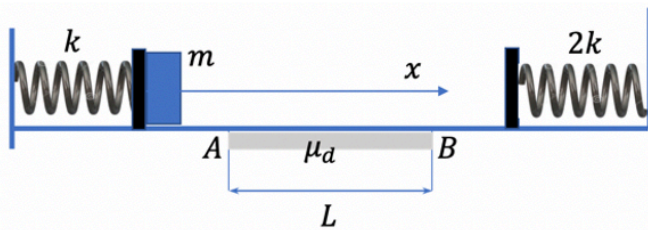
$$E_{\min} = \frac{1}{2} m v_{\text{fin}}^2$$

$$\frac{1}{2} m v_{\text{fin}}^2 = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 + mg(h - L \cos \theta_{\max})$$

$$v_{\text{fin}} = \sqrt{v_{\max}^2 + 2g(h - L \cos \theta_{\max})} = 9.96 \text{ m/s}$$

Esercizio n. 3

Un punto materiale di massa m viene lanciato tramite una molla su una superficie orizzontale che ha un tratto centrale AB scabro, di lunghezza L . È noto il coefficiente di attrito dinamico μ_d tra il punto materiale e la superficie nel tratto AB , la costante elastica della molla k e la compressione iniziale della molla x_0 . Dopo aver percorso il tratto AB , il punto materiale incontra una seconda molla con costante elastica $2k$.



Q1. Di quanto si comprime la seconda molla la prima volta che essa viene colpita dalla massa?

Q2. Quanto tempo passa dall'istante in cui la massa tocca la seconda molla all'istante della massima compressione della molla stessa?

Q3. Quante volte il punto materiale percorre il tratto AB (avanti e indietro)?

Q4. A quale distanza da A si ferma il punto materiale, alla fine?

Valori numerici da utilizzare nei calcoli: $m = 100 \text{ g}$, $L = 1.5 \text{ m}$, $k = 10000 \text{ N/m}$, $\mu_d = 0.1$, $x_0 = 1 \text{ cm}$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

ESERCIZIO N° 3 PROVA DEL 20104

Q1

$$E_{m1} = E_{p1} = \frac{1}{2} k x_0^2$$

$$E_{m2} = E_{p2} = \frac{1}{2} k x_{m2}^2$$

$$E_{m2} - E_{m1} = W_{nc}$$

$$W_{nc} = -\mu_0 m g L$$

$$\frac{1}{2} (2k) x_{m2}^2 - \frac{1}{2} k x_0^2 = -\mu_0 g L$$

$$k x_{m2}^2 = \frac{1}{2} k x_0^2 - \mu_0 g L$$

$$x_{m2} = \sqrt{\frac{1}{k} \left(\frac{1}{2} k x_0^2 - \mu_0 g L \right)} = 0.0059 \text{ m}$$

Q2

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}$$

$$E_{02} = \frac{T}{4}$$

Q3

IL PUNTO SI FERMA QUANDO TUTTA L'ENERGIA MECCANICA È STATA DISSIPATA PER ATTRITO

$$-\frac{1}{2} k x_0^2 = W_{nc \text{ tot}}$$

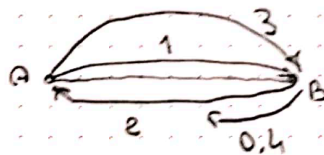
$$W_{nc \text{ tot}} = -\mu_0 m g L_{\text{tot}}$$

$$\frac{1}{2} k x_0^2 = \mu_0 m g L_{\text{tot}}$$

$$L_{\text{tot}} = \frac{\frac{1}{2} k x_0^2}{\mu_0 g m}$$

$$n = \frac{L_{\text{tot}}}{L} = 3.40$$

Q4



SI FERMA A 0.4

$$d = (1 - 0.4)L = 0.9 \text{ m}$$