

Corso di FISICA 1



Capitolo 9 – Corpi rigidi

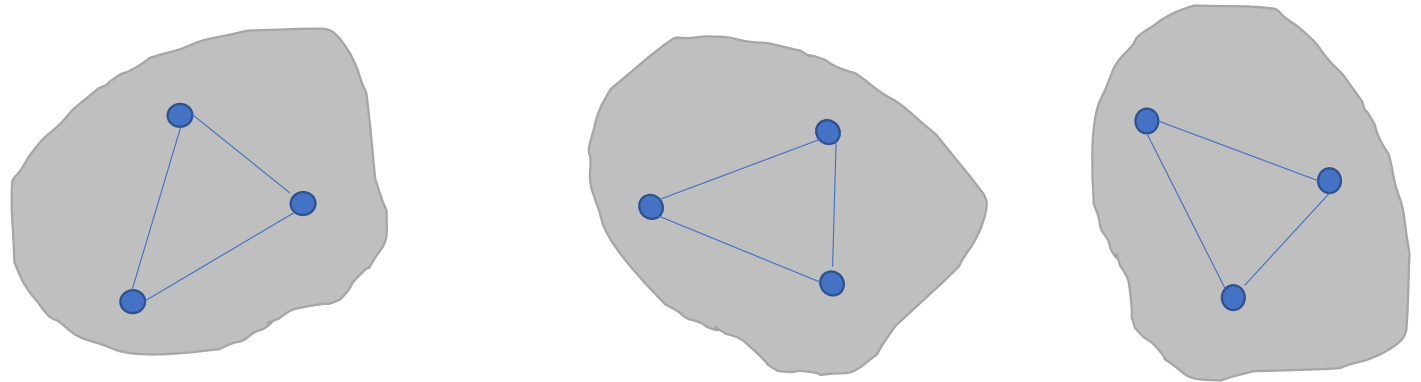
Monica Malvezzi, Università degli
Studi di Siena



Corpo rigido - definizione

- Un corpo rigido è un ^{insieme di punti} sistema di punti materiali in cui la distanza tra una qualsiasi coppia di punti che lo costituiscono rimane costante.
il corpo non si deforma
- Essendo un sistema di punti possiamo applicare le definizioni e i risultati ottenuti nelle lezioni precedenti sui sistemi di punti.

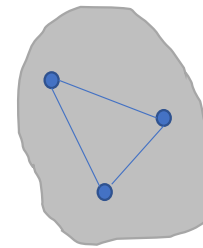
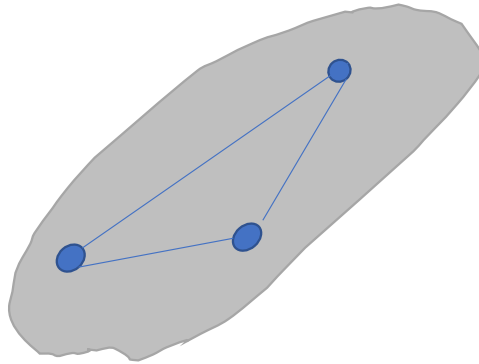
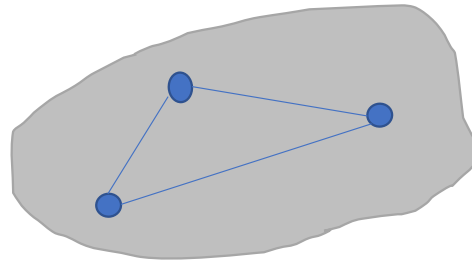
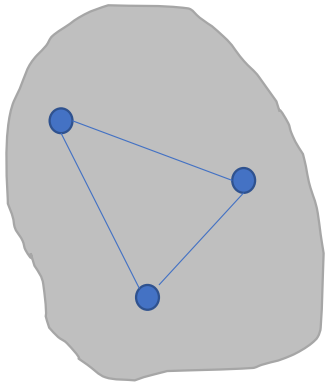
Esempio di corpo rigido



Corpo rigido - definizione

- Esempi di corpo non rigido

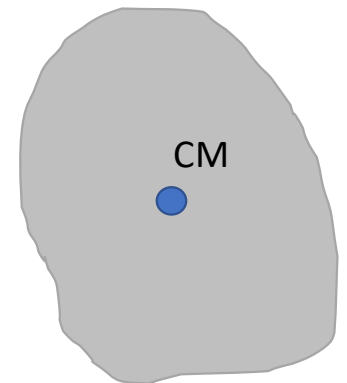
si deforma



Corpo rigido - definizione

Dist. Tra punti
è costante

- Essendo un sistema di punti possiamo applicare le definizioni e i risultati ottenuti nelle lezioni precedenti sui sistemi di punti.
- Possiamo ad esempio calcolare la posizione del centro di massa CM.

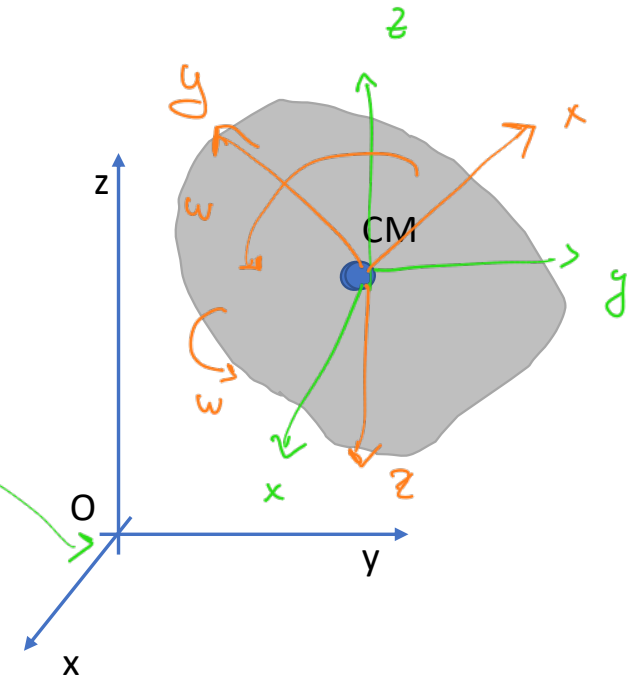


Corpo rigido – sistemi di riferimento

Per lo studio del moto di un corpo rigido possiamo definire diversi sistemi di riferimento.

• Sistema di riferimento inerziale

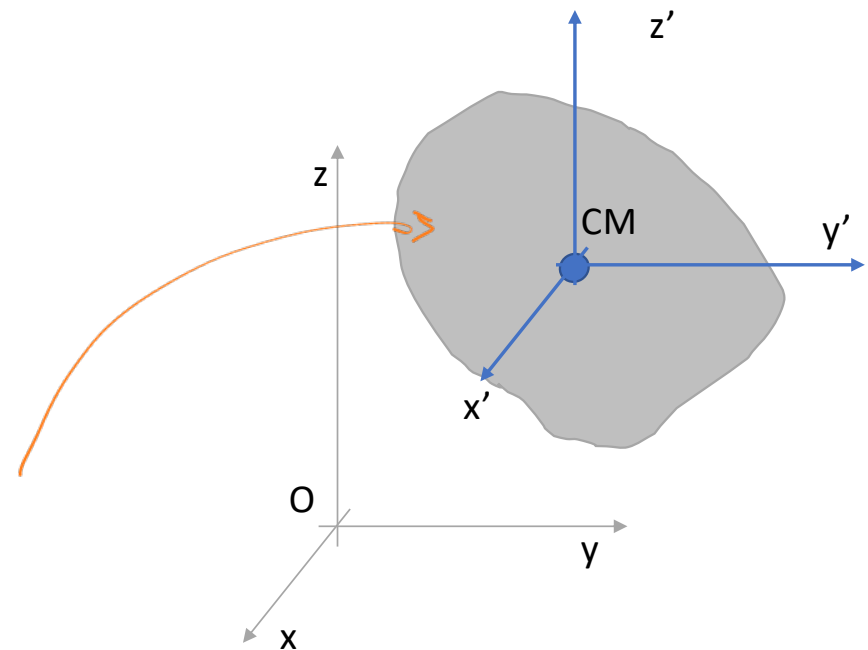
- Sistema di riferimento con origine nel centro di massa e assi paralleli a quelli del sistema inerziale
- Sistema di riferimento con origine nel centro di massa e assi che ruotano insieme al corpo rigido *NON INERZIALE SICURAMENTE.*



Corpo rigido – sistemi di riferimento

Per lo studio del moto di un corpo rigido possiamo definire diversi sistemi di riferimento.

- Sistema di riferimento inerziale
- **Sistema di riferimento con origine nel centro di massa e assi paralleli a quelli del sistema inerziale**
- Sistema di riferimento con origine nel centro di massa e assi che ruotano insieme al corpo rigido

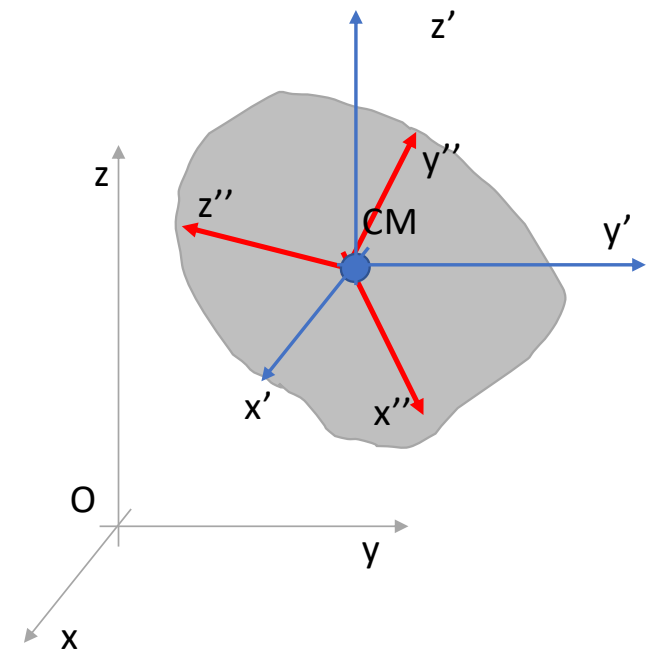


Corpo rigido – sistemi di riferimento

Per lo studio del moto di un corpo rigido possiamo definire diversi sistemi di riferimento.

- Sistema di riferimento inerziale
- Sistema di riferimento con origine nel centro di massa e assi paralleli a quelli del sistema inerziale
- **Sistema di riferimento con origine nel centro di massa e assi che ruotano insieme al corpo rigido**

ruota insieme
al corpo
 $\vec{\omega} \neq \vec{0}$



Corpo rigido – dinamica

Per $\vec{P}$ e $\vec{L}$ del sistema, è come se fosse un unico punto materiale nel CM con massa m_{Totale} e $\vec{v}_{CM}$

Riepilogo delle relazioni fondamentali che descrivono la dinamica dei punti materiali: sono alla base dello studio della dinamica del corpo rigido.

quantità di moto totale

$$\vec{P} = m \vec{v}_{CM} = \left\{ \frac{d\mathbf{P}}{dt} = m \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}^{(E)} \right.$$

risultante delle forze esterne

momento angolare totale del sistema

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(E)} \rightarrow \text{momento totale delle forze esterne} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

non cap la base in un po' più

Queste relazioni ci permettono di capire come variano $\mathbf{P}$ ed $\mathbf{L}$ nel tempo

Relazioni vettoriali

- Dipendono dalle forze esterne e dai rispettivi momenti
- Permettono di studiare il comportamento complessivo del sistema ma non quello dei singoli punti.

Lavoro e variazione dell'energia cinetica

$$W_{AB}^{(E)} + W_{AB}^{(I)} = E_{kB} - E_{kA}$$

$$W = \Delta E_k$$

$$W_{AB} = W_{AB}^{(E)} + W_{AB}^{(I)} = \Delta E_{kB}$$

forze esterne interne

$$W = \sum_{i=1}^n \int_A^B \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}$$

W_i

Corpo rigido – dinamica

Per le forze interne, abbiamo trovato che per una generica coppia di punti

$$dW_{ij}^{(I)} = \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}$$

Il lavoro delle forze interne dipende da $d\mathbf{r}_{ij}$ cioè da quanto si spostano i punti uno rispetto all'altro.

Se i punti rimangono alla stessa distanza tra loro $d\mathbf{r}_{ij} = 0$ oppure $d\mathbf{r}_{ij}$ è perpendicolare a $\mathbf{F}_{ij}$ e quindi $dW_{ij}^{(I)} = 0$

Nei corpi rigidi risulta quindi $dW_{ij}^{(I)} = 0$

Possiamo riscrivere il teorema dell'energia cinetica come

$$W_{AB}^{(E)} + \cancel{W_{AB}^{(I)}} = E_{kB} - E_{kA}$$

$$W_{AB}^{(E)} = E_{kB} - E_{kA}$$

Considerando per il calcolo del lavoro soltanto le forze esterne

$$W_{AB}^{(E)} = \Delta E_k$$

dato solo dalle F esterne
perché quelle interne non fanno lavoro.

$$dW_i = \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_i^{(I)} \cdot d\mathbf{r}_i = dW_i^{(E)} + dW_i^{(I)}$$

$$dW_{ij}^{(I)} = \mathbf{F}_{ji}^{(I)} \cdot d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{iz} \cdot d\mathbf{r}_j$$

$$\mathbf{F}_{iz} = -\mathbf{F}_{ji} \Rightarrow = \mathbf{F}_{ij} (d\mathbf{r}_j - d\mathbf{r}_i) = \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ji}$$

Lavoro coppia di punti

è 0 solo se i e j sono
o si muovono della stessa
quantità.

$\sum W_i \neq 0$ non
posso dire
niente

Per un sistema di punti in generale

$$dW' = \sum dW_i$$

$$\int dW' \neq 0$$

nei corpi rigidi
 $d\mathbf{r}_{ij} = 0$

stesso sistema per i e j

nei sistemi di punti

in generale non è vero ma
per le forze esterne
sì

Corpo rigido – dinamica

- Per i corpi rigidi abbiamo quindi

TEO. QUANT'ALTO SIST.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}^{(E)}$$

TEO. MOM ANGOL.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(E)}$$

$$W_{AB}^{(E)} = E_{kB} - E_{kA}$$

Possiamo omettere l'apice (E), è sottointeso che le forze da prendere in considerazione sono esterne. SOLO ESTERNE

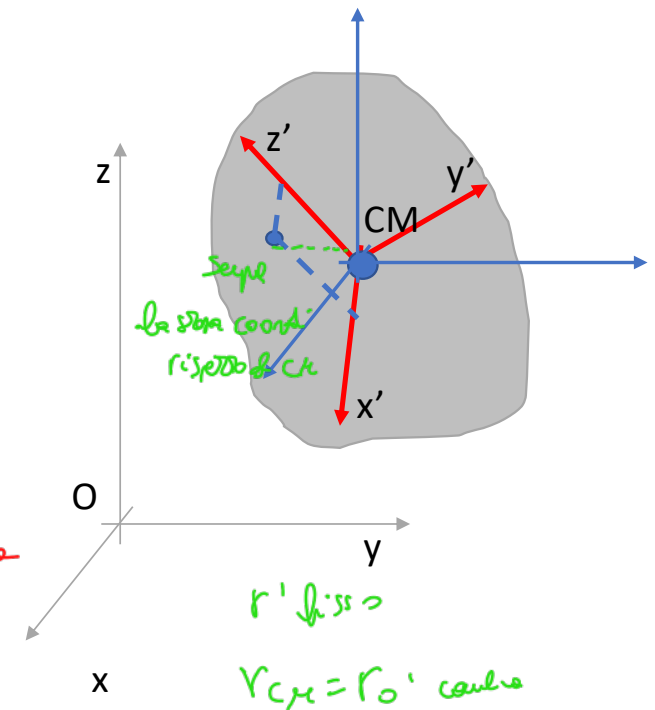
Corpo rigido – rappresentazione del moto

- Quante informazioni devo specificare per identificare la posizione di un corpo rigido nello spazio? *dipende dal sistema di rif.*

- In un corpo rigido le coordinate di un qualsiasi punto ad esso solidale rispetto al sistema di riferimento con origine in CM e assi solidali al corpo sono fisse

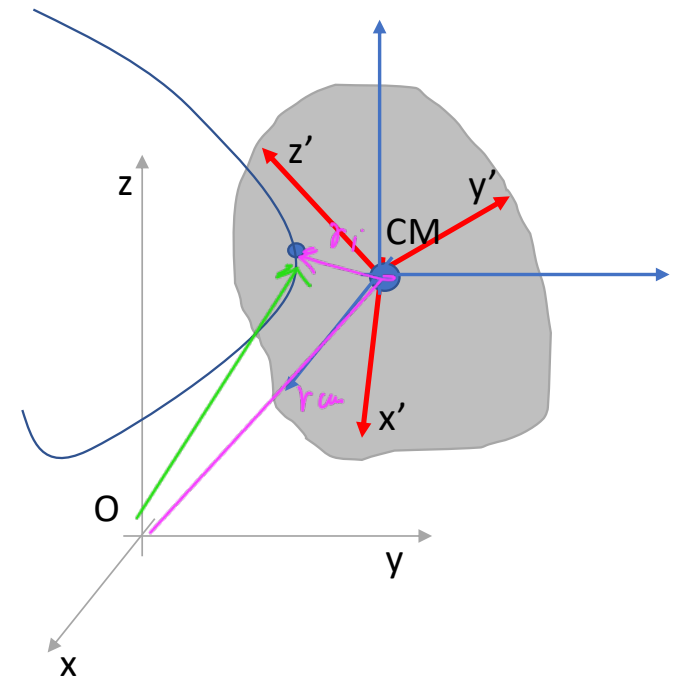
es. SdR con origine a CM e che ruota con il corpo

$\Rightarrow$ coordinate di un punto sono sempre le stesse



Corpo rigido – rappresentazione del moto

- Quante informazioni devo specificare per identificare la posizione di un corpo rigido nello spazio?
- Per conoscere la posizione di qualsiasi punto solidale al corpo basta conoscere le sue coordinate nel sistema mobile e la configurazione del sistema mobile rispetto a quello fisso



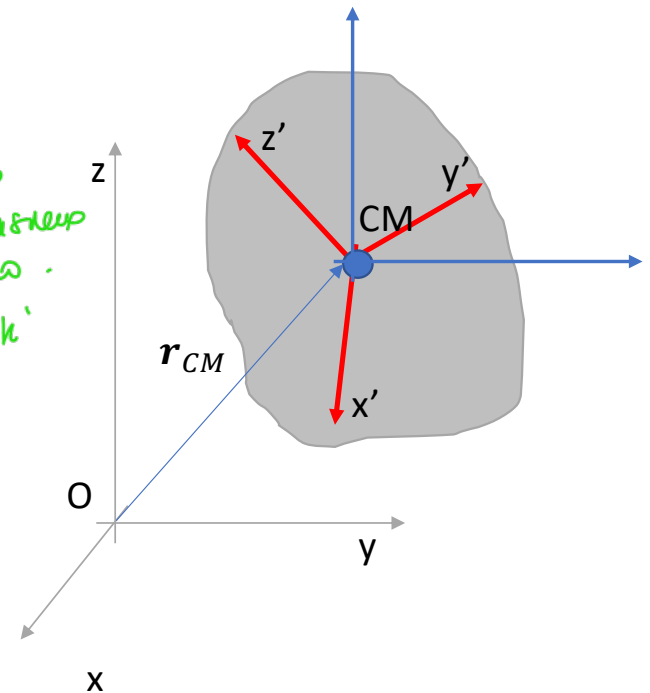
Corpo rigido – rappresentazione del moto

- Quante informazioni devo specificare per identificare la posizione di un corpo rigido nello spazio?

- Il sistema di riferimento è definito dalla posizione del centro di massa $\mathbf{r}_{CM}$ e dai versori $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$
mobile, solido e CM con assi che ruotano insieme al corpo. assi $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$
Solo mobile = Centro in $\mathbf{r}_{CM}$ assi $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$

- Per definire $\mathbf{r}_{CM}$ devo specificare 3 parametri (le componenti cartesiane)

$$\mathbf{r}_{CM} = x_{CM} \hat{\mathbf{i}} + y_{CM} \hat{\mathbf{j}} + z_{CM} \hat{\mathbf{k}}$$



Corpo rigido – rappresentazione del moto

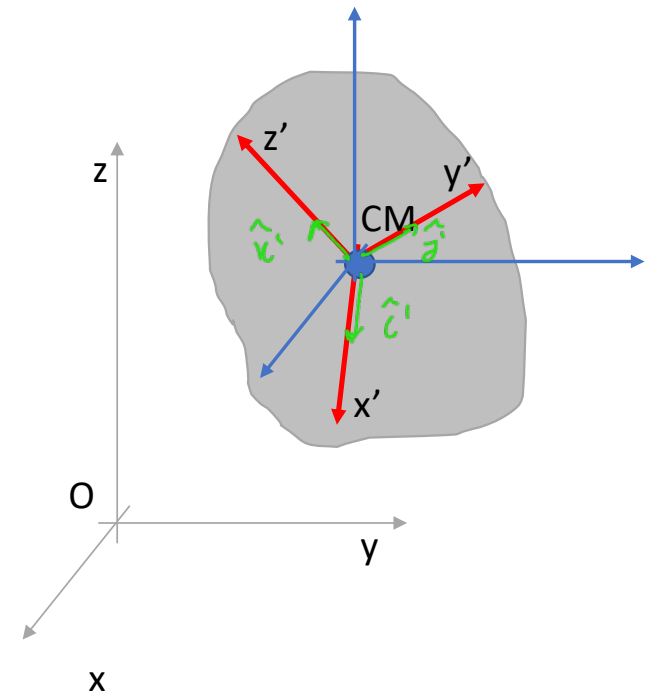
- Possiamo definire anche le componenti dei versori $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ rispetto al sistema inerziale

$$\odot \mathbf{i}' = \underline{i'_x \mathbf{i}} + \underline{i'_y \mathbf{j}} + \underline{i'_z \mathbf{k}}$$

$$\odot \mathbf{j}' = j'_x \mathbf{i} + j'_y \mathbf{j} + j'_z \mathbf{k}$$

$$\odot \mathbf{k}' = k'_x \mathbf{i} + k'_y \mathbf{j} + k'_z \mathbf{k}$$

- Per poterli rappresentare ho bisogno di 9 valori ma...



Corpo rigido – rappresentazione del moto

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = |\hat{i}|^2 = 1$$

• $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ sono versori, quindi devono avere modulo unitario

$$\hat{i}'^2_x + \hat{i}'^2_y + \hat{i}'^2_z = 1$$

$$\hat{j}'^2_x + \hat{j}'^2_y + \hat{j}'^2_z = 1$$

$$\hat{k}'^2_x + \hat{k}'^2_y + \hat{k}'^2_z = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0 \quad \hat{j} \cdot \hat{k} = 0 \quad \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$$

• $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ sono ortogonali tra loro, quindi

$$\hat{i}'_x \hat{j}'_x + \hat{i}'_y \hat{j}'_y + \hat{i}'_z \hat{j}'_z = 0 \rightarrow \text{lo fanno } \hat{i}' \cdot \hat{j}' = i_x j_x + i_y j_y + i_z j_z$$

$$\hat{j}'_x \hat{k}'_x + \hat{j}'_y \hat{k}'_y + \hat{j}'_z \hat{k}'_z = 0 \quad \hat{j}' \cdot \hat{k}' = j_x k_x + j_y k_y + j_z k_z$$

$$\hat{i}'_x \hat{k}'_x + \hat{i}'_y \hat{k}'_y + \hat{i}'_z \hat{k}'_z = 0 \quad \hat{k}' \cdot \hat{i}' = k_x i_x + k_y i_y + k_z i_z$$

Prodotto scalare in coordinate

Corpo rigido – rappresentazione del moto

- Per rappresentare $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ abbiamo bisogno di 9 parametri, legati tra loro da 6 relazioni. Quindi soltanto $9-6=3$ di loro sono indipendenti.

- Ricordiamo che servono altri 3 parametri per identificare $\mathbf{r}_{CM}$

Torniamo alla domanda di partenza

Quante informazioni devo specificare per identificare la posizione di un corpo rigido nello spazio?

Possiamo rispondere adesso: le informazioni che dobbiamo specificare sono $3 + 3 = 6$

Si dice anche che **un corpo rigido nello spazio ha 6 gradi di libertà**.

6 variab. indep.
per specificare la
posiz. di un punto del
corpo rigido nello spazio

per specificare la posizione di
un corpo rigido nello spazio ho
bisogno di 6 parametri

risposta di SAR Inventor

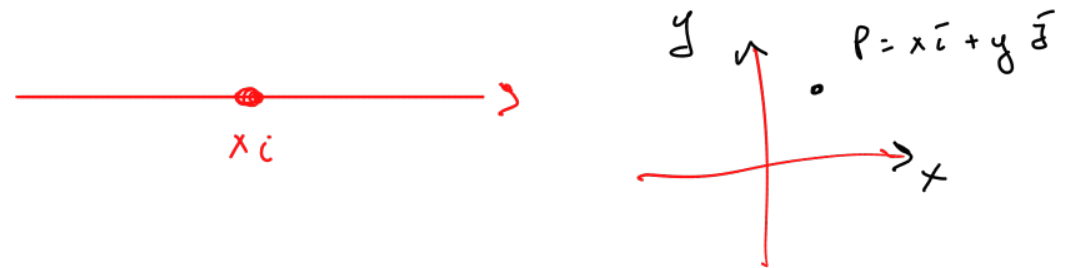
Gradi di libertà

Più in generale, in un sistema dinamico, cosa rappresenta il **numero di gradi di libertà?**

Il numero di gradi di libertà è il minimo numero di informazioni che devo specificare per identificare la configurazione del sistema.

(in questo caso, per specificare la prop. di un
giunto nel corpo rigido)

Gradi di libertà



Esempi:

- Un punto che si muove su una retta ha 1 grado di libertà
- Un punto nel piano ha 2 gradi di libertà
- Un punto nello spazio ha 3 gradi di libertà
- Un sistema di n punti materiali nello spazio ha 3n gradi di libertà
- Un sistema di n punti materiali nel piano ha 2n gradi di libertà

deno i gradi di libertà
ogni punto 3 gradi

.. Abbiamo verificato che un corpo rigido nello spazio ha 6 gradi di libertà indipendentemente dal numero di punti che lo compongono

3 per CM, 3 per i vettori del SOLR unito
non inerziali

- Corpo rigido = punti che non seguono alla stessa distanza
- Corpo continuo : infiniti punti di massa infinitesima

• Corpi continui

I corpi continui sono sistemi costituiti da un numero molto elevato di punti di massa infinitesima.

In un sistema discreto le quantità che caratterizzano l'intero sistema si calcolano con un'operazione di sommatoria. Ad esempio, per la massa: *se lo fanno i punti*

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

E per il centro di massa:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

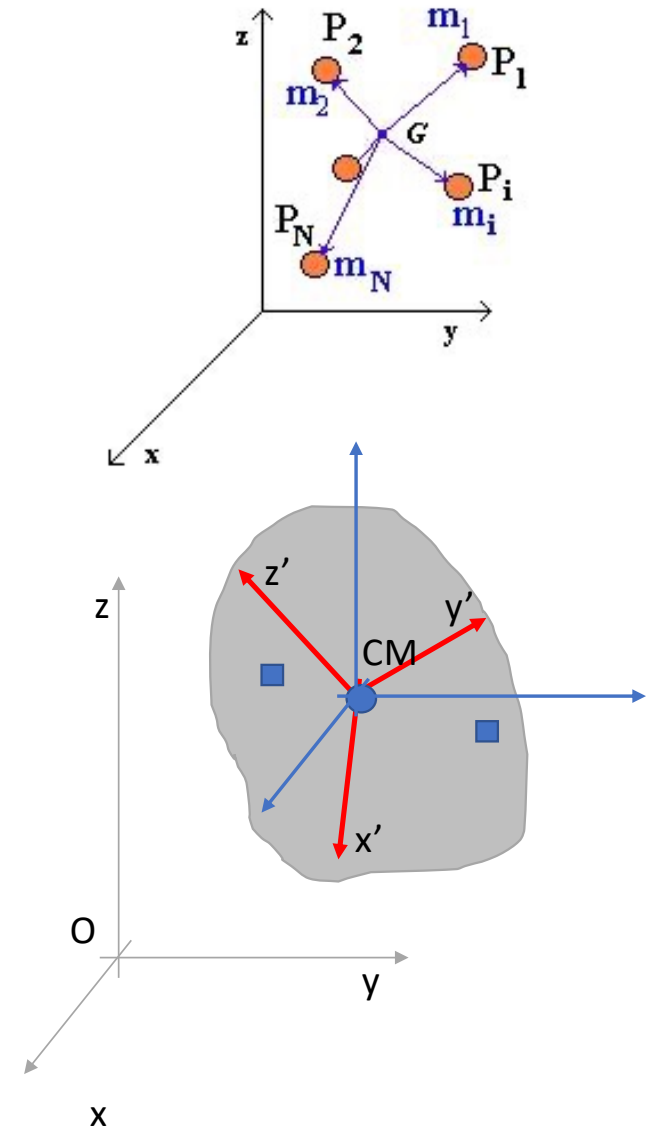
$\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{m} \mathbf{r}_i$

In un sistema continuo l'operazione di sommatoria si sostituisce con un integrale, la massa del sistema sarà quindi data da:

$$m = \int dm$$

$m \rightarrow \rho$
 ρ massa infinitesimale

*Sostituisco sommatorie con integrali
e introduco la densità*



Corpi continui

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

$$dm = \rho dV$$

Per calcolare le grandezze del sistema come integrali nelle variabili dello spazio è utile introdurre il concetto di densità. Per un corpo tridimensionale, si definisce la densità di volume come:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \rightarrow dm = \rho dV$$

densità dipende dal punto, vedilo in termini infinitesimi
 $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$

Dimensionalmente la densità è definita massa/lunghezza³ (M/L^3)

Una volta definita la densità, posso calcolare la massa totale del corpo continuo come

$$m = \int dm = \int_V \rho dV$$

$$m = \int_V \rho dV$$

integrale del volume, la sua densità

Se la densità è costante il corpo si dice **omogeneo** e vale la relazione

$$m = \rho V$$

no problema se ρ varia punto per punto

continuo
 corpo omogeneo: densità costante

$$m = \rho V$$

$$\text{altrimenti: } m = \int_V \rho dV$$

Corpi continui

- Casi particolari: corpi bidimensionali, sono corpi in cui due dimensioni sono prevalenti rispetto alla terza (ad esempio piastre, gusci, membrane, lamiere, ecc.). In questo caso conviene definire una densità di area o di superficie.

$$\rho_A = \frac{dm}{dA}$$

densità di sup.

$$\rho = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right]$$

Dimensionalmente la densità di area si calcola come massa/superficie=massa/lunghezza²

In questo caso posso calcolare la massa come:

$$m = \int_A \rho_A dA \quad \text{integro sull'area}$$

Se la densità di superficie è costante, il corpo bidimensionale si dice omogeneo e posso calcolare la massa come:

$$m = \rho A$$

se omogeneo (ρ costante)

Corpi continui

Infine, consideriamo il caso particolare di un corpo monodimensionale, vale a dire un corpo in cui una dimensione è prevalente rispetto alle altre due, ad esempio cavi, aste, tubi, funi, catene, ecc. Si definisce in questo caso una densità lineare:

$$\rho_l = \frac{dm}{dl}$$

$$\rho_l = \frac{kg}{m}$$

La densità lineare, dimensionalmente si calcola come massa/lunghezza.

In questo caso posso calcolare la massa come

$$\bullet \quad m = \int_l \rho_l dl$$

Se la densità lineare è costante il corpo si dice omogeneo e posso calcolare la massa come:

$$\underline{m = \rho l}$$

Corpi continui, centro di massa

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m_i}$$

$$m = \int dm$$

Sistemi di punti
somma vettoriale

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

posiz. centro di massa

Torniamo al caso generale tridimensionale, consideriamo un corpo continuo, la posizione del centro di massa è definita come:

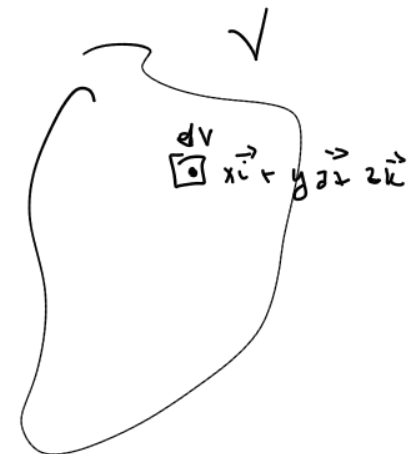
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{m}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{m}$$

Possiamo calcolare le coordinate del centro di massa rispetto a un dato sistema di riferimento:

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{\int_V \rho x dV}{m} \\ y_{CM} &= \frac{\int_V \rho y dV}{m} \\ z_{CM} &= \frac{\int_V \rho z dV}{m} \end{aligned}$$

Componenti cartesiane



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{m}$$

corpo continuo
riferito

$$m = \int_V \rho dV$$

Centro di massa, alcune proprietà

derivata costante
Se un corpo è omogeneo e ha un centro di simmetria, il centro di massa coincide con il centro di simmetria

punto per cui è simmetrico



è un piano

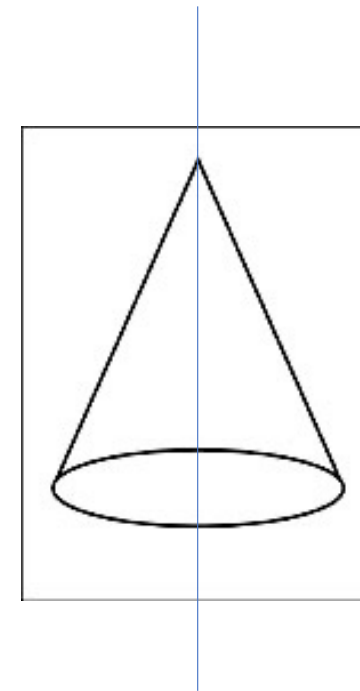
$$\vec{r}_{CM} = \vec{r}_{\text{centro simmetria}}$$

Centro di massa, alcune proprietà

Se un corpo ha un asse di simmetria, il centro di massa si trova su quell'asse

*Corpo simmetrico rispetto ad un
asse... $\vec{r}_{CM}$ sarà su
quell'asse*

*asse di simmetria è una retta
che divide il corpo in
2 parti identiche, una speculare rispetto
all'altra*



Centro di massa, esempio di calcolo

Consideriamo ad esempio un cono omogeneo, calcoliamo la posizione del centro di massa. Dato che il cono ha un asse di simmetria, il centro di massa si trova sull'asse del cono.
Calcoliamo la distanza z_{CM} tra la base del cono e il centro di massa.

calcolo solo la componente z

Il volume del cono è dato da:

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

Se il cono è omogeneo e la sua densità è ρ , ^{costante} la sua massa sarà

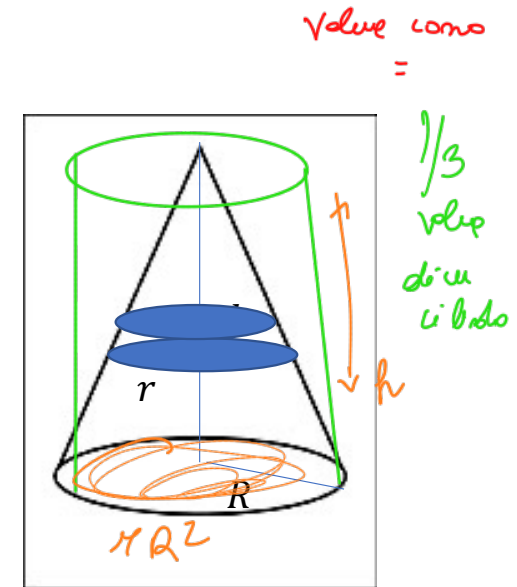
$$m = \rho V = \rho \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$$m = \int_V \rho dV = \int dm$$

Calcoliamo la posizione del centro di massa. Ricordiamo che

$$z_{CM} = \frac{\int_V \rho z dV}{m}$$

$$\frac{\int_V \rho \vec{r} dV}{m}$$



Centro di massa, esempio di calcolo

$$z_{CM} = \frac{\int_V \rho z dV}{m}$$

Per calcolare l'integrale di volume, possiamo dividere il cono in fette infinitesime parallele alla base, possiamo scrivere in questo caso

$$dV = \pi r^2 dz$$

Area

Per le proprietà dei triangoli simili risulta inoltre

$$r:R = (h-z):h$$

$$r = \frac{(h-z)}{h} R$$

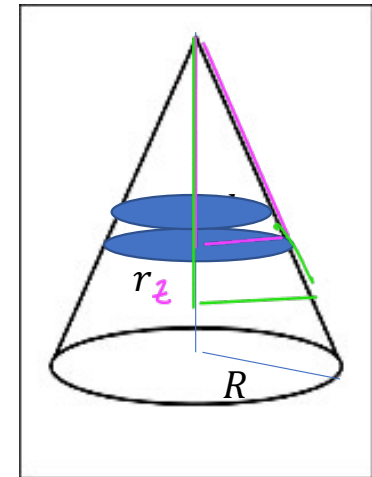
Sostituendo nell'integrale si ottiene:

$$z_{CM} = \frac{\int_V \rho z dV}{m} = \frac{\int_0^h \rho \pi r^2 z dz}{\rho \frac{\pi R^2 h}{3}} = \frac{\int_0^h \pi \left(\frac{(h-z)}{h} R \right)^2 dz}{\frac{\pi R^2 h}{3}} = \frac{\frac{\pi R^2 h^2}{12}}{\frac{\pi R^2 h}{3}} = \frac{h}{4}$$

integro per
sezioni

$m_{is} = \int_0^h dz \int \rho dx dy$

$\pi r^2 dz$

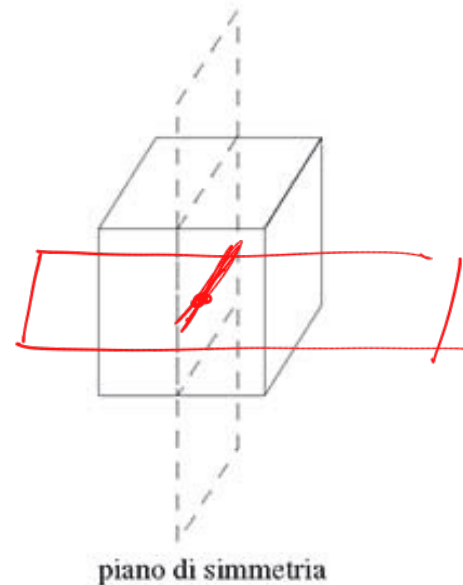


$\int_V z dV$

Centro di massa, alcune proprietà`

Se un corpo omogeneo ha un piano di simmetria, il centro di massa si trova su quel piano.

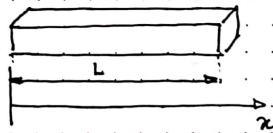
Se un corpo ha due o più piani di simmetria, il centro di massa si trova nell'intersezione tra i piani



Centro di massa, esempio di calcolo

ESEMPLI DI CALCOLO DEL CENTRO DI MASSA DI ALCUNI CORPI RIGIDI.

① BARRETTA ^{ρ_{cost}} OMogenea RETILINEA DI LUNGHEZZA l e MASSA m .



ρl ^{densità lineare}

densità ρ

CORPO MONODIMENSIONALE, è SUFFICIENTE CALCOLARE LA COORDINATA x_{cm} .

$$x_{cm} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int \rho \cdot x dx}{\int \rho \cdot dx}$$

$dm \rightarrow$ passo pensare di dividere la barretta in "fette" infinitesime di spessore dx



$$dV = A dx$$

$$m = \int dm = \int_V \rho dV = \rho \int_0^l A dx = \rho A l$$

LA MASSA DELLA FETTA INFINITESIMA

$$dm = \rho dV = \rho \cdot \text{volume della "fetta"} \\ = \rho \underbrace{A dx}_{dV}$$

QUINDI

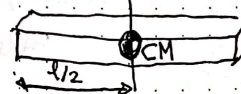
$$x_{cm} = \frac{\int_0^l x \rho A dx}{m} = \frac{\rho A \int_0^l x dx}{m} \\ = \frac{\rho A \frac{x^2}{2} \Big|_0^l}{m} = \frac{\rho A \frac{l^2}{2}}{m}$$

ma la massa m è pari a

$$m = \rho V = \rho A l \quad \text{supplendo}$$

QUINDI

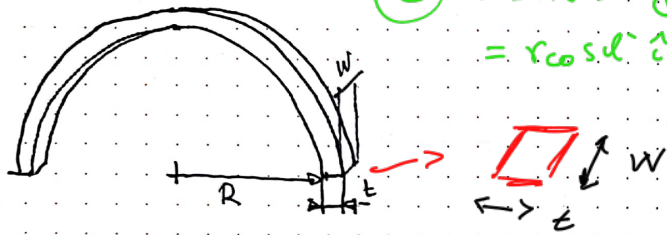
$$x_{cm} = \frac{\rho A \frac{l^2}{2}}{\rho A l} = \frac{l}{2}$$



OVVIO! LA BARRETTA È SIMMETRICA

(1) $dV = dS \cdot T$, $dS = R \ln 2$

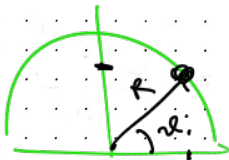
SEMANELLO OMOGENEO DI MASSA m e
RAGGIO R



SUPPONIAMO CHE LA SEZIONE SIA RETTANGOLARE
CON SPESSORE t (thickness) E LARGHEZZA
 m (width).

UTILIZZIAMO LA DEFINIZIONE

$$\underline{r}_{CM} = \frac{\int \underline{r} dm}{m}$$

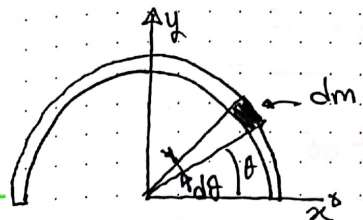


SVILUPPIAMO L'INTEGRALE A NUMERATORE

→ come posso scrivere dm in questo caso?

POSSO PENSARE NUOVAMENTE DI
DIVIDERE L'ANELLO A "FETTE",

MA QUESTA VOLTA CONVIENE FARLO IN DIREZIONE RADIALE



$$\underline{dm = \rho dv = \rho ds \cdot t \cdot w}$$

↑ ARCS INFINITESIMO

$$ds = R d\theta$$

$$dm = e \cdot L \cdot R \cdot d\theta$$

QUINDI

$$r_{cm} = \frac{\int r dm}{m} = \frac{\int_0^\pi r \rho t w R d\theta}{m}$$

COMPONENTI DEL VETTORE $\underline{a}$ *representing*

$$\underline{r} = x \hat{i} + y \hat{j}$$

$$x = R \cos \theta$$

$$y = R \sin \theta$$

QUINDI $\rightarrow$

im dier. Modell
 $dV = t \, w \, ds$
 $ds = R \, d\vartheta$

→ $\sigma_{\text{max}} > \sigma_{\text{crit}}$ $\Rightarrow$ σ_{crit} $\Rightarrow$ σ_{max}

r^2 im Colloquium

2. Toppi verde
r: in contorno dato
le potrà. Ho il raggio
e ho l'angolo.

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

integrare in φ

$$x_{cm} = \frac{\int_0^\pi \rho t \omega R \cdot R \cos \theta d\theta}{m} =$$

$$= \frac{\rho t \omega R^2 \int_0^\pi \cos \theta d\theta}{m} =$$

$$= \frac{\rho t \omega R^2 (\sin \theta) \Big|_0^\pi}{m} = 0 \quad \checkmark$$

ovvio! L'ASSE y
E' ASSE DI SIMMETRIA
QUINDI $x_{cm} = 0$

$$y_{cm} = \frac{\rho t \omega R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta}{m} =$$

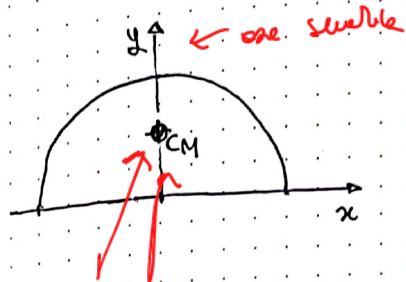
$$= \frac{\rho t \omega R^2 (-\cos \theta) \Big|_0^\pi}{m} = \frac{2 \rho t \omega R^2}{m}$$

MA LA MASSA m È PARIA A

$$m = \underbrace{\rho \pi R t \omega}_{\text{SEZIONE TRASVERSALE}} \cdot \underbrace{L}_{\text{LUNGHEZZA ARCO}}$$

QUINDI

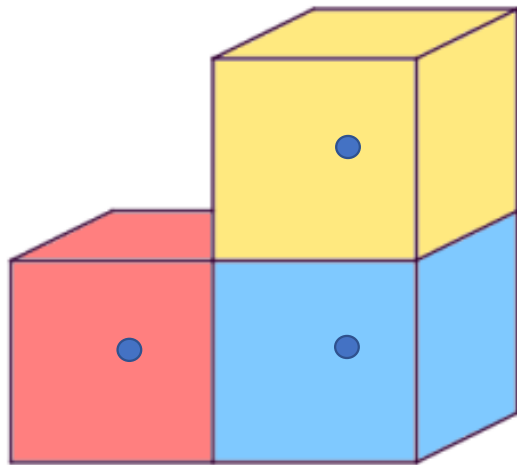
$$y_{cm} = \frac{2 \rho t \omega R^2}{\rho \pi R t \omega} = \frac{2}{\pi} R \approx 0.637 R$$



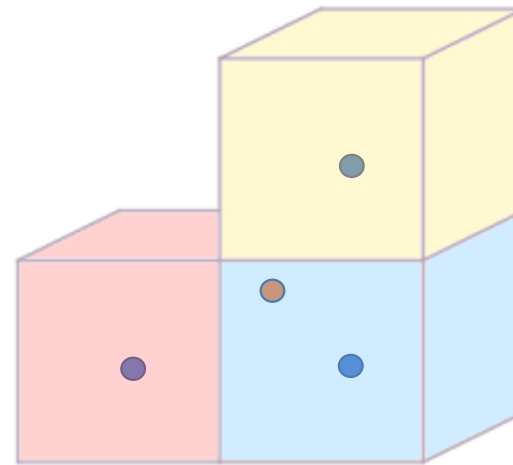
$$\oint \left(\int w \cdot t \cdot ds = \int_0^\pi w \cdot t \cdot R d\varphi \right)$$

$$= \oint w t R R$$

Solidi composti da più forme “semplici”



GiftedMathematics.com



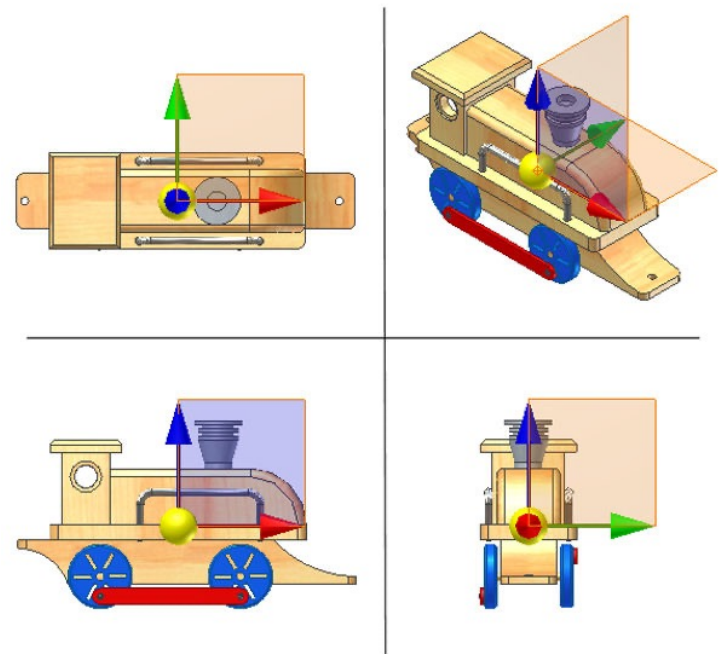
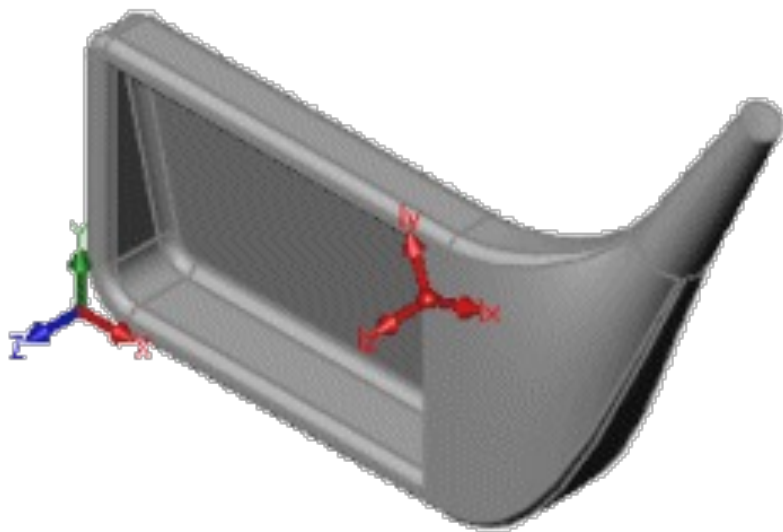
hanno stessa
massa

GiftedMathematics.com

Possiamo determinare i centri di massa degli elementi più semplici e poi calcolare il centro di massa complessivo sfruttando le proprietà dei sistemi discreti

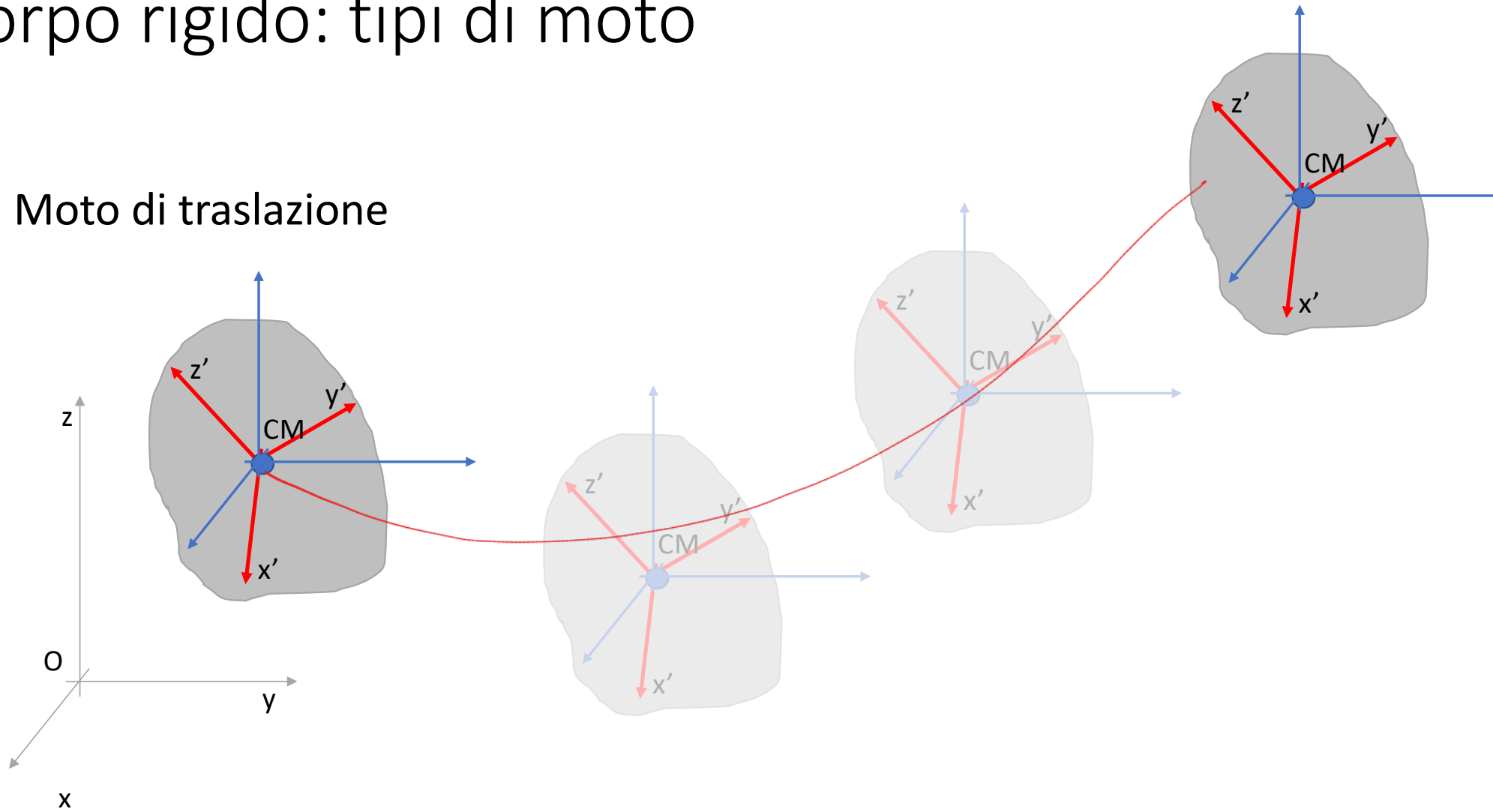
cioè fare il centro di massa dei
centri di massa, dove ogni punto
ha massa complessiva $m_i = \text{massa delle}$
punti più leggeri

Solidi complessi non è semplice ...



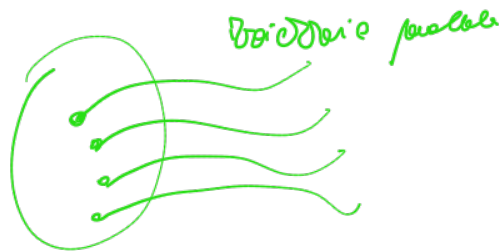
- Corpo rigido: tipi di moto

- Moto di traslazione



Corpo rigido: tipi di moto

Moto di traslazione



traiettorie parallele

Segni del corpo

- I punti seguono traiettorie parallele tra loro.
- Gli assi del Sistema di riferimento solidale al corpo rimangono paralleli (non ruotano).
- Le traiettorie dei punti possono essere rettilinee o curvilinee.

Moto in cui gli assi del
sistema di riferimento nel CA
NON RUOTANO, segna paralleli e sono invari.

Assi del corpo e
del SR invariabile
sempre paralleli



Assi non
ruotano

Corpo rigido: tipi di moto

Moto di rotazione

- Tutti i punti si muovono di moto circolare con la stessa velocità angolare

$\vec{\omega}$

$\vec{\omega}$ può variare

punti ruotano f. es. sull'asse z

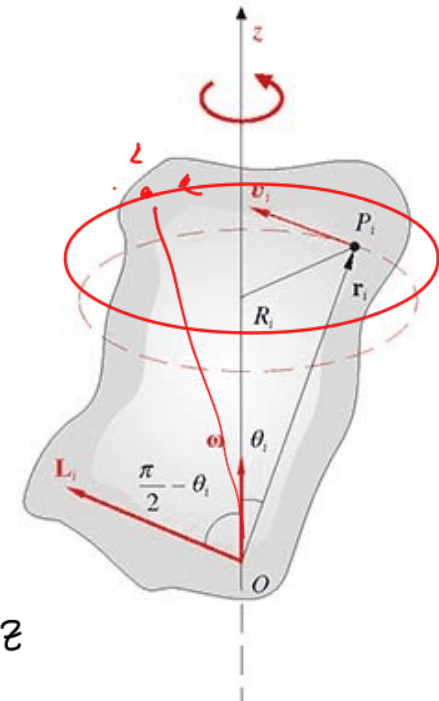
$\vec{\omega}$ avrà direz. = asse di rotaz. = z

- La direzione di ω è quella dell'asse di rotazione

il corpo ruota su un asse.

$\vec{\omega}$ ha direz. come quell'asse

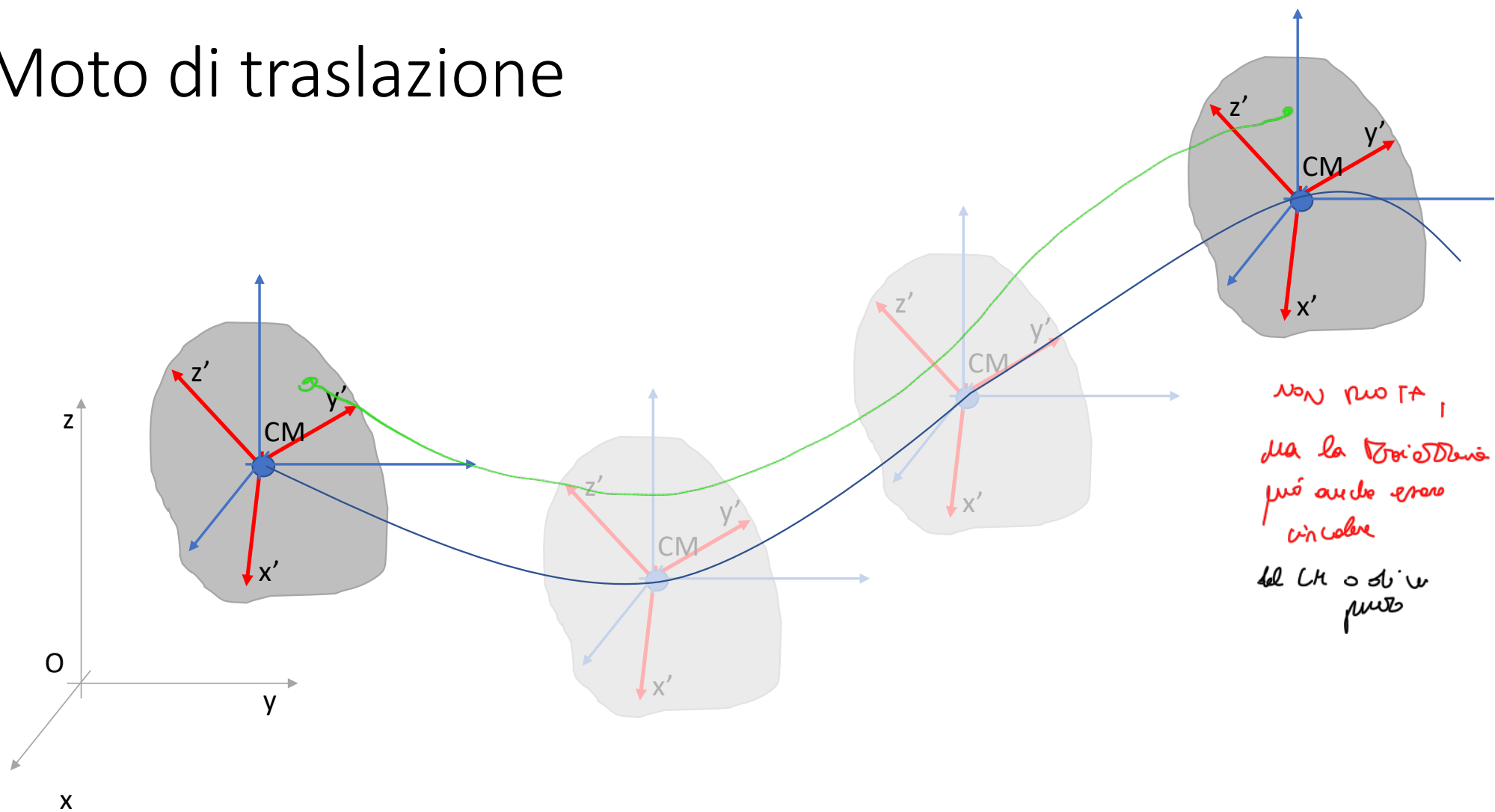
ma non trasla



Corpo rigido: tipi di moto

- Moto generico ^{corpo} *trasla e ruota*
- Istante per istante è possibile rappresentarlo come la combinazione di una rotazione e una traslazione. *es. *

Moto di traslazione

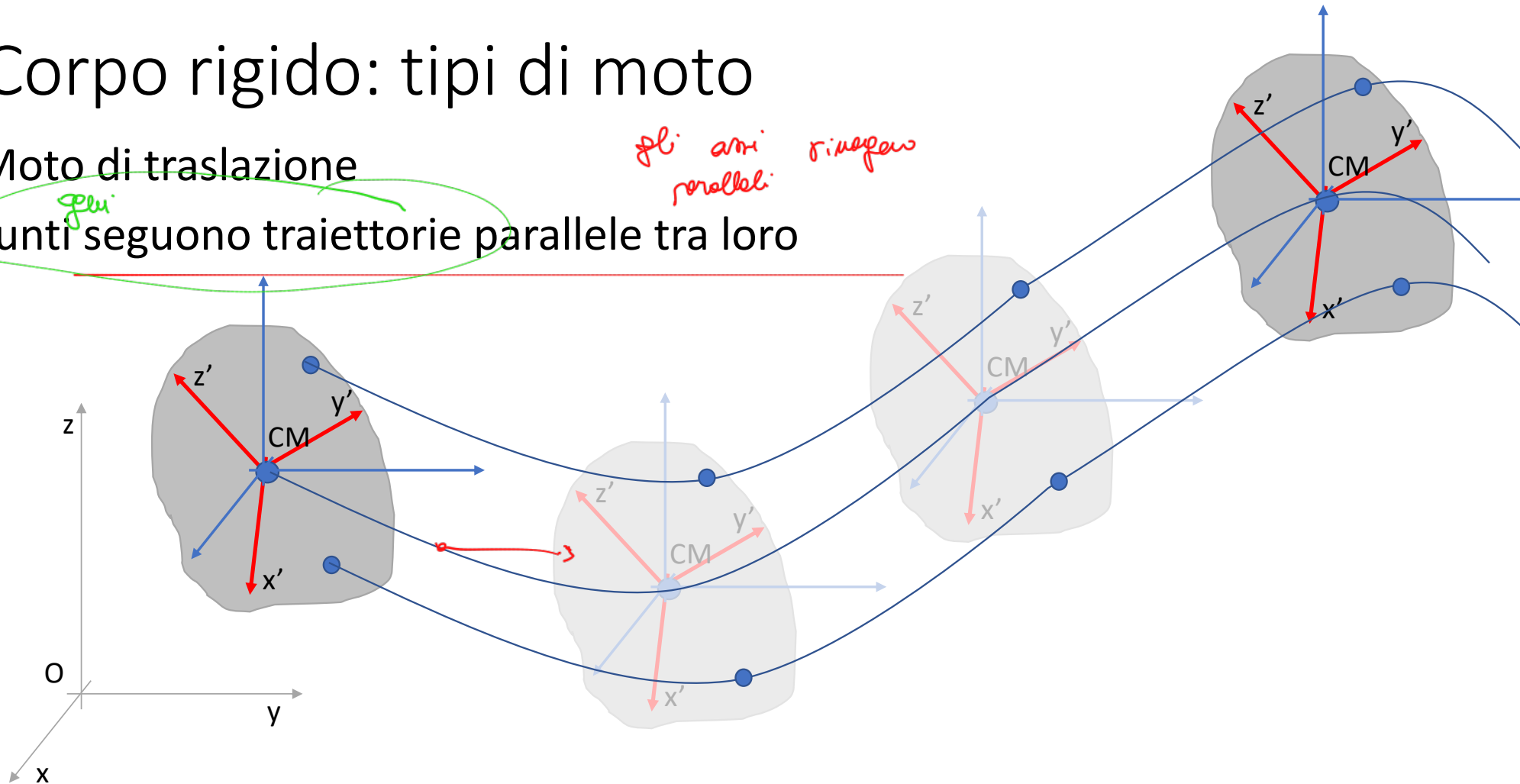


Corpo rigido: tipi di moto

- Moto di traslazione

gli I punti seguono traiettorie parallele tra loro

gli assi rimangono paralleli



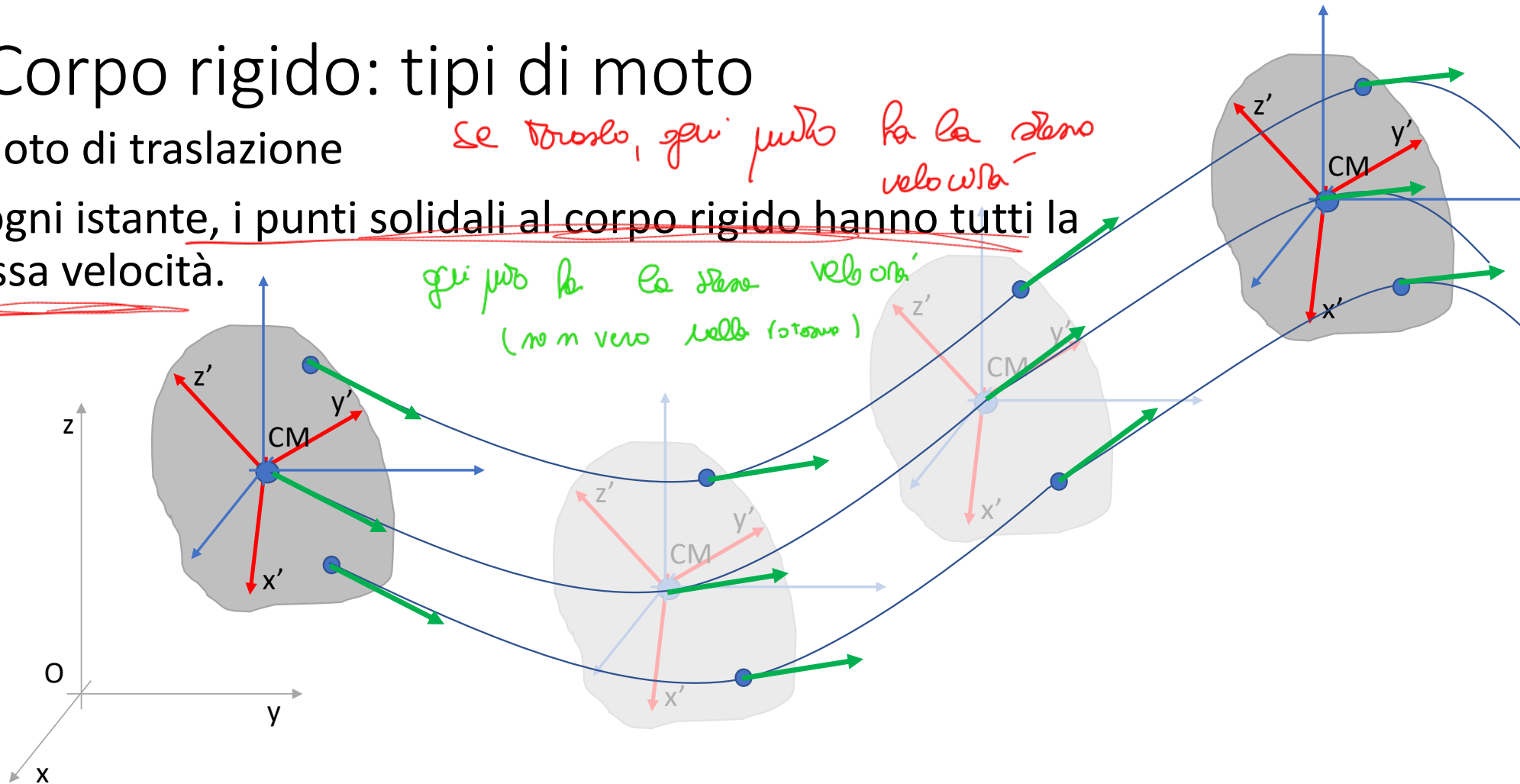
Corpo rigido: tipi di moto

- Moto di traslazione

In ogni istante, i punti solidali al corpo rigido hanno tutti la stessa velocità.

Se traslo, ogni punto ha la stessa velocità

*ogni punto ha la stessa velocità
(non vero nello rotazione)*



Corpo rigido: tipi di moto

- Moto di traslazione
- In ogni istante, i punti solidali al corpo rigido hanno tutti la stessa velocità
- Istante per istante, la velocità può variare in modulo, direzione e verso.
- La velocità di un generico punto v è uguale alla velocità del centro di massa v_{CM}

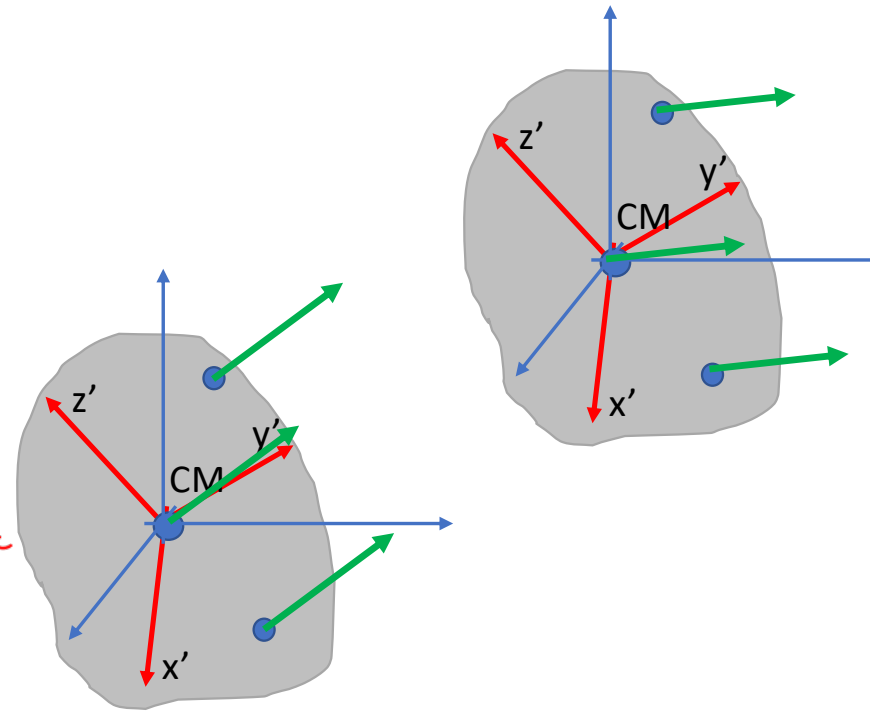
$$v = v_{CM}$$

di quel punto

Traiettorie
generica 1 può
accelerare ecc

hanno
direzione
uguale

Velocità
vista da
un sistema
inertiale
fisso



Moto di traslazione

- La velocità di un generico punto v è uguale alla velocità del centro di massa

v_{CM}

$\forall p: v = v_{CM}$

Per un generico moto e un generico punto abbiamo visto che possiamo scrivere

$$v = v_{CM} + v'$$

ho un SdR mobile di Cdm

+ $\omega \times r = 0$, non ruota

Essendo v' la velocità del generico punto rispetto al centro di massa.

ho tutti le stesso velocità

→ Nel moto di traslazione risulta $v' = 0$

qui punto ha
la sua velocità del Cdm

Moto di traslazione

- La velocità di un generico punto $\mathbf{v}$ è uguale alla velocità del centro di massa

$\mathbf{v}_{CM}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{CM}$$

Per un moto traslatorio vale che

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

l'energia cinetica del corpo rigido è come quella di un punto in CM con $\mathbf{v}_{CM}$ e massa m

Energia cinetica del corpo rigido in moto di traslazione

- Abbiamo visto che per un sistema di n punti

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

E_k = somma delle energie dei singoli punti

- Per un corpo continuo abbiamo

E_k corpo continuo è un integrale

$$E_k = \int \frac{1}{2} v^2 dm = \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV$$

$$dm = \rho dV$$

$v dm$ = velocità di un punto infinitesimo di massa dm

- Per un corpo continuo che ha moto traslatorio $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{CM}$

velocità è quella del CM

questo è vero perché $v = v_{CM}$

$$E_k = \frac{1}{2} v_{CM}^2 \int_V \rho dV = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

Per un corpo continuo con moto traslatorio

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

integrale volume, mi dà la massa

come se fosse un unico punto di massa $m = \int_V \rho dV$

Moto di traslazione

QUANTITÀ DI MOTO

Torniamo un attimo ai sistemi di punti materiali...

Momento della quantità di moto, in caso di moto generico, per un sistema discreto di punti, si può dimostrare un risultato analogo a quello visto per l'energia cinetica (primo teorema di König), possiamo cioè scrivere il centro di massa totale come:

①

MOMENTO ANGOLARE
TOTALE

$$L = L_{CM} + L'$$

Dove L_{CM} è il momento angolare del centro di massa

$$L_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P}$$

↳ momento totale del sistema

Mentre L' è il momento angolare dei singoli punti rispetto al centro di massa:

$$L' = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i'$$

Come per E_k

$$\vec{L} = \vec{r}_{CM} \times m \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' = \vec{L}_{CM} + \vec{L}' \quad \text{1° Teo König}$$



$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}_i'$$

Simile al
1° Teo di König
con l'energia
cinetica

2° Teo

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

se
v_CM = 0

1° Teo König

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \vec{r}_{CM} \times m \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

Velocità
relativa al
centro di massa

$\vec{r}_i \times \vec{v}_i$

Sistema di ref del
CM

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}'$$

velocità di
centro di massa

• Moto di traslazione

Nel caso di corpo rigido e moto di traslazione, il secondo termine si annulla,
dato che $\underline{\underline{v'_i = 0}}$

$$L' = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i = 0$$

quasi tutti i termini
di $L' = 0$

E quindi

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM}$$

Dove, come abbiamo visto:

$$L_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P}$$

come se fosse un
solo punto su cui m

Moto di traslazione *di un corpo rigido*

Riepilogando, abbiamo visto che le grandezze significative per un Sistema di punti materiali o un Sistema continuo, in caso di moto di traslazione sono pari a:

Quantità di moto

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(e)} = m \vec{a}_{CM} \quad \vec{v}_{CM} \text{ può variare in modulo, direz. e verso}$$

Energia cinetica

$$E_p = m g z_{CM}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad E_k &= \frac{1}{2} m v_{CM}^2 \quad \text{1° Teo. Kinig} \\ &= E_{kCM} \end{aligned}$$

Momento della quantità di moto

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P} \quad \text{1° Teo. Kinig}$$

Per un sistema continuo che si muove in moto di TRASLAZIONE

Posso vedere il sistema come un unico punto di centro CM e massa $m = \int_V \rho dV$

Sia per qualsiasi moto che per impatti centrali che per urti obliqui

Moto di traslazione

Equazione di moto del centro di massa



$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}$$

Teo della quantità di moto
sistemi di PUNTI
vale ancora anche per
corpi rigidi

Forze esterne

In questo caso, dato che

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P} = \mathbf{r}_{CM} \times M\mathbf{v}_{CM}$$

HO $\vec{L}$, COM

eq. dei mom. non

FACILISSIMO MOLTO

NON MI SERVE

L'equazione dei momenti

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

MOM forze esterne

Non aggiunge ulteriori informazioni nello studio del problema.



ricorda che

$$W_{AB} = W_{AB}^{(E)} = E_{KB} - E_{KA}$$

aiuto per la buca pulci ope rif. e rif. = 0

Moto di traslazione

La dinamica e il moto

- Per studiare il moto di un corpo rigido che si muove di moto traslatorio e' sufficiente studiare l'equazione

tutti i punti si muovono con $\vec{a}_H, \vec{v}_H$

$\vec{p} = m \vec{v}_{CM}$

$\vec{p} = m \vec{v}_{CM}$

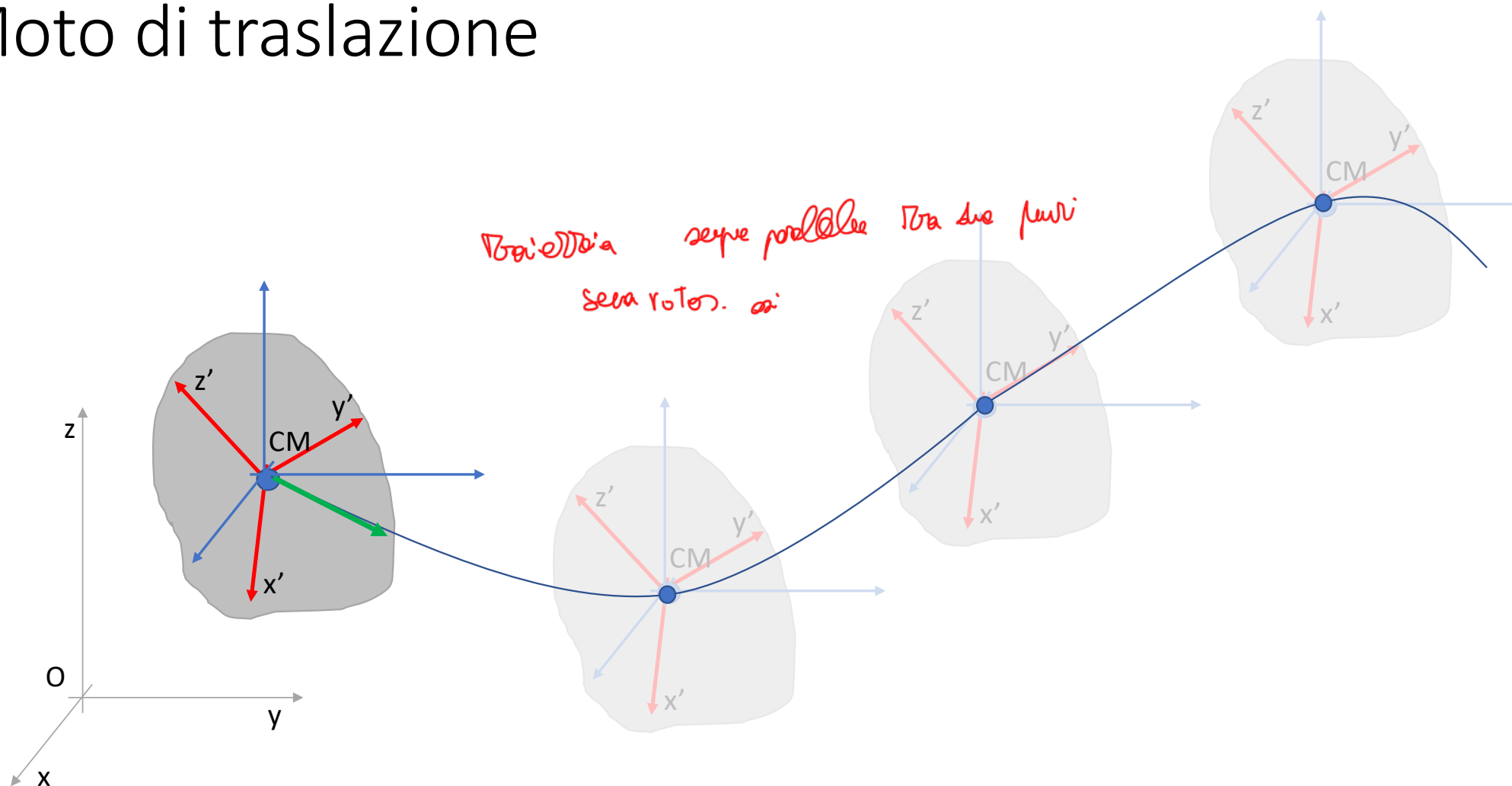


$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m \vec{a}_{CM} = \vec{R} \quad \text{Forze esterne}$$

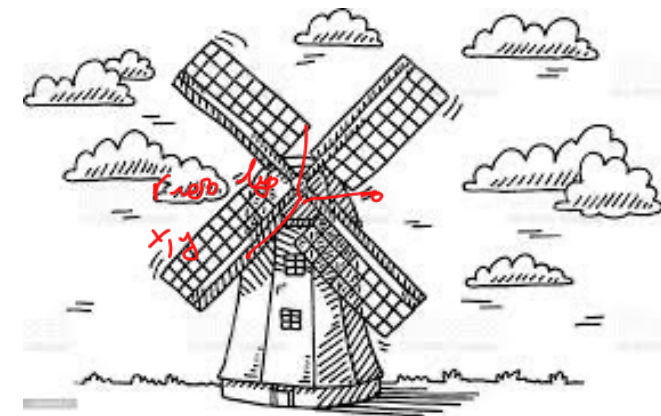
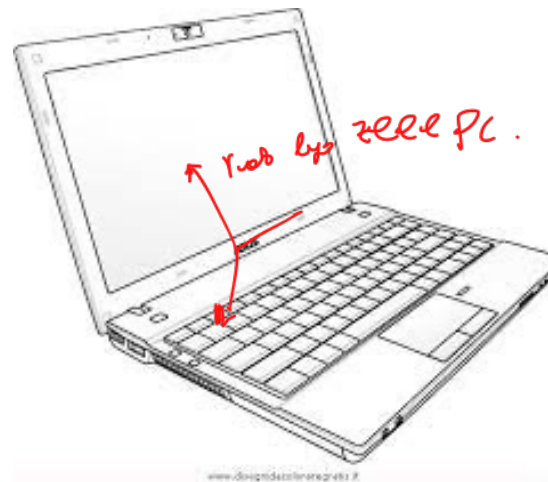
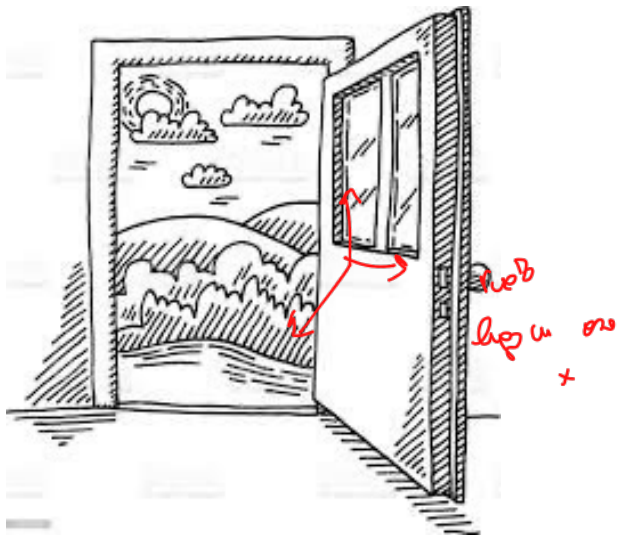
(in altri termini, possiamo studiare il moto del corpo come se fosse un punto materiale di massa pari alla massa m del corpo rigido, concentrata nel suo centro di massa)

IN MOTO DI TRASLAZIONE

Moto di traslazione



Moto di rotazione



Moto di rotazione



ho diverse moti di rotazione

Moto di rotazione intorno a un asse fisso

- Il corpo ruota intorno a un asse fisso *lungo un solo asse*
es. z
- Tutti i punti solidali al corpo si muovono
di moto circolare su un piano
perpendicolare all'asse *di rotazione*
- Le velocità dei punti sono diverse, ma la
velocità angolare $\omega = \frac{v}{R}$ è la stessa per
tutti i punti

La direzione di $\vec{\omega}$ è quella dell'asse di
rotazione.



*raggiare e' il raggio,
raggiare la velocita'*

*perpendicolare all'
asse xy fisso*

-> omega' direz. case asse z de ruota

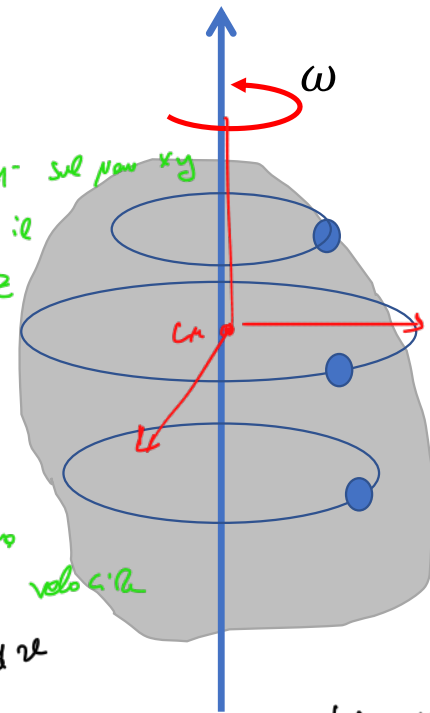
*• Velocita' angolare e'
la stessa + punto, ma
diversa e' la propria velocita'*

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \Rightarrow \text{in modulo}$$

$$ds = R d\varphi$$

$$v = R \frac{d\varphi}{dt} = R \omega$$

omega = velocita' angolare



Per il moto di traslazione ci basta, qui serve momento angolare
 Per studiare il moto, perché consideriamo il corpo rigido come unico punto $m, \vec{r}_i$
 $\frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}_{CM} = \vec{R}$

Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Per studiare il moto di rotazione ci concentriamo sull'equazione:

Usa teorema del momento angolare

Polo su
asse di rotazione.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$\vec{M}$ è il momento delle forze esterne calcolato rispetto a un determinato polo (conviene prenderlo per semplicità sull'asse di rotazione).

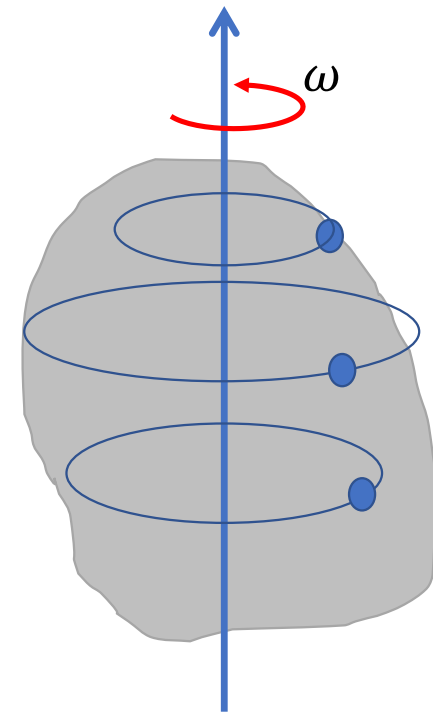
$\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$
 collega polo (asse di rotazione) al punto

$\vec{L}$ è il momento angolare del corpo, calcolato rispetto allo stesso polo che abbiamo scelto per $\vec{M}$

$\sum \vec{L}_i = \vec{L}$ angoli del corpo rispetto

Cerchiamo di studiare il vettore $\vec{L}$ e la sua derivata rispetto al tempo.

qui ora $\vec{r}_i \neq 0$ rispetto al Cdm...



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

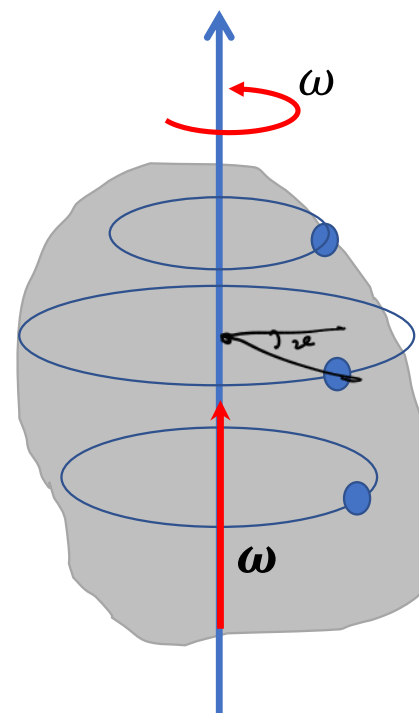
Def. velocità angolare

Utilizziamo la definizione vettoriale della velocità angolare, definiamo quindi il vettore velocità angolare ω .

• La direzione di ω è quella dell'asse di rotazione. *qui?*

• Il modulo è pari alla velocità angolare ω , tale che per un generico punto $v = \omega R$. *con ω moto $\omega = \frac{v}{R} = \frac{d\theta}{dt}$ $\forall$ punto*

• Il verso è definito in modo tale che ω vede il corpo ruotare in senso antiorario.



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

= Dires.
 $\vec{\omega}$ fissa

Altre ipotesi:

La direzione di $\vec{\omega}$ è fissa (asse di rotazione fisso),
ma il suo modulo può variare.

NON cambiando esse di rotazione, anche,
dires. di $\vec{\omega}$ è fissa
nel tempo, ω non è costante, può
avere una accelerazione

- Se il modulo di $\vec{\omega}$ varia, posso definire il vettore
accelerazione angolare:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right]$$

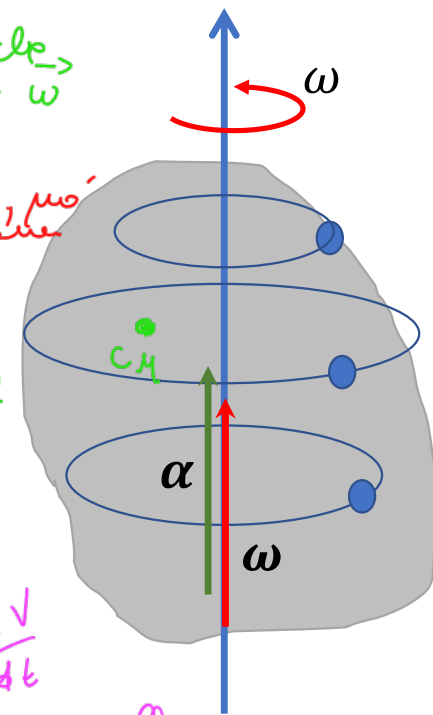
per può la lo stesso ω ,
in generale ω può variare
in modulo

Che ha la stessa direzione di $\vec{\omega}$, il suo modulo è
pari alla derivata della velocità angolare $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
e si misura in rad/s^2 .

$$= R \frac{dv}{dt}$$

Non è detto che il centro di massa si trovi lungo
l'asse di rotazione.

in generale



nella teoria nuovo
visto solo moto circolare
unif., con ω costante

Moto di rotazione intorno a un asse fisso

- Fissiamo un sistema di riferimento inerziale *quindi non ruota*
 - con origine sull'asse di rotazione e asse z *non è detto ci sia CM*
diretto come il vettore ω . *ruota lungo z*

Analizziamo il moto del generico punto P_i solidale al corpo.

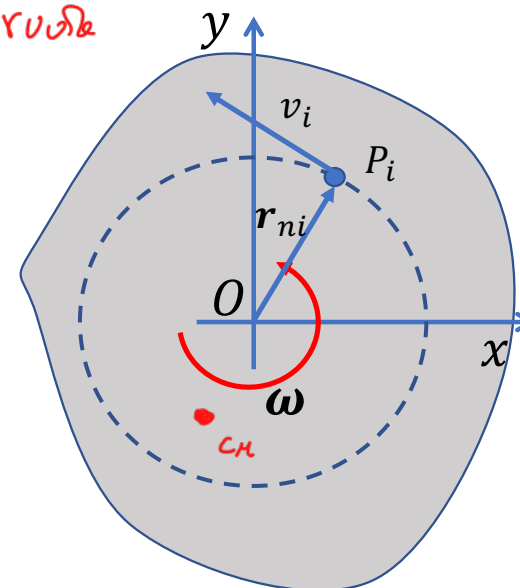
il punto
Il punto si muove con moto circolare di raggio R_i

$$\omega \times r = v \text{ dalla teoria}$$

La sua velocità è pari a: ✓

$$v_i = \omega \times r_{ni}$$

modulo R_i
 r_{ni} raggio vettore che identifica P_i sulla circonferenza, il suo modulo è R_i



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

L'accelerazione del generico punto P_i solidale al corpo vale:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{ni} + \mathbf{a}_{ti}$$

normale *tang.* *del punto i*

Dove la componente normale (centripeta) è pari a:

$$\mathbf{a}_{ni} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{ni} = -\omega^2 \mathbf{r}_{ni} = \omega^2 R v_m$$

= $\frac{v_i^2}{R}$ *$\vec{a}_m = -\omega^2 \mathbf{r}$* *$r = R\omega$* *$-r_m$*

Mentre la componente tangenziale è pari a:

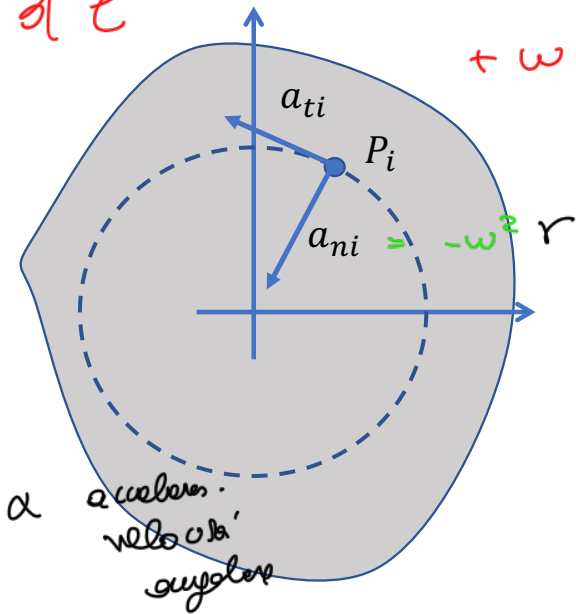
$$\mathbf{a}_{ti} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{ni}$$

Ricordando che l'accelerazione angolare è definita come:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$\vec{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ *$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$*



GIUSTAMENTE, NON DEVO AVERE accelerazione tangenziale alla traiettoria circolare se voglio rimanere a ω costante ma solo normale per mantenere la traiettoria

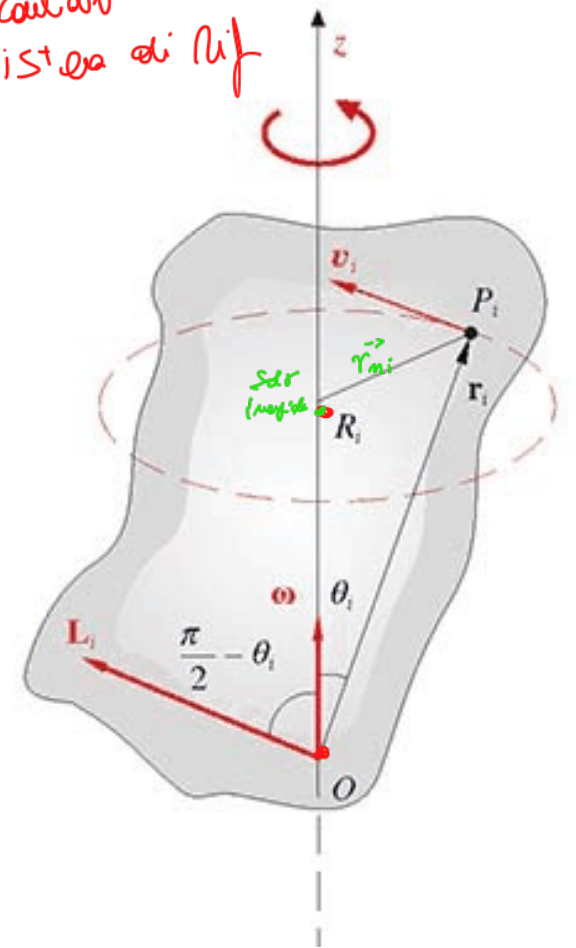
Moto di rotazione intorno a un asse fisso

*Abbiamo cambiato
sistema di rif*

Abbiamo visto che l'asse di rotazione
coincide con l'asse z del sistema inerziale

Polo per il calcolo dei momenti $\rightarrow$ punto O Δz
generico sull'asse di rotazione, ad esempio
l'origine del sistema di riferimento.

Non è detto che O si trovi sulla circonferenza
percorsa da P_i .



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

*O, punto fisso
Sullo vettore*

Alcune definizioni:

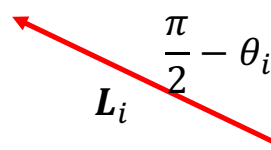
- $\mathbf{r}_i \rightarrow$ vettore che congiunge O con P_i *qui il pto*
- $\theta_i \rightarrow$ angolo tra $\mathbf{r}_i$ e l'asse di rotazione z

Calcoliamo il momento angolare della
generica particella che costituisce il corpo
rigido

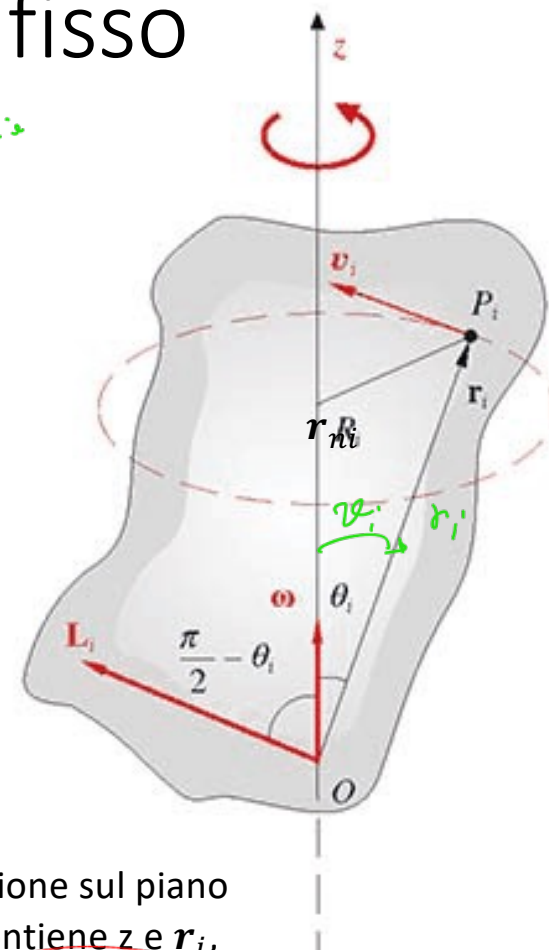
Dalla definizione di momento angolare:

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

$\mathbf{L}_i$ è perpendicolare a $\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{v}_i$



Proiezione sul piano
che contiene z e $\mathbf{r}_i$,
 $\mathbf{v}_i$ entra nel foglio



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

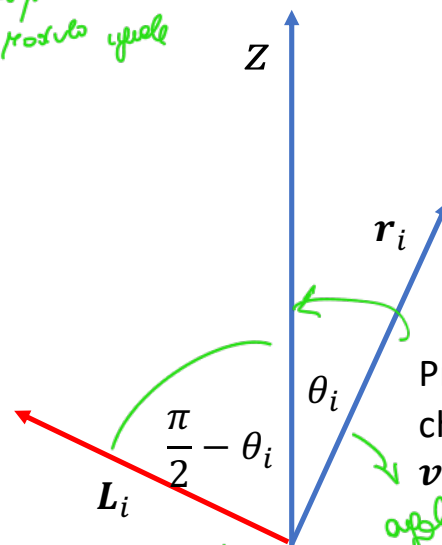
$\mathbf{L}_i$ forma con l'asse z un angolo $\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right)$

Modulo di $\mathbf{L}_i$

$$L_i = r_i m_i v_i = r_i m_i \omega R_i$$

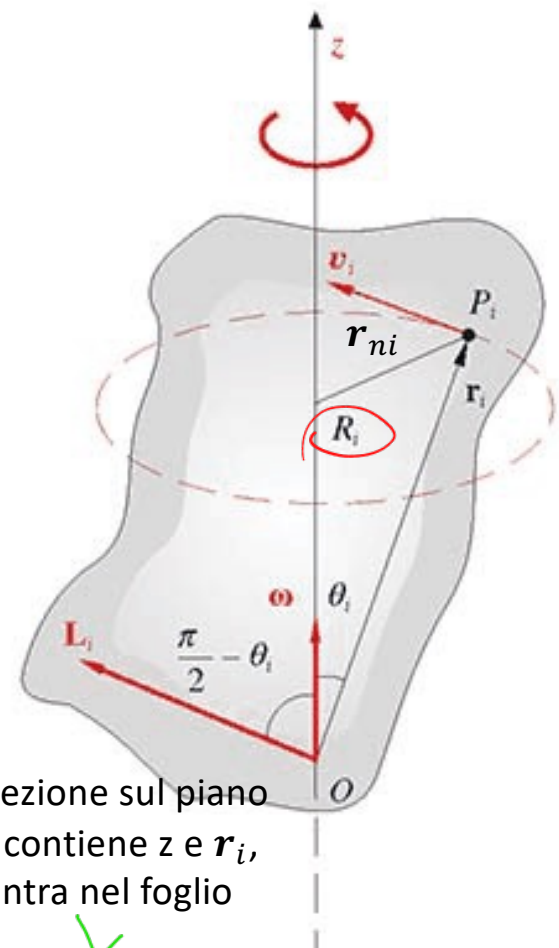
$\vec{v}_i$ e $\vec{r}_i$ sono
ortogonali.
 $\sin(\pi/2) = 1$

Calcolo prima.
Prodotto uguale



Proiezione sul piano
che contiene z e $\mathbf{r}_i$,
 $\mathbf{v}_i$ entra nel foglio

$\vec{r}_i$ e $\vec{v}_i$ sono
ortogonali
 $\vec{r}_i \cdot \vec{v}_i = 0$



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

es. $\theta_i = 30^\circ$ $\cos(60) = \frac{1}{2}$ $\sin 30 = \frac{1}{2}$

Calcoliamo la componente di $\mathbf{L}_i$ lungo l'asse z

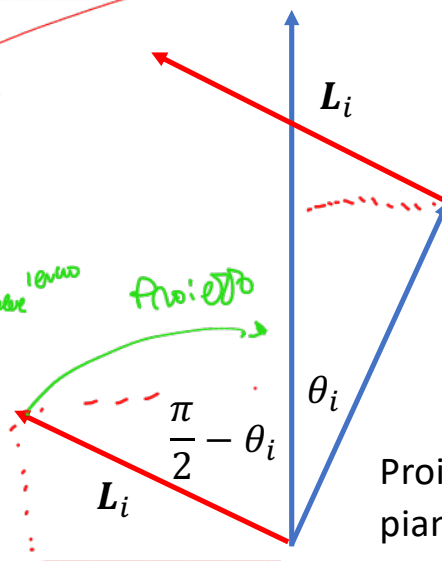
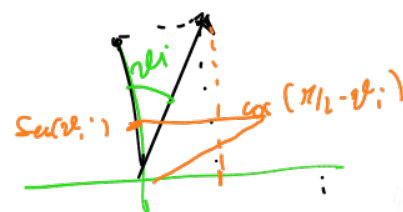
$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad v_i = \omega R_i$$

$$L_{iz} = \mathbf{L}_i \cdot \mathbf{k} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = L_i \sin \theta_i = \underbrace{r_i}_{R_i} \underbrace{m_i}_{m_i} \underbrace{R_i \omega}_{v_i} \sin \theta_i = \boxed{m_i R_i^2 \omega}$$

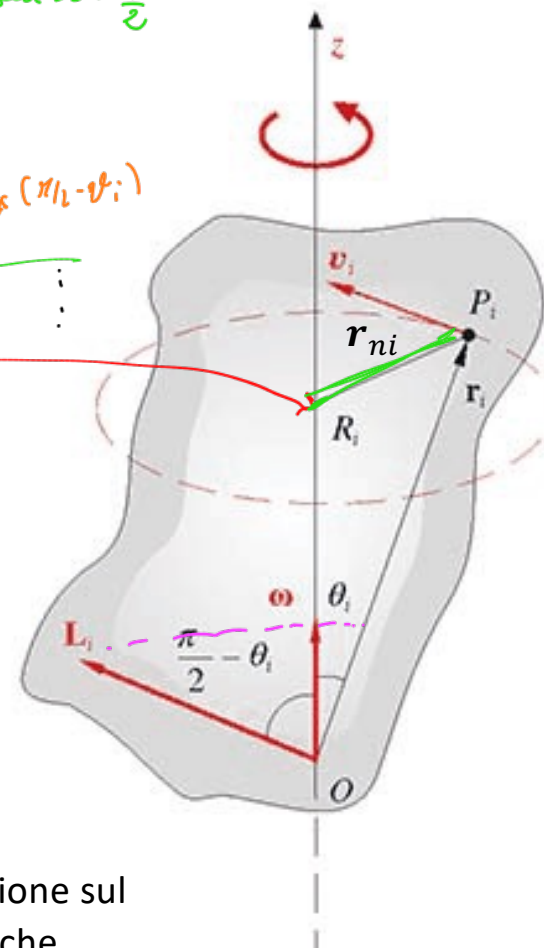
Otteniamo quindi:

$$L_{iz} = m_i R_i^2 \omega$$

componente lungo z con
dipende da θ_i scelto
di ω



Proiezione sul
piano che
contiene z e $\mathbf{r}_i$



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

- Per l'intero corpo rigido, supponendo che sia costituito da n punti discreti,

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

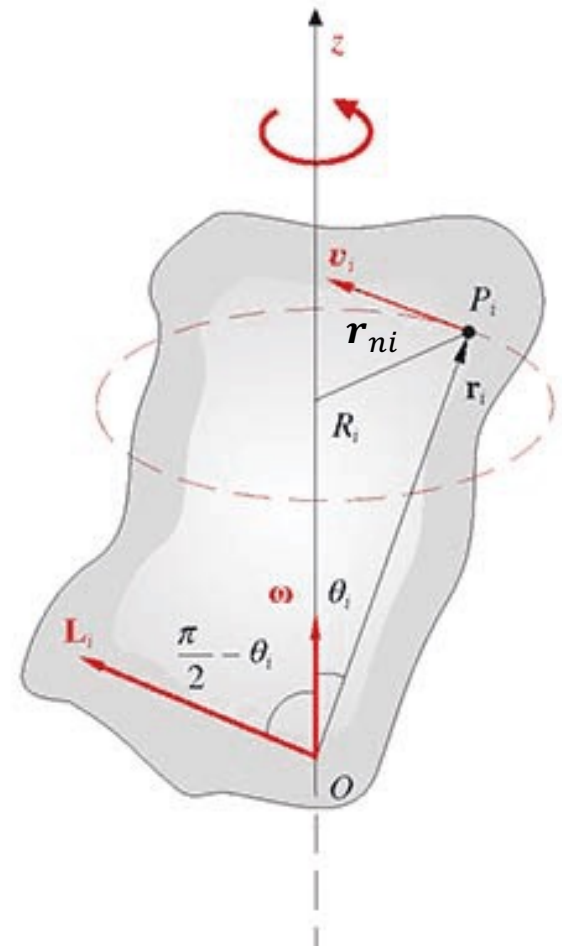
In generale $\mathbf{L}$ non è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$. *puolo' non ho che $\vec{r}_i \parallel \vec{v}_i$*

- Se calcoliamo la componente di $\mathbf{L}$ lungo l'asse di rotazione otteniamo

$$L_z = \mathbf{L} \cdot \mathbf{k} = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i \cdot \mathbf{k} = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \omega$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \right) \omega = I_z \omega$$

inertia



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

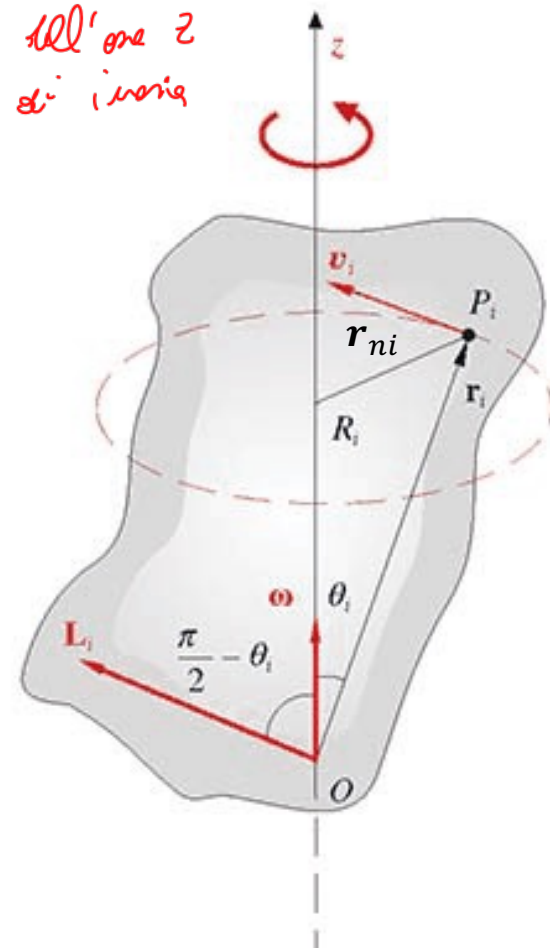
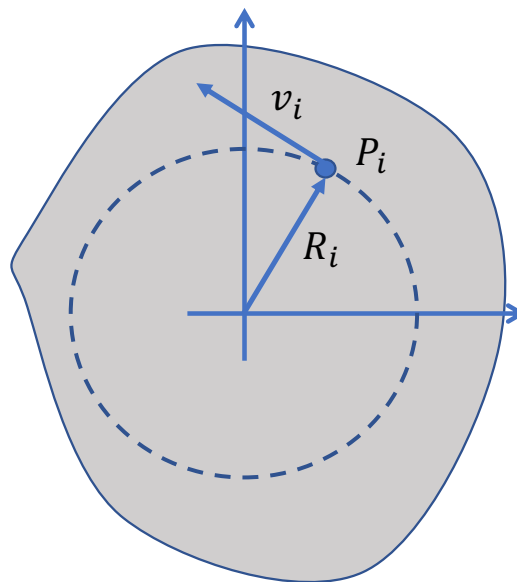
Definiamo il **momento di inerzia** del corpo rigido rispetto all'asse z (asse di rotazione) come:

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

distanza del punto dall'asse

moto su un piano xy in questo caso

condizione dell'asse z del moto di inerzia



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Definiamo il momento di inerzia del corpo rigido rispetto all'asse z come:

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

corpo continuo $\int (x^2 + y^2) dm = \dots$

Per un corpo continuo possiamo modificare l'espressione del momento di inerzia come

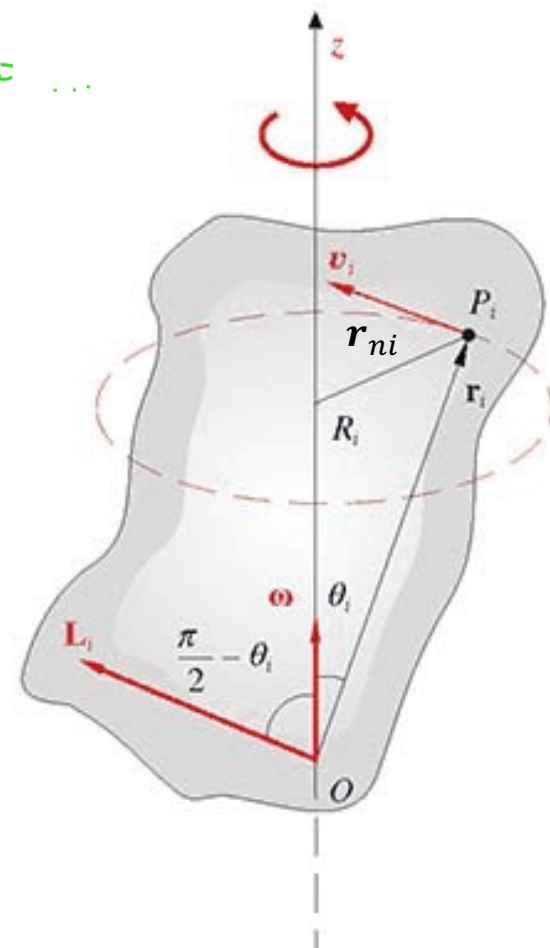
$$I_z = \int_V \rho (x^2 + y^2) dV$$

dist. massa rispetto all'asse $d m = \rho dV \Rightarrow m = \int \rho dV$ $[kg \cdot m^2]$

Unità di misura del momento di inerzia? massa · lunghezza²

lung. z

Da che cosa dipende? Dalla distribuzione di massa e dall'asse rispetto a cui si calcola.



MOM. DI INERZIA E' LA RESISTENZA CHE UN CORPO HA A CAMBIARE ALLA SUA VELOCITA' ANGOLARE, a

$$I_z = \int_V \rho (x^2 + y^2) dV$$

*varia in base alla
distribuzione del materiale
di rotazione e
sulla distanza del corpo*

• Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Per l'intero corpo rigido

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

momento angolare totale // ad ω l'asse di rotazione.

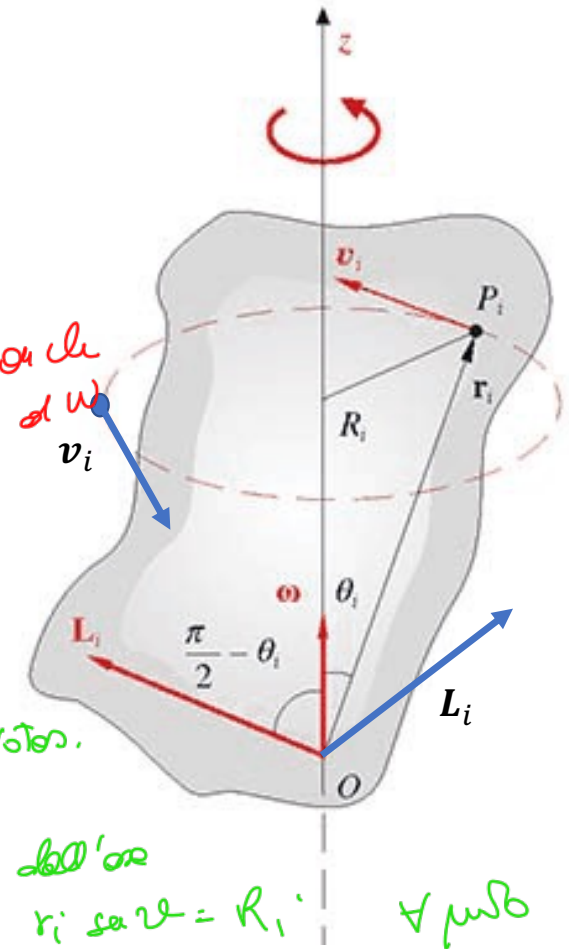
• In generale $\mathbf{L}$ non è parallelo a ω

• Durante il moto $\mathbf{L}$ ruota intorno a ω .

• La proiezione di $\mathbf{L}$ sulla direzione di ω , $L_z = I_z \omega$ è proporzionale alla velocità angolare ω .

• Il coefficiente di proporzionalità I_z dipende dalle caratteristiche del corpo e dalla posizione dell'asse di rotazione.

• L_z non dipende dalla scelta del polo (da dove si trova O lungo l'asse di rotazione)



insieme al polo su cui $\mathbf{L}$ ruota attorno ad ω

$L \cdot \cos = I_z \omega$

non dipende dalla scelta del polo dell'asse
 $r_i \sin \theta = r_i' \sin \theta'$

il polo

Moto di rotazione intorno a un asse fisso

quando il momento angolare $\vec{L}$ è parallelo all'asse di rot. (ω)?

- Esistono casi in cui $\vec{L}$ è parallelo a ω .

Ad esempio se l'asse di rotazione è un asse di simmetria.

Esistono altri casi che vedremo dopo...

In questo caso risulta

$$\vec{L} = \vec{L}_z + \vec{L}_\perp \quad (?)$$

momento di inerzia

$$\vec{L} = I_z \omega$$

$$L_\perp = 0$$

$$L_z = L = I_z \omega$$

$$\vec{L}_z = \vec{L} = I_z \vec{\omega}$$

Se non ho proiezioni

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I_z \vec{\alpha}$$

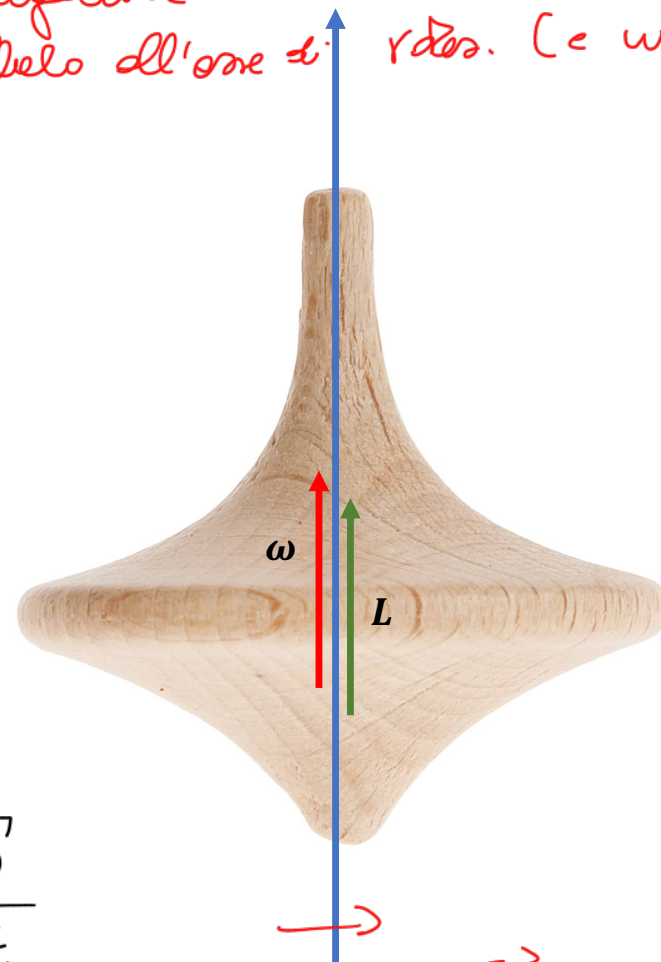
$$\frac{dL}{dt} = I_z \alpha$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Ricordo che il momento angolare $\vec{L}$ è parallelo all'asse di rotazione quando il corpo è simmetrico rispetto a quell'asse.

mi dice Comoliz

osservabile: $L \parallel \vec{\omega}$ e cm sull'asse di rotazione



L_z dell'angolo $L_z = L_z \omega$ in modulo

Moto di rotazione intorno a un asse fisso Se ho precessione ho un corpo che ruota e oscilla

Quando L non è parallelo a ω (e ruota attorno all'asse di rotazione) si parla di moto di precessione.

in dir. e verso

Moto di

Se ω è costante si dice precessione uniforme.

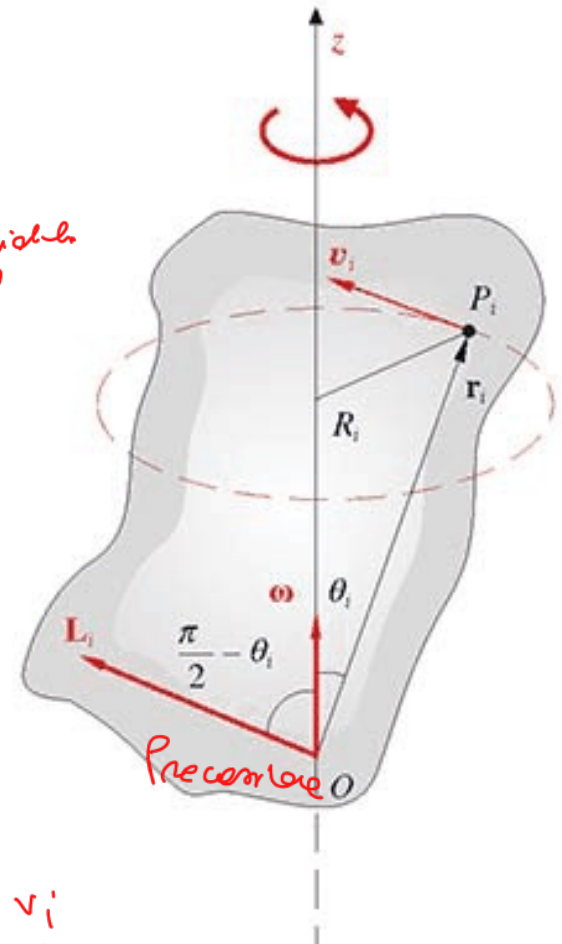
Se ω è costante anche il modulo di L è costante (ma non la direzione, dato che L ruota insieme al corpo).

In questo caso risulta di precessione uniforme

movendo
forte
esterna $M = \frac{dL}{dt} = \omega \times L$?

(è analogo a quanto visto per il vettore posizione, per il quale risultava $v = \frac{dr}{dt} = \omega \times r$)

$\rightarrow \omega \times m_i \frac{dr_i}{dt}$



Precessione: L non su asse di rotazione fa cambiare la direzione dell'asse di rotazione del corpo, facendolo oscillare

Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Nel caso di precessione uniforme

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

Modulo =
 $\Rightarrow \omega L \sin \varphi = \omega L_{\perp}$
 $\rightarrow$ modulo $L_{\perp}$ è la d'osc
orbitale a ω

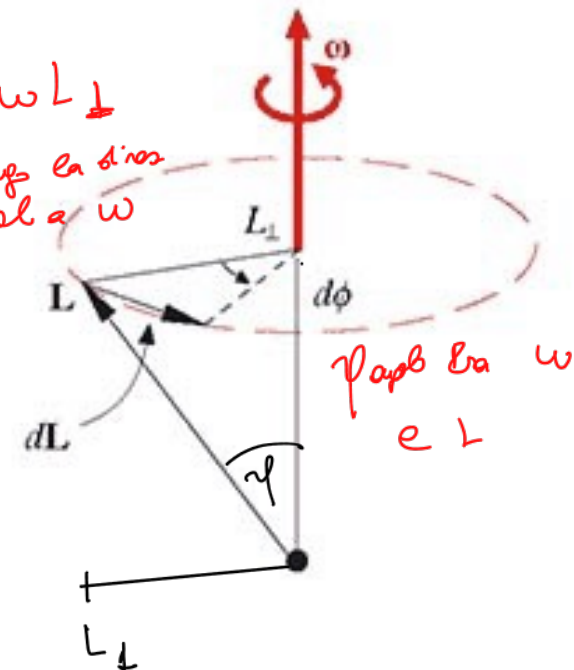
$d\mathbf{L}$ è perpendicolare a $\mathbf{L}$ e all'asse di rotazione.

$$dL = \omega \cdot L \sin \varphi = \omega L_{\perp}$$

$$dL = L_{\perp} d\phi$$

$$\frac{dL}{dt} = L_{\perp} \frac{d\phi}{dt} = L_{\perp} \omega$$

$\rightarrow$ Quindi in questo caso $\mathbf{M}$ è perpendicolare a $\mathbf{L}$ e all'asse di rotazione e il suo modulo vale $M = L_{\perp} \omega$



Esempio 1

asse di simmetria

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

momento angolare

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2$$

$$r_1 = r_2 = r$$

$$L = 2mr v = 2mr^2 \omega$$

$$v = r \omega$$

$\vec{L}$ è lungo
z!

MOM. D'INERZIA

$$I_z = 2mr^2$$

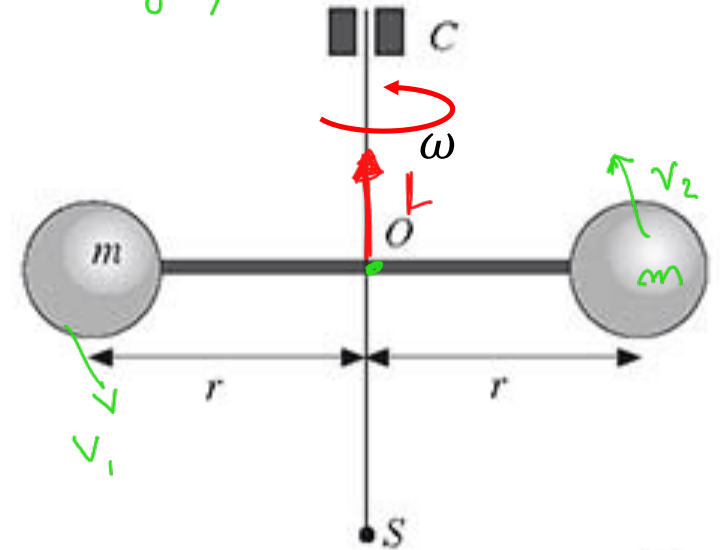
ho solo componente lungo ω

$\mathbf{L}$ è diretto come l'asse di rotazione, $\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I_z \boldsymbol{\alpha}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

gli punti ruotano alla stessa velocità angolare



ha senso perché il momento dell'angolo di rotazione

Esempio 1

Analizziamo le forze agenti sul sistema, supponiamo la velocità angolare costante

$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}, \quad \dot{\alpha} = \frac{d\omega}{dt} = 0$$

NULLO IL MOMENTO
FORZE ESTERNE

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I_z \alpha = 0$$

$$\mathbf{R} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = m \mathbf{a}_{CM} = 0$$

$$C_M = 0$$

- il momento delle F peso è opposto,

MOMENTO F . esterne = 0 perché $\alpha = 0$
(ω costante)

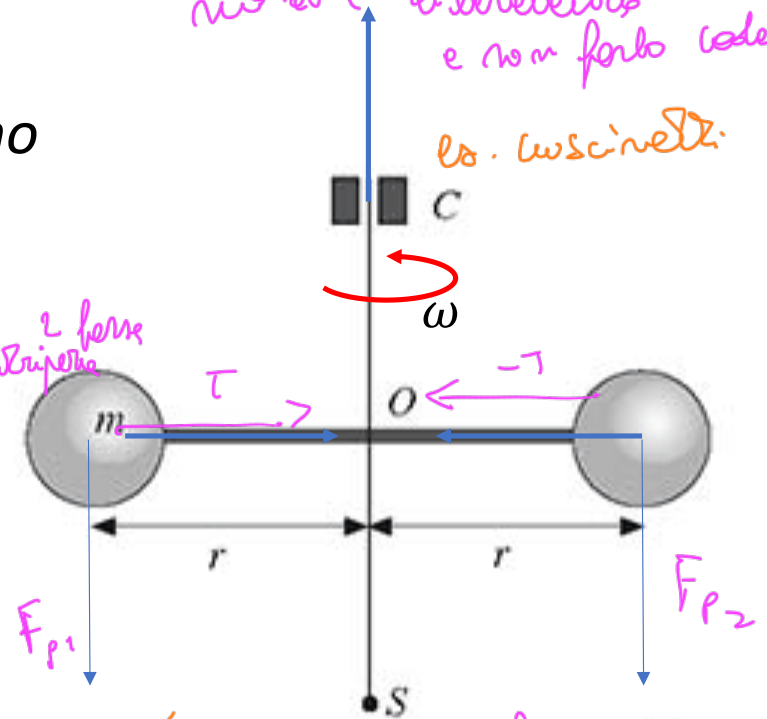
l'asse
rimanere
fermo il CM
Senza non
sarebbe
un caso
di rotazione

Tensione
della sbarretta

Uguali perché sono
uguali
& sono
distante

C = sostiene il ferro,
esercita forze su ferro
motore bilanciatore
e non farlo cadere

es. lancinella



- neanche le due forze centripete non fanno momento

$C =$ prodotto delle

2 F peso, ma

il loro di rotazione

- è verticale quindi C non fa momento

Esempio 2

esempio di Precessione: corpo ruota ma L non parallelo all'asse di rotazione
il corpo "sull'orbita" nella rotazione.
a causa di $\vec{L}$ non parallelo ad $\vec{\omega}$

$$\bullet \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

$$\bullet \quad \mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v}_2$$

$$\bullet \quad \mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1$$

$$\bullet \quad \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2$$

$$L = 2mRr_1\omega$$

$$L_z = 2mRr_1\sin\theta\omega$$

Precessione costante

• Se ω è costante,

$$L_z = 2mr \sin\theta \underbrace{v}_{\omega R \sin\theta} = 2mR^2\omega \rightarrow \text{costante, anche in dis.}$$

$$L_{\perp} = 2mr \cos\theta v = 2mr \cos\theta R\omega \rightarrow \text{modulo costante, cambia la direzione de ruota con il corpo}$$

$$\bullet \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

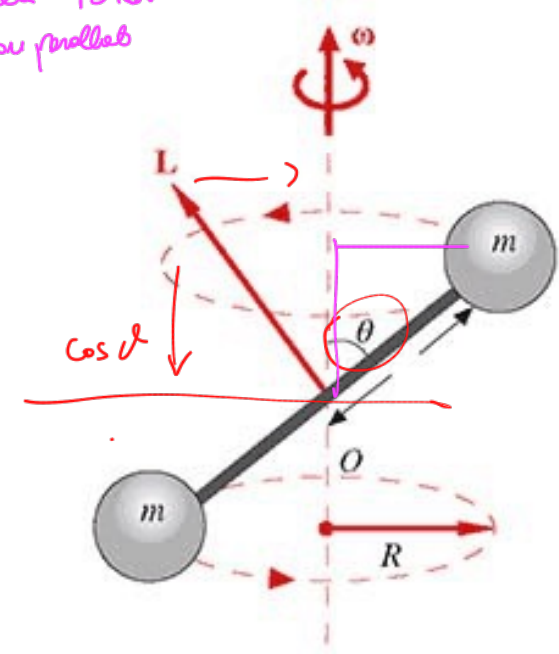


Figura 6.17

$$\bullet \quad M = L_{\perp}\omega = 2mr \cos\theta R\omega^2 \Rightarrow \text{il momento torcente delle forze su e' nullo}$$

Modulo = $\omega \cdot L \cdot \sin\theta$
 $L_{\perp}$

↓
Momento F che fanno ruotare

Esempio 2

Analizziamo le forze agenti sul sistema

2 Forze peso

2 F centripete $-m \frac{v^2}{r} = -m R \omega^2$ una opposta all'altra

che in questo caso fanno momento perché non sono parallele e il vettore del polo

MOMENTO di UNA FORZA = MOMENTO TORCENTE

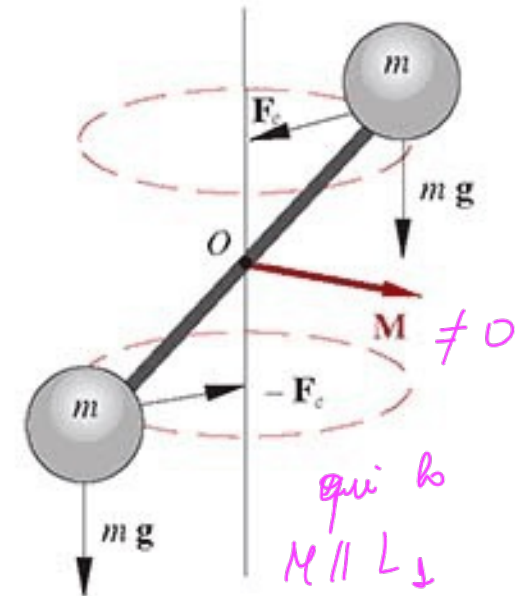
misura l'effetto rotazionale di una forza applicata ad un corpo rispetto ad un polo

se applico una forza, lo farò ruotare? lungo quale asse?

Rotazione attorno ad un asse di forze

L = MOMENTO ANGOLARE $\Rightarrow$ tendenza... quanto un oggetto ruota e rispetto a quale asse

$$\vec{a} = \omega^2 R \vec{u}_r - \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_t \quad \omega \text{ cost}$$



M : Mom. TORCENTE: quando un effetto ruota se applica forza e rispetto a quale ora

→ se non ho frenazione, ho L lungo ω , corpo è in equilibrio

M non torc non nullo = $\frac{dL}{dt} \neq 0 \Rightarrow$ cambia ore di rot. del corpo

• Moto di rotazione, equazioni di moto

No PRECESSIONE

Se L è diretto come l'asse di rotazione, solo componente lungo z se l'asse di rot è z , ω lungo z

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet L = I_z \omega \text{ forma vettoriale} \\ \bullet M = \frac{dL}{dt} = I_z \alpha \end{array} \right.$$

• Conoscendo il momento delle forze esterne posso calcolare M ,

quindi $\alpha = \frac{1}{I_z} M$]

$\Rightarrow$ momento torce

E per integrazione posso calcolare ω velocità angolare

ω in rad/s , il
corpo sta ruotando

$$\omega \text{ prec. } \vec{L} = I_z \vec{\omega}$$

• Moto di rotazione, equazioni di moto

→ Se $\mathbf{L}$ ha direzione generica, per determinare il moto utilizzo

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z \alpha$$

componente lungo z del momento → $L_z = I_z \omega$ in rotazione
 comp. scalare → $L = L_z + L_\perp$
 per integrazione bravo ω

La componente di $\mathbf{M}$ perpendicolare all'asse mi dà

$$M_\perp = \frac{dL_\perp}{dt}$$

non mi dà info
 non mi dà info su $\vec{\alpha}, \vec{\omega}$

Che non fornisce informazioni aggiuntive sul moto

$$L_z = I_z \omega$$

$$E_k \text{ moto rotaz.} = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

se ho un moto circolare...

Moto di rotazione, energia cinetica

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Modulo vello. cir.
 $v_i = R_i \omega$
di un sistema di punti
Def. I_z cap. d'inerzia

Ricordiamo che

$$W = \Delta E_k$$

Che relazione esiste tra lavoro e momento?

Relaz. tra lavoro e momento

$$dW = dE_k = I_z \omega d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} d\omega = I_z \frac{d\omega}{dt} d\theta = I_z \alpha d\theta = M d\theta$$

Quindi $d\omega^2 = 2\omega \cdot d\omega$

$$I_z \alpha = \frac{dL}{dt} = M$$

in moto circolare

$$W = \int_{\theta_{in}}^{\theta_{fin}} M d\theta$$

$$L = I_z \omega$$

lavoro del moto di rotazione

$$[dW = M d\theta \Rightarrow W = \int_{\theta_{in}}^{\theta_{fin}} M d\theta \quad P = M \omega]$$

$$W = \int_{\vartheta_{in}}^{\vartheta_{fin}} M d\vartheta$$

Moto di rotazione, energia cinetica

Potenza in funzione del momento e della velocità angolare

$$P = \frac{dW}{dt} = M\omega$$

es. potenza del Motore

= Somma Momenti torcenti delle
forze applicate ad un punto
e velocità angolare

$$\frac{dW}{dt} = M \frac{d\vartheta}{dt} = M\omega$$

MOTO ROTAZ

→ POT MOTORE = coppia · velocità angolare

$$P = M\omega$$

$$\rightarrow W = \int M d\omega dt = \int_{\vartheta_{in}}^{\vartheta_{fin}} M d\vartheta$$

Esempio

$$\vec{R} = m_2 \vec{a}_{cm}$$

Reazione di cui
cambia e bilancia F_{m2} e T , che mi
tiene fermo il corpo
Quello è i due
sottosistemi

disco su cui è avvolto un
cavo.
Dinamica del sistema?

$$m_2 g + T + R_{s\text{ supporti}} = 0$$

Sulla
massa 2

$$m_1 a = m_1 g - T$$

se voglio che il supporto
sia fermo da
 R_s due bilancieri
 T ? R_s ?

Disco: corpo rigido con moto di rotaz.
su asse fisso

$$I_z \alpha = r \times T = \vec{M}$$

Forze esterne
applicate al disco

ha un
moto

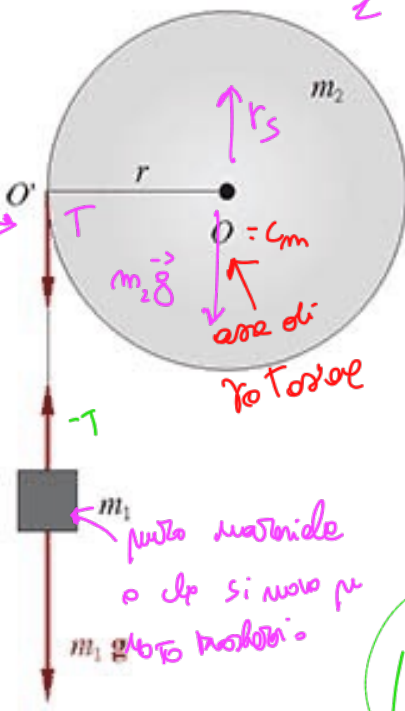
Conosco
già il modo
di inerzia,
mi è stato dato

$$a = r \alpha$$

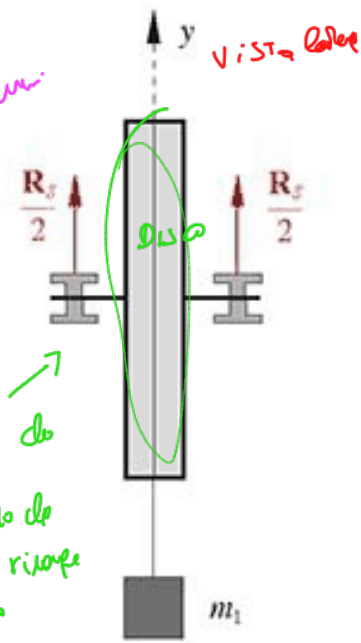
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \vec{a}_{cm}$$

$$M = Tr$$

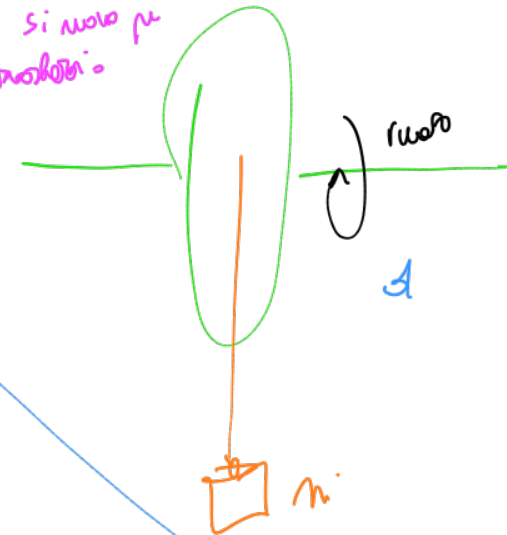
R_s e $m_2 g$ non hanno momento rispetto a O.
Solo T mi dà momento



modo rotaz.
circa il punto
O



Supporti che
fanno in modo che
asse di rotaz. rimanga
fisso



Fune inestensibile $\Rightarrow$ ci sono una relas. tra moto del disco e m_1 (veloc. cinematica) $ds = r \vartheta$
 Ho rotolo, risolvo
 disco fa un angolo ϑ ? filo si srotola di $\vartheta \cdot r$
 per le derivate $\Rightarrow r \omega = v_{m_1}$
 $r \alpha = a_{m_1}$
 ↓ velocità in filo

Esempio

$$m_1 a = -m_1 g + T$$

$$I_z \alpha = r T$$

$$I_z \frac{a}{r} = r T$$

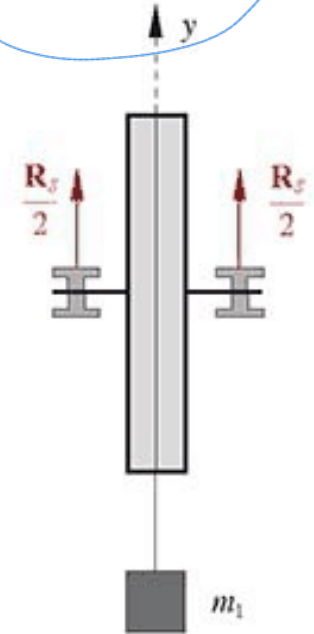
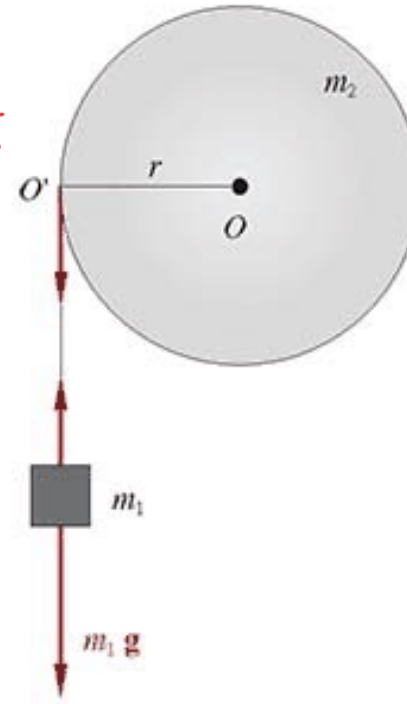
$$a = r \alpha$$

$$\Rightarrow \text{Basta } a \text{ e } T$$

calcolo R_S

$$m_2 g + T + R_S = 0$$

3 eq in 3 in ign.



$$\vec{L} = I_z \vec{\omega}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I_z \vec{\alpha}$$

• Coppia di vettori applicati

Definizione: Si definisce come **coppia di vettori applicati**, un sistema di vettori applicati costituito da due vettori opposti $(A_1, \mathbf{a})$ e $(A_2, -\mathbf{a})$.



lines. opposto
due vettori opposti

- Mom. invariante del Polo in cui lo calcolo.
- Momento $M = a \cdot d$ d = distanza tra rette que
- Dir. per. ortog. al piano che li contiene
- Verso coppia direzione $(A_1, -A_2)$, a e M
vettore di coppia

$$M(O') = M_O + r_{OO'} \times R$$

$R = 0$

Coppia di vettori applicati

- Definizione:** Si definisce come **coppia di vettori applicati**, un sistema di vettori applicati costituito da due vettori opposti ($A_1, \mathbf{a}$) e ($A_2, -\mathbf{a}$).

- Essendo la risultante di tale sistema nullo, il momento risultante (**momento della coppia**) è invariante rispetto al punto O scelto come polo per il calcolo del momento risultante.

il momento è lo stesso in ogni punto che lo calcoli

Si definisce quindi momento della coppia (**M**) un vettore avente:

- modulo uguale al prodotto del modulo di uno dei due vettori, $|\mathbf{a}|$, per la distanza tra le rette d'azione dei due vettori d (braccio) $|\mathbf{M}| = |\mathbf{a}|d$
- direzione ortogonale al piano di appartenenza dei due vettori (piano della coppia)
- verso determinato in modo tale che il vettore (A_1-A_2), $\mathbf{a}$ ed **M** formino una terna destrorsa.

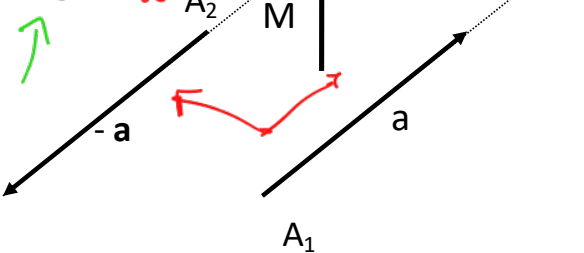
MOMENTO RESULT = SOMMA MOMENTI

$$M_O = \sum M_i = \sum \vec{r}_{OA_i} \times \vec{Q}_i$$

calcolo rispetto a O' $r_{OA_i}' = r_{OA_i} + r_{OO'}$

$$M_{O_i} = \sum \vec{r}_{OO'} \times \vec{Q}_i + \sum \vec{r}_{OA_i} \times \vec{Q}_i$$

$$= M_O + r_{OO'} \times R$$

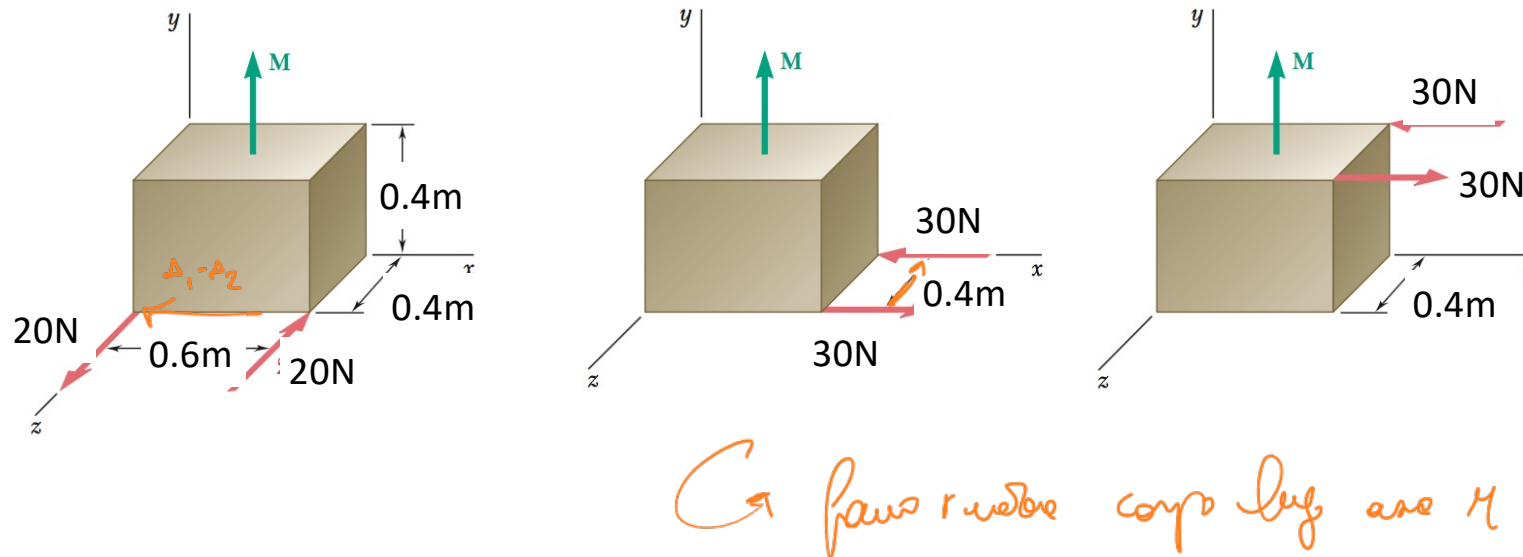


$$M_{O'} = M_O + r_{OO'} \times R$$

TRASP. MOMENTI

Coppia di vettori applicati

Le tre coppie riportate in figura, applicate allo stesso corpo rigido, hanno lo stesso momento **M**.



Coppie equivalenti: due coppie aventi lo stesso momento sono tra loro equivalenti.

Esempio

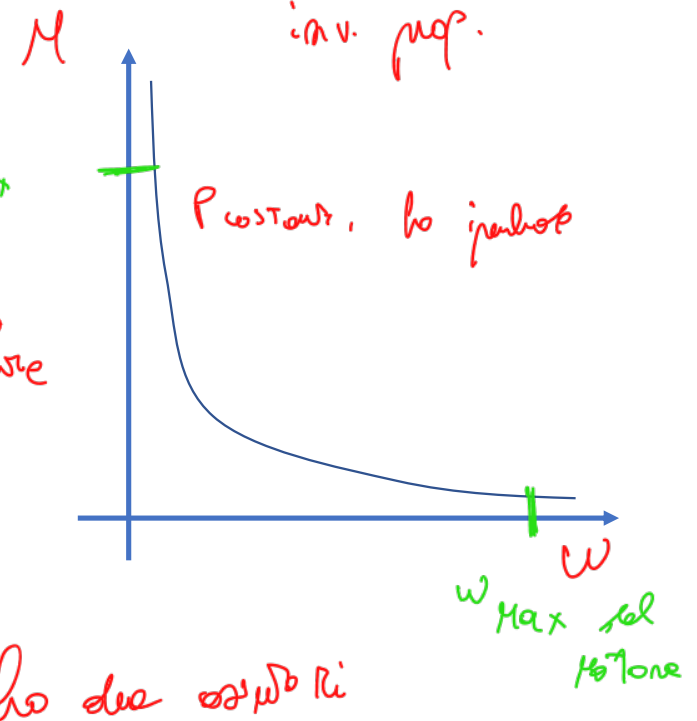
Coppia = momento della coppia di vettori applicati

Qual è la relazione tra ~~coppia~~ e velocità angolare in un motore che lavora a potenza costante?

*ho limiti reali
di M e ω*

$$P = M\omega$$

$$M = \frac{P}{\omega} \leftarrow \text{a } P \text{ costante}$$



Impulso angolare

- Teorema dell'impulso

$$\left[J = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{P} \right.$$

$$F = \frac{dP}{dt} \Rightarrow \int F dt = \Delta P$$

In modo analogo integrando rispetto al tempo l'equazione $\left[\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right.$ possiamo verificare che

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt = \Delta \mathbf{L} \quad \text{impulso angolare}$$

resistenza di un corpo a varare la sua velocità angolare

$$\text{es. } M = I \alpha = \frac{dL}{dt}$$

• Momento di inerzia spesso detto il numero d'inerzia

Definiamo il momento di inerzia del corpo rigido rispetto all'asse z come: componente $I_z = \sum m_i R_i^2$

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

distanza del punto dall'asse di rotazione R_i^2

- Per un corpo continuo possiamo modificare l'espressione del momento di inerzia come

rispetto all'asse z (per convenienza), può essere qualsiasi asse

$$I_z = \int_V \rho (x^2 + y^2) dV$$

$$dm = \rho dV$$

si prende tutto il corpo e
si divide in
piccoli elementi di rotazione

Momento di inerzia

Analogamente, per gli assi x e y avremo

Se corpo ruota su asse x

l'asse x

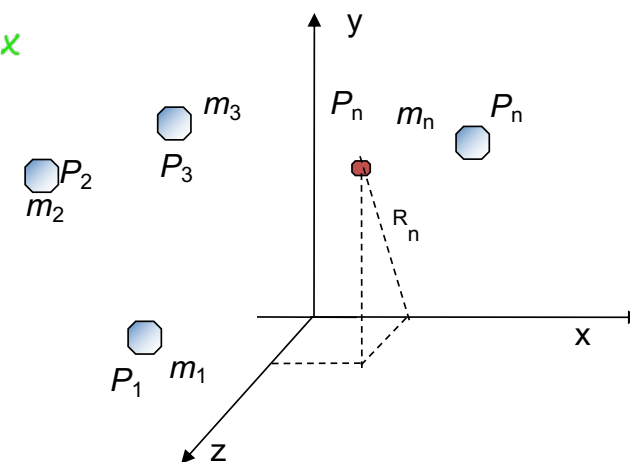
$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

distanze da asse x

$$I_x = \int_V \rho(y^2 + z^2) dV$$

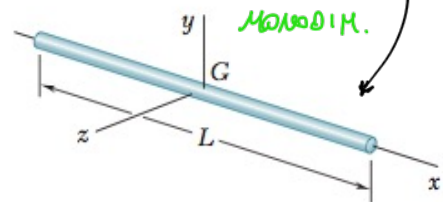
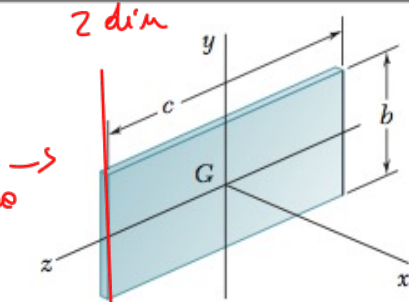
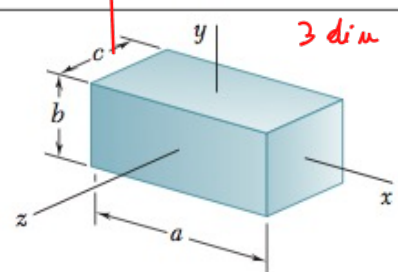
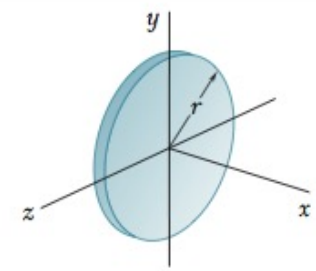
$$I_y = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2)$$

$$I_y = \int_V \rho(x^2 + z^2) dV$$



Momenti di inerzia per alcuni corpi

Моменты инерции относительно осей x и y , проходящих через центр масс G , а ось z перпендикулярна плоскости xy .

Slender rod <i>Corpo rigido di forma di asta</i>	 <i>Моменты инерции</i>	$I_y = I_z = \frac{1}{12} mL^2$
Thin rectangular plate <i>se questo è l'asse di simmetria, come facile? uso TEO</i>	 <i>2 dim</i>	$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} mc^2$ $I_z = \frac{1}{12} mb^2$
Rectangular prism	 <i>3 dim</i>	$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
Thin disk		$I_x = \frac{1}{2} mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4} mr^2$

Momenti di inerzia per alcuni corpi



Circular cylinder		$I_x = \frac{1}{2} m a^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12} m (3a^2 + L^2)$
Circular cone		$I_x = \frac{3}{10} m a^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5} m (\frac{1}{4} a^2 + h^2)$
Sphere		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} m a^2$



Viene dato

con assi nel centro di massa e
paralleli alla geometria del sistema

Momento di inerzia – teorema di Huygens Steiner

$$|z| > 0$$

$$m_i d_i^2 > 0 !$$

- Il momento di inerzia dipende dalle caratteristiche del corpo (geometria, densita`) e dalla <sup>di rotaz.</sup> posizione dell'asse, ed e` sicuramente un valore positivo. Data una direzione, qual e` il valore minimo del momento di inerzia rispetto a un generico asse ad essa parallelo?
- Negli esempi precedenti abbiamo calcolato il momento di inerzia rispetto a un ^{di rotaz.} asse che passa per il centro di massa, ma se l'asse non passa per CM devo rifare il calcolo? 😞

Momento di inerzia – teorema di Huygens Steiner

Riprendiamo l'espressione di I_z

• $I_Z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$

asse di rot. z

$= \sum_{i=1}^n m_i (R'_i + d)^2 = \sum_{i=1}^n m_i (R_i'^2 + 2R'_i d + d^2) =$

$= I_{Z'} + md^2 + \sum_{i=1}^n 2m_i R'_i d = I_{Z'} + md^2$

= 0 grazie proprietà del Cdm



$$I_z = I_{z'} + md^2$$

$$I_z = I_{z'} + md^2$$

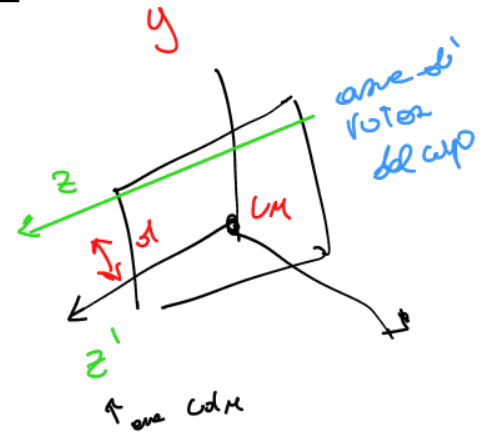
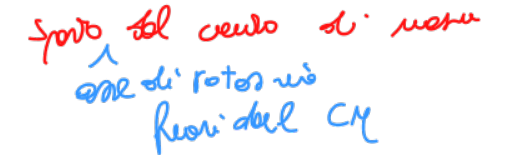
← distanza tra i due assi,
 cioè l'asse CM
 e l'asse di rotazione

↑
 momento di
 inerzia con l'asse di rotazione
 che passa
 per il centro di massa

←
 momento
 di inerzia
 di rotazione

Se mi sposto
dal centro ti muore davo

ottimizzare mod² di nuovo
di interi



↳ lo I_z è il più piccolo possibile... appare se è spostato, verso
IL MINIMO del momento di INERZIA lo darei di CAD

• $M = \frac{dL}{dt} = I_z \alpha$ aumentare il momento di inerzia significa che a parità di momento, DIMINUISCE ACC. ANGOLARE

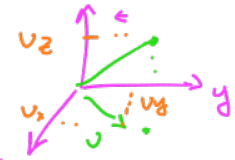
Momento di inerzia – matrice di inerzia ↑

quindi se voglio I_z basso, devo ruotare
 il sistema rispetto ad un asse che passa per il CAD

• oppure se voglio ω costante, I_z alto

a parità di coppia se si ha
 un motore, più è I_z ,
 ho acceler. angolare minore

• E se l'asse di rotazione non coincidesse con nessuno dei tre assi x, y e z? 😞



- Indichiamo con $\mathbf{u}$ il versore dell'asse di rotazione e con u_x, u_y, u_z le sue componenti rispetto al sistema di riferimento cartesiano con cui abbiamo calcolato i momenti di inerzia I_x, I_y e I_z

... e' possibile verificare che il momento di inerzia rispetto all'asse $\mathbf{u}$ vale

ho calcolato le componenti
 del vettore I_x, I_y, I_z
 ma il corpo ruota rispetto
 al $\mathbf{u}$

Momento di inerzia – matrice di inerzia

$$I_u = I_x u_x^2 + I_y u_y^2 + I_z u_z^2 - 2I_{xy} u_x u_y - 2I_{yz} u_y u_z - 2I_{xz} u_x u_z$$

Dove I_x, I_y, I_z sono i momenti di inerzia rispetto agli assi x, y e z che abbiamo già incontrato, mentre I_{xy}, I_{yz}, I_{xz} sono i cosiddetti momenti di inerzia centrifughi (o prodotti di inerzia)

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i$$
$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i$$
$$I_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i$$

$$I_z = \sum m_i (x^2 + y^2)$$
$$I_{xy} = \sum m_i x y$$

Momento di inerzia – matrice di inerzia

Grazie a questa definizione, possiamo calcolare le componenti cartesiane del momento angolare il momento angolare corrispondente a una generica velocità angolare come il risultato del seguente prodotto matrice-vettore

$$\mathbf{L} = [\mathbf{I}]\boldsymbol{\omega}$$

Prima $\vec{L} = I_z \vec{\omega}$

dove

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

E' la matrice di inerzia del corpo calcolata rispetto al sistema di riferimento xyz

• Moto di rotazione intorno a un asse fisso

NO PRECESSIONE, sono in equilibrio, corpo ruota senza oscillare

Esistono casi in cui $\vec{L}$ è parallelo a $\vec{\omega}$.

Ad esempio se l'asse di rotazione è un asse di simmetria.

Esistono altri casi che vedremo dopo...

In questo caso risulta

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega} \quad \text{sono paralleli}$$

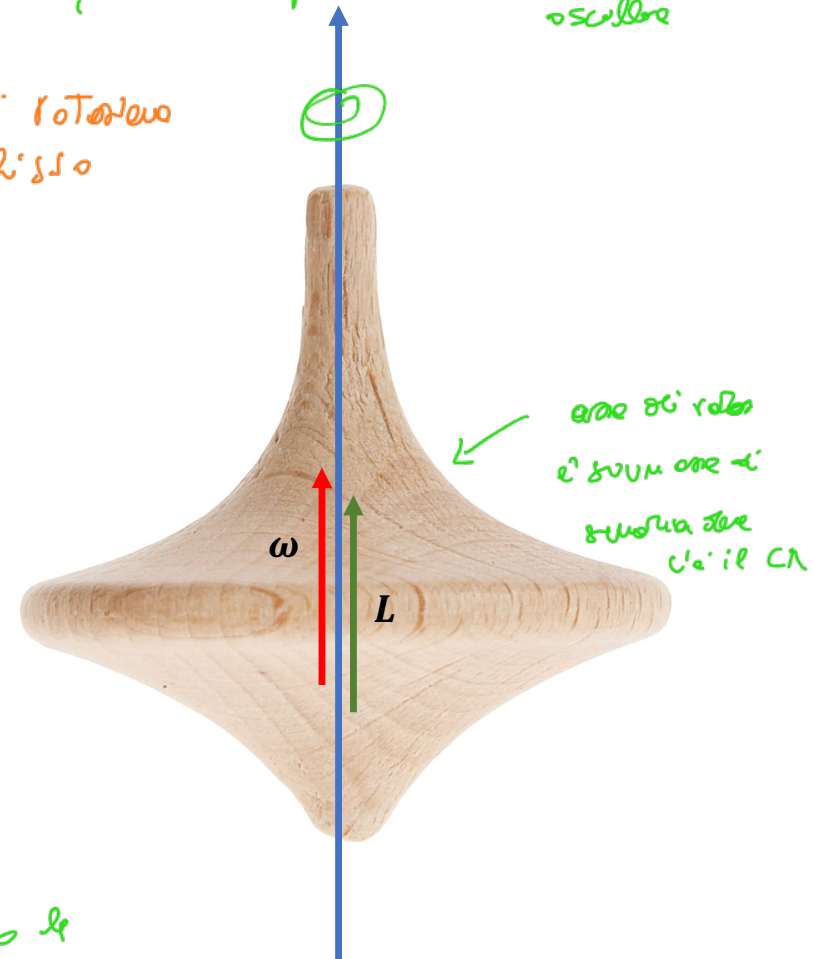
$$L_{\perp} = 0$$

$$L_z = L$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I_z \vec{\alpha}, \quad \text{semplice legge di Newton}$$

le forze esterne fanno ruotare il corpo senza oscillare

asse di rotazione fisso



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Quando $\mathbf{L}$ non è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$ e ruota attorno all'asse di rotazione) si parla di moto di precessione.

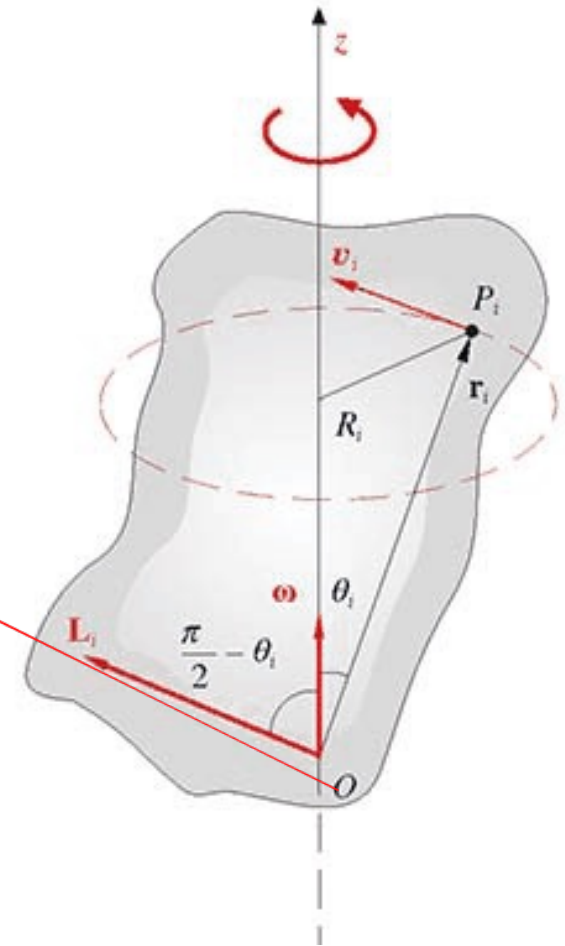
Se $\boldsymbol{\omega}$ è costante si dice precessione uniforme.

Se $\boldsymbol{\omega}$ è costante anche il modulo di $\mathbf{L}$ è costante (ma non la direzione, dato che $\mathbf{L}$ ruota insieme al corpo.
me di raba.

In questo caso risulta *precessione*
$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

precessione uniforme (ω = costante)

(è analogo a quanto visto per il vettore posizione, per il quale risultava $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$)



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Nel caso di *precessione uniforme* $\vec{\omega}$ costante

$$\bullet \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

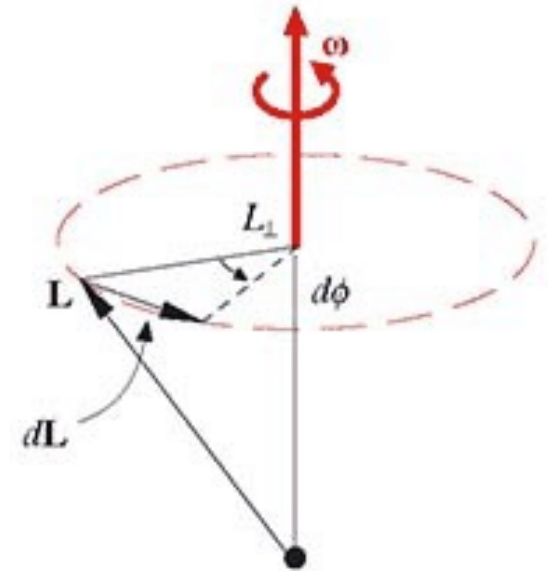
modulo
 $M = \omega L_{\perp}$

$d\mathbf{L}$ è perpendicolare a $\mathbf{L}$ e all'asse di rotazione.

$$dL = L_{\perp} d\phi$$

$$\frac{dL}{dt} = L_{\perp} \frac{d\phi}{dt} = L_{\perp} \omega$$

→ Quindi in questo caso $\mathbf{M}$ è perpendicolare a $\mathbf{L}$ e all'asse di rotazione e il suo modulo vale $M = L_{\perp} \omega$



$\vec{\omega}$ = ass. rot. = per' lub
L di tutto il sistema
se lo capiro bene

direz L = ? direz. verso la quale il corpo ruota

Esempio 1

Analizziamo il moto di un corpo rigido costituito da due sferette uguali di massa m collegate da un'asticella di massa trascurabile di lunghezza $2r$, che ruota intorno a un asse passante per il centro dell'asticella e perpendicolare ad essa con velocità angolare ω .

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

Calcoliamo il momento angolare

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2$$

Il modulo del momento angolare vale quindi

$$L = 2mr^2\omega$$

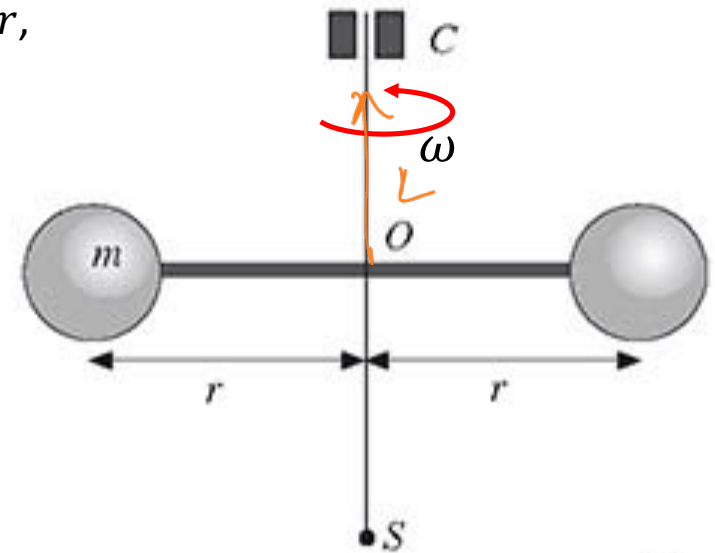
Il momento di inerzia del corpo rigido in questo caso vale:

$$I_z = 2mr^2$$

$\mathbf{L}$ è diretto come l'asse di rotazione,

$$\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega}$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I_z \boldsymbol{\alpha}$$



Momento di inerzia: RESISTENZA di un corpo a varare la propria velocità di rotazione, velocità angolare

$I_z = \sum m_i R_i^2 = x^2 + y^2$ (distanze dalle asse per le due distanze)

$[kg \cdot m^2]$

Moto di rotazione, equazioni di moto

Se $\mathbf{L}$ e' diretto come l'asse di rotazione,

$$\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega}$$
$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I_z \boldsymbol{\alpha}$$

Conoscendo il momento delle forze esterne posso calcolare $\mathbf{M}$,

quindi $\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{I_z} \mathbf{M}$

E per integrazione posso calcolare $\boldsymbol{\omega}$

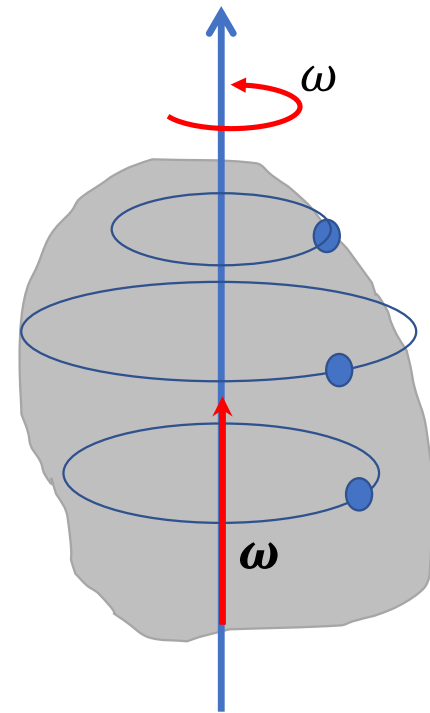
Moto di rotazione, energia cinetica

Calcoliamo l'energia cinetica di un corpo in moto di rotazione intorno a un asse fisso:

$$\begin{aligned} E_k &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \quad v_i = \omega R_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$



Lavoro delle forze agenti su un corpo in moto di rotazione

Ricordiamo che

W è

$$W = \Delta E_k$$

Che relazione esiste tra lavoro e momento?

$$dW = dE_k = I_z \omega d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} d\omega = I_z \frac{d\omega}{dt} d\theta = \overbrace{I_z \alpha}^{\text{Momento}} d\theta = M d\theta$$

Momento Torque F. est

Quindi

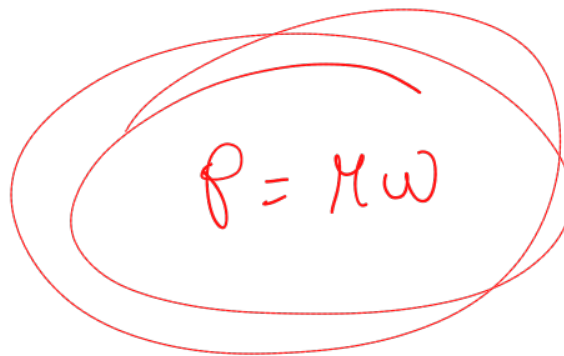
$$W = \int_{\theta_{in}}^{\theta_{fin}} M d\theta$$

vale in moto di rot.

Moto di rotazione, potenza

Potenza in funzione del momento e della velocità angolare

$$P = \frac{dW}{dt} = M\omega$$


$$P = M\omega$$

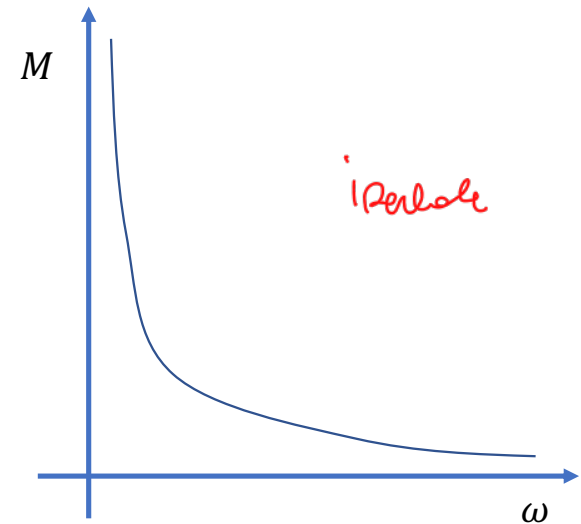
potenza di un corpo in
moto di rotaz.
(es. motore)

Esempio

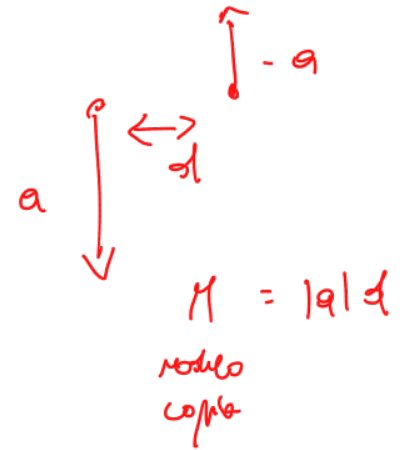
Qual e' la relazione tra coppia e velocita' angolare in un motore che lavora a potenza costante?

$$P = M\omega$$

$$M = \frac{P}{\omega}$$



potenza coppia di velle



es. 506 della
coppia

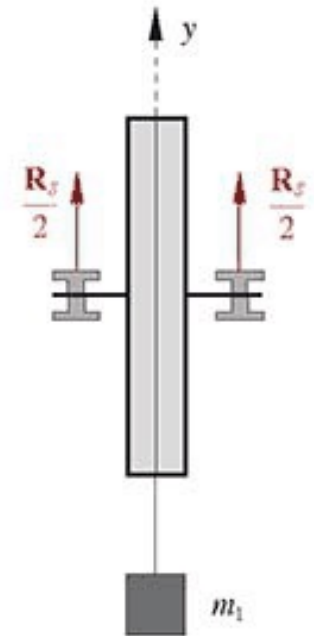
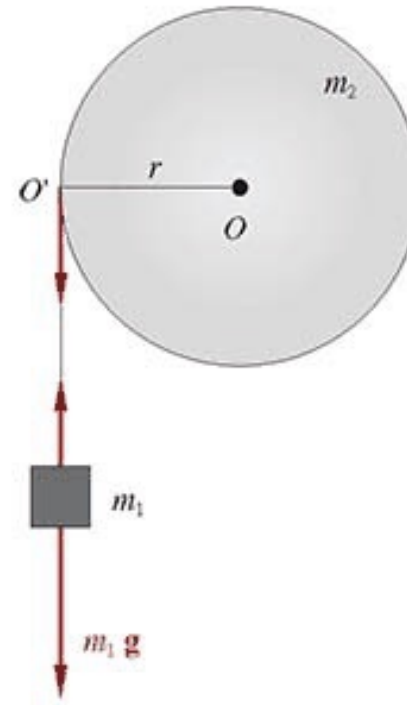
Esempio

$$m_2 \mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{R}_S = 0$$

$$m_1 \mathbf{a} = m_1 \mathbf{g} - \mathbf{T}$$

$$I_z \alpha = \mathbf{r} \times \mathbf{T}$$

$$\begin{aligned} a &= r\alpha \\ ds &= R d\theta \\ \hookrightarrow v &= R\omega \\ a &= r\alpha \end{aligned}$$

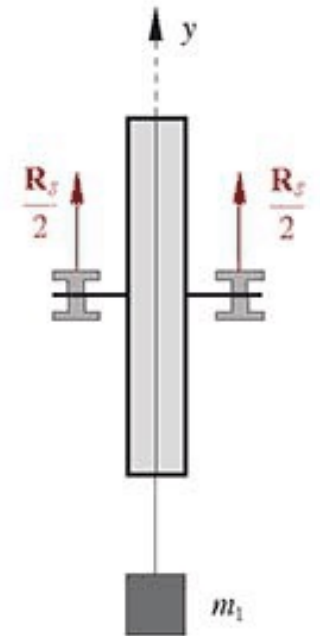
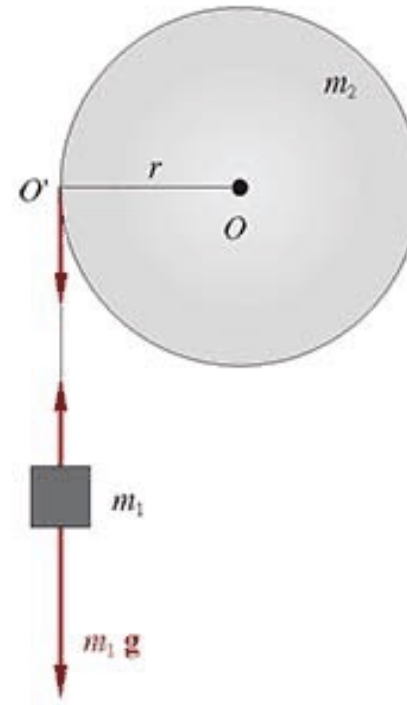


Esempio

$$m_1 a = -m_1 g + T$$

$$I_z \alpha = r T$$

$$a = r \alpha$$



Momento di inerzia

Definiamo il momento di inerzia del corpo rigido rispetto all'asse z come:

resistenza di un corpo a variazioni della velocità di rotazione attorno ad un certo asse

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

↓ distanza *← distanza dall'asse*

Per un corpo continuo possiamo modificare l'espressione del momento di inerzia come

$$I_z = \int_V \rho(x^2 + y^2) dV$$

Calcolo dei momenti di inerzia

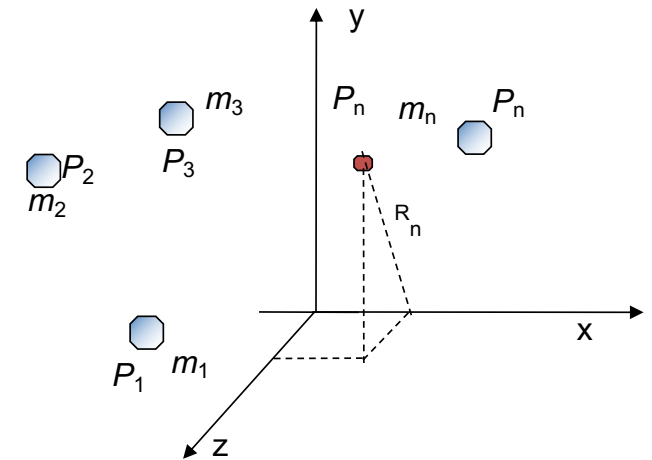
Analogamente, se l'asse di rotazione coincide con gli assi x o y possiamo definire i corrispondenti momenti di inerzia come:

$$\bullet \quad \underline{I_x} = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

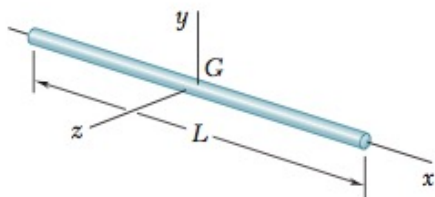
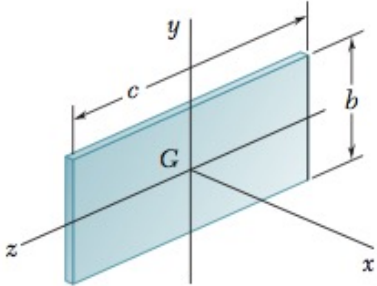
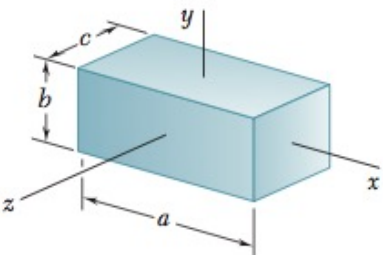
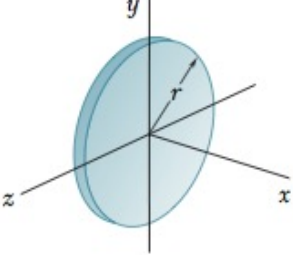
$$I_x = \int_V \rho (y^2 + z^2) dV$$

$$\bullet \quad \underline{I_y} = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2)$$

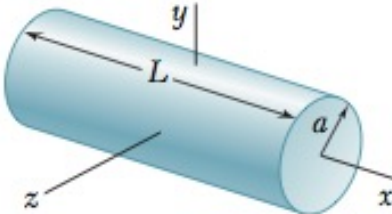
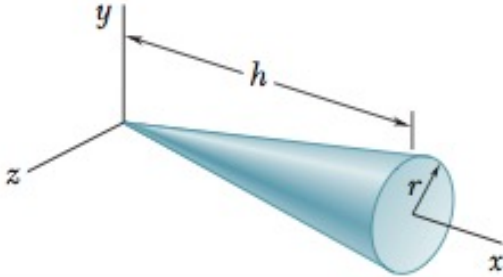
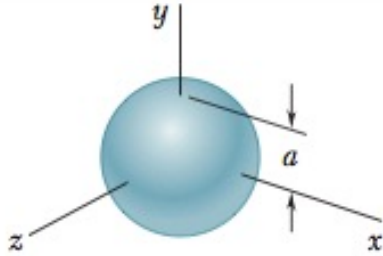
$$I_y = \int_V \rho (x^2 + z^2) dV$$



Momenti di inerzia per alcuni corpi

Slender rod		$I_y = I_z = \frac{1}{12} mL^2$
Thin rectangular plate		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} mc^2$ $I_z = \frac{1}{12} mb^2$
Rectangular prism		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
Thin disk		$I_x = \frac{1}{2} mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4} mr^2$

Momenti di inerzia per alcuni corpi

Circular cylinder		$I_x = \frac{1}{2} m a^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12} m (3a^2 + L^2)$
Circular cone		$I_x = \frac{3}{10} m a^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5} m (\frac{1}{4} a^2 + h^2)$
Sphere		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} m a^2$

Momento di inerzia – teorema di Huygens Steiner

- Il momento di inerzia dipende dalle caratteristiche del corpo (geometria, densità) e dalla posizione dell'asse, ed è sicuramente un valore positivo. Data una direzione, qual è il valore minimo del momento di inerzia rispetto a un generico asse ad essa parallelo?

Se l'asse d'inerzia è nel centro di massa

- Negli esempi precedenti abbiamo calcolato il momento di inerzia rispetto a un asse che passa per il centro di massa, ma se l'asse non passa per CM devo rifare il calcolo? 😞

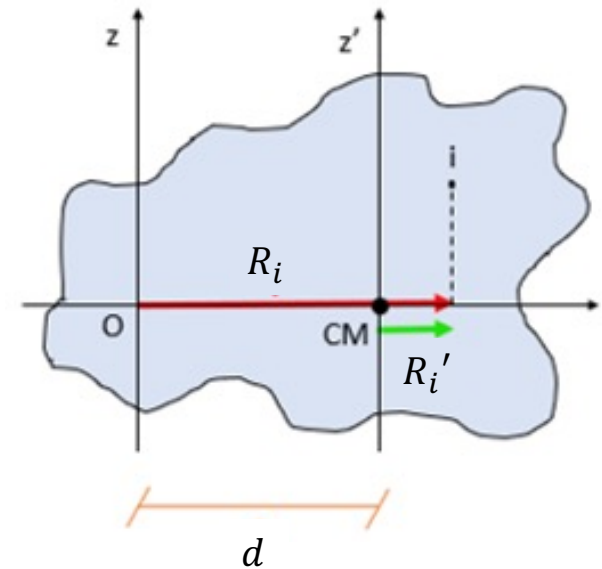
Momento di inerzia – teorema di Huygens Steiner

Riprendiamo l'espressione di I_z , supponiamo che l'asse z non passi per il centro di massa del corpo. Prendiamo un secondo asse z' parallelo a z e passante per il centro di massa:

$$\begin{aligned} I_z &= \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (R'_i + d)^2 = \sum_{i=1}^n m_i (R_i'^2 + 2R'_i d + d^2) \\ &== I_{z'} + md^2 + \sum_{i=1}^n 2m_i R'_i d = I_{z'} + md^2 \end{aligned}$$

$$I_z = I_{z'} + md^2$$

MOMENTO DI INERZIA È TANTO MAGGIORE
QUANTO MI ALLONTANO DALL'ASSE
DEL CENTRO DI MASSA



Momento di inerzia – matrice di inerzia

di L (?) o ω ? forse ω

- E se l'asse di rotazione non coincidesse con nessuno dei tre assi x , y e z ? 😞
- Indichiamo con $\mathbf{u}$ il versore dell'asse di rotazione e con u_x, u_y, u_z le sue componenti rispetto al sistema di riferimento cartesiano con cui abbiamo calcolato i momenti di inerzia I_x, I_y e

I_z

... è possibile verificare che il momento di inerzia rispetto all'asse $\mathbf{u}$ vale

Momento di inerzia – matrice di inerzia

$$I_u = I_x u_x^2 + I_y u_y^2 + I_z u_z^2 - 2I_{xy} u_x u_y - 2I_{yz} u_y u_z - 2I_{xz} u_x u_z$$

- Dove I_x, I_y, I_z sono i momenti di inerzia rispetto agli assi x, y e z che abbiamo già incontrato, mentre I_{xy}, I_{yz}, I_{xz} sono i cosiddetti momenti di inerzia centrifughi (o prodotti di inerzia)

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i$$
$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i$$
$$I_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i$$

Momento di inerzia – matrice di inerzia

Grazie a questa definizione, possiamo calcolare le componenti cartesiane del momento angolare il momento angolare corrispondente a una generica velocità angolare come il risultato del seguente prodotto matrice-vettore

non per forza colture

con per forza parallelo a ω

$$\mathbf{L} = [\mathbf{I}]\boldsymbol{\omega}$$

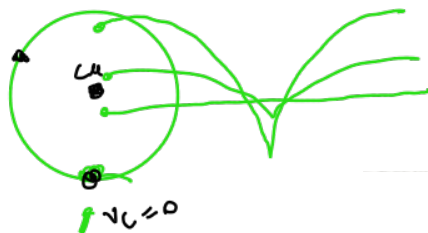
dove

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

E' la matrice di inerzia del corpo calcolata rispetto al sistema di riferimento xyz

- Moto di rotolamento .

rotolamento + traslazione



P
 Puntale
 con rotolamento
 ω
 C
 $v_C = 0$
 Puntale
 con rotolamento

$$v = \frac{r}{R} v_C + v' + \omega \times r'$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{CM}$$

$$v = \omega R$$

$$a = \alpha R$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \vec{a}_{CM} = \vec{F}$$

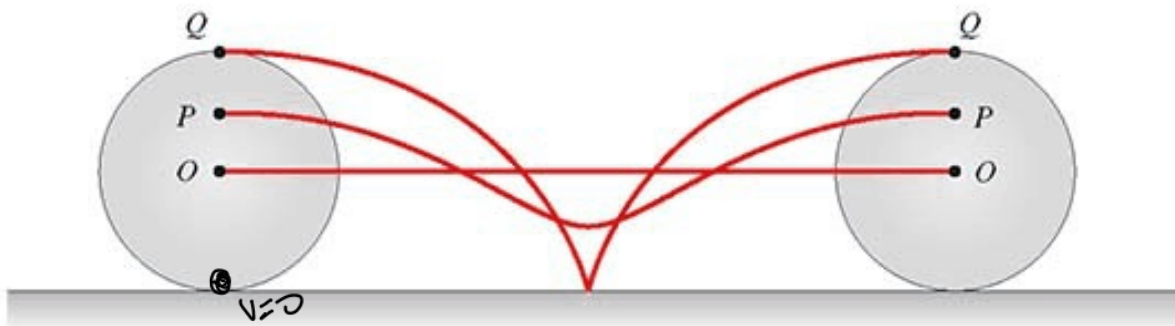
$$\frac{dL}{dt} = \vec{M} = I \vec{\alpha}$$

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

Il CM trasla con
 $\vec{v}_{CM}$!
 il resto del disco ruota

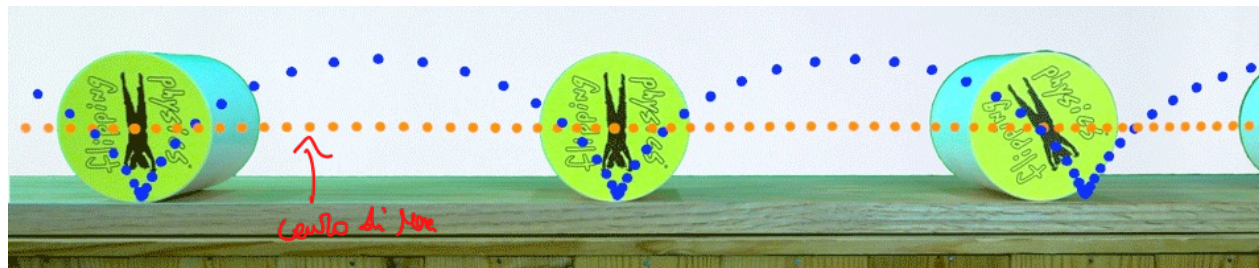
Moto di rotolamento

TRASLAZ + ROTAZIONE



Moto di traslazione e rotazione caratterizzato da avere, istante per istante, un punto con velocità nulla (punto di contatto con il tracciato).
 punto di contatto $\rightarrow v=0$

Il centro di massa del disco trasla in direzione orizzontale con velocità v_{CM} , mentre il disco ruota con velocità angolare ω .
 $v_{CM} \rightarrow$ TRASLAZ

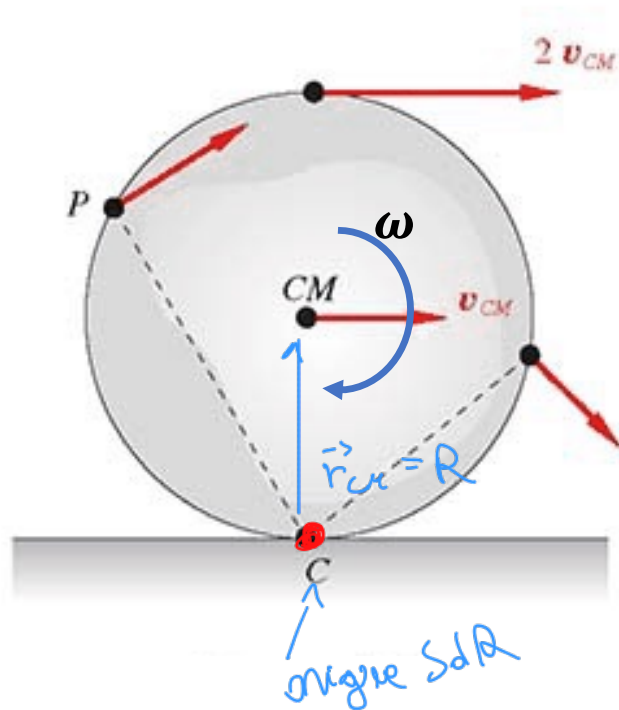


Nel punto di contatto la velocità è istantaneamente nulla.

quello punto ruota con ω uguale
 centro si non muove con v_{CM}
 punto di contatto $\rightarrow v=0$

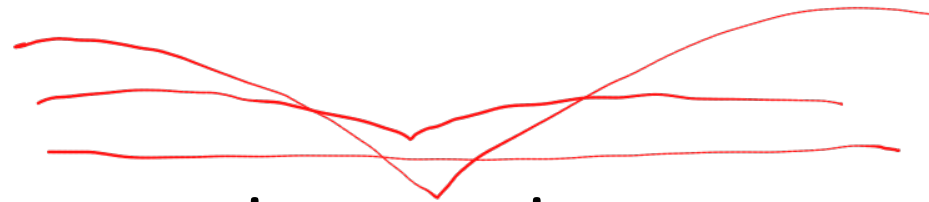
- mobile sistema di riferimento
mobile nel punto con
velocità nulla, punto di
contatto

Moto di rotolamento - cinematica



$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O',C} + \omega \times \vec{r}'$$

comp. rel. a C, nuovo SdR



$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O',C} + \omega \times \vec{r}'$$

Comp. rel. a C, nuovo SdR

Piano sistema di riferimento in movimento

Se il punto di contatto ha velocità nulla, la velocità di un generico punto può essere scritta, istante per istante, come

$$\vec{v}_P = \omega \times \vec{r}_{CP}$$

E in particolare, per il centro di massa, risulta

$$\vec{v}_{CM} = \omega \times \vec{r}_{CM}$$

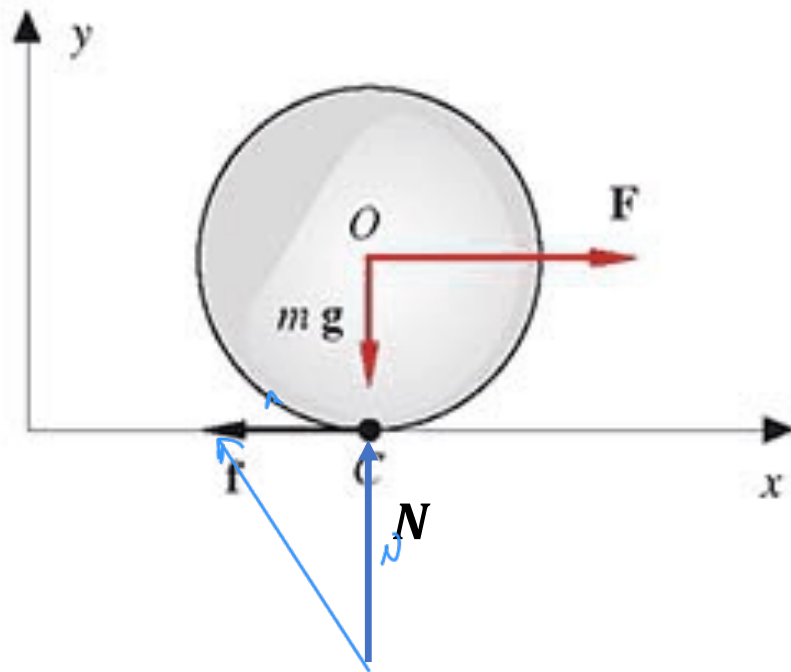
Se CM si muove verso destra, ω "entra" nel foglio.

Possiamo scrivere quindi le seguenti relazioni cinematiche tra le velocità e le accelerazioni del disco:

$$\begin{aligned} v_{CM} &= \omega R \\ a_{CM} &= \alpha R \end{aligned}$$

rapporto del disco

Moto di rotolamento - dinamica



Analizziamo quindi la dinamica del disco. Supponiamo che sul centro di massa sia applicata una forza F orizzontale che trascina il disco lungo il piano.

Scriviamo le equazioni di moto: *per trovare il moto di un corpo*

- Accelerazione del centro di massa:

$$m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}$$

- Momento angolare:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

Moto di rotolamento - dinamica

nel rotolamento
condizione = aderenza

Analizziamo la prima equazione

$$m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}$$

La risultante delle forze è data da:

$$m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{f} + m\mathbf{g}$$

forza peso

$\mathbf{f}$ è la forza generata dall'attrito tra disco e tracciato, che consente il moto di rotolamento (forza di aderenza). aderenti, statiche, moto traslatorio

Consideriamo le componenti orizzontali e verticali delle forze:

In direzione orizzontale abbiamo:

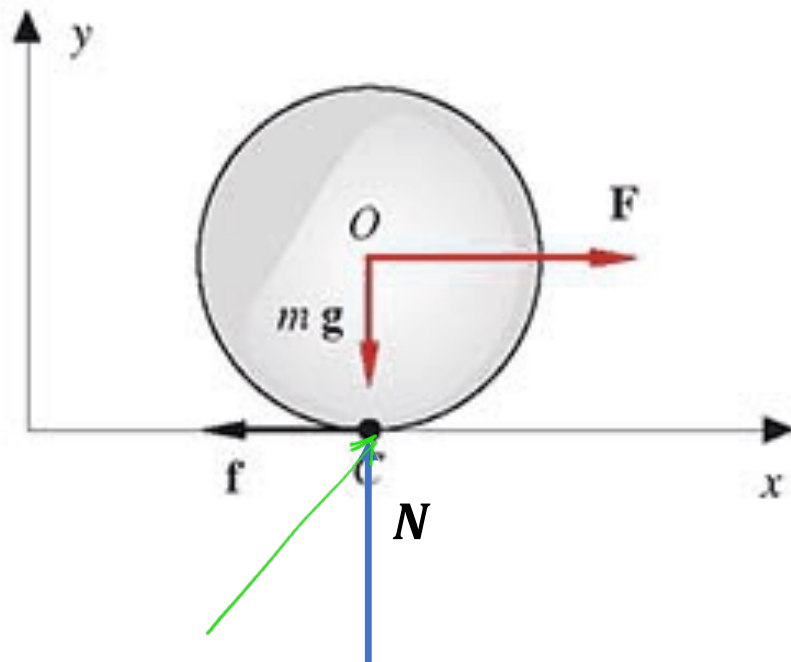
$$m\mathbf{a}_{CM} = F - f$$

Mentre in direzione verticale:

$$N - mg = 0$$

$$N = mg$$

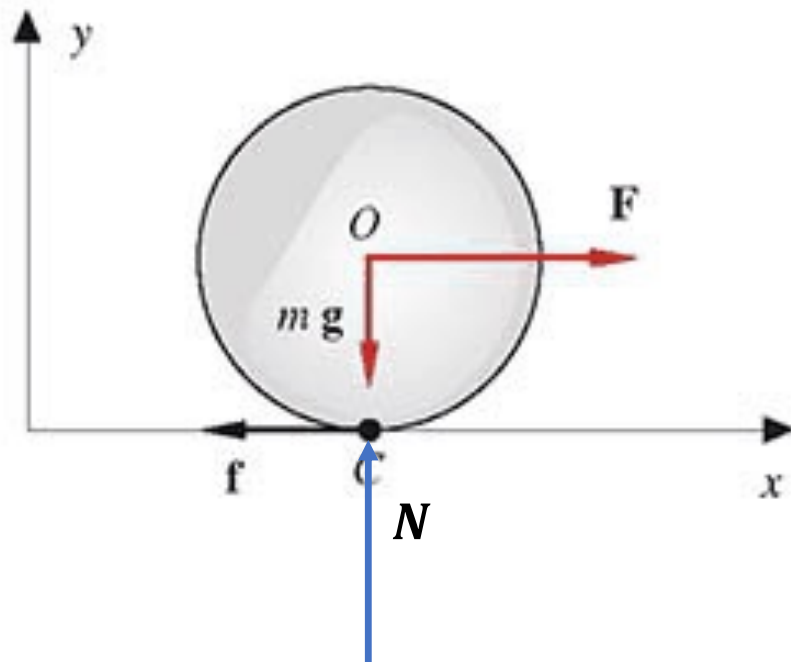
reazione vincolare del supporto
e forza peso



nel rotolamento
condizione = aderenza

Moto di rotolamento - dinamica

$$L = I \omega$$



Consideriamo i momenti

Calcoliamo il momento rispetto ad O

$$\frac{dL}{dt} = M$$

Solo l'aderenza fa momento

Calcoliamo il momento rispetto ad O

$$I_z \alpha = r \times f \text{ nel foglio}$$

Possiamo considerare solo la componente in direzione perpendicolare al piano (z): tutto

$\vec{\omega} \text{ e } \vec{\alpha}$ sono lungo z

$L \text{ è su } z$

$$I_z \alpha = f R$$

Da cui ricaviamo:

$$f = \frac{I_z \alpha}{R}$$

$f(\alpha)$ $\nwarrow$ resistenza a rotazione $\nearrow$ acceler. angolare

$\nwarrow$ forza $\nearrow$ momento

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$v_{CM} = \omega R$$

$$a_{CM} = \alpha R$$

$$\alpha = \frac{a_{CM}}{R}$$

Moto di rotolamento - dinamica

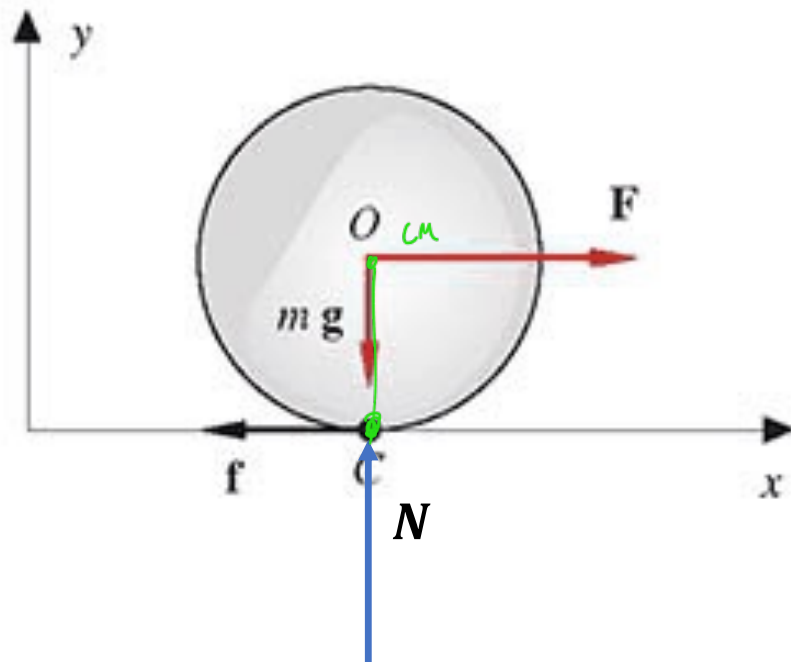
con $\vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{CM}$

per cui $\vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{CM}$

$v = \omega R$

$\theta = \alpha R$

$\alpha = \frac{a_{CM}}{R}$



Possiamo adesso riprendere l'espressione dell'accelerazione *accelerazione del corpo*

$$m \underline{a_{CM}} = F - f$$

E sostituire l'espressione di f appena trovata

$$f = \frac{I_Z \alpha}{R} = \frac{I_Z a_{CM}}{R^2}$$

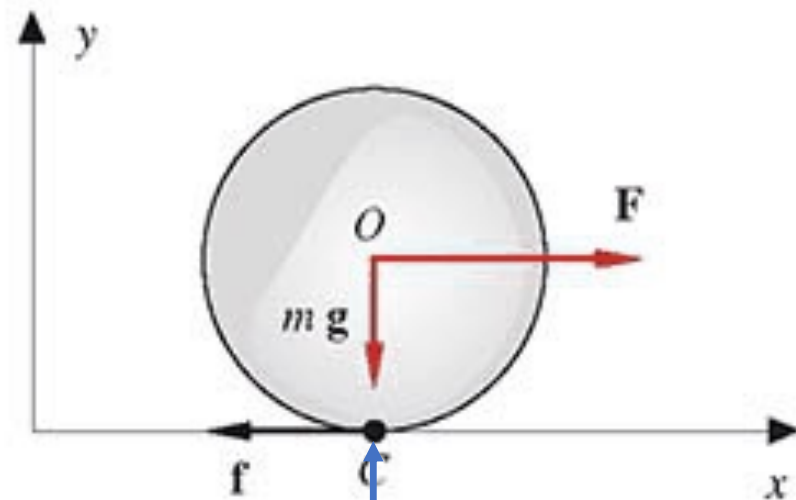
Ottenendo:

$$m a_{CM} = F - \frac{I_Z a_{CM}}{R^2}$$

Da cui possiamo ricavare l'accelerazione

$$(m R^2 + I_Z) a_{CM} = F R^2$$

Moto di rotolamento - dinamica



Devo rimanere
però in contatto
di attrito
STATICO

acceler.

$$a_{CM} = \frac{F}{m + \frac{I_z}{R^2}}$$

venire sotto all'inerzia

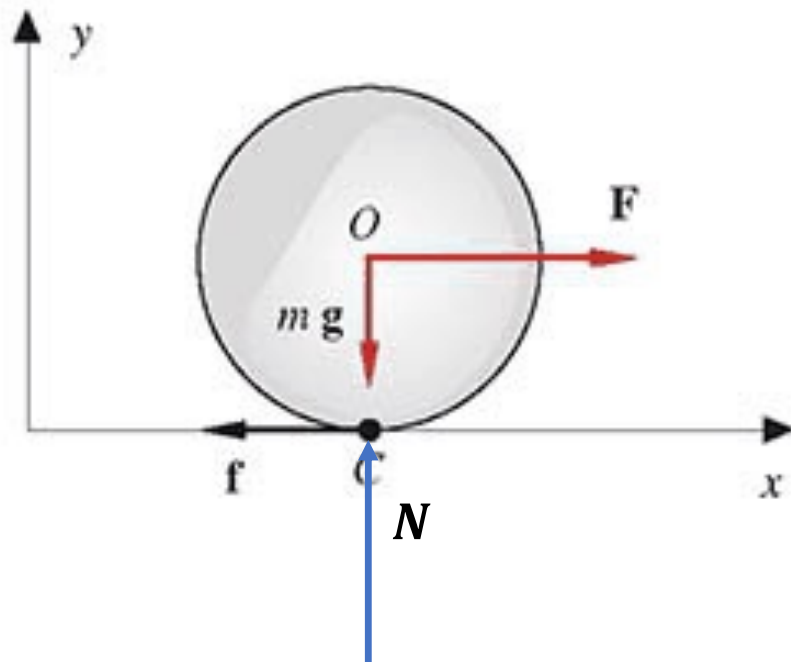
$$f = \frac{I_z a_{CM}}{R^2} = \frac{I_z}{R^2} \frac{F}{m + \frac{I_z}{R^2}} = \frac{F}{1 + \frac{mR^2}{I_z}}$$

più che
è l'acceler. più
deve essere l'acceler.

deve necessariamente
per mantenere il
moto si rotolando
con acceler.
 a_{CM}

$a_{CM} = \frac{F}{m}$ Se non c'è
Fosse rotol.
ma solo
traslato

Moto di rotolamento - dinamica



$$f = \frac{F}{1 + \frac{mR^2}{I_z}}$$

$$f \leq \mu_s N$$

→ se così non fosse così il
rotolamento non è forzato

Forza aderente, non affluire l'astoria

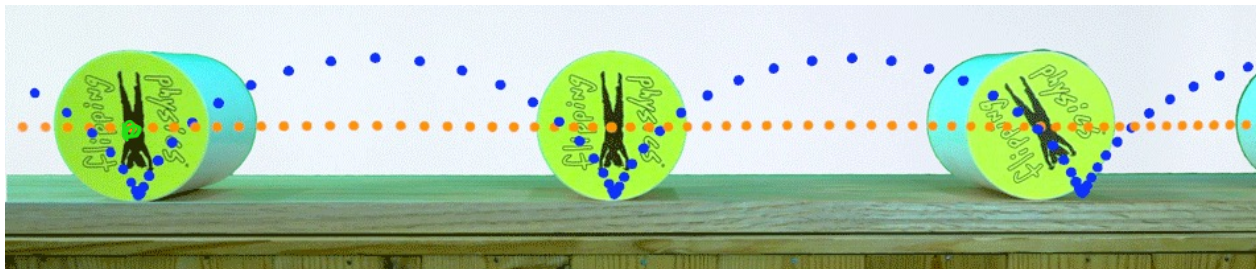
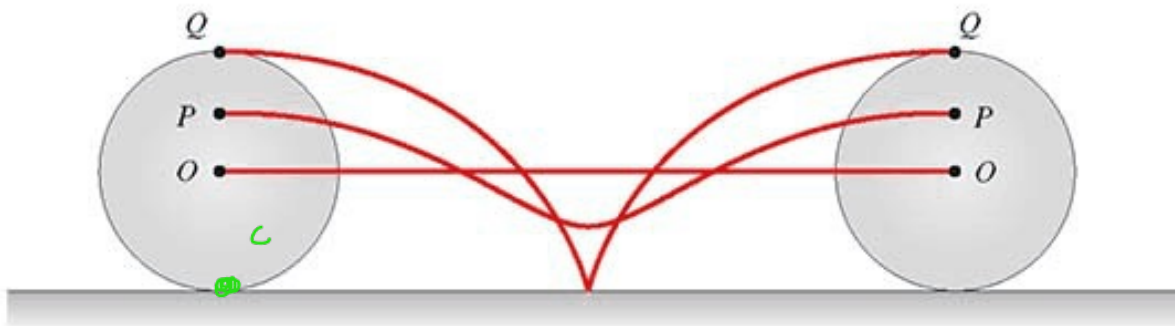
$$\Rightarrow F \leq \mu_s N \cdot 1 + \frac{mR^2}{I_z}$$

↑
Trazione massima vincolata per non perdere aderente

Moto di rotolamento



Moto di rotolamento



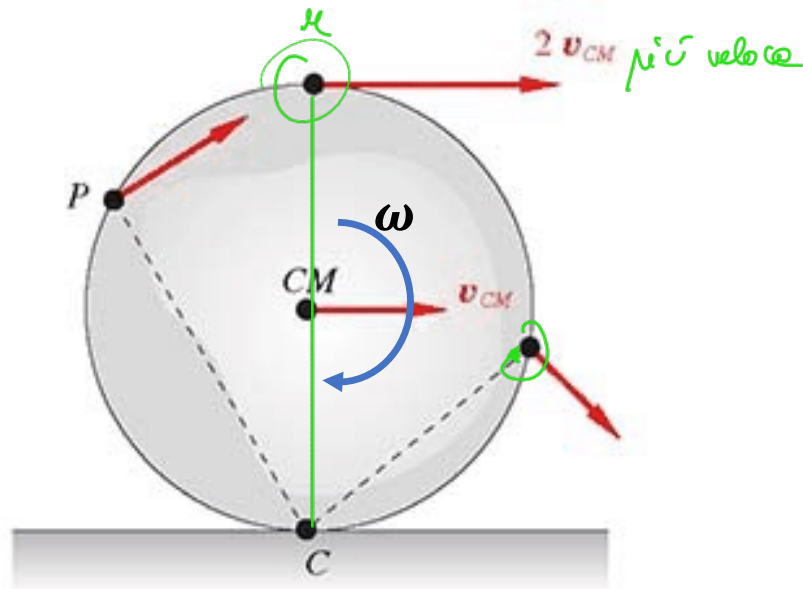
C_M trasla

- Moto di traslazione e rotazione caratterizzato da avere, istante per istante, un punto con velocità nulla (punto di contatto con il tracciato).

Il centro di massa del disco trasla in direzione orizzontale con velocità v_{CM} , mentre il disco ruota con velocità angolare ω .

- Nel punto di contatto la velocità è istantaneamente nulla.

Moto di rotolamento - cinematica



Se v_{CM} verso destra
 $\vec{\omega}$ è in senso orario

di rotaz.
 ASS = (M, N, F, S) = 0
 ma si sposta insieme alla ruota
 $v = v_0 + v' + \omega \times r'$

Se il punto di contatto ha velocità nulla, la velocità di un generico punto può essere scritta, istante per istante, come

• $\vec{v}_P = \omega \times \vec{r}_{CP}$ *ω × r'*

E in particolare, per il centro di massa, risulta

• $\vec{v}_{CM} = \omega \times \vec{r}_{CM}$

Se CM si muove verso destra, ω "entra" nel foglio.

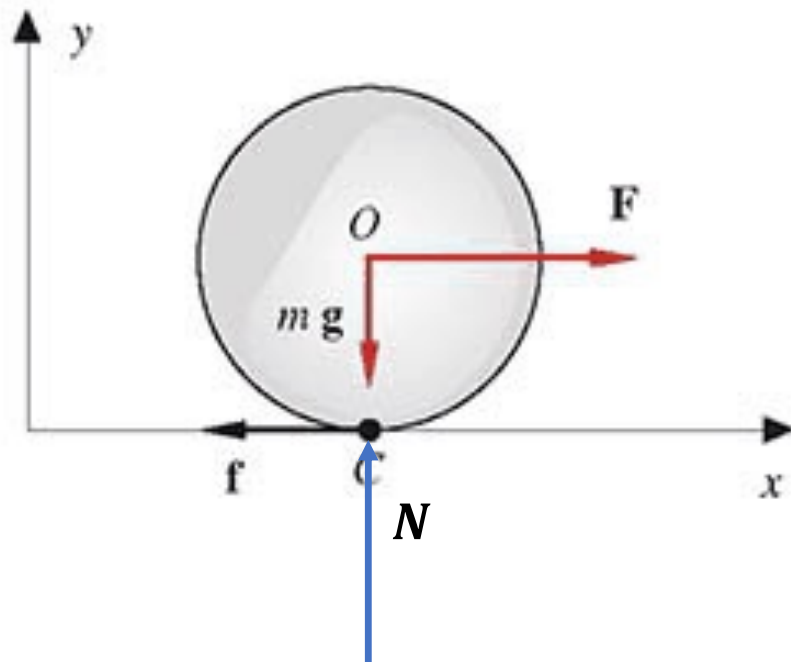
Possiamo scrivere quindi le seguenti relazioni cinematiche tra le velocità e le accelerazioni del disco:

• $v_{CM} = \omega R$
 • $a_{CM} = \alpha R$

in forma scalare

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ rad/s²

Moto di rotolamento - dinamica



Analizziamo quindi la dinamica del disco. Supponiamo che sul centro di massa sia applicata una forza $\underline{F}$ orizzontale che trascina il disco lungo il piano.

Scriviamo le equazioni di moto:

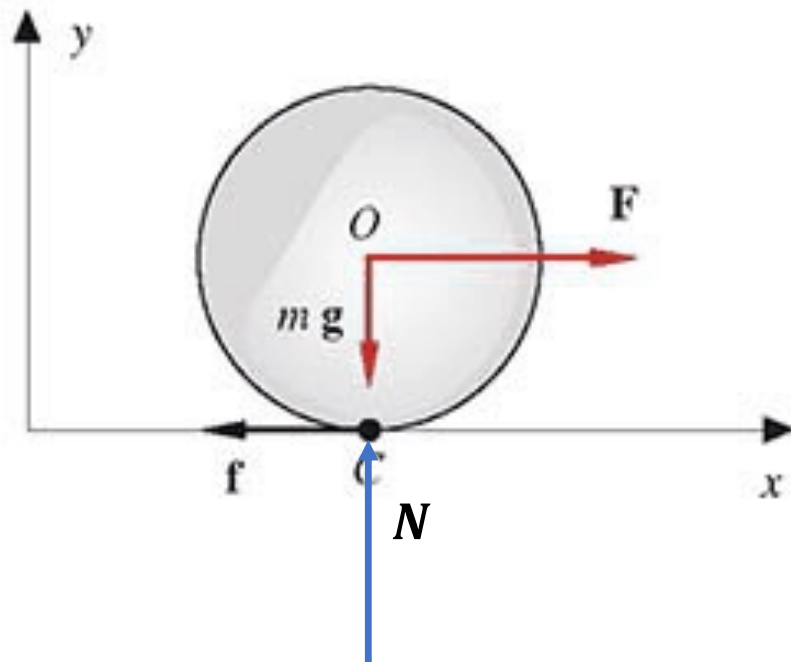
Accelerazione del centro di massa:

$$m \underline{a}_{CM} = \underline{R} \quad \leftarrow \text{del moto traslazionale}$$

Momento angolare:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underline{M} \quad \leftarrow \text{del moto di rotazione}$$

Moto di rotolamento - dinamica



Analizziamo la prima equazione

$$m\vec{a}_{CM} = \vec{R}$$

La risultante delle forze è data da:

$$m\vec{a}_{CM} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{f} + m\vec{g}$$

f è la forza generata dall'attrito tra disco e tracciato, che consente il moto di rotolamento (forza di aderenza).

Consideriamo le componenti orizzontali e verticali delle forze:

In direzione orizzontale abbiamo:

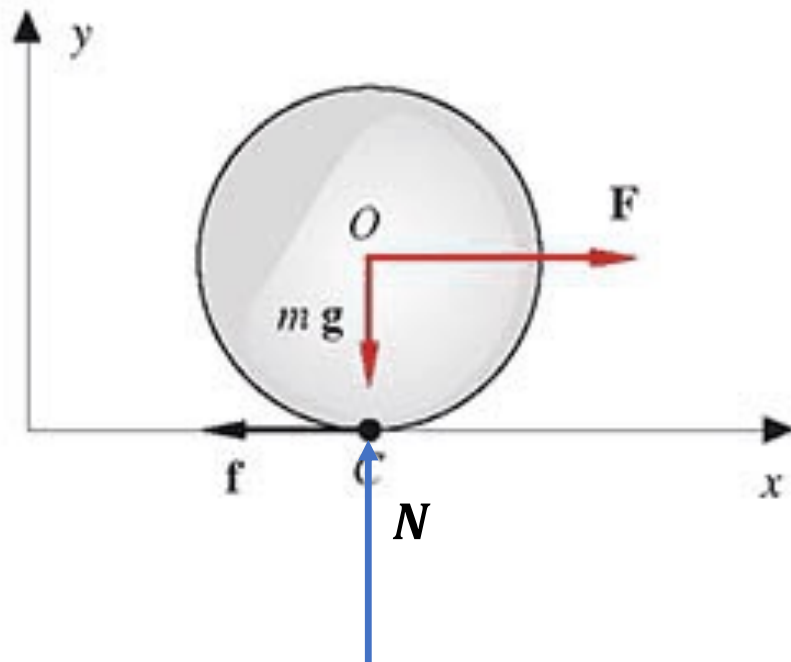
$$ma_{CM} = F - f$$

Mentre in direzione verticale:

$$\begin{aligned} N - mg &= 0 \\ N &= mg \end{aligned}$$

questo è zero

Moto di rotolamento - dinamica



Consideriamo i momenti

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega} \quad \text{e} \quad \text{lungo l'asse di rotazione.}$$

Calcoliamo il momento rispetto ad O

$$M = I_z \alpha = \mathbf{r} \times \mathbf{f} \quad \text{solo la } f \text{ conta}$$

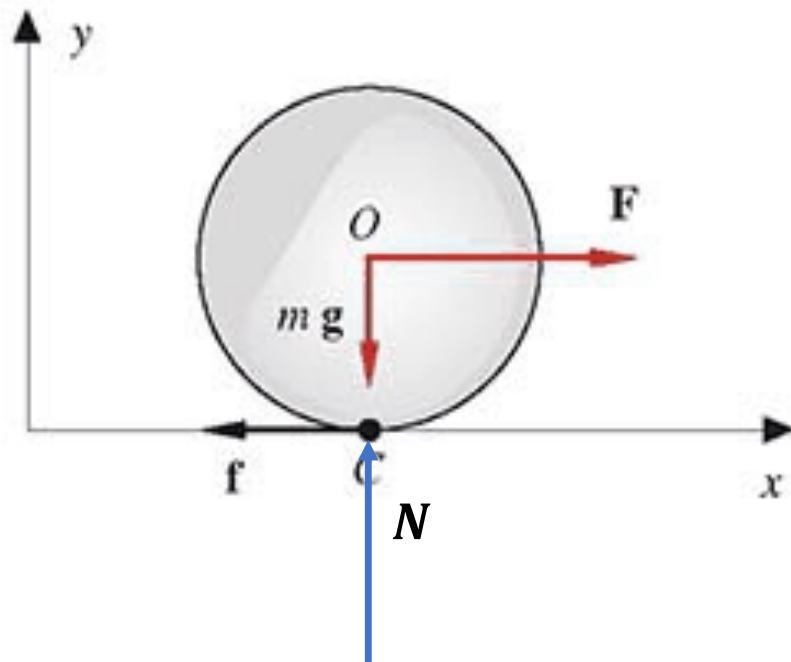
Possiamo considerare solo la componente in direzione perpendicolare al piano (z):

$$I_z \alpha = f R$$

Da cui ricaviamo:

$$f = \frac{I_z \alpha}{R}$$

Moto di rotolamento - dinamica



Possiamo adesso riprendere l'espressione dell'accelerazione

$$ma_{CM} = F - f$$

E sostituire l'espressione di f appena trovata

$$f = \frac{I_z \alpha}{R} = \frac{I_z a_{CM}}{R^2}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{cm} &= \vec{\omega} \times \vec{r}_{cm} \\ v_{cm} &= \omega R \\ a_{cm} &= \alpha R \end{aligned}$$

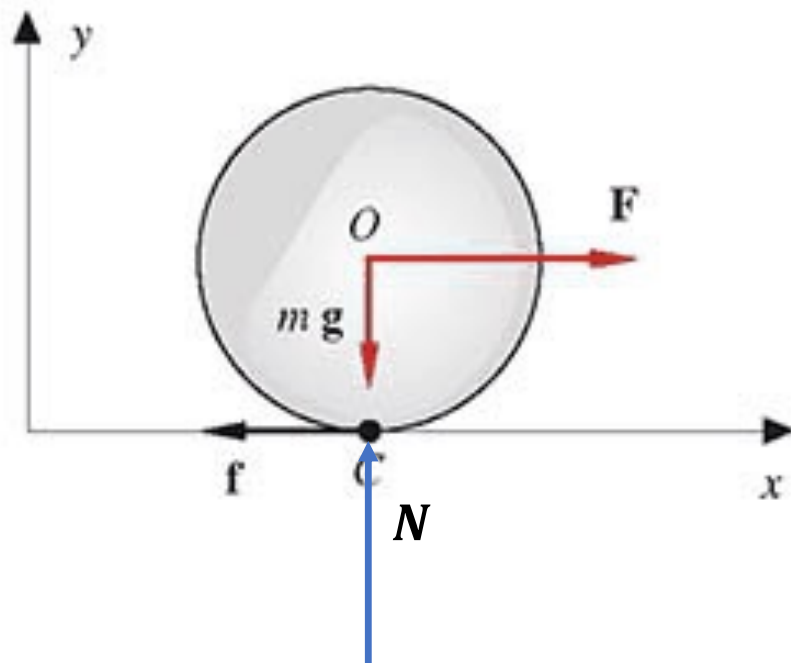
Ottenendo:

$$ma_{CM} = F - \frac{I_z a_{CM}}{R^2}$$

Da cui possiamo ricavare l'accelerazione

$$(mR^2 + I_z)a_{CM} = FR^2$$

Moto di rotolamento - dinamica



L'accelerazione risulta quindi pari a:

$$a_{CM} = \frac{F}{m + \frac{I_z}{R^2}}$$

Sostituendo, possiamo determinare la forza di aderenza, che risulta pari a:

$$f = \frac{I_z a_{CM}}{R^2} = \frac{I_z}{R^2} \frac{F}{m + \frac{I_z}{R^2}} = \frac{F}{1 + \frac{mR^2}{I_z}}$$

Moto di rotolamento - dinamica

per aderire, deve esserci in condizione di statica o più esattamente

Analizziamo il valore di f . Osserviamo che all'aumentare della forza di trazione F la forza f aumenta.

più trazione, più aderisce finché... non la perde!

$$f = \frac{F}{1 + \frac{mR^2}{I_z}}$$

}

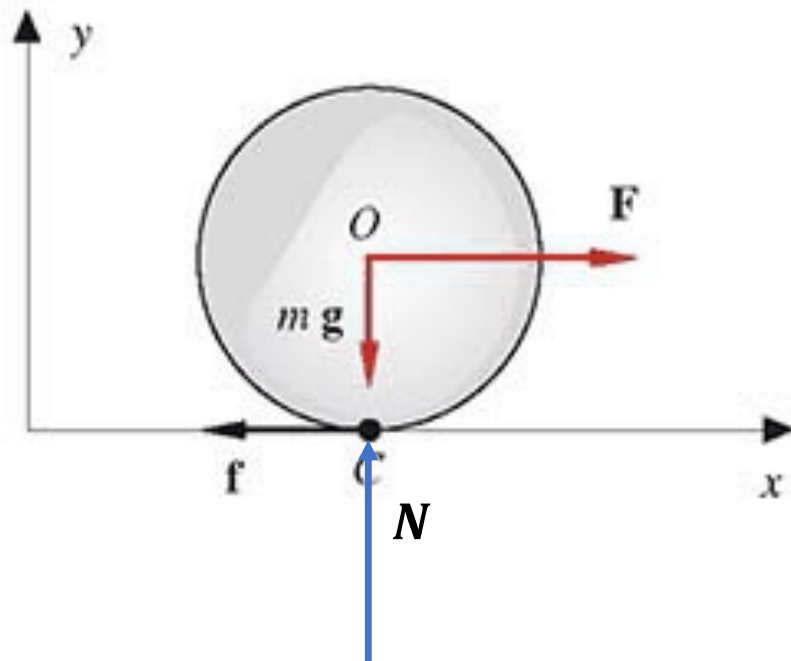
Può aumentare in modo indefinito? No! Oltre a un certo limite (limite di aderenza) la forza f non può aumentare ulteriormente. Il limite è dato dalla relazione dell'attrito coulombiano:

$$f \leq \mu_s N$$

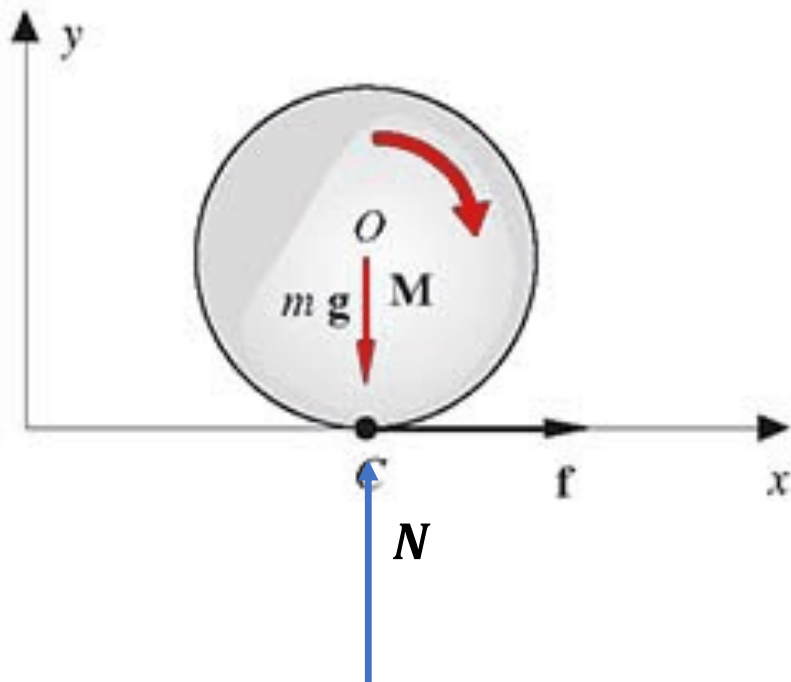
$N = mg$

Se questo limite non è soddisfatto, la condizione di rotolamento non può essere soddisfatta e la ruota slitta.

importante anche il peso



Moto di rotolamento - dinamica



- Analizziamo un altro caso, in cui alla ruota è applicata una coppia di forze con momento pari a $\underline{M}$. APPLICO MOMENTO! non Forza di attrito

- Impostiamo le equazioni di moto.

Accelerazione del centro di massa:

$$m a_{CM} = R$$

Esplicitiamo le forze agenti sul disco. Le forze che costituiscono la coppia non sono considerate perché sono opposte e quindi la loro somma è nulla

$$m a_{CM} = N + f + m g$$

Componente in direzione orizzontale

$$m a_{CM} = f$$
accel verso $\hat{x}$

Componente in direzione verticale

$$N - m g = 0$$

Da cui otteniamo

$$N = m g$$

Ripasso: Coppia di vettori applicati

Definizione: Si definisce come **coppia di vettori applicati**, un sistema di vettori applicati costituito da due vettori opposti ($A_1, \mathbf{a}$) e ($A_2, -\mathbf{a}$).

$R = 0$

$$M_{O'} = M_O + \gamma_{OO'} \times R$$

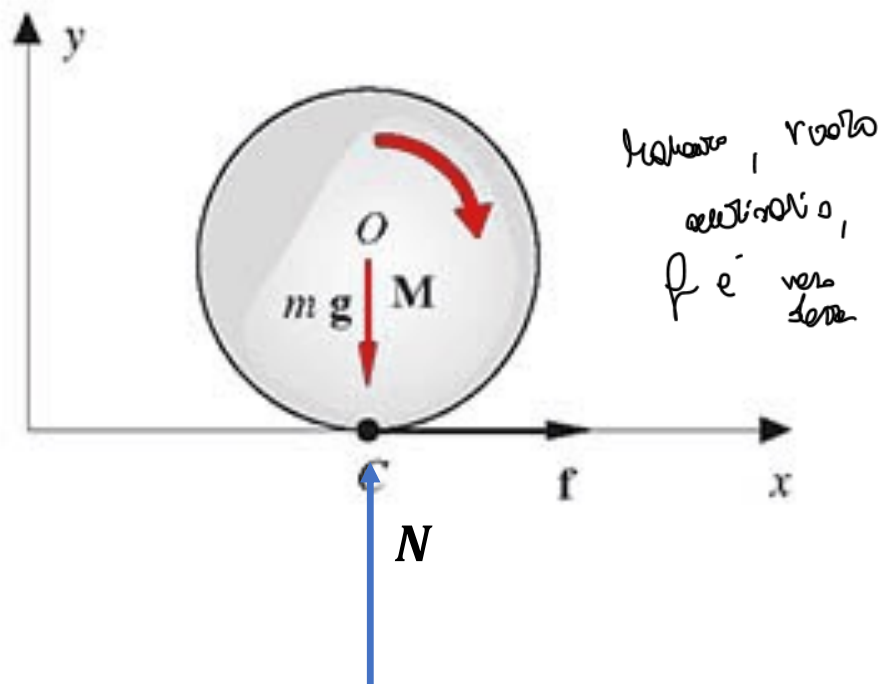


Essendo la risultante di tale sistema nullo, il momento risultante (**momento della coppia**) è invariante rispetto al punto O scelto come polo per il calcolo del momento risultante.

Si definisce quindi momento della coppia ($\mathbf{M}$) un vettore avente:

- modulo uguale al prodotto del modulo di uno dei due vettori, $|\mathbf{a}|$, per la distanza tra le rette d'azione dei due vettori d (braccio) $|\mathbf{M}| = |\mathbf{a}|d$
- direzione ortogonale al piano di appartenenza dei due vettori (piano della coppia)
- verso determinato in modo tale che il vettore ($A_1 - A_2$), $\mathbf{a}$ ed $\mathbf{M}$ formino una terna destrorsa.

Moto di rotolamento - dinamica



Consideriamo l'equazione dei momenti

$$\left\{ \frac{dL}{dt} = M_{tot} \text{ es.}$$

Calcolo del momento risultante rispetto ad O.

$$I_z \alpha = r \times f + M \text{ es. } M_{tot}$$

Consideriamo la componente in direzione perpendicolare al piano:

$$I_z \alpha = -fR + M$$

es. calcolo *direz. opposta*
il verso di f

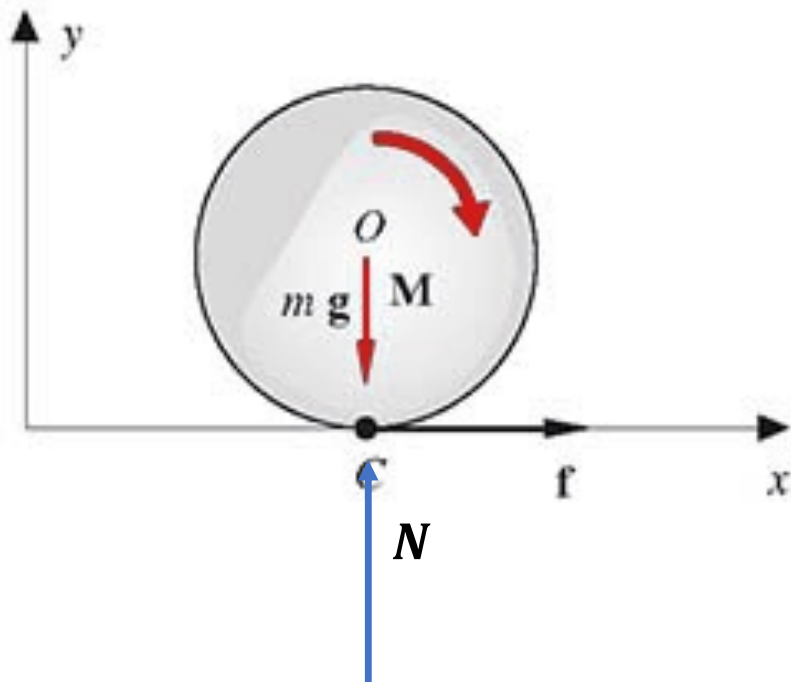
Da cui possiamo esplicitare la forza di aderenza

$$f = \frac{M - I_z \alpha}{R}$$

prima es. con f
l'za
R
ma si
prende
da aderenza

Moto di rotolamento - dinamica

basilone della dinamica



Si sostituisce l'espressione della forza di
aderenza appena definita

$$f = \frac{M - I_z \alpha}{R}$$

Nell'equazione dell'accelerazione

$$ma_{CM} = f$$

vincolo cinematico

Ricordando che $a_{CM} = R\alpha$ si ottiene

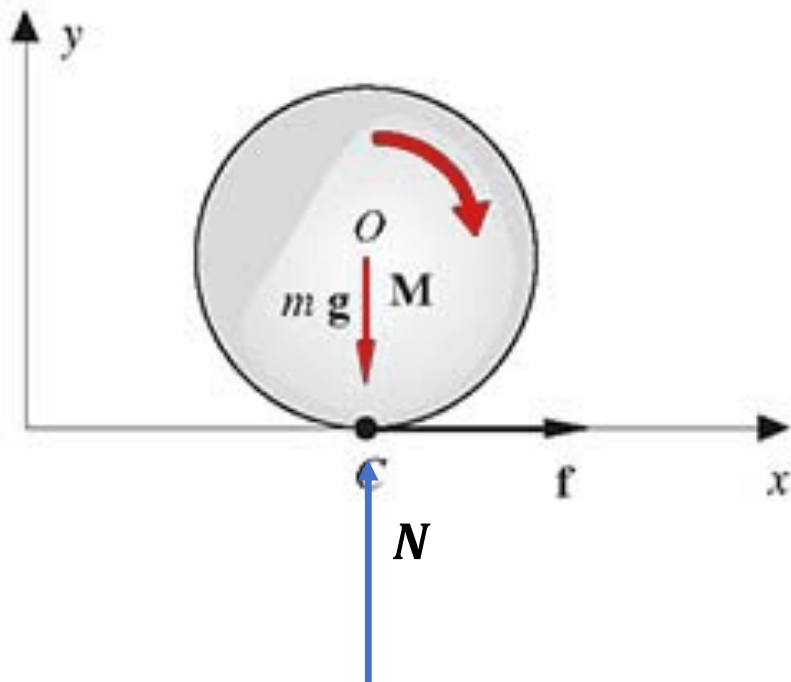
$$mR\alpha = \frac{M - I_z \alpha}{R}$$

*mi conviene
qui esplicitare α*

Da cui possiamo esplicitare α

$$(mR^2 + I_z)\alpha = M$$

Moto di rotolamento - dinamica



L'accelerazione angolare del disco è quindi pari a:

$$\alpha = \frac{M}{mR^2 + I_z}$$

$$\alpha = \frac{F}{m + \frac{I_z}{R^2}}$$

E quindi l'accelerazione del centro di massa sarà pari a

$$a_{CM} = \frac{MR}{mR^2 + I_z}$$

$$a_{CM} = R\alpha$$

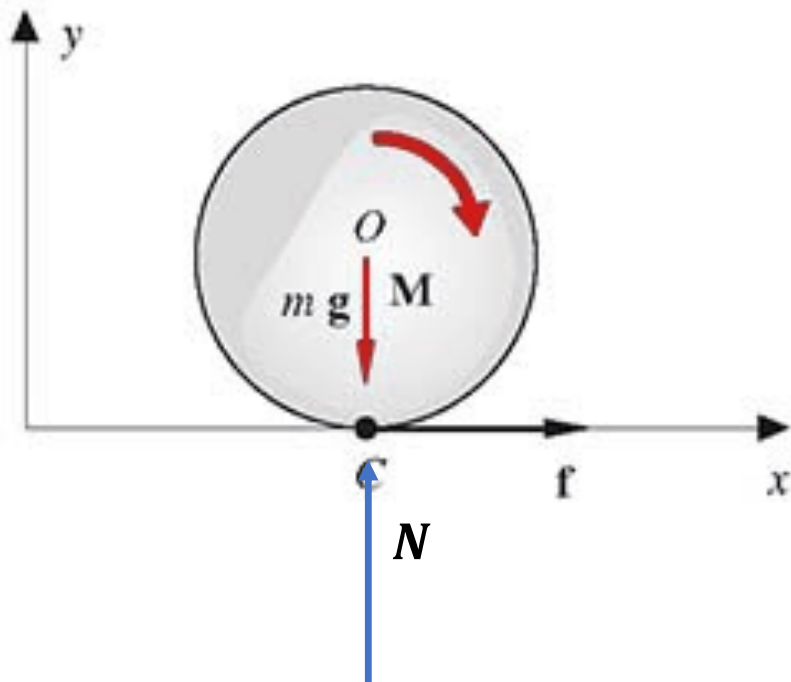
Sostituendo si ottiene il valore della forza di aderenza.

$$f = m \frac{MR}{mR^2 + I_z} = \frac{M}{R \left(1 + \frac{I_z}{mR^2} \right)}$$

$$f = m a_{CM}$$

$$f = \frac{F}{1 + \frac{m R^2}{I_z}}$$

Moto di rotolamento - dinamica



La forza di aderenza dipende dal momento della coppia applicata

$$f = ma_{CM} = m \frac{MR}{mR^2 + I_z} M$$

$$= \frac{M}{R \left(1 + \frac{I_z}{mR^2} \right)}$$

MR *momento coppia, momento esterno*

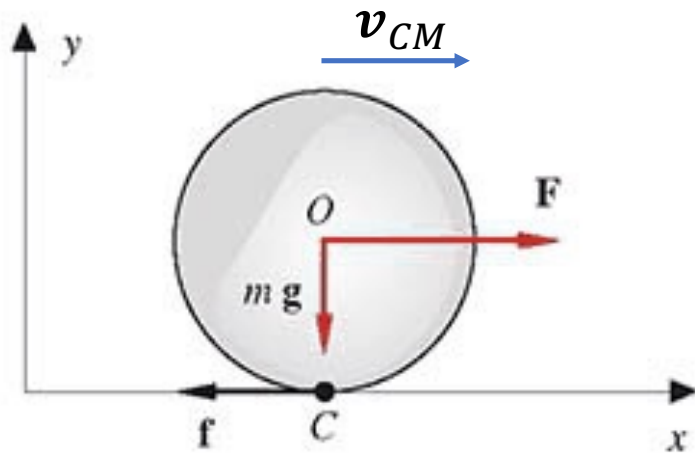
Ma anche in questo caso, deve rispettare il vincolo di aderenza

$$f \leq \mu_s N$$

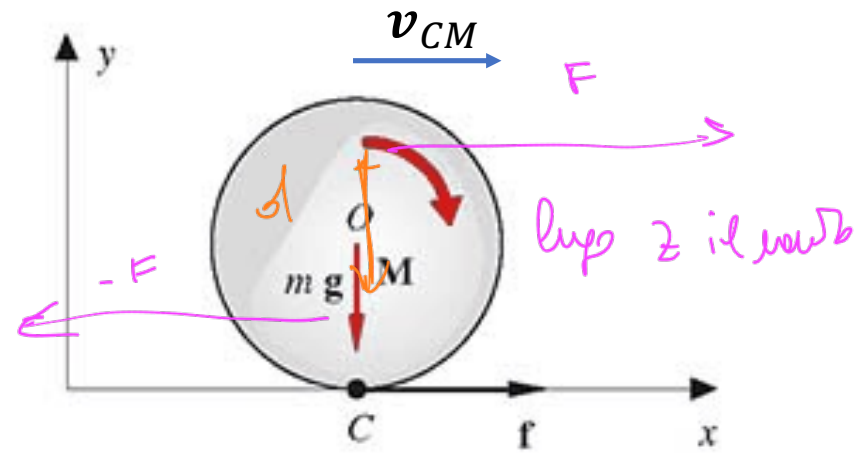
forza di attrito statico

*il contatto con il piano è più
che $L=0$ nel punto di contatto*

Moto di rotolamento e forza di aderenza



Ruota trascinata



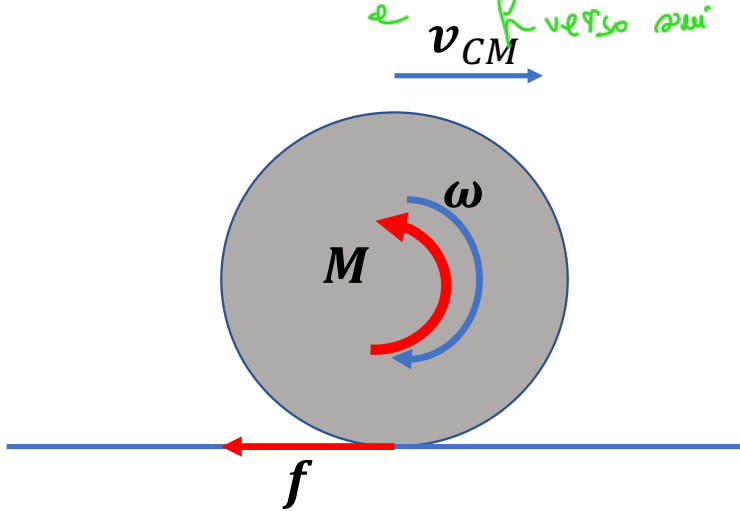
Ruota motrice

es. Motore

$$M = Fd$$

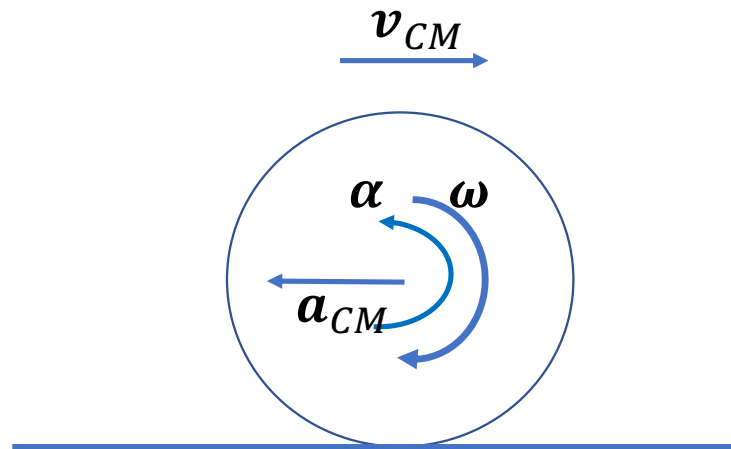
Moto di rotolamento e forza di aderenza

se freno cont'a verso ~~del~~ nuovo
e acc. e acc.
e v_{CM} verso anti.



Ruota frenata
anche in frenata: 0
Modello di f è lo stesso

Devo soddisfare il vincolo di attrito



Ruota frenata, cinematica

A cosa serve e come funziona il sistema ABS?

Sistema anti-bloccaggio

Sensori misurano velocità angolare ruote

ω

muove a grandissimi da $f \leq \mu_s N$

ruota v_{CM}
per ruota

$v_{CM} = \omega R$? se sta rotolando senza slittare

Se $v_{CM} \neq \omega R$ la ruota sta perdendo aderenza, rischio la coppia e frenate

$$\left(f = \frac{m R R}{m R^2 + I_z} \right) \text{ frenate 'vece } f \leq \mu_s N$$

Energia cinetica in un moto generico

$$E_{k_{traslazionale}} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

L'energia cinetica, in un moto generico, può essere scritta come:

$$E_k = E_{kt} + E_{kr}$$

energia cinetica di rotazione
e traslazione

- $E_{kr} = \omega \cdot L$ tiene conto della parte di rotazione del moto, nel caso generale dipende dalla velocità angolare e dalla matrice di inerzia.
- $E_{kt} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$ tiene conto della parte di traslazione del moto generico.

Moto traslatorio

però vedere il
corpo rigido come un
punto nel CM e
con v_{CM}

Maggiori dettagli nei corsi di robotica e sistemi meccanici...

$$E_{kt_r} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 \quad E_{kr} = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

$$E_k = E_{kt_r} + E_{kr}$$

Energia cinetica in un moto di rotolamento

- Anche in un moto di rotolamento abbiamo:

$$E_k = E_{kt} + E_{kr}$$

In questo caso in particolare

- $E_{kr} = \frac{1}{2} I \omega^2$ tiene conto della parte di rotazione del moto.
- $E_{kt} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$ tiene conto della parte di traslazione del moto generico.

Sapendo però che nel moto di rotolamento

$$v_{CM} = R\omega$$

Possiamo scrivere l'energia cinetica in funzione della velocità angolare

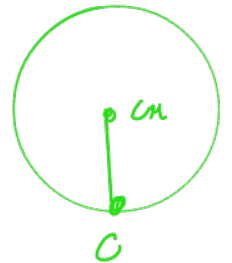
$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = \frac{1}{2} (I_z + m R^2) \omega^2$$

dal Teo. di Steiner
 $v_{CM} = R\omega$

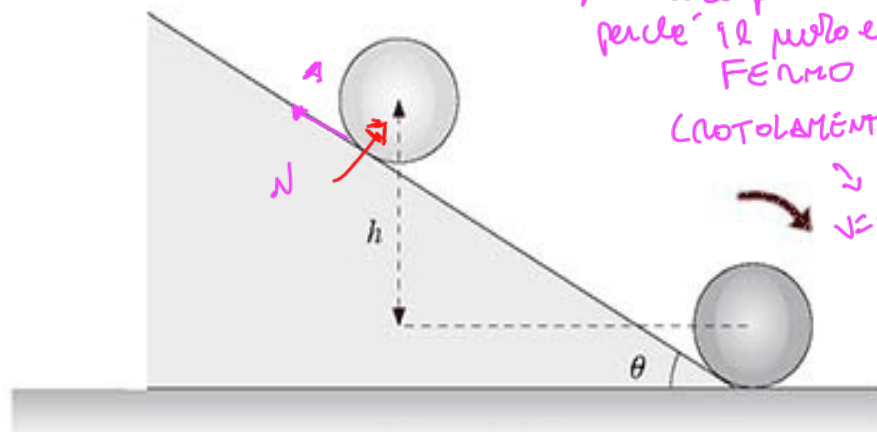
Oppure in funzione della velocità del centro di massa

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{I_z}{R^2} + m \right) v_{CM}^2$$

$\omega^2 = \frac{v_{CM}^2}{R^2}$



Esempio



Problema: un disco parte da fermo da un'altezza h su un piano inclinato, voglio determinare la velocità del corpo alla fine della discesa.

DINAMICA del sistema?
in istante

lavoro di ROTOLAMENTO
A non compie lavoro perché il punto è FERMO
(ROTOLAMENTO)

$v_C = 0, ds = R d\theta$

Risolvo dal punto di vista energetico
solo F_p fa lavoro

Sul corpo rigido agisce la forza peso, che è conservativa e la reazione del piano di appoggio inclinato, che non compie lavoro dato che il punto di contatto istante per istante è fermo.

Possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica.

essendo solo forze conservative
iniz. Conserv. equaz. meccanica

Ep.

$$mgh = \frac{1}{2} (I_z + mR^2) \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgh}{I_z + mR^2}}$$

$$v_{CM} = \omega R = R \sqrt{\frac{2mgh}{I_z + mR^2}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I_z}{mR^2}}}$$

Considero-energetiche
e di lavoro per v_{CM}

trovo $\omega(t)$, ma non ho info sulle forze.

Se lo voglio uso eq. di moto

$$\Delta E_M = 0$$

$$E_{MA} = E_{MB}$$

$$E_{PA}$$

$$\omega = 0$$

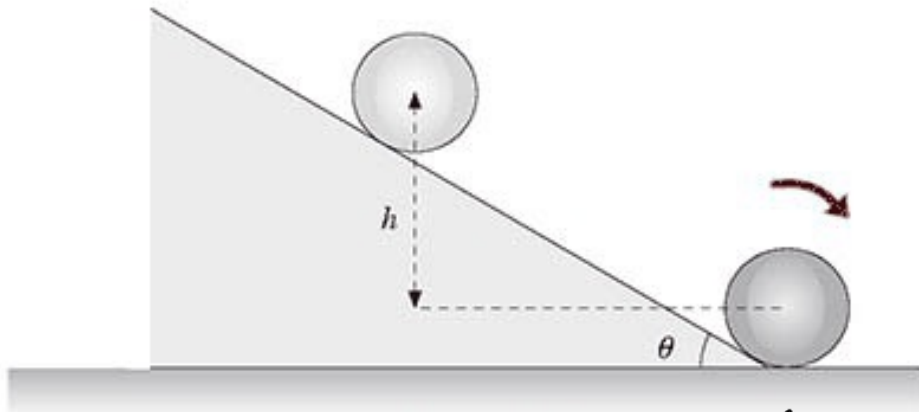
$$E_{KB}$$

$$h \neq 0$$

trovo v_{CM} .

una parte dell'energia meccanica viene usata per mettere in rot. il corpo

Esempio



motivo di
rotolamento
per modello
fenomeni dissipativi

Approfondimento: anche nel moto di rotolamento esistono fenomeni dissipativi dell'energia meccanica, dovuti alla deformazione locale dei materiali e alla loro non perfetta elasticità.

In condizioni reali quindi l'energia meccanica non si conserva nel moto di rotolamento, ma tende a diminuire.

Questi fenomeni possono essere rappresentati introducendo il concetto di attrito di rotolamento o volvente.

→ Maggiori dettagli nel corso di sistemi meccanici.

Energia meccanica nella
rotazione non si
conserva.

anche in rotolamento puro



Stesso esempio, utilizzando le equazioni di moto

*con componente
normale del
piano inclinato*

$$\vec{R} = m\vec{g} \quad \text{cm}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = I\vec{\omega}$$

*invece della conservazione dell'energia,
usa 2° principio*

• Risultante delle forze in direzione parallela al piano
Componente parallela della forza peso
 $mg \sin \vartheta - f = ma_{CM}$

Equazione dei momenti

$$I_Z \alpha = fR$$

collo f fa momento

Relazione cinematica

$$a_{CM} = R\alpha$$

vincolo cinematico

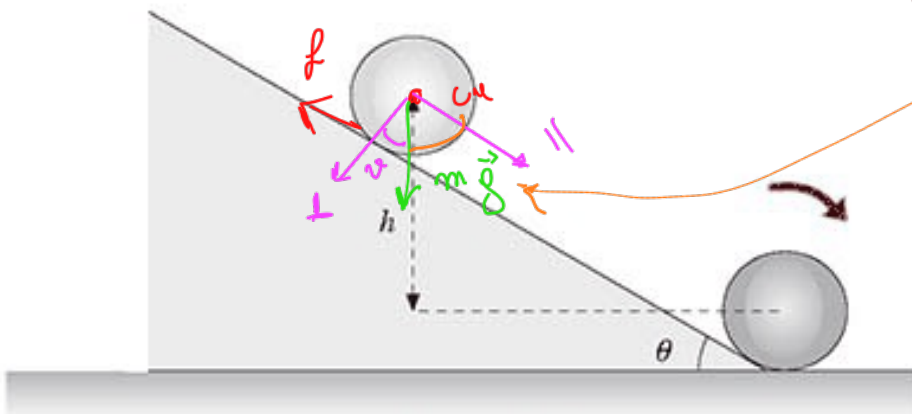
Dall'equazione dei momenti ricaviamo la forza di
aderenza

$$f = \frac{I_Z \alpha}{R}$$

Risolviendo, si ricava l'accelerazione del centro di
massa

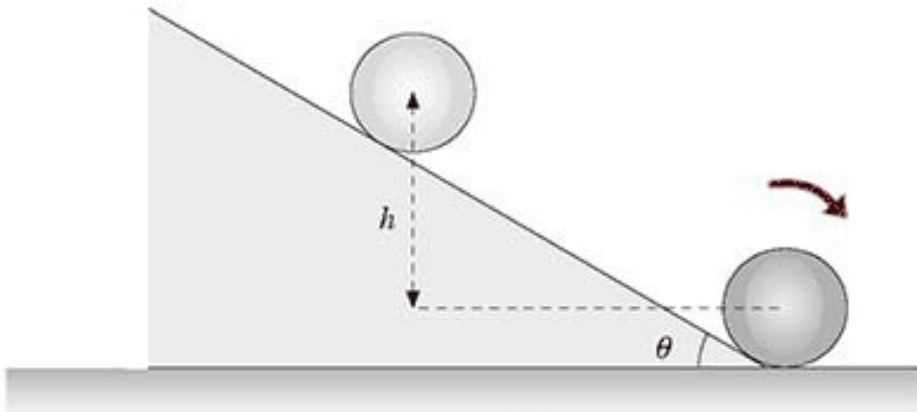
$$mg \sin \vartheta - \frac{I_Z a_{CM}}{R^2} = ma_{CM}$$

$$a_{CM} = \frac{mg \sin \vartheta}{m + \frac{I_Z}{R^2}} = \frac{g \sin \vartheta}{1 + \frac{I_Z}{mR^2}}$$



*anche
la
componente
del
peso*

Stesso esempio, utilizzando le equazioni di moto



Accelerazione del centro di massa

$$a_{CM} = \frac{mg \sin \vartheta}{m + \frac{I_z}{R^2}} = \frac{g \sin \vartheta}{1 + \frac{I_z}{mR^2}}$$

Accelerazione angolare

$$\alpha = \frac{a_{CM}}{R} = \frac{g \sin \vartheta}{R \left(1 + \frac{I_z}{mR^2} \right)}$$

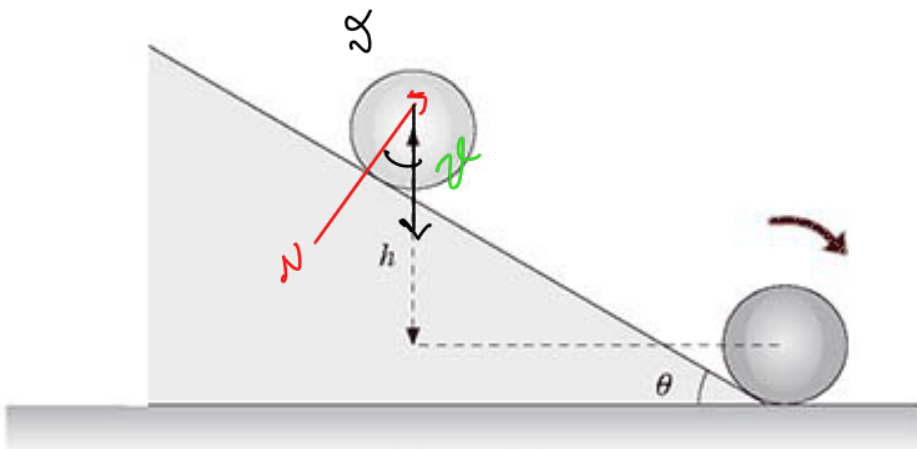
Forza di aderenza

$$\begin{aligned} f &= \frac{I_z \alpha}{R} = \frac{I_z}{R^2} \frac{g \sin \vartheta}{\left(1 + \frac{I_z}{mR^2} \right)} = \frac{I_z m g \sin \vartheta}{(mR^2 + I_z)} \\ &= \frac{mg \sin \vartheta}{\left(\frac{mR^2}{I_z} + 1 \right)} \end{aligned}$$

$f < \mu_s N$? verifico

$$f < \mu_s N ?$$

Stesso esempio, utilizzando le equazioni di moto



La forza di aderenza deve soddisfare il vincolo coulombiano.

$$N = mg \cos \vartheta$$

$$N - mg \cos \vartheta = 0$$

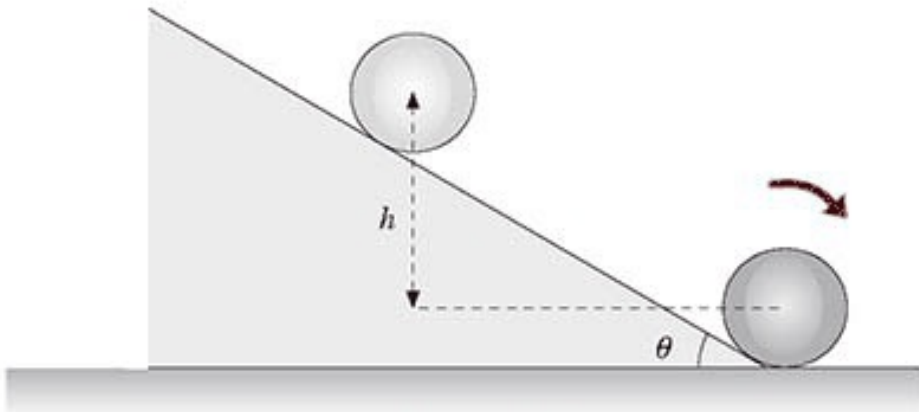
↑
acc bp
y = 0

$$f = \frac{mg \sin \vartheta}{\left(\frac{mR^2}{I_z} + 1\right)}$$

$$f \leq \mu_s N$$

$$\frac{mg \sin \vartheta}{\left(\frac{mR^2}{I_z} + 1\right)} \leq \mu_s mg \cos \vartheta$$

Stesso esempio, utilizzando le equazioni di moto



$$\frac{mg \sin \vartheta}{\left(\frac{mR^2}{I_z} + 1\right) \sin \vartheta} \leq \mu_s mg \cos \vartheta$$

$$\frac{\left(\frac{mR^2}{I_z} + 1\right)}{\sin \vartheta} \leq \mu_s \cos \vartheta$$

$$\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \leq \mu_s \left(\frac{mR^2}{I_z} + 1\right)$$

$$\tan \vartheta \leq \mu_s \left(\frac{mR^2}{I_z} + 1\right)$$

Se ϑ cresce, la componente
 f è troppo elevata $f > \mu_s N$
 e scivola

app.
 di inclin.

Le variabili,
 ho solo μ_s e m .

Per trovare
 il μ_s
 si trova

Impulso angolare

- Teorema dell'impulso

in un punto materiale

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{P}$$

impulso, 'impulso' 2° principio

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}$$

In modo analogo integrando rispetto al tempo l'equazione $\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$ possiamo verificare che

*impulso angolare,
integrale del momento
rispetto al tempo.*

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt = \Delta \mathbf{L}$$

*Forza
torque
applicabile*

Impulso angolare

No Forze impulsive

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt = \Delta \mathbf{L}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{L} = \vec{r} \times \vec{J}$$

Se la forza è di tipo impulsivo (agisce in un tempo molto breve)

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) dt = \mathbf{r} \times \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{r} \times \mathbf{J}$$

$\mathbf{r}$ è costante
Se l'intervallo di t
è piccolo

Se la Forza è impulsiva

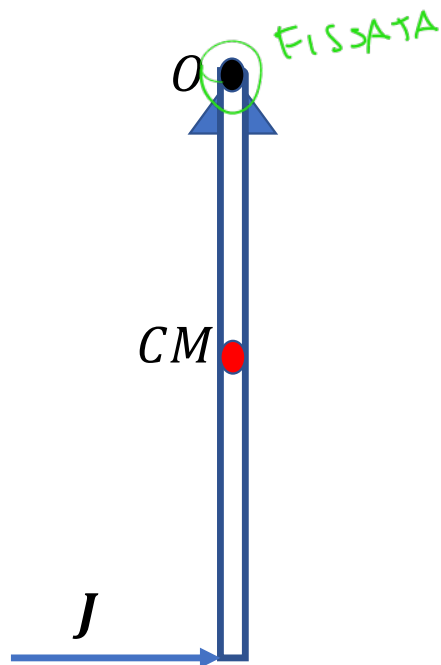
IMPULSO DEL MOMENTO = MOMENTO dell'IMPULSO

$$\int \mathbf{M} dt = \vec{r} \times \vec{J} = \int \mathbf{F} dt = \Delta \vec{L}$$

Esempio

Basta vincolo nel punto O , può ruotare

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
 $\Delta \vec{L} = \vec{r} \times \vec{J}$
 $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$



Cosa succede?

SUBISCO UNA VARIAZ. del mom. angolare

$$\Delta \vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{r} \times \vec{F}) dt = \vec{r} \times \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{r} \times \vec{J}$$

$$\Delta L = L_{fin} - \cancel{L_{in}} = I_z \omega$$

$$\omega = \frac{1}{I_z} \vec{r} \times \vec{J}$$

Calcolo la velocità angolare

Esempio *STECCA, palla da BILIARDO*



- Istante iniziale

$$J = \Delta P = m v_{CM}$$

$$v_{CM \text{ in}} = \frac{1}{m} J$$

$$v_{CM 0} = 0 \quad P_0 = \emptyset$$

$$\Delta L = r \times J = 0$$

$$\omega_{in} = 0$$

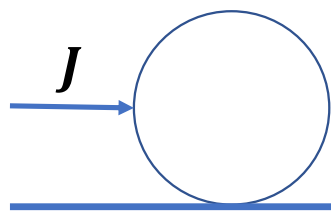
→ non fa momento $\mathcal{J}$, momento impulso $\Rightarrow$

$L = I \omega \dots$

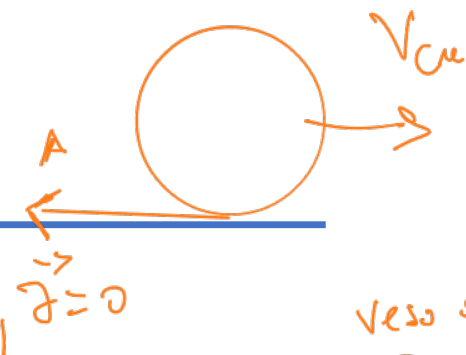
$\omega_{FIN} = \omega_{IN} = 0$, non

muoversi

Esempio



Subito dopo l'impulso



inizialmente a velocità e posizione zero perché A fa nulla

$$N = mg$$

$$A = \mu_d N$$

$$ma_{CM} = -\mu_d mg$$

verso opposto

A fa momento,

Quindi, integrando nel tempo

$$I_z \alpha = \mu_d mg R$$

$$v_{CM} = v_0 + \int a_{CM} dt$$

$$v_{CM} = \frac{1}{m} J - \mu_d g t$$

$$\omega = \frac{\mu_d mg R t}{I_z}$$

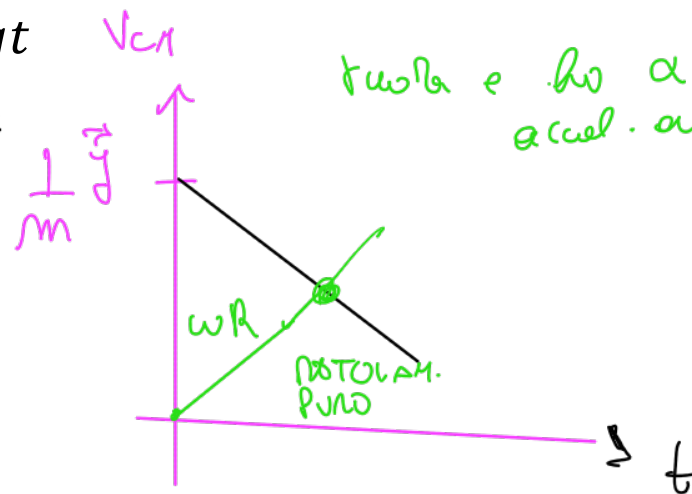
$$\omega_0 = 0$$

velocità
angolare aumenta
nel tempo

Sono tutte
costanti,
integro
nel tempo

$$I_z \vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{A}$$

quella è la $\alpha \neq 0$
accel. angolare



Ho ROTOLAM. puro quando
 $\vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, e soddisfa la cond'z
 di purezza

Esempio



Quando inizia il moto di rotolamento puro?

$$v_{CM} = \frac{1}{m} J - \mu_d g t$$

$$\omega = \frac{\mu_d m g R}{I_z} t$$

Cerchiamo il tempo t_r per il quale $v_{CM} = \omega R$

$$\frac{1}{m} J - \mu_d g t_r = \frac{\mu_d m g R^2}{I_z} t_r$$

Urti tra ~~punti materiali e corpi rigidi~~

Negli urti che coinvolgono corpi rigidi e punti materiali possiamo applicare il teorema dell'impulso e dell'impulso angolare

$$J = \Delta P = m v_{CM}$$

uso queste relazioni

$$r \times J = \Delta L$$

Se l'urto è perfettamente elastico si conserva l'energia cinetica.

Se l'urto è completamente anelastico i corpi rimangono collegati dopo l'urto.

$$v'_1 = 0, v_1 = v_{CM} = v_2$$

Perda energia meccanica
 $E_k' = 0$

una o più parti

si muovono

$$R^{(E)} = 0$$

$$J^{(E)} = 0$$

$$\Delta P = 0$$

qui invece

Urti tra punti materiali e corpi rigidi

Nel teorema dell'impulso

$$\mathbf{J} = \Delta \mathbf{P} = m \mathbf{v}_{CM}$$

Oltre alle forze dell'urto, che sono interne, se il corpo è in qualche modo vincolato occorre tener conto del fatto che possiamo avere forze vincolari di tipo impulsivo quindi non è detto che $\Delta \mathbf{P} = 0$

In questi casi possiamo scegliere il polo per il calcolo del momento angolare in modo che

$$\Delta \mathbf{L} = 0$$

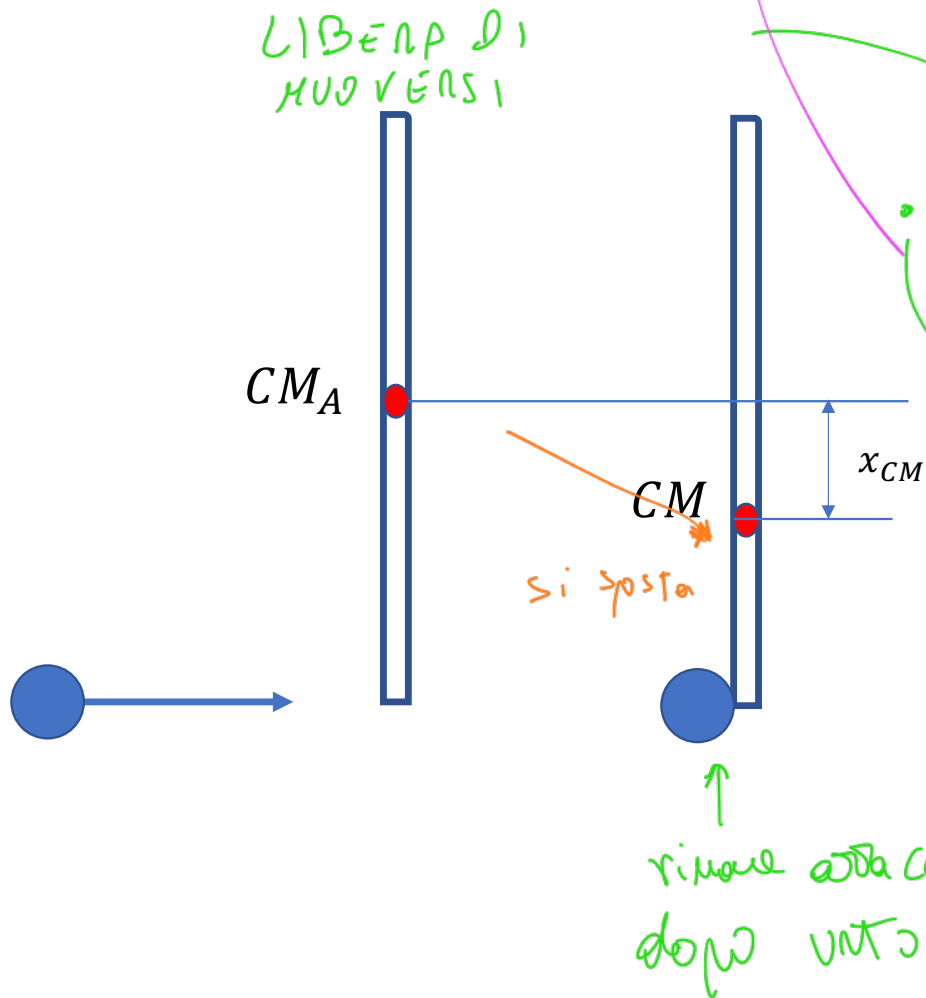
lo facciamo allora
con la differenza dei momenti

SE corpo è vincolato...
e non libero

$$J^{(E)} \neq 0$$

E non posso sommare
 $P_1 = P_2$

Esempio



area rimane fissa
 $\Delta L = 0$
 $L_{im} = \vec{r} \times m_p \vec{v}_p$
 $L_{fim} = I \omega$
 da calcolare rispetto allo stesso polo
 per sommare così
 dove scegliere come polo il CM finale

urto compl. elastico

$\Delta(E) = 0 \dots$ P si conserva

$$\Delta P = 0$$

$$\Delta L = 0$$

conservazione energia

$$m_p \vec{v}_p = (m_p + m_{asta}) \vec{v}_{CM \text{ fine}}$$

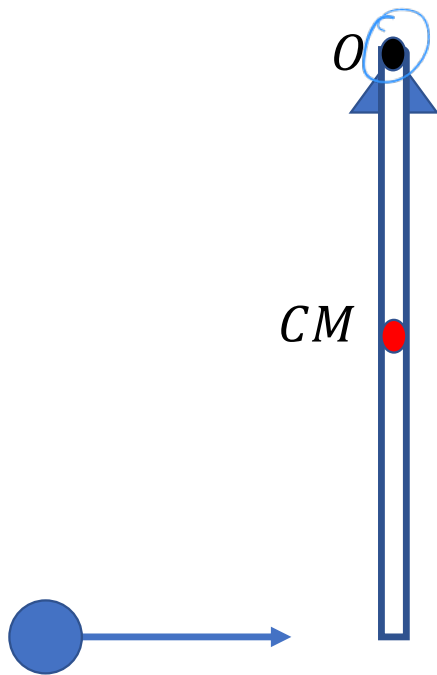
unico corpo rigido

CM spostato perché ora il s.s.t. è composto da due parti

Devo ricalcolare centro di massa

$$r_{CM} = \frac{\int_V \rho \vec{r} dV}{m}$$

Esempio



asta vincolata.

• O reagisce con un impulso esterno.

↙ varia

$$\Delta \mathbf{P} \neq 0$$

$$\Delta \mathbf{L} = 0 \text{ se scelgo O come polo}$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{j}$$

Momento della forza esterna
vincolante = 0



$$L_{piva} = \vec{r}_{cm} \times m_p \vec{v}_p = I_z \vec{\omega} \quad \text{riferito ad O}$$

e dove ω

Statica del corpo rigido

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R} \\ \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} \end{array} \right. \quad \text{DINAMICA}$$

NON MUOTA
NON SI MUOVE
6 equas. scalari (x, y, z)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} = 0 \\ \mathbf{M} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mathbf{P} = \text{Costante, corpo non si muove, } \mathbf{V} = 0 \\ \mathbf{L} = \text{Costante, corpo non muove} \end{array}$$

IL CORPO RIMANE IN QUIETE
SE È IN QUIETE

Esempio

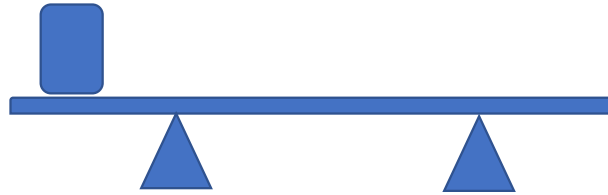


Devo imporre

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} = 0 \\ \mathbf{M} = 0 \end{array} \right.$$

Esempio

distanza a cui posso levarla per che



$$R = 0$$

$$M = 0$$

Esempio

Cambia a un' b forza ~~del~~ peso

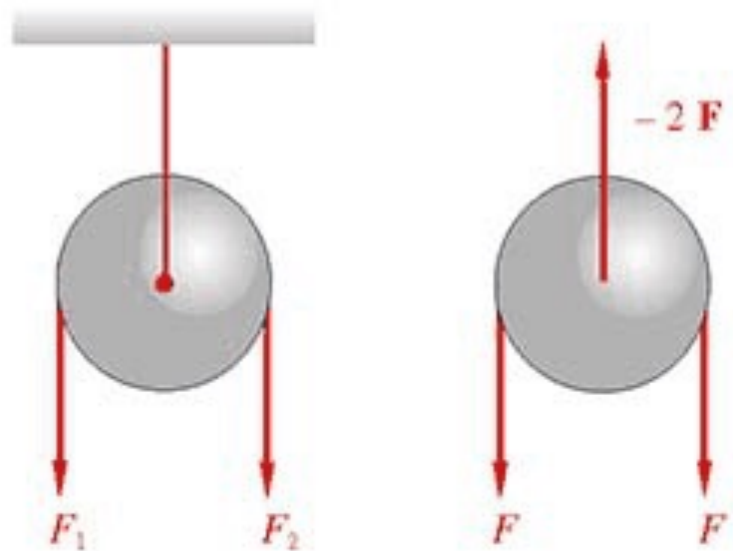


Figura 6.70

$$\mathbf{R} = 0$$

$$\mathbf{M} = 0$$

Esempio

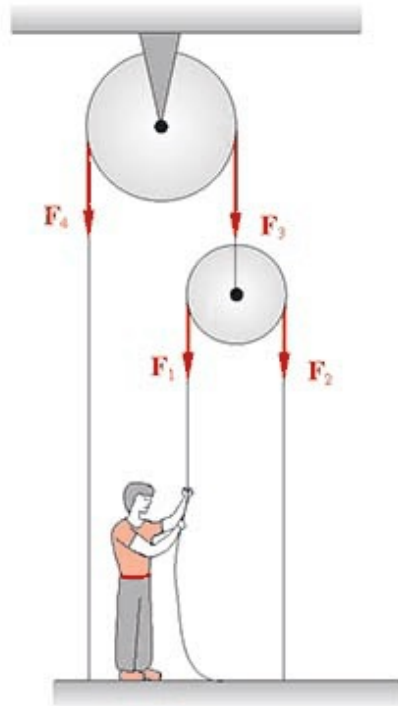


Figura 6.72 (Esempio 6.36)

$$\mathbf{R} = 0$$

$$\mathbf{M} = 0$$

$$F_1 + F_2 - F_3 = 0$$

$$F_1 = F_2$$

$$F_3 + F_4 - F_5 = 0$$

$$F_3 = F_4$$

$$P_1 + P_2 - F_4 - F_2 = 0$$

5 equazioni nelle incognite $F_1, F_2, \dots, F_5$

Esempio

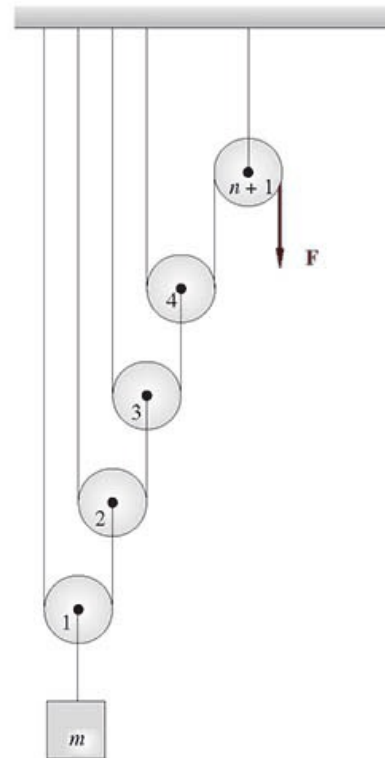


Figura 6.71 (Esempio 6.35)

$$R = 0$$

$$M = 0$$

Esempio: il paranco differenziale

