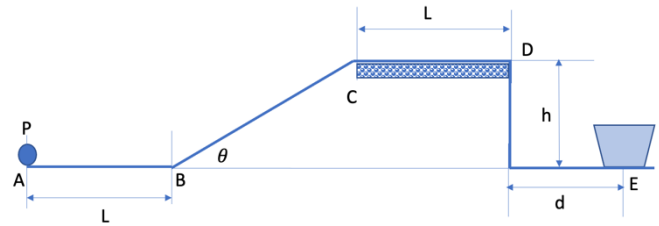


PRIMA PROVA INTERMEDIA 3/05/2023

Appunti per lo svolgimento della parte di meccanica

Esercizio n. 2 (meccanica)

Un punto materiale P di massa m_p percorre una guida costituita da vari tratti come mostrato nella figura: un tratto AB orizzontale liscio (privo di attrito), un tratto BC inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo θ in salita, un tratto orizzontale CD con attrito (caratterizzato da coefficiente di attrito dinamico μ_d), un tratto DE in caduta libera con altezza h (moto parabolico). Il modulo della velocità del punto materiale quando esso raggiunge la posizione D è v_D , la direzione della velocità in D è orizzontale.



Determinare:

1. L'accelerazione del punto materiale nei tratti AB , BC , CD e DE .
2. La distanza d del punto di atterraggio E dal salto (vedi figura).
3. Il lavoro dissipato dalla forza di attrito nel tratto CD e la velocità nel punto C .
4. La velocità di P alla partenza, nella posizione A .

[Valori numerici: $m_p = 1.5 \text{ kg}$, $L = 2 \text{ m}$, $h = 1 \text{ m}$, $\theta = 15^\circ$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $\mu_d = 0.15$, $v_D = 2 \text{ m/s}$]

Soluzione

Punto n.1

Nel tratto AB

$$a_{AB} = 0$$

Nel tratto BC

$$a_{BC} = g \sin \theta, \text{ direzione parallela al piano inclinato, verso discendente}$$

Nel tratto CD

$$a_{CD} = \mu_d g, \text{ direzione orizzontale, verso opposto al moto del punto materiale}$$

Nel tratto DE

$$a_{DE} = g, \text{ direzione verticale discendente}$$

Punto n. 2

Analizziamo il moto del punto materiale nel tratto DE . Moto in caduta libera (moto parabolico) con velocità iniziale v_D , orizzontale.

Sistema di riferimento: origine in D , asse x orizzontale in direzione del moto, asse y verticale ascendente

Componenti dell'accelerazione

$$\begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= -g \end{aligned}$$

Componenti della velocità

$$\begin{aligned} v_x &= v_D \\ v_y &= -gt \end{aligned}$$

Posizione del punto materiale

$$\begin{aligned} x(t) &= v_D t \\ y(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

Il punto materiale atterra quando

$$y(t) = -h$$

Risolve per calcolare il tempo di atterraggio t_a

$$-h = -\frac{1}{2}gt_a^2$$

$$t_a = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

La distanza percorsa in orizzontale nel tempo t_a vale quindi

$$d = v_D \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Punto n. 3

Sistema di riferimento: origine in C, asse x orizzontale in direzione del moto, asse y verticale

La forza di attrito ha componente lungo x pari ad $A = -\mu_d m_p g$

Il lavoro fatto dalla forza di attrito nel tratto CD è pari a

$$W_{CD} = \int_0^L -\mu_d m_p g dx = -\mu_d m_p g L$$

Punto n. 4

Nel tratto CD la variazione di energia cinetica vale

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m_p v_D^2 - \frac{1}{2} m_p v_C^2$$

$$W_{CD} = \frac{1}{2} m_p v_D^2 - \frac{1}{2} m_p v_C^2$$

$$-\mu_d m_p g L = \frac{1}{2} m_p v_D^2 - \frac{1}{2} m_p v_C^2$$

$$v_C^2 = v_D^2 + 2\mu_d g L$$

$$v_c = \sqrt{v_D^2 + 2\mu_d g L}$$

Nel tratto BC la velocità varia (nel punto 1 abbiamo visto che l'accelerazione è pari a $a_{BC} = g \sin \theta$)

Risolvero analizzando la conservazione dell'energia meccanica nel tratto BC, dato che non sono presenti forze non conservative

$$\frac{1}{2} m_p v_B^2 = \frac{1}{2} m_p v_C^2 + m_p g h$$

$$v_B^2 = v_C^2 + 2gh$$

$$v_B = \sqrt{v_C^2 + 2gh}$$

Nel tratto AB la velocità è costante

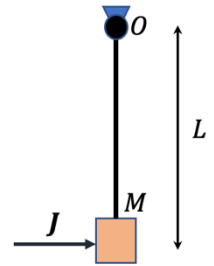
$$v_A = v_B = \sqrt{v_D^2 + 2\mu_d g L + 2gh}$$

Esercizio n. 3 (meccanica)

Un impulso J con direzione orizzontale (vedi figura) e modulo incognito è applicato ad un punto materiale di massa M inizialmente fermo, appeso tramite un filo di lunghezza L inizialmente verticale ad un punto fisso O . A seguito dell'applicazione dell'impulso, il pendolo inizia ad oscillare con ampiezza dell'oscillazione θ . Determinare:

1. La velocità della massa del pendolo quando esso passa dalla configurazione verticale.
2. Il modulo dell'impulso J .
3. La tensione massima del filo durante l'oscillazione.
4. Il valore minimo dell'impulso affinché il pendolo riesca a fare un giro completo intorno ad O mantenendo la fune tesa e la velocità del punto materiale quando esso raggiunge la configurazione più in alto $\theta = 180^\circ$.

[Valori numerici: $M = 2.5 \text{ kg}$, $L = 1.3 \text{ m}$, $\theta = 30^\circ$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$]



Punto n. 1

L'energia meccanica si conserva durante il moto, considero la configurazione verticale e la configurazione alla massima estensione θ

$$\frac{1}{2} M v_0^2 = M g L (1 - \cos \theta)$$

$$v_0^2 = 2 g L (1 - \cos \theta)$$

$$v_0 = \sqrt{2 g L (1 - \cos \theta)}$$

Punto n. 2

Per il teorema dell'impulso risulta

$$J = \Delta p = M v_0 - 0 = M v_0$$

Punto n. 3

Indico con ϕ un generico angolo durante l'oscillazione. Applicando la seconda legge di Newton e considerando la componente dell'equazione in direzione del filo, risulta:

$$M a_n = T - M g \cos \phi$$

Dove l'accelerazione normale vale, essendo il moto circolare

$$a_n = \frac{v^2}{L}$$

La tensione durante l'oscillazione vale quindi:

$$T = M g \cos \phi + M \frac{v^2}{L}$$

Per una generica configurazione risulta inoltre, dalla conservazione dell'energia meccanica

$$v^2 + 2 g L (1 - \cos \phi) = 2 g L (1 - \cos \theta)$$

$$v^2 = 2 g L (\cos \phi - \cos \theta)$$

Sostituendo nell'espressione di T otteniamo

$$T = M g \cos \phi + 2 M g (\cos \phi - \cos \theta) = 3 M g \cos \phi - 2 M g \cos \theta$$

Il valore massimo si ha quando $\cos \phi = 1$, quindi quando $\phi = 0$ (quando il pendolo è verticale) e vale

$$T_m = 3 M g - 2 M g \cos \theta$$

Punto n. 4

Riprendiamo l'espressione della tensione in funzione della velocità e di ϕ

$$T = M g \cos \phi + M \frac{v^2}{L}$$

Affinché il filo sia teso è necessario che per $\phi = \pi$ risulti $T > 0$. Ricordando che $\cos \pi = -1$ si ottiene

$$-Mg + M\frac{v^2}{L} > 0$$

Da cui si ottiene che, nel punto più alto, la velocità deve essere tale che

$$v_{top}^2 > gL$$

Consideriamo quindi la conservazione dell'energia meccanica tra la configurazione più in basso e quella più in alto

$$\frac{1}{2}Mv_{top}^2 + 2MgL = \frac{1}{2}Mv_0^2$$

$$v_{top}^2 + 4gL = v_0^2$$

Ricordando la condizione per avere la fune tesa trovata in precedenza, otteniamo quindi

$$v_0 > \sqrt{5gL}$$

Da cui risulta che l'impulso minimo per poter raggiungere la configurazione verticale in alto è pari a

$$J_M = M\sqrt{5gL}$$