

Corso di FISICA 1



Capitolo 10 – Meccanica dei fluidi

Monica Malvezzi, Università degli
Studi di Siena



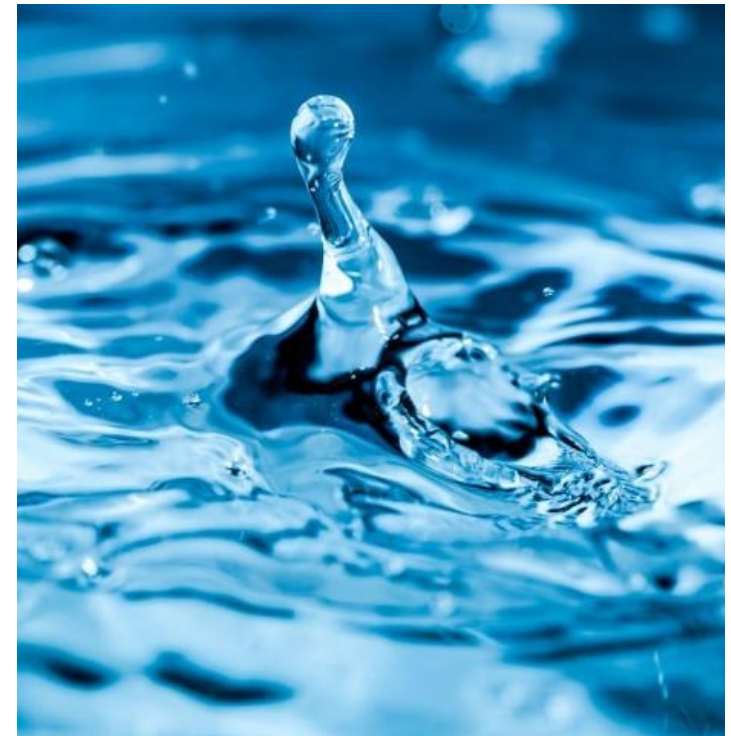
Stati della materia *fasi fisiche*

- Solido
- Liquido
- Gas

Nello studio della fisica si utilizzano in prima approssimazione modelli matematici semplificati, ad esempio:

• Solido → possiamo approssimarlo come corpo rigido se le forze a cui è sottoposto sono limitate e le corrispondenti deformazioni trascurabili rispetto al moto del sistema

• Gas → gas perfetto (vedi parte di termodinamica) *comprimibile
vale la formula*
In questo capitolo vedremo alcune relazioni fondamentali e $pV = nRT$
alcuni risultati significativi per i liquidi.



Liquidi – ipotesi di base

- Incomprimibile: ^{fluido} il ^{V costante} volume occupato da una certa quantità di liquido non varia.
- Non viscoso: strati adiacenti di liquido non esercitano tra loro forze di tipo tangenziale. *non c'è attrito tra strati di liquido*
↳ Forze di attrazione solo perpendicolari alla superficie

Anche per i liquidi è possibile definire la densità di volume

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

$$dm = \rho dV$$



Forze $\rightarrow dV$ per determinare acceler.

- Isoliamo un elemento di liquido di forma cubica e volume infinitesimo, dV . Per esso valgono le leggi della dinamica e in particolare il secondo principio:

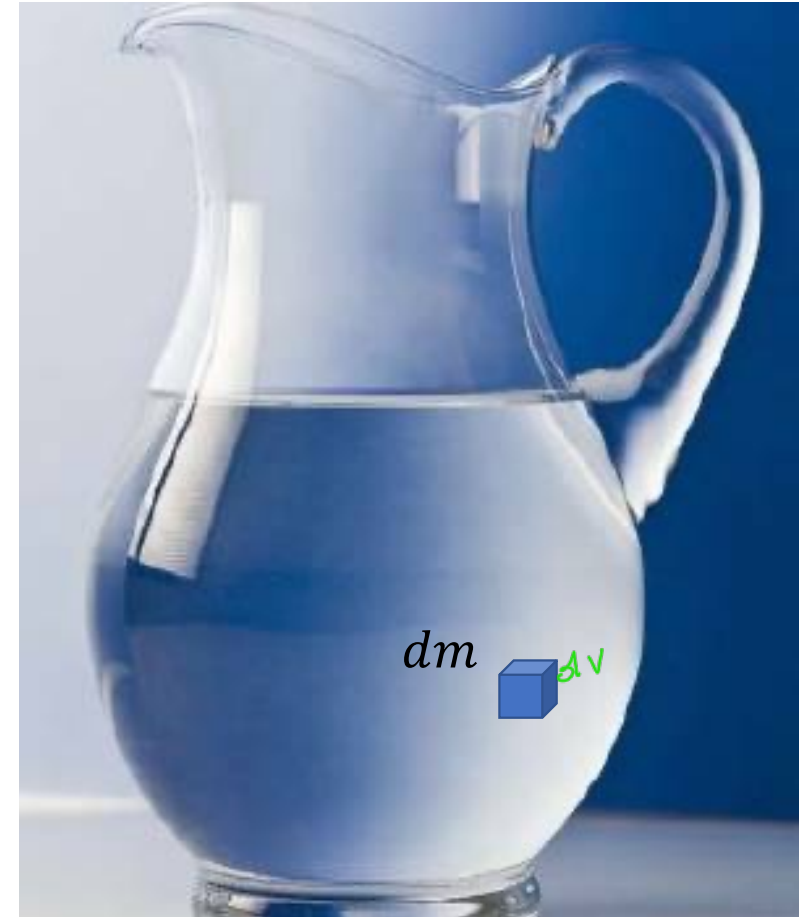
$$dm \mathbf{a} = d\mathbf{F}$$

vale 2° principio
di volume

Con la definizione di densità di volume possiamo scrivere la massa come $dm = \rho dV$

$$\rho dV \mathbf{a} = d\mathbf{F}$$

$\rightarrow F$ dipende dal
volume



Forze

$$F_v = \frac{F_v}{m} \quad \text{forza specifica}$$

Sull'elemento dv agiscono due tipi di forze:

- Forze di volume: sono proporzionali al volume dell'elemento e in genere alla densità *proporz. alla massa*

$$dF_v = \rho f_v dv$$

forze che dipendono dal volume

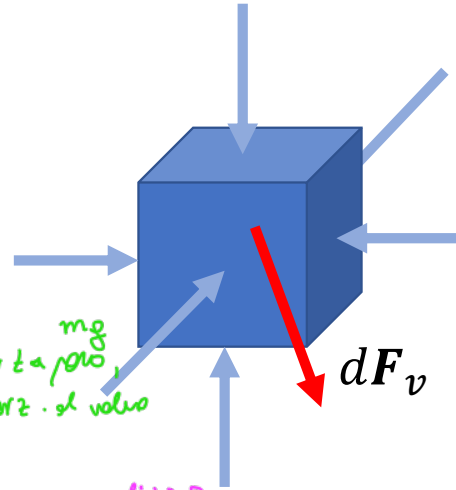
es. forza peso, proporz. al volume

f_v è una quantità vettoriale che esprime la forza per unità di massa agente sull'elemento infinitesimo

Forza normalizzata per la massa, Forza specifica

- Forze di superficie dF_s : in condizioni stazionarie sono perpendicolari alla superficie, in condizioni dinamiche possono essere normali e tangenziali, quelle tangenziali dipendono dalla viscosità del fluido.

es. attrito sulla superficie vincente, opposto sulla sup. del volume



F_s Condizioni statiche: normali alla sup (pressione)
dinamiche: tangenziali (viscosità) e Tangenziali (attrito viscosità)

pressione

Pressione

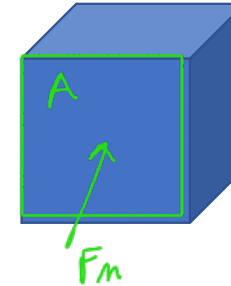
Forza di superficie, spinge su ogni
volume interno

Si definisce pressione del fluido lo scalare p tale che

$$dF_s = p dS$$

$$p = \frac{dF_s}{dS}$$

$$\left[\frac{N}{m^2} \right] = [Pa]$$



Unità di misura più utilizzata

- Pascal 1 Pa = 1 N/m² si
- Bar 1 Bar = 10⁵ Pa 100 000 Pascal
- atmosfera 1 atm = 101325 Pa = 1.01325 Bar
~ 1 bar

Unità
misura

Un semplice esempio di manometro

Un manometro è uno strumento per misurare la pressione in un fluido. Un semplice manometro può essere costituito da un disco di superficie S che scorre entro un cilindro, tra la superficie del corpo e il cilindro supponiamo che l'attrito sia trascurabile.

- Nel cilindro è inserita una molla con costante elastica k .

Il cilindro e il disco sono immersi nel fluido. Per effetto della pressione sulla faccia del cilindro agisce una forza che in modulo è pari a

$$F_s = pS$$

Che in condizioni di equilibrio è bilanciata dalla forza elastica della molla *che si oppone al movimento*

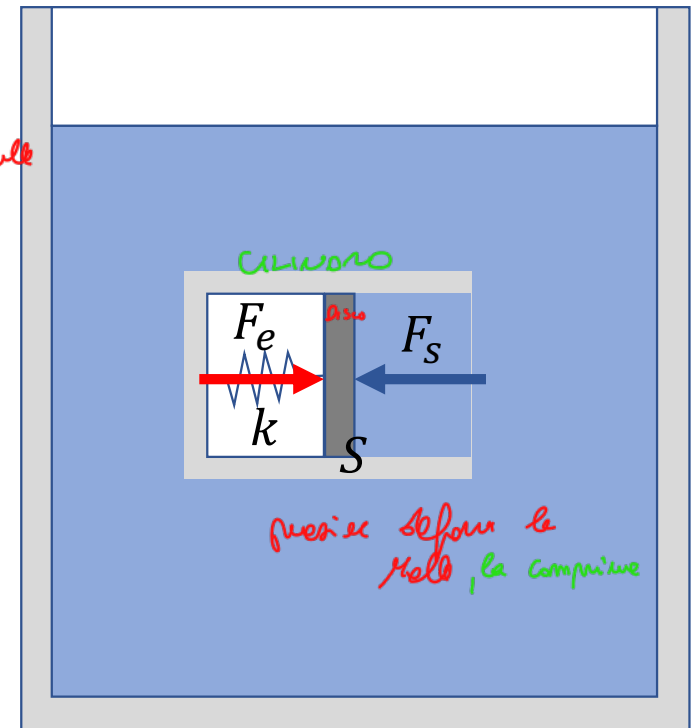
$$F_e = kx$$

Misurando la deformazione x della molla con un sensore di posizione, possiamo stimare la pressione nel fluido come:

$$p = \frac{k}{S} x$$

$F_{sup.}$ sono pressioni

fluido esercita una pressione sulla sup. S



pressione deflora la molla, la comprime

Forza pressione bilanciata dalla Elastica della molla

$$F_e = kx = F_s = pS$$

$$p = \frac{kx}{S}$$

Pressione: scalare o vettore?

Scalare, e' indep. della dir.
Fluido in movimento, statico, $\rho_{real} = \rho$

Analizziamo un elemento infinitesimo di forma cilindrica, con una faccia perpendicolare all'asse x , individuato dal versore $\mathbf{i}$ (a sinistra) e una inclinata (a destra), indichiamo con $\mathbf{n}$ il versore ad essa perpendicolare. Il versore $\mathbf{n}$ forma un angolo α con l'asse x .

- Indicando con dS l'area della superficie a destra, l'area della sezione a sinistra sarà pari a

$$dS_x = dS \cos \alpha$$

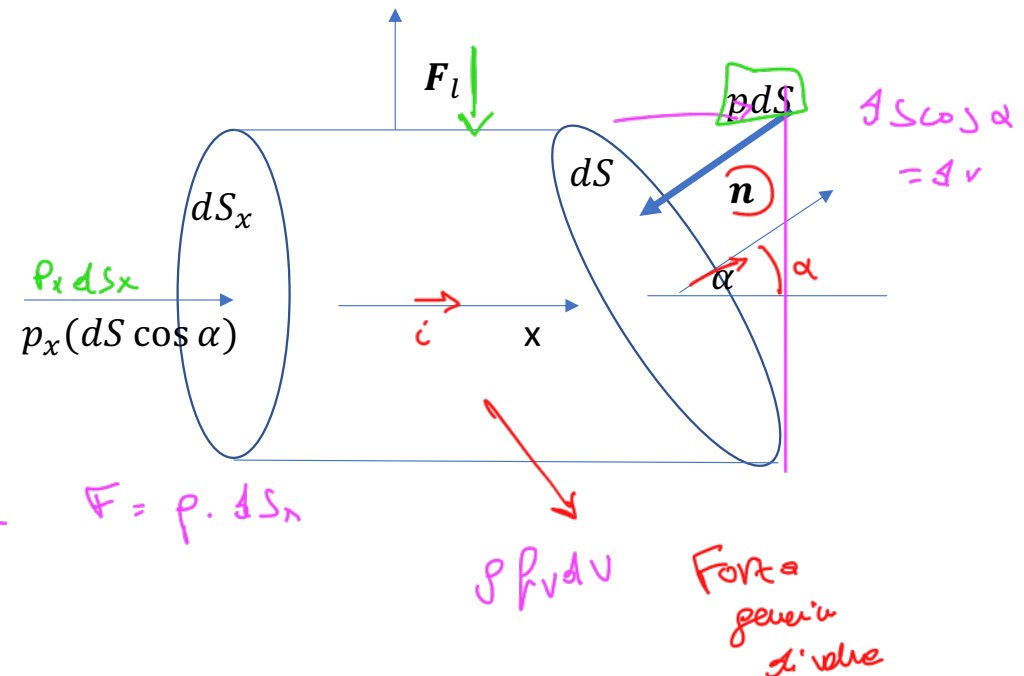
Sull'elemento agiranno le forze di superficie:

- $\mathbf{i} p_x dS_x$ sulla superficie di sinistra
- $-\mathbf{n} p dS$ sulla superficie di destra
- $\mathbf{F}_l$ sulla superficie laterale

Sull'elemento agisce anche la forza di volume $\rho \mathbf{f}_v dV$.

o F_{peso}

$$\int_V \rho dV = \Delta F_v$$



Pressione: scalare o vettore?

In condizioni statiche, la risultante delle forze agenti sull'elemento sarà nulla:

$$-npdS + ip_x(dS \cos \alpha) + \mathbf{F}_l + \rho \mathbf{f}_v dV = 0$$

Proiettando in direzione x

$$-pdS \cos \alpha + p_x dS \cos \alpha + \rho f_{vx} dV = 0$$

Il volume dV può essere approssimato come:

$$dV \cong dx dS$$

Semplificando, si ottiene

$$-p + p_x + (\rho f_{vx} / \cos \alpha) dx = 0$$

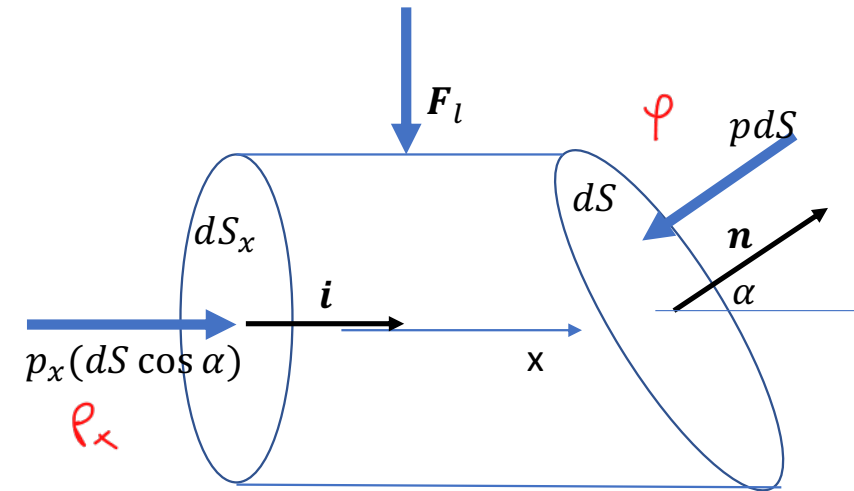
Se $dx \rightarrow 0$, il termine $\rho f_{vx} / \cos \alpha dx$ diventa trascurabile rispetto agli altri due, quindi possiamo semplificare ancora:

$$-p + p_x = 0$$

Ottenendo infine:

$$p = p_x$$

La pressione non dipende quindi dall'inclinazione della superficie, per cui possiamo rappresentarla come uno scalare.



Pressione = scalare,
non dipende dall'inclinazione
della surf.,
e non sempre non mobile
alla dep.

$$\vec{a} = 0$$

Statica nei comp. $\vec{K} = \frac{d\vec{C}}{dt} = 0$ $L \cos t$
 $R = \frac{dp}{dt} = 0$ $P \cos t.$

Statica dei fluidi $\Rightarrow$ Legge di STEVINO DIFF.

- Consideriamo un cilindro di dimensioni infinitesime con asse parallelo all'asse x , con superficie di base dS e lunghezza dx . Per il secondo principio della dinamica risulta

$$\rho dV \vec{a} = d\vec{F}$$

$$\rho dV \vec{a} = d\vec{F}$$

$$\vec{a} = 0$$

$$d\vec{F} = dm \vec{a}$$

$d\vec{F}$ è la risultante delle forze agenti sull'elemento. Analizziamo le condizioni statiche, $\vec{a} = 0$ e prendiamo le componenti delle forze nella direzione x :

$$dF = p(x, y, z)dS - p(x + dx, y, z)dS + \rho f_x dV = 0$$

no acceler.
no $dm g$

Sviluppando i calcoli otteniamo

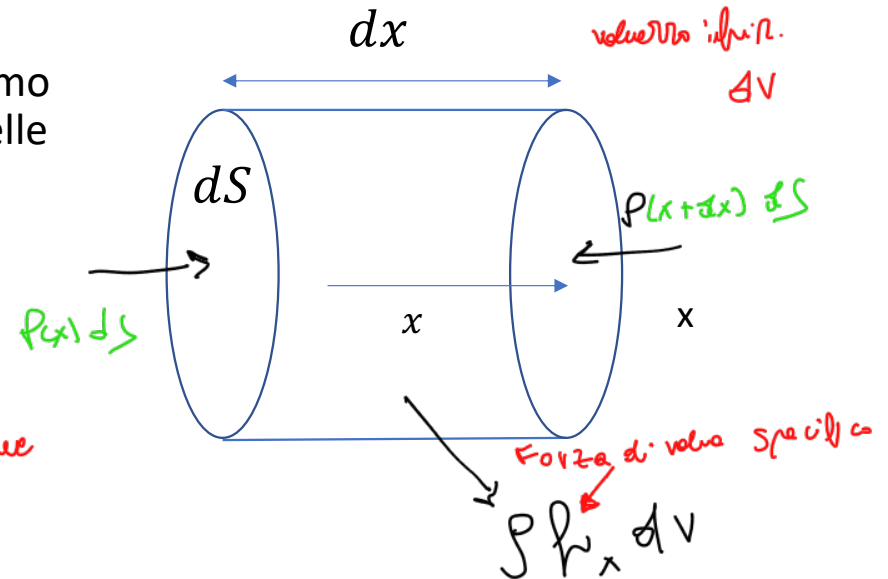
$$p(x + dx, y, z) - p(x, y, z) = \rho f_x dx$$

$$p(x + dx, y, z) - p(x, y, z) = dp \text{ diff. di pressione}$$

$$dp = \rho f_x dx$$

Che possiamo scrivere, infine, come:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x$$



Statica dei fluidi

- Applicando la seconda legge di Newton, in condizioni statiche, a un elemento di fluido infinitesimo cilindrico orientato come l'asse x abbiamo ottenuto: *2° principio della dinamica*
 $\vec{a}=0$ *cilindro orientato come x*

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x \rightarrow \text{componente lungo x delle forze di volume}$$

In modo analogo, se consideriamo un elemento orientato lungo l'asse y, otterremo

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y$$

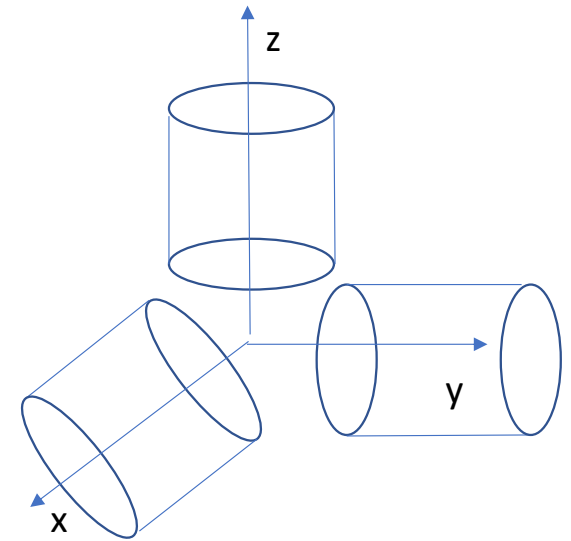
E infine, lungo l'asse z, otterremo

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z$$

Possiamo scrivere le tre equazioni precedenti in modo più sintetico, come:

$$\overset{R^3}{grad}(p) = \rho \overset{\rightarrow R^3}{f_v}$$

*eq. diff. de mi. dens. la veloc. di movimento
in base alle forze di volume e la densità*



$$\nabla p(x,y,z) = \rho \vec{f}_v$$

$$\vec{f}_v = (f_x, f_y, f_z)$$

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

Richiami sulle forze conservative e sulla definizione di energia potenziale

Lavoro non dip. dal percorso ma solo da stato iniziale e finale

Forza conservativa e' una forza per cui puo' definirsi una energia potenziale

Esempio: P.t. di prob. T.: il lavoro fatto da due punti di una F conservativa dipende solo dalla variaz. dell'energia potenziale

Abbiamo visto che se una forza è conservativa è possibile definire una funzione energia potenziale, che dipende dalla posizione x, y, z

$$E_P(x, y, z)$$

$$E_P(\vec{r})$$

Tale che è possibile scrivere il lavoro della forza nel percorso dal punto A al punto B come:

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\Delta E_{P,AB} = -(E_P(x_B, y_B, z_B) - E_P(x_A, y_A, z_A))$$

$\Delta E_{P,AB}$ (mod. scalare)
 $dW_x = F_x \cdot dx$
 $F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x}$

Se consideriamo uno spostamento infinitesimo in direzione x , dx , il lavoro infinitesimo è:

$$dW_x = \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} dx = -(E_P(x + dx, y, z) - E_P(x, y, z))$$

Da cui possiamo scrivere:

il prodotto scalare = derivazione

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{i} = F_x = -\frac{E_P(x + dx, y, z) - E_P(x, y, z)}{dx} = -\frac{\partial E_P}{\partial x}$$

def. di derivata parziale rispetto a x

- Richiami sulle forze conservative e sulla definizione di energia potenziale

Data la funzione energia potenziale

$$E_P(x, y, z)$$

In ogni punto possiamo calcolare le componenti della forza tramite le sue derivate nelle rispettive direzioni:

$$F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial E_P}{\partial z}$$

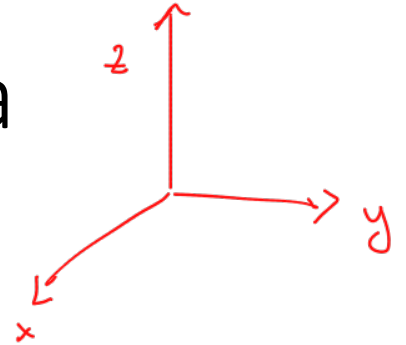
$\frac{\partial E_P}{\partial x} = F_x$ ↓ componente della forza lungo un dir.

se ho la Funz. energie
potenziale, in ogni punto
posso calcolare le
componenti di una
FORZA CONSERVATIVA tramite
le DERIVATE PARZIALI

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\Delta E_P$$

$$-\frac{\partial E_P}{\partial x} = F_x$$

• Richiami sulle forze conservative e sulla definizione di energia potenziale



Ad esempio, per la forza peso, ^{conservativa} supponendo di prendere un sistema di riferimento con asse z verticale, abbiamo visto che:

$$• E_P(x, y, z) = mgz \quad]$$

Le componenti cartesiane della forza sono quindi:

$$F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x} = 0$$

$$F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y} = 0$$

$$F_z = -\frac{\partial E_P}{\partial z} = -mg$$

da e.p. se indico lo
il lavoro, se sono in
la forza risulta
a una div.

Capacità forza peso
sull'asse z

Richiami sulle forze conservative e sulla definizione di energia potenziale

Ad esempio, per la forza elastica, supponendo che la molla sia diretta come l'asse x:

$$E_P(x, y, z) = \frac{1}{2} kx^2$$

energ. pot.
della forza
elastica

Le componenti cartesiane della forza sono quindi:

$$F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x} = -kx \quad \text{si trova}$$

$$F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y} = 0$$

$$F_z = -\frac{\partial E_P}{\partial z} = 0$$



dalla statica, 2° principio di equilibrio
($\vec{a}=0$)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho f_{vz}$$

$$-\frac{\partial E}{\partial z} = F_z$$

Torniamo alla statica dei fluidi

dal 2° principio, in d.x $F = \rho g dV \vec{a} = 0 \Rightarrow \rho g (x, y, z) - \rho g (x+d1, y, z) + \rho F_z dx \frac{1}{\rho}$

Abbiamo verificato in precedenza che la $\frac{dp}{dx} = \rho F_x$ variazione della pressione nel fluido è data da:

$$\text{grad}(p) = \rho \vec{f}_V \quad \nabla p = \rho \vec{f}_V$$

Se la forza di volume è conservativa, possiamo definire una funzione energia potenziale

$$E_P(x, y, z)$$

Tale che:

$$\rho f_{vx} = -\frac{\partial E_P}{\partial x}$$

$$\rho f_{vy} = -\frac{\partial E_P}{\partial y}$$

$$\rho f_{vz} = -\frac{\partial E_P}{\partial z}$$

Componente x della forza

$$\nabla p_{statica}(x, y, z) = -\nabla E_P$$

La pressione lungo un
asse varia come
varia l'energia
potenziale lungo
quell'asse

Dunque, in condizione statica
abbiamo verificato che

Sostituendo nell'espressione trovata in precedenza, otteniamo:

$$\text{grad}(p) = -\text{grad}(E_P)$$

Che possiamo scrivere, in componenti cartesiane, come:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial E_P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial E_P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial E_P}{\partial z}$$

$$dp = -dE_P$$

Quasi
potenziale
della forza
di volume
conservativa

IN CONDIZ. STATICHE

$$\nabla p = -\nabla E_p$$

↓ TUTTO ciò per arrivare a d'n dp,
 se non varia l'energia potenziale d'una porta a volume
 che apre su un fluido, allora non cambia la
 pressione

Legge di Pascal

SUP. EQUIPOT. una SUP. T.C. $dE_p = 0$
 sup. lungo quale non varia l'energia potenziale $\Rightarrow dp = -dE_p$

Si definisce una superficie equipotenziale una superficie per la quale l'energia potenziale risulta costante, quindi:

non
 varia E_p

$$dE_p = 0$$

è costante, non $\Rightarrow dp = 0$
 JANA

Sulle superfici equipotenziale risulta:

$$dE_p = 0 \rightarrow dp = 0$$

$\vec{Q} = 0$

- Per un fluido in equilibrio la pressione è costante su ogni superficie equipotenziale (legge di Pascal).

pressione costante lungo una sup.
 equipotenziale

IN CONDIZ. STATICHE (FLUIDO EQUILIBRIO)

la pressione è costante su ogni sup. EQUIPOT.

(forza di volume)

Se il fluido è soggetto alla forza peso, sappiamo che $E_p = E_p(z)$ quindi le
 superfici equipotenziale sono definite come $z = z_{cost}$ e di conseguenza $p =$
 $p(z)$

pressione è
 una funz di z

Se il fluido è soggetto alla forza peso $\Rightarrow$ l'energia pot $E_p = mgz$

$\Rightarrow$ Sup. equipotenziale è una sup. che non varia in z

$\Rightarrow$ pressione non varia se non varia z
 mentre varia solo con z

Legge di Pascal : la pressione è costante lungo per. sup. equipotenziali
 e si ha $\nabla p(x,y,z) = -\nabla E_p(x,y,z)$ $\frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{\partial E_p}{\partial y} = 0$

Se il fluido è soggetto alla forza peso, assumendo un sistema di riferimento con asse z verticale, sappiamo che

$$E_p = E_p(z)$$

quindi le superfici equipotenziali sono definite come

$$z = z_{cost}$$

e di conseguenza

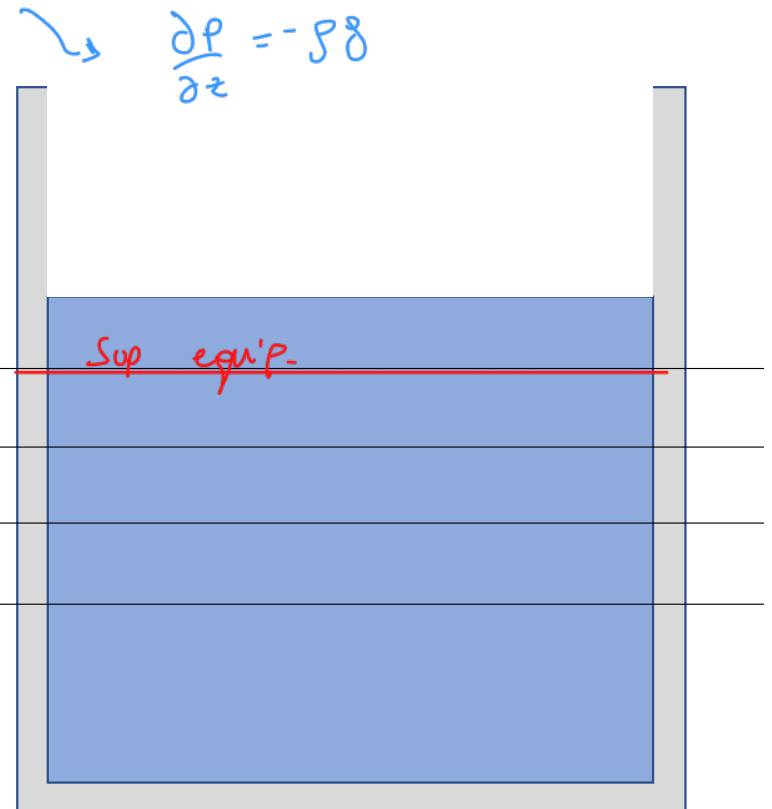
poiché $\nabla p = -\nabla E_p$

$$p = p(z)$$

La pressione in un liquido in condizioni statiche dipende solo dalla coordinata z.

di un liquido ag-
 della Forza per

le cui risult. delle
 Forze = 0



Consideriamo ancora la forza peso

Come possiamo definire l'energia potenziale e la forza di volume della forza peso in un liquido? Abbiamo definito in precedenza, per un elemento infinitesimo, la forza di volume come:

$$F_v = \rho f$$

$$dF_v = \rho f_v dV \rightarrow \rho f = g \quad \text{Forza per specificità}$$

mg è la forza peso

ρg = $\rho \cdot g$ = $\rho \cdot \text{accel. in. per volume}$

Con questa definizione, risulta

$$\rho f_v = \rho g$$

Forza vol. = $\rho \cdot g$
spec

è una forza spec. per un'unità di volume

$$\frac{dm}{dV} \rho f_v dV =$$

Possiamo definire l'energia potenziale come:

$$E_p = \rho g z \quad \checkmark$$

$$F_p = m \vec{g}$$

$$\rho dV \vec{g} = \rho f_v dV$$

invece di mgz

Da cui ritroviamo, infatti:

$$0 = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$

$$0 = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$$

$$-\rho g = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = -\rho g$$

ha definito una eq. pot per un $\nabla p = -\nabla E_p$

Consideriamo la forza peso

In questo caso risulta

$$\left\{ \frac{dp}{dz} = -\rho g \right.$$

Che possiamo riscrivere come:

$$dp = -\rho g dz$$

LEGGE DI
STEVINO DIFF

Questo risultato è noto come legge di Stevino.

vale ovunque
se ρ è variabile

Se supponiamo che la densità del fluido sia costante: allora posso integrare

$$\Delta p = -\rho g \Delta z$$

$$\Rightarrow p_1 = p_0 - \rho g h$$

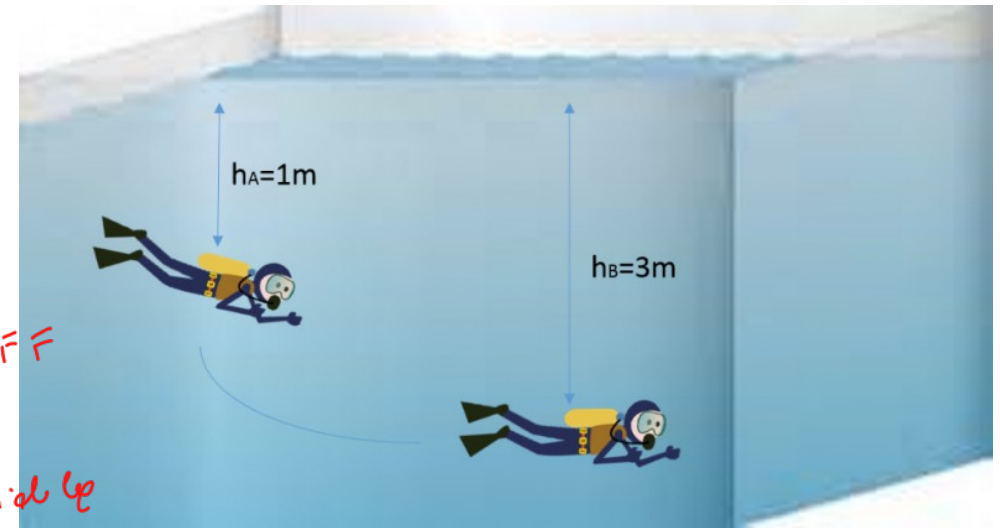
↑
altezza

$$p_1 = p_0 - \int_{z_0}^{z_1} \rho g dz$$

→ Se non costante

- 1) $\nabla p = \rho \vec{f}$
- 2) $-\nabla E_p = \vec{F}$
- 3) $\nabla p = -\nabla E_p$
↳ Pascal, Sup. eq.
- 4) $Ra \vec{F}_p, E_p = \rho g z$
- 5) STEVINO

LEGGE STEVINO



$$-\nabla E_p = \vec{F}_p$$

$$E_p = \rho g z$$

$$-\nabla E_p = (0, 0, -\rho g) = -\vec{F}_p$$

= $\Delta p = \rho g h$ se con h intendiamo la profondità

Consideriamo la forza peso

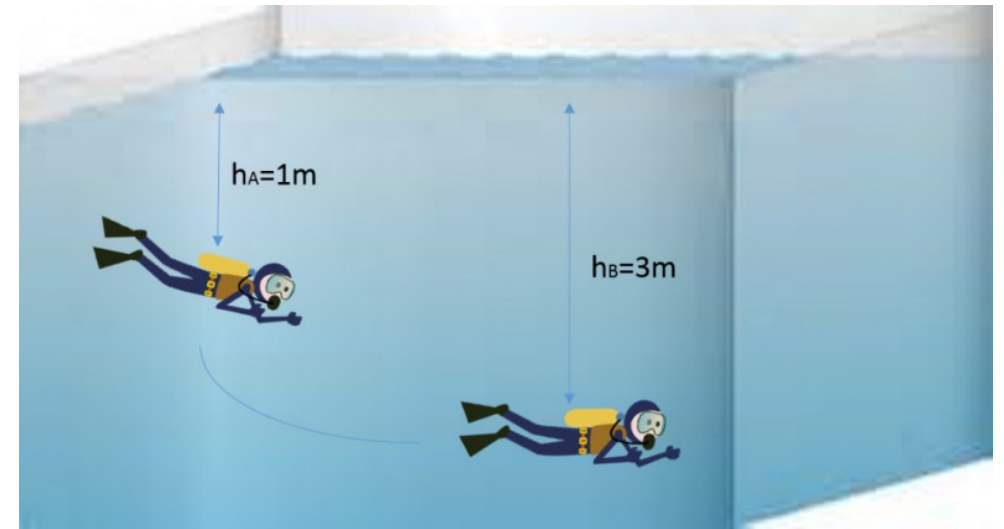
Come varia la pressione in acqua
all'aumentare della profondità?

Indicando con p_0 la pressione
atmosferica e con h la profondità la
relazione può essere riscritta come

$$p = p_0 + \rho g h$$

meno
a h

profondità nell'acqua



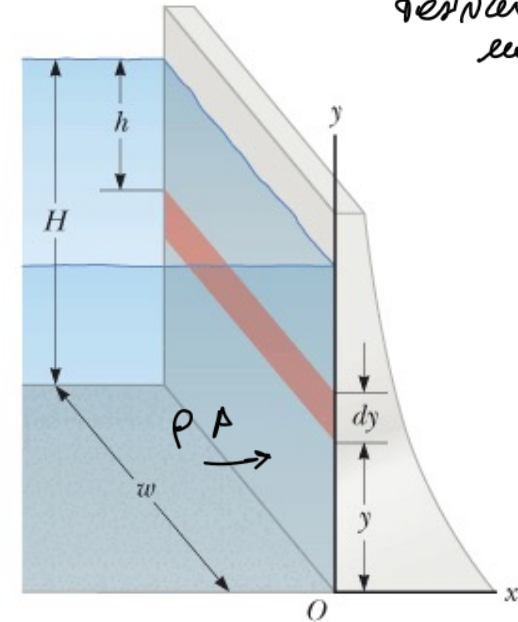
più peso in profondità e maggiore
forza di risalita

Consideriamo la forza peso

Indicando con p_0 la pressione atmosferica e con h la profondità la relazione può essere riscritta come

$$p = p_0 + \rho gh$$

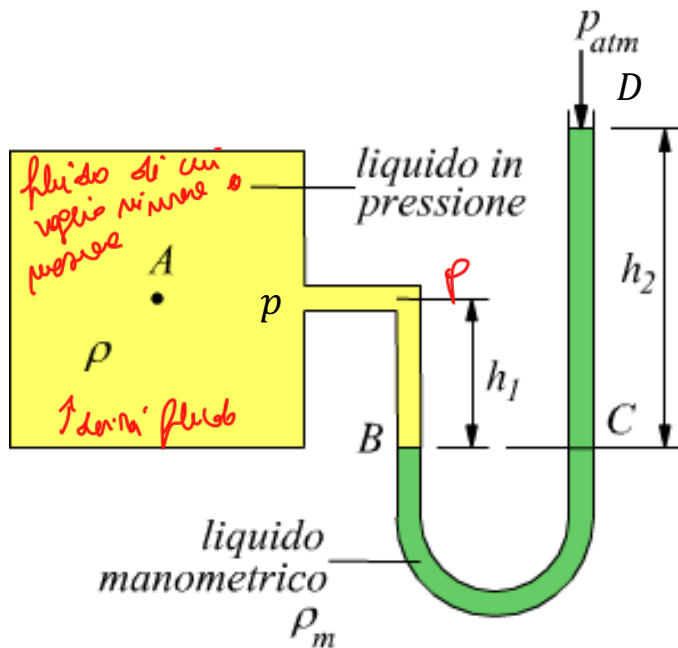
esempio. 'mura d'iga 'il muro
e' più speso non non
che scende a quota più
fermata alle
equipe meno



Principio di Stevino

Esempio: Manometro a U

Un manometro a U è uno strumento per la misura della pressione in un fluido. È costituito da un tubo a forma di U riempito di un liquido (liquido manometrico) con densità ρ_m . Uno dei due lati del tubo è aperto in aria, l'altro è collegato al sistema di cui vogliamo misurare la pressione.



USO STEVINO

Il liquido manometrico ha quota B sul lato in comunicazione con il serbatoio e quota D nel lato libero.

Osservando la figura, dato che *B* e *C* sono alla stessa quota, risulta:

$$p_B = p_C$$

Per la legge di Stevino, risulta:

$$\begin{cases} p_B = p + \rho g h_1 \\ p_C = p_{atm} + \rho_m g h_2 \end{cases}$$

nel primo liquido

$$p_C = p_B$$

Sostituendo otteniamo:

$$p + \rho g h_1 = p_{atm} + \rho_m g h_2$$

Da cui otteniamo:

$$p - p_{atm} = \rho_m g h_2 - \rho g h_1$$

Misurando le altezze h_2 e h_1 del liquido manometrico e conoscendo la densità del fluido possiamo determinare la pressione nel serbatoio *p*. su fluido

pressione relativa alla pressione atmosferica

Esempio: Barometro a mercurio

Primo modo per misurare la
pressione

Consideriamo il sistema riportato in figura, costituito da un
recipiente riempito di mercurio e da un tubo chiuso ad una
estremità. Il tubo chiuso viene riempito di mercurio e quindi
rovesciato nel recipiente, il mercurio scende fino a raggiungere
l'altezza h . *risale all'unico punto*

Possiamo supporre che nella parte vuotata del tubo non sia
presente aria e che la pressione sia nulla. Applicando la legge di
Stevino tra il livello del recipiente e quello del tubo otteniamo:

STEVINO al
tubo

Assumendo:

$$\Delta p = -\Delta E p$$

- $p_{atm} - p_0 = \rho_m g h$

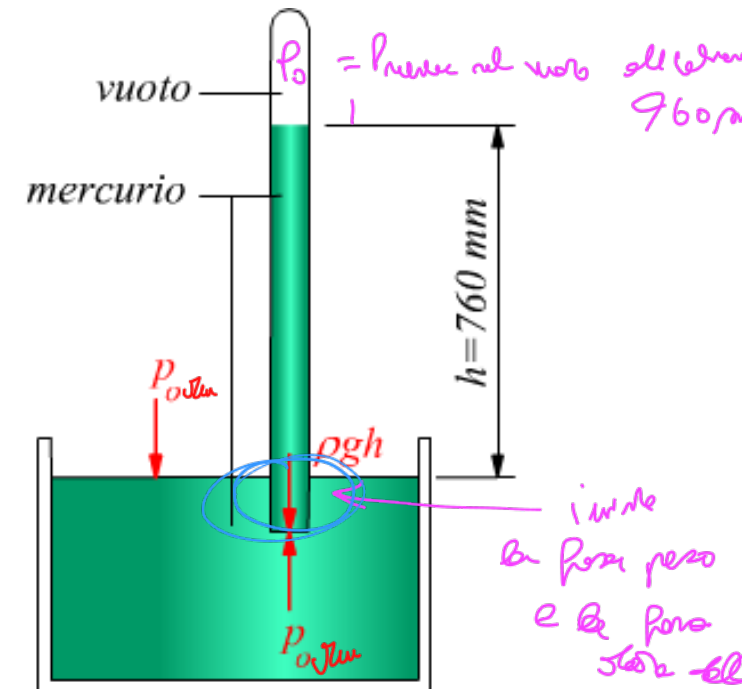
↳ pressione nel vuoto
- $p_0 \approx 0$
- $\rho_m = 13600 \text{ kg/m}^3$

densità del mercurio
- $h = 760 \text{ mm} = 0.76 \text{ m}$
- $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

Otteniamo:

$$p_{atm} = 1.014 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

1,01 bar



i due
la forza peso
e la forza
statica - la
pressione e
la
bilanciando
la colonna
sopra il tubo

Legge di Archimede

'impeto delle parti' sulle sup. ma bilanciato dalle forze peso

- Consideriamo una porzione di volume V e superficie S arbitrari all'interno di un liquido in condizioni statiche. *Sup. piena*

In queste condizioni, le forze di superficie e di volume devono equilibrarsi

comolit statiche, $\vec{F} = \vec{S} \nabla p = -\nabla E_p$ *gradiente*
 $= -\rho_l g dV$

$$\int_S p ds + \int_V \rho_l g dV = 0$$

$p = \frac{F_m}{dS}$

$p = \frac{dF}{dS}$

$F = \int_S p ds$

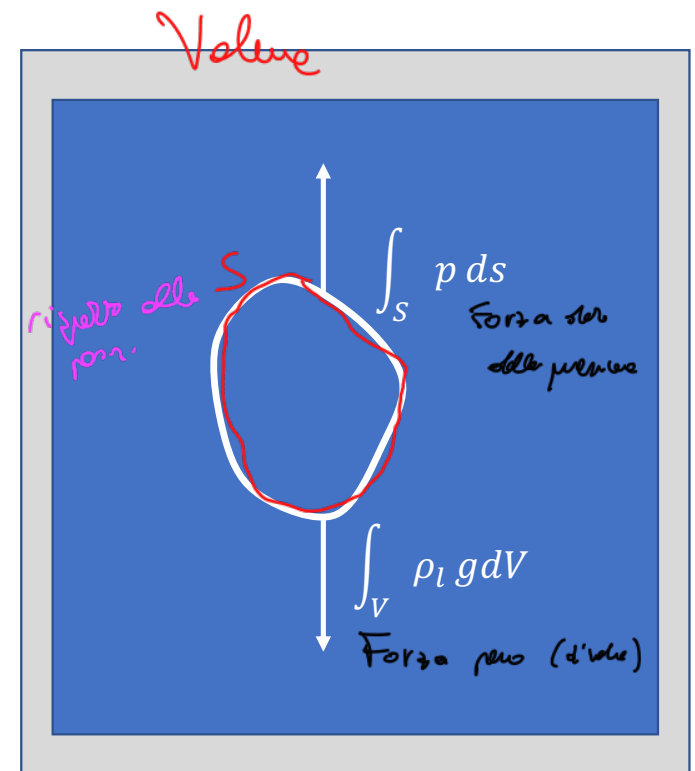
$\rightarrow F \text{ volume}$

$d\vec{F}_V = \vec{f}_V dV = \vec{P}_V dm$
 $= \vec{P}_V \rho dV$

$\rho = \frac{dm}{dV}$

$\Rightarrow F_V = \int_V \rho_l g dV$

$\rho_l = \rho$ se *parte per specifica*



Legge di Archimede

condiz. statiche

Se elimino la forza di volume, ad esempio svuotando la superficie, sul volume rimangono comunque le forze di superficie, che per la legge di Stevino dipendono solo dalla quota.

$$\int_S p \, ds = - \int_V \rho_l g \, dV$$

Il corpo non è più in equilibrio e riceve una spinta verso l'alto pari alla forza peso della quantità di liquido che è stato eliminato.

forza in
condiz. statiche
 $\rho = 0$

in gravità...
 $p_s + mg = 0$

Se spingo il corpo in acqua
eo rimarrà sulla superficie per
bilanciare la forza peso applicata al CM

su un liquido spesso porta di

valore e no. Tutto forza volume, come lo stesso

$$\frac{dp}{dz} = \rho g$$

a ρ costante
tempo forza peso che
bilanciano, uno me
spinta (forza)
verso l'alto più
alla forza peso
che
dal liquido che
lo tocca

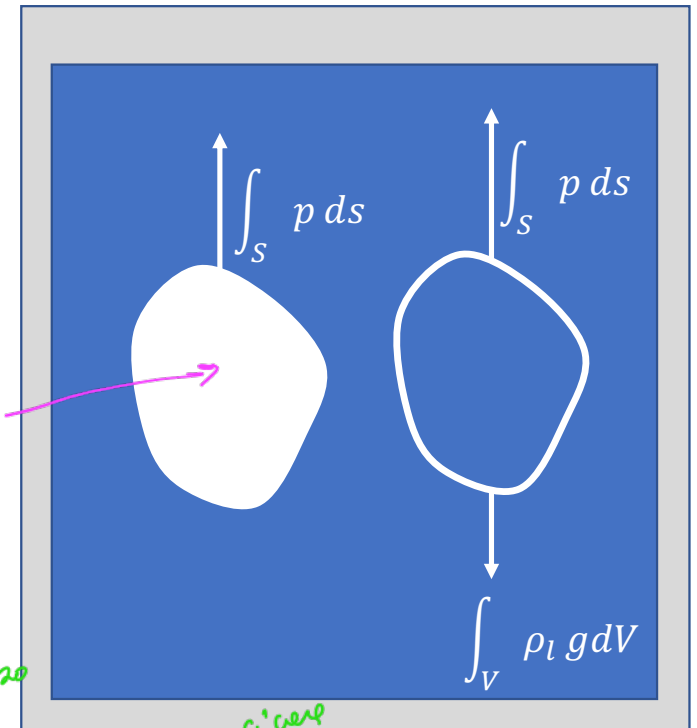
Tutto forza peso

$$p_s \neq 0 \Rightarrow$$

corpo riceve spinta

$$T.r. \quad p_s = -mg$$

$$T.r. \quad p_s + mg = 0$$



Prima che si
bilanciare il
peso del
liquido

La rimbombante delle forze devono bilanciarsi

Legge di Archimede

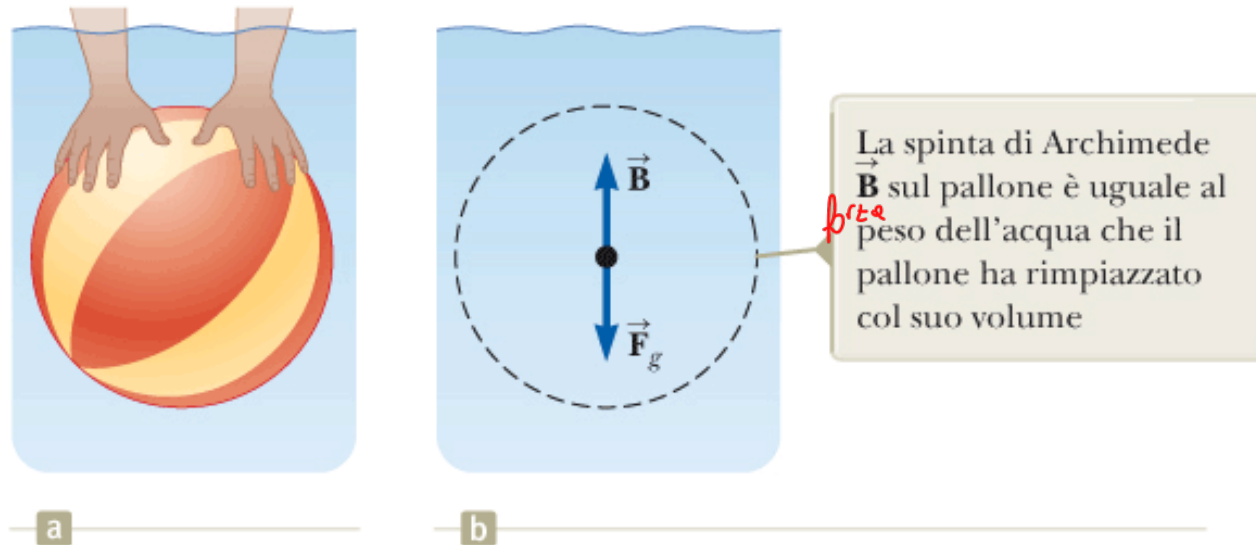


Figura 14.7 (a) Un nuotatore spinge un pallone da spiaggia sotto l'acqua. (b) Le forze sul volume di acqua pari a quello occupato dal pallone da spiaggia.

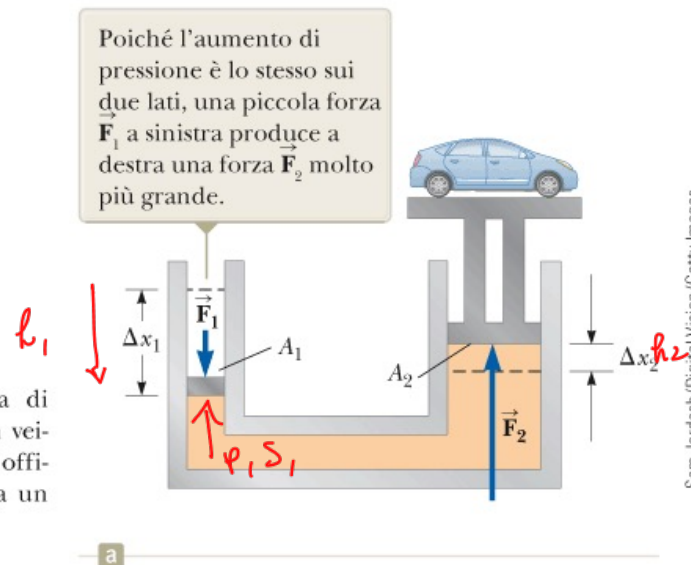
Principio: LM del corpo immerso può essere diverso dal LM del fluido spostato, non è detto che Forza peso e spinta di Archimede siano uguali o che siano pari

• L'idea: di meno, densità. Tenere conto nel calcolo della spinta di Archimede

Pressa idraulica

l'aumento di pressione si "propaga" in tutto il fluido!

Figura 14.4 (a) Schema di una pressa idraulica. (b) Un veicolo in riparazione in una officina meccanica sostenuto da un elevatore idraulico.



$$p_1 = p_2$$

$\rightarrow p_1 \neq p_2$ *uguale in modo pressione e forza più grande*

$$\Rightarrow F_1 = p_1 S_1$$

$$\Rightarrow F_2 = p_2 S_2$$

Forza che voglio sapere

$$p_2 - p_1 = \rho g (h_2 - h_1) \geq 0 \Rightarrow \text{stessa pressione.}$$

$$\Rightarrow \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1$$

$$F_2 > F_1 !$$

⇒ se voglio sapere di h_2 la pressione, devo riempirla di liquido. con i valori che

$$\underbrace{S_2 h_2}_{V_2} = \underbrace{S_1 h_1}_{V_1}$$

⇒ $h_1 = \frac{S_2}{S_1} h_2$ ⇒ se devo allora allora di più h_1 ⇒

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{F_2}{F_1}$$

in generale

Per sapere di più S_2 devo sapere di più S_1 , più ho una forza $F_2 > F_1$.

Pressa idraulica

applico

$$F_1 = p_1 S_1$$

$$F_2 = p_2 S_2$$

$$p_2 - p_1 = \rho g (h_2 - h_1) \approx 0$$

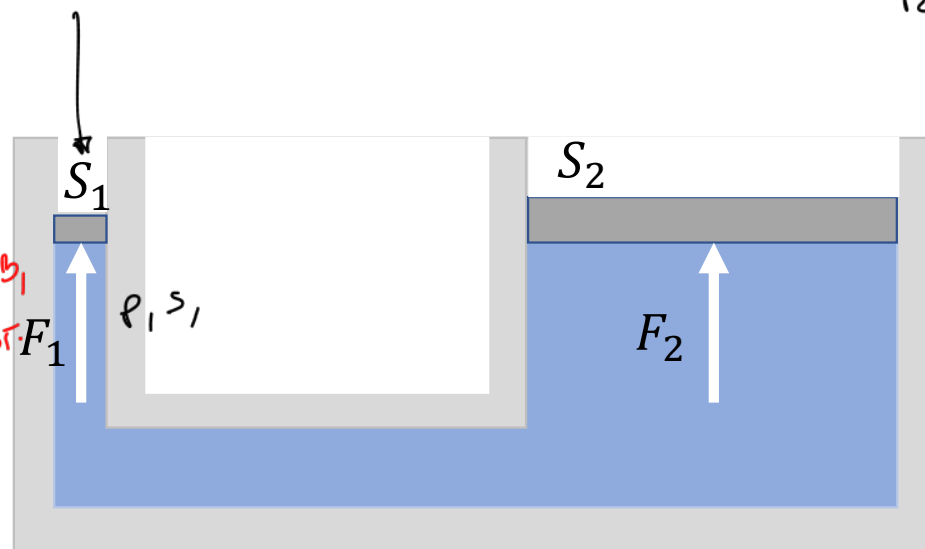
$$p_1 \approx p_2 = p$$

in entrambi i punti

se sono alla stessa altezza, la pressione è la stessa per STEVINO

IN EQUILIBIO

SENZA F. EST.



voglio sapere di h_2 ? volmi devono essere gli stessi, devo riempire il vaso a dx

$$S_1 h_1 = S_2 h_2$$

$$h_1 = \frac{S_2}{S_1} h_2$$

Paradosso idrostatico

3 recipienti, stesso livello

Consideriamo tre recipienti con forme diverse ma la stessa superficie di base e lo stesso livello di liquido. Quanto vale, nei tre casi, la forza che agisce sul fondo del recipiente? *dato della pendenza*

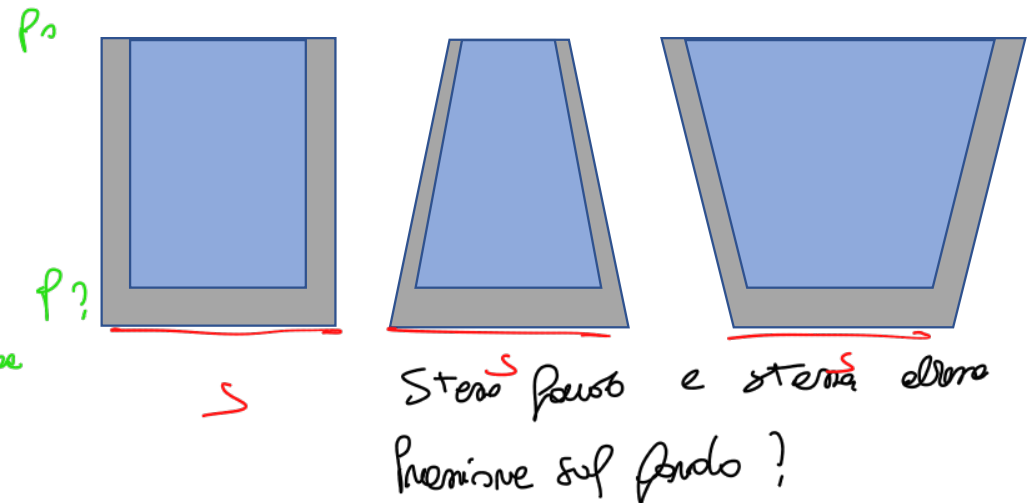
Per la legge di Stevino risulta:

- $p = p_0 + \rho g h$

Per cui in tutti e tre i casi risulta:

- $F = \rho g h$

anche se il volume di acqua è diverso, la forza sulla pancia è la stessa sulla sup, perché si sposta sull'addese



Paradosso idrostatico

Pressione e' data dal peso della colonna di liquido sopra alla sup.

due le pareti oblique, il peso del liquido e' sostenuto dalle pareti (della res. v. in col delle pareti)

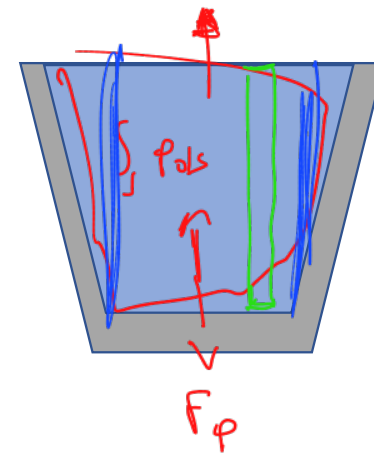
- Ma la forza peso totale è diversa, dato che i volumi dei recipienti sono diversi! Come può il sistema rimanere in equilibrio?

Sulle superfici laterali la pressione ha una componente in direzione verticale

$$dF_l = \frac{\rho g z l dz}{\cos \alpha}$$

$$dF_z = dF_l \sin \alpha$$

$$F_z = \int_0^h \rho g z l \tan \alpha dz = \rho g l h^2 \tan \alpha$$

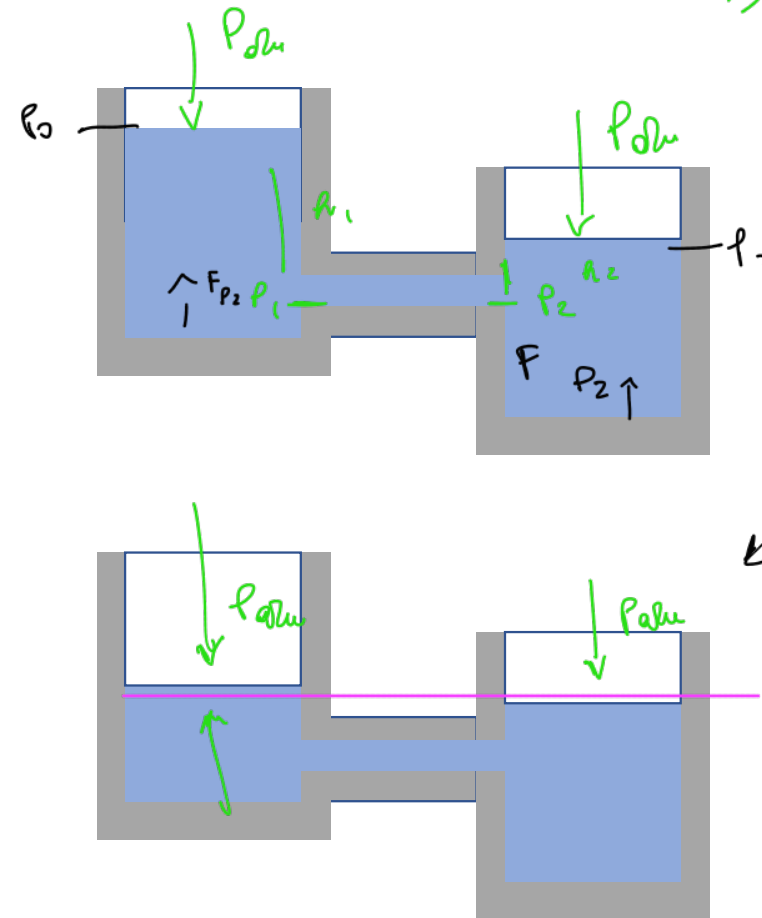
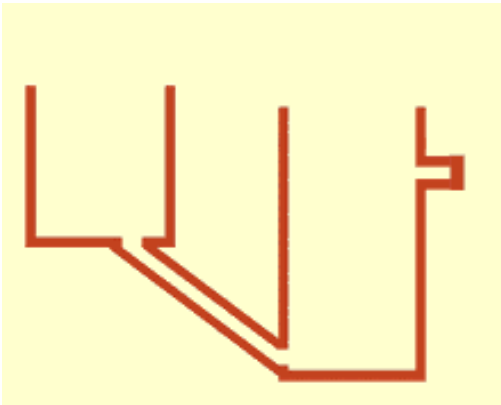


componente Pressione orizz. e verticale

res. v. in col completa sia Pressione del liquido che forza peso!

Vasi comunicanti

Il principio dei vasi comunicanti (conseguenza della legge di Stevino) è il principio fisico secondo il quale un liquido contenuto in due o più contenitori comunicanti tra loro, in presenza di gravità, raggiunge lo stesso livello originando un'unica superficie equipotenziale.



$$p_1 = p_2$$

$$p_0 + \rho g h_1 = p_0 + \rho g h_2$$

$$\Rightarrow h_1 = h_2$$

sup. equipotenziale
è una condizione
di equilibrio

Vasi comunicanti-liquidi con diversa densita`

Consideriamo due vasi comunicanti riempiti con liquidi con densità diverse. Per la legge di Stevino, al livello di p_1 risulta:

$$p_1 = p_0 + \rho_1 g h_1$$

$$p_2 = p_1 = p_0 + \rho_2 g h_2$$

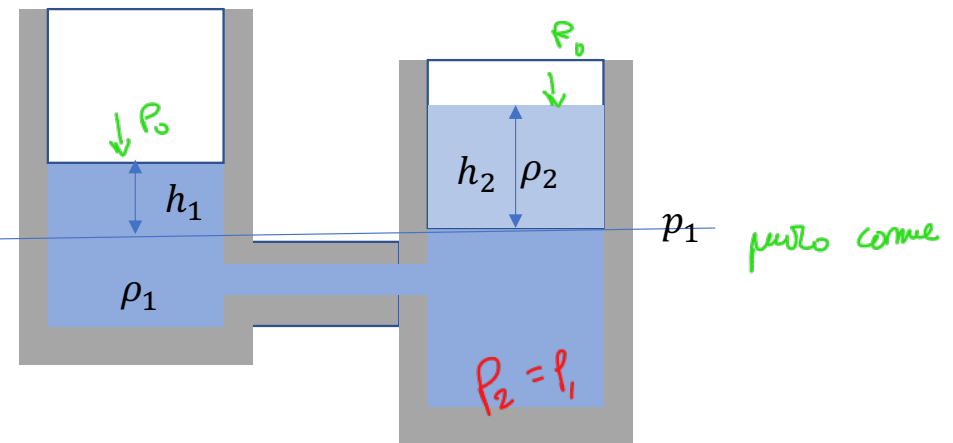
Da cui possiamo ottenere:

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}$$

$$p_0 = p_{atm}$$

all'equilibrio
 $p_1 = p_2$



presso come

reciproco delle
rapporti della

con

la col colore da cui prende
comune

Cilindro immerso in due fluidi con diversa densità

quota? Bilancio
forza F_p e spinta
Archimede

quando metto un flusto in
acqua, esso è fisso se
la spinta di Archimede (F_p del flusto
che ha occupato) = alla sua
 F_p della parte che è
nell'acqua

In condizioni di equilibrio, la forza peso del corpo è bilanciata dalla spinta di Archimede dei due fluidi:

$$\begin{cases} F_p = Sh\rho g \\ F_{A1} = Sh_1\rho_1 g \\ F_{A2} = Sh_2\rho_2 g \end{cases}$$

F_p più il peso del liquido
sotto

Otteniamo quindi

$$\cancel{Sh_1\rho_1 g} + \cancel{Sh_2\rho_2 g} = \cancel{Sh\rho g}$$

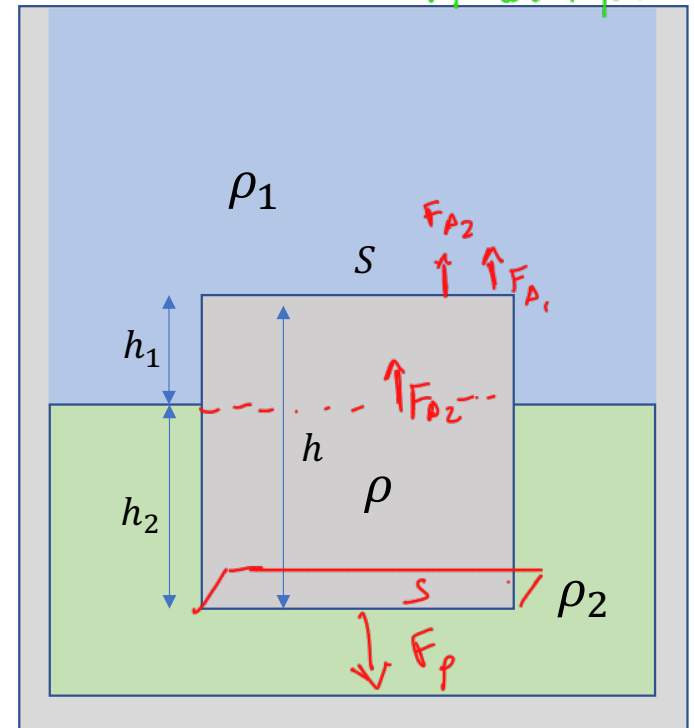
Sviluppiamo i calcoli

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1 h_1}{h} + \frac{\rho_2 h_2}{h} &= \rho \\ \frac{\rho_1(h - h_2)}{h} + \frac{\rho_2 h_2}{h} &= \rho \end{aligned}$$

$$R = h_1 + h_2$$

Il livello dell'oggetto nel fluido è tale da soddisfare la relazione:

$$\frac{h_2}{h} = \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1 - \rho_2}$$



$$= \rho_1 - \rho_1 \frac{h_2}{R} + \rho_2 \frac{h_2}{R} = \rho$$

$$\Rightarrow \frac{h_2}{R} (\rho_2 - \rho_1) = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1 - \rho_2}$$

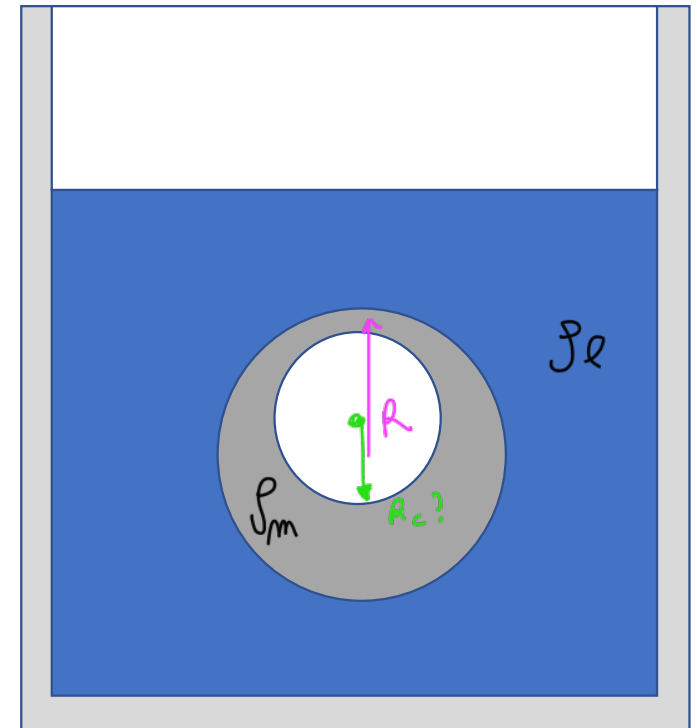
se è in
equilibrio
che

con $\rho_2 > \rho > \rho_1$
almeno no soln.

Quota a cui
si posiz. il cilindro, Δ quanto h_2 è invece
rispetto ad h

Sfera cava immersa in un fluido

Noto densità del materiale ρ_m e
del liquido ρ_l e il raggio esterno
 R della sfera, vogliamo trovare il
raggio della cavità e la posizione
del centro affinché il sistema
rimanga in equilibrio all'interno
del fluido



Ricerca affinché liquido
rimanga in equil.
nel fluido

Sfera cava immersa in un fluido

- All'equilibrio, la forza peso è bilanciata dalla forza di Archimede. Considerando le componenti in direzione verticale si ottiene:

$$F_p = -\frac{4}{3}\rho_m(R^3 - r^3)g\pi$$

$$F_p = \rho \sqrt{g}$$

$$F_a = \frac{4}{3}\rho_l R^3 g\pi$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

lo spazio $\frac{4}{3}\pi R^3$ di fluido

$$r = (R - r_{\text{cavo}})$$

$$-\frac{4}{3}\rho_m(R^3 - r^3)g\pi + \frac{4}{3}\rho_l R^3 g\pi = 0$$

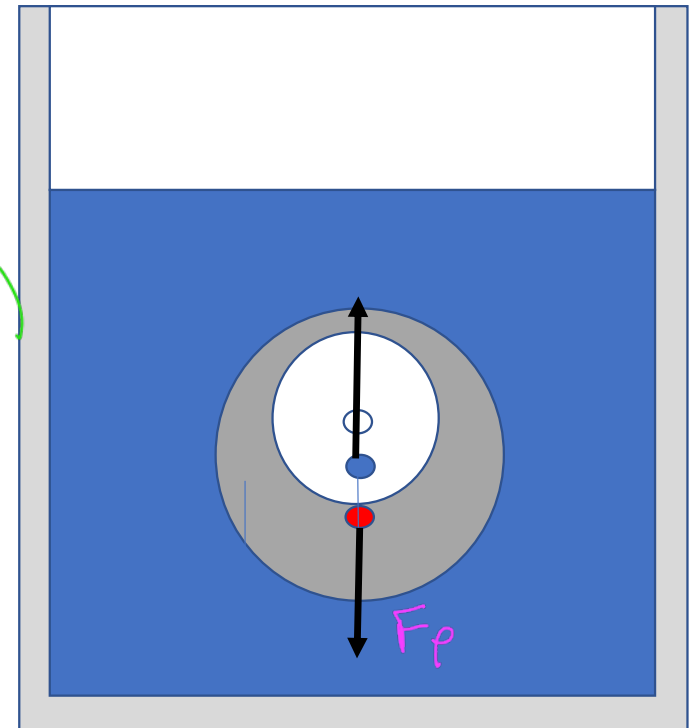
equilibrio

$$\rho_m(R^3 - r^3) = \rho_l R^3$$

$$(\rho_m - \rho_l)R^3 = \rho_m r^3$$

$F_{\text{Archimede}} = \overset{\text{Peso}}{\text{forza}} \text{ peso che lo sposta}$

$$r = \sqrt[3]{\frac{(\rho_m - \rho_l)R^3}{\rho_m}}$$



Sfera cava immersa in un fluido

spinta archimede applicata nel CM
del volume del liquido spostato

Quale sarà la posizione del centro della
cavità affinché il sistema rimanga in
equilibrio?

Statico? $L=0$
 $K=0$

La spinta di Archimede è applicata nel
centro di massa del liquido spostato,
quindi nel centro della sfera di raggio
 R .

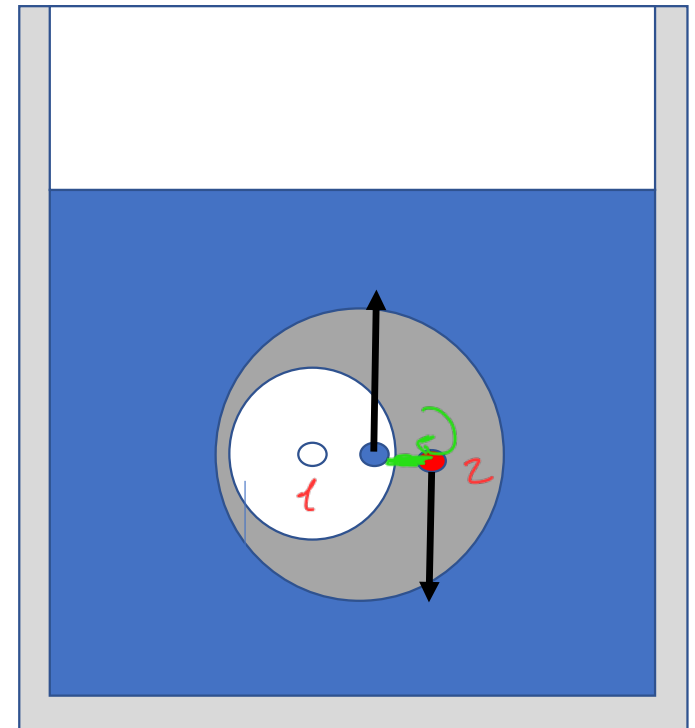
- La forza peso è applicata nel centro di
massa della sfera cava.

mgz_{cm}

Affinché le due forze abbiano
momento nullo, il centro della sfera e il
centro di massa devono essere allineati
lungo la direzione verticale.

per essere in equilibrio

non devo avere rotte, del
del momento non nullo
della coppia di velle F_p, F_A



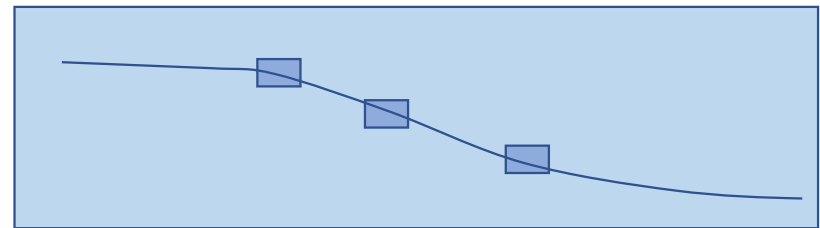
$\mathcal{H} = \frac{dL}{dt}$, lo var. del
momento angolare

Fluidi in movimento (fluidodinamica)

- Fenomeno molto complesso, ipotesi semplificative

1) Metodo lagrangiano

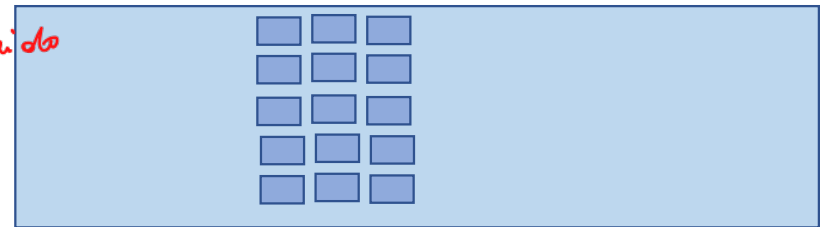
*1 solo particella del fluido
e vedo come varia nel
Tempo e Spazio
parametro di fluido*



*evoluzione della particella
del fluido*

2) Metodo euleriano

*qualità fluido che entra e
esce, fissato su celle più piccole
in un dominio
fissato*



fisso una sezione / volume

*e guardo quello che entra e
esce, il fluido che attraversa
il volume fisso*



MA INVECE USO METODO SEMPLIFICATO

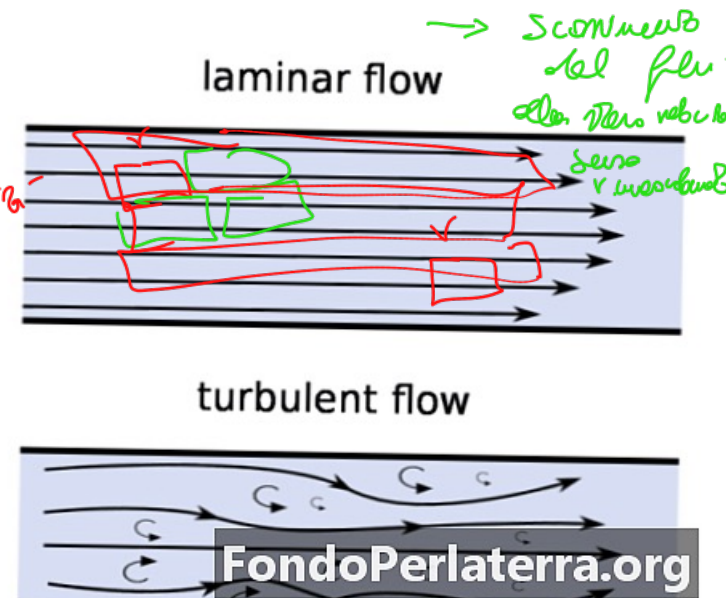
Fluidi in movimento (fluidodinamica)

Fenomeno molto complesso, ipotesi
semplificative

Per esempio, primo ipotesi semplificativa

NO RIMESCOLAMENTO DEL FLUIDO, e sempre
stessa velocità

- 1) Moto laminare: il moto del fluido avviene con scorrimento di strati infinitesimi gli uni sugli altri senza alcun tipo di rimescolamento di fluido, neanche su scala microscopica. La velocità del fluido in ogni punto non cambia nel tempo.



- Si contrappone al moto turbolento

C'è rimescolamento, vortici, velocità diversa
del fluido

tanche LAMINE che scorrono tra loro

Fluidi in movimento (fluidodinamica)



Figura 14.13 Flusso laminare *del'aria* che avvolge un'automobile durante una prova nella galleria del vento.



Figura 14.14 I gas caldi di una sigaretta resi visibili dalle particelle di fumo. Il fumo prima segue un flusso laminare e poi entra in regime di turbolenza.

Fluidi in movimento (fluidodinamica)

come nella statica

② Fluido incompressibile

(volume costante, densità costante)

incompressibile $\Rightarrow$ volume costante $\Rightarrow$ densità costante

- Densità approssimativamente costante, il volume di una quantità definita di liquido è costante

in realtà

- Tutti i fluidi reali, anche i liquidi, soggetti a certi valori di pressione sono compressibili.

quando tra le lamine di fluido c'è scivolo

Fluidi in movimento (fluidodinamica)

- 3 flusso non viscoso no fenomeni dissipativi, come attrito

resistenza al moto

- La viscosità è la capacità di un fluido di opporsi allo scorrimento lungo una superficie

modello più semplice

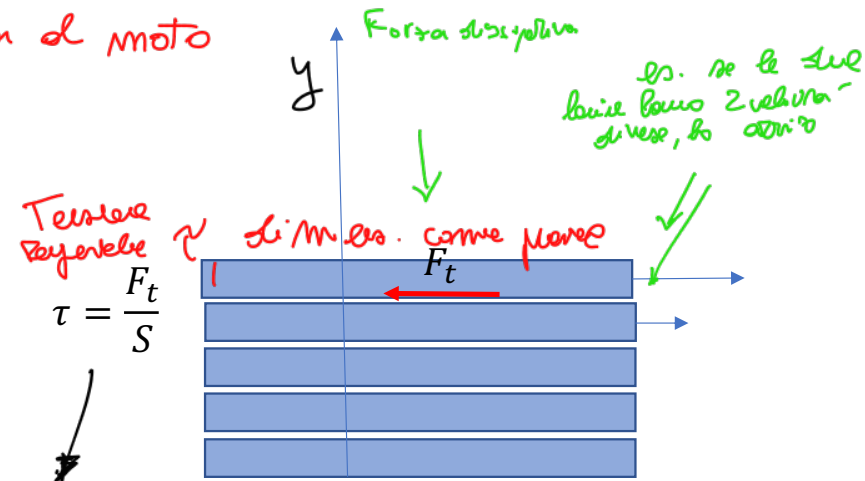
$$\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial y}$$

quanto varia la velocità in senso perpendicolare

viscosità
FLUIDO

si osservano flussi che questa forza dipende dalla differenza di velocità di 2 flussi paralleli

scorrimento del fluido
crea attrito



Per la forza TANGENZIALE introduco Forza / superficie

viscosità = coeff di proporz. tra la variaz di velocità e la Tensione (forza tangenziale / superficie)
fluido non viscoso $\eta = 0$, no interazione tra le due

non si scambiano forte

Fluidi in movimento (fluidodinamica)

Se osserviamo una particella di fluido

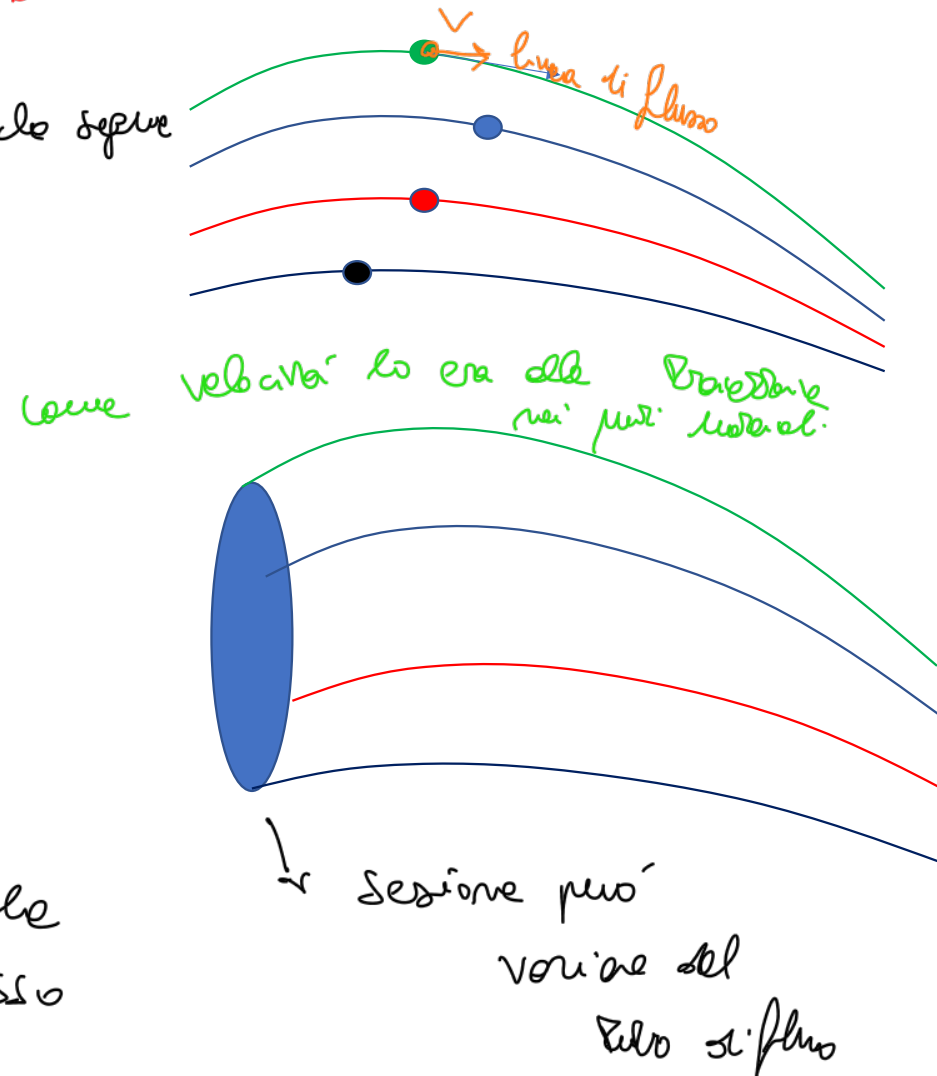
- La traiettoria di una generica particella di fluido prende il nome di linea di flusso.
= traiett. particella fluido

- Istante per istante la velocità di ogni particella è tangente alla linea di flusso.
può per punto

- Le linee di flusso non si intersecano tra loro.
Per ipotesi di MOTOLAMINARE

- Posso definire un **tubo di flusso**.
insieme di linee di flusso

una linea che ci mette tutte le linee di flusso



Fluidi in movimento (fluidodinamica) PORTATA DI UN FLUIDO

$$\Delta x = v \Delta t$$

Se tutte le particelle si muovono alla stessa velocità v

$$\Delta V = A \Delta x = A v \Delta t$$

$$A v = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = Q \quad \frac{\partial V}{\partial t} = A v = \text{portata volumetrica}$$

Q è la portata volumetrica

*Se velocità non tutte uguali
→ uso la velocità media*

$$\Delta V = A v_m \Delta t \quad \text{veloc. di valore medio rispetto al tempo}$$

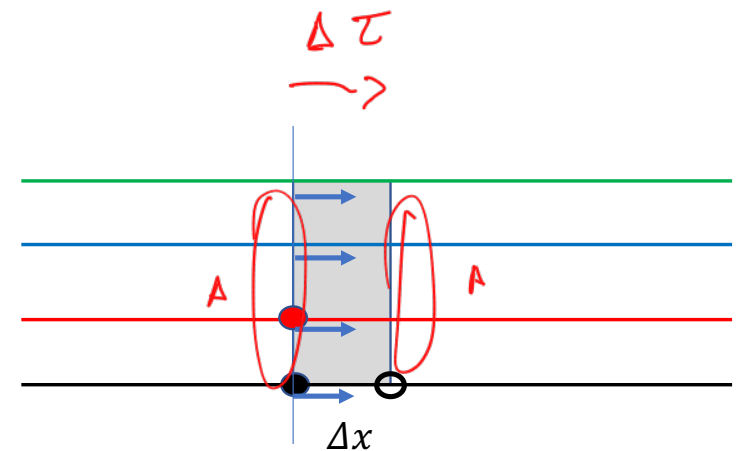
$$Q = v_m A \quad \text{Sec. trasversale}$$

$$\frac{\text{m}^3}{\text{s}} = Q$$

*questo valore si trova
spazio nel tempo*

$\downarrow$
velocità
fluidi

$$\rho Q = \text{portata massica, } \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$



- *flusso, tutte le particelle alla stessa velocità*
linee di flusso parallele
in Δt si sono spostate di Δx

$$\frac{dV}{dt} = A \frac{dx}{dt} = A v = Q$$

Fluidi in movimento (fluidodinamica)

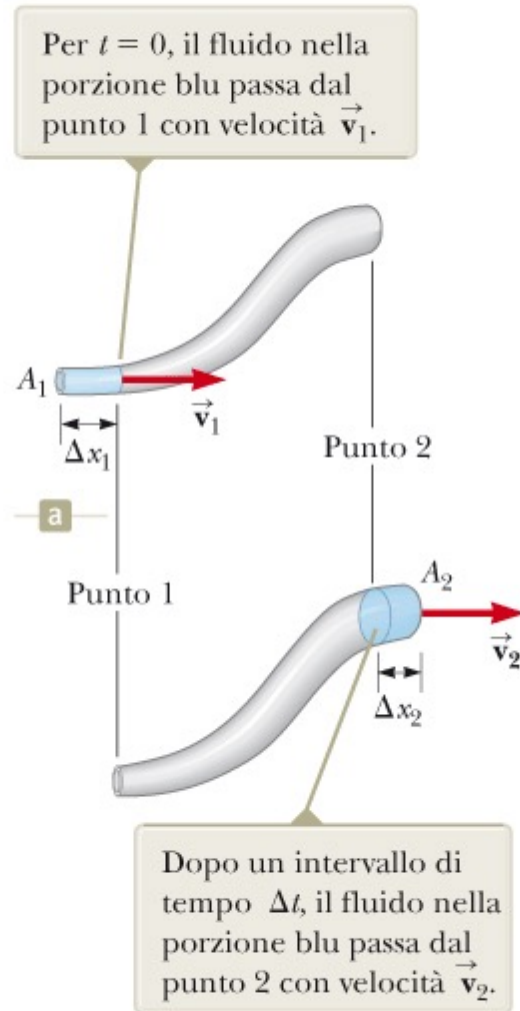


Figura 14.16 Un fluido in regime stazionario fluisce attraverso un tubo a sezione variabile. (a) Per $t = 0$, la piccola porzione di fluido in blu attraversa la sezione A_1 . (b) Dopo un intervallo di tempo Δt , la porzione di fluido in blu attraversa la sezione A_2 dopo essersi spostato.

Fluidi in movimento (fluidodinamica)

volume è lo stesso, fluido incompressibile - la quantità di
 entra e la esce
 $Q_1 = Q_2$
 $A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2 = \Delta V$

$$A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$$

$A_1 v_1 = A_2 v_2$ equazione di continuità

← quantità che entra
 ← che esce

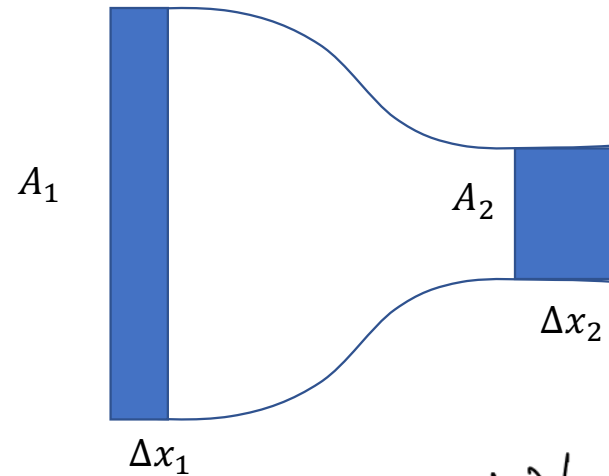
$Av = Q = \text{costante portata volumetrica}$

• Unità di misura $\text{m}^3/\text{s} = Q$

la portata volumetrica Q è costante nel condotto

fluido è incompressibile

Come varia la velocità al variare della sezione?



$Q_1 = Q_2$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

$v_2 > v_1$ se $A_1 > A_2$

Fluidi in movimento (fluidodinamica)

Se la densita' del liquido e' costante

$$\bullet \quad \rho = \frac{dm}{dV} = \text{costante}$$

Anche

$\rho A v = Q_m = \text{costante portata di massa}$

$Q_m = \rho Q = \rho A v$ *Portata
massica*

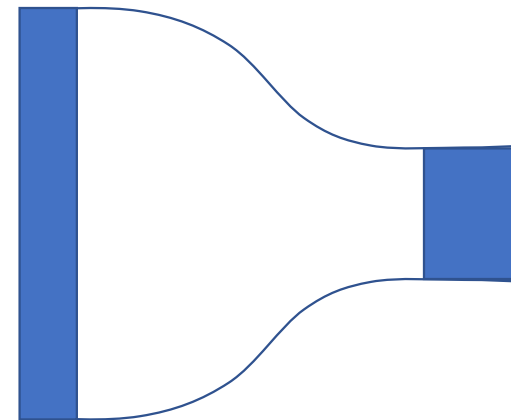
Unita' di misura kg/s

$$\left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]$$

$$\left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]$$

$$\frac{dm}{s} = \rho \frac{dV}{dt} = \rho Q$$

$$= \rho A \frac{dx}{dt} = \rho A v$$



se ρ costante

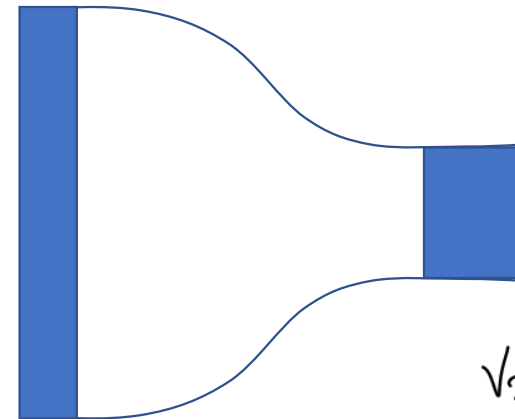
Q portata volumica, $\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

Q_m portata massica $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$

Fluidi in movimento (fluidodinamica)



Figura 14.17 La velocità dell'acqua che esce da un tubo aumenta quando, con il pollice, si riduce l'apertura di uscita.



$v_2 > v_1$ *mea*
| *ses.*
me Q costante

Esempio

Il flusso in uscita da un rubinetto si restringe dalla sezione iniziale $A_0 = 1.2 \text{ cm}^2$ alla sezione $A_1 = 0.35 \text{ cm}^2$ in un'altezza $h = 45 \text{ mm}$. Qual è la portata di acqua che esce dal rubinetto?

Per l'equazione di continuità

$$A_0 v_0 = A_1 v_1 \quad Q_0 = Q_1 \quad \text{Portata costante}$$

L'acqua che esce dal rubinetto è soggetta alla sola forza peso, quindi

$$v_1^2 = v_0^2 + 2gh$$

acque come risposta alla forza peso

MOTO UNIF. accel. della particella di fluido

MOTO UNIF. accelerato
caso con velocità iniziale v_0

$$v = -v_0 - gt$$

$$y = h - v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

MOTO UNIF. accelerato

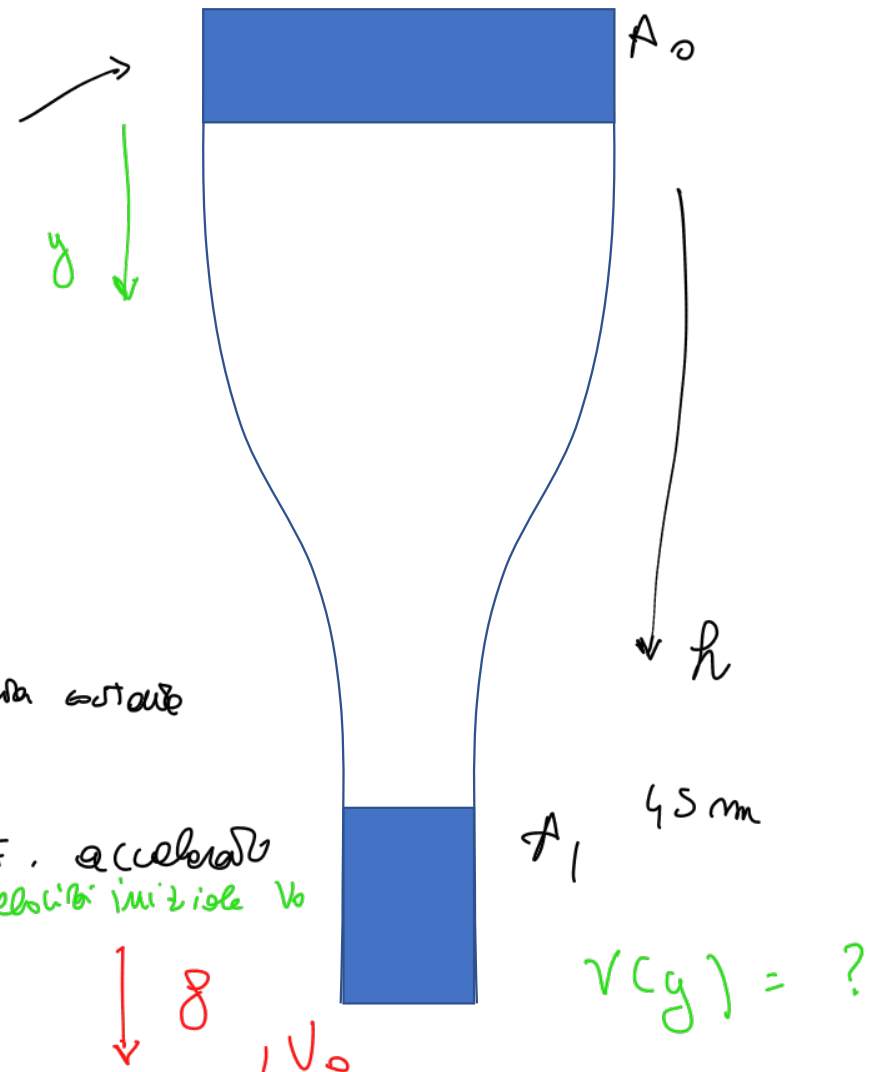
$$v_1 = -v_0 - gt$$

$$y = h - v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t_a \dots \frac{g t^2}{2} + v_0 t - h = 0$$

$$t_a = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$$

$$v(t_a) = -\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$



Esempio

Sostituisco e risolvo

lo usavo
moto circolare libero
per v_0
e Q costante

$$(A_0 v_0)^2 = (A_1 v_1)^2$$

$$v_1^2 = v_0^2 + 2gh$$

$$A_0^2 v_0^2 = A_1^2 (v_0^2 + 2gh)$$

$$(A_0^2 - A_1^2) v_0^2 = 2A_1^2 gh$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2A_1^2}{(A_0^2 - A_1^2)} gh}$$

Calcolato v_0 posso calcolare facilmente la portata $Q = v_0 A_0$

portata

$$\hookrightarrow t = -\frac{v_1}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_1}{g}\right)^2 + \frac{2}{g}(h-y)}$$

$$\hookrightarrow y = 0, \text{ al suolo}$$

$$t_{\text{tempo}} = -\frac{v_1}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_1}{g}\right)^2 + \frac{2}{g}h}$$

$$\hookrightarrow v(t_a) = -v_1 - g(\dots)$$

$$= v_q = -\sqrt{v_1^2 + 2gh}$$

velocità con
cui esce dal rubinetto

Equazione di Bernoulli

la vedo come con pert. di STEVINO
- $\rho h z$

- In condizioni di quiete abbiamo visto che

$$dp = -\rho g dz$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

vale in quiete, condiz.
statiche

(legge di Stevino)

usando ρ che

Se supponiamo che la densità sia costante

$$\Delta p = -\Delta \bar{E}_p \quad \bar{E}_p = \rho g z$$

$$\Delta p + \rho g \Delta z = 0$$

$$p_2 = p_1 + \rho g h$$

$$(p_2 - p_1) + \rho g (z_2 - z_1) = 0$$

$$p_2 + \rho g z_2 = p_1 + \rho g z_1 = \text{costante}$$

per STEVINO

vale cioè
in CONDIZ.
STATICHE

Equazione di Bernoulli

ottenere con dinamica

In condizioni di moto dobbiamo tener conto anche dell'energia cinetica. *del fluido*

VALE IN CONDIZ. STAZIONARIE

(corrente stazionaria
ma $V = \text{cost}$)

Il risultato che otteniamo è noto come equazione di Bernoulli

- Tutto per cui si vale

SI MANTIENE COSTANTE

LUNGO IL CONDOTTO IN MOTO

$$p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

perché lavoro forza esterno =
variaz. dell'energia cinetica

$$L = \Delta E_k$$

Lavoro
→ pressione e forza peso + energia cinetica
e diviso per il volume

$$\frac{1}{2} \rho v^2 =$$

costante per cui si
vale dell'energia cinetica

In condizioni di quiete

$$p_2 + \rho g z_2 = p_1 + \rho g z_1 = \text{costante}$$

$v = 0$

Definizioni

• Condizioni di quiete $\rightarrow v = 0$ velocità fluido in qualsiasi punto, qualunque particella

• Condizioni stazionarie $\rightarrow v \neq 0$, ma l'energia cinetica non varia nel tempo *ma di massa, non velocità NON DIPENDE DAL*

*TEMPO,
VELOCITÀ SEMPRE LA STESSA!*

Esempio: tubo di venturi

$$P_1 + \cancel{\rho g z_1} + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \cancel{\rho g z_2} + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

$P_1 > P_2!$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

$$v_2 > v_1$$

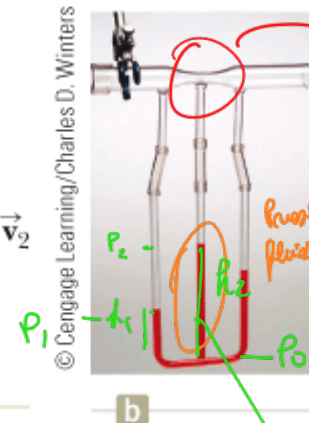
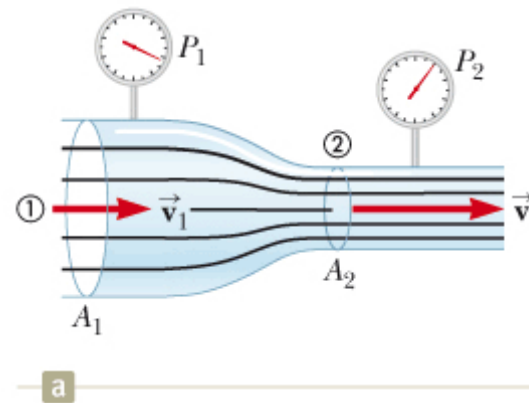


Figura 14.19 (Esempio 14.8) (a) La pressione P_1 è maggiore della pressione P_2 poiché $v_1 < v_2$. Questo strumento può essere usato per misurare la velocità del flusso di fluido. (b) In alto in figura si osserva un tubo di Venturi. Si nota che il livello del fluido nella colonna di mezzo è più elevato; ciò dimostra che, in cima alla colonna, dove il tubo Venturi è più stretto, la pressione è minore.

sezione minore
 $\Rightarrow$ velocità maggiore

pressione minore

STEVENSON

$$h_2 > h_1$$

la bevanda

$$P_0 = P_2 + \rho g h_2$$

$$P_0 = P_1 + \rho g h_1$$

Sapremo che

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow v_1 A_1 = v_2 A_2$$

due sezioni: maggiore velocità minore

$$P_2 + \rho g h_2 = P_1 + \rho g h_1$$

$$\Rightarrow P_2 - P_1 = \rho g (h_1 - h_2) \Rightarrow h_2 > h_1$$

Teorema di Torricelli

Equazione di Bernoulli

$$p_0 + \rho g z_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 = p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

$p_0 = p_{atm}$
anche p_1 è a
contatto
con l'aria

Serbario con l'orlo
forato con forellino

- Equazione di continuità del moto *liq. incompressibile*

$$v_0 S_0 = v_1 S_1$$

*velocità con
cui si allena
serbatoio* *con cui esce*

Ipotesi

$$S_0 \gg S_1$$

$$v_0 \cong 0$$
 trascurabile

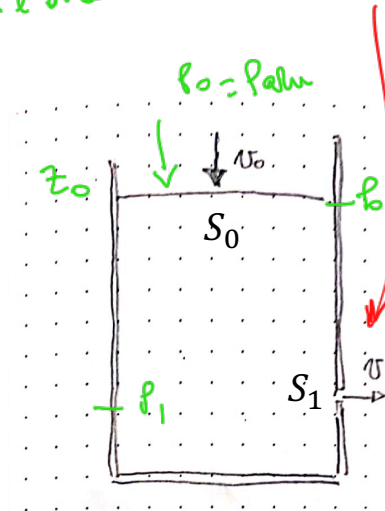
$$p_1 = p_0 = p_{atm}$$

Sostituendo si ottiene

$$\rho g z_0 = \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

Da cui è possibile ricavare

$$v_1 = \sqrt{2g(z_0 - z_1)} = \sqrt{2gh}$$



a che velocità esce l'acqua
dal forellino?

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

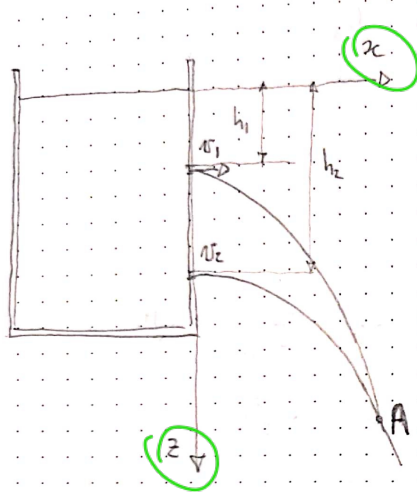
allora
a cui è
pari il
mercato il
foro

velocità con cui esce dal forellino è
pari alla velocità con cui il punto materiale
arriva all'orlo

Una volta trovata la legge per il moto si può applicare il teorema di Torricelli alla forza peso...
 moto parabolico, traiettoria parabolica

v_1 , velocità più bassa, traiettoria più stretta

Esempio di applicazione del teorema di Torricelli



$$v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

$$v_2 = \sqrt{2gh_2}$$

Torricelli x 2

$$\begin{cases} z = \frac{g}{2v_1^2} x^2 + h_1 \\ z = \frac{g}{2v_2^2} x^2 + h_2 \end{cases}$$

traiettoria moto parabolico

velocità uguale

risultati moto parabolico $z(x)$

$$\begin{cases} z = \frac{g}{2v_1^2} x^2 + h_1 \\ z = \frac{g}{2v_2^2} x^2 + h_2 \end{cases}$$

→ moto parabolico di incalzo, incalzo

$$\frac{g}{2} \left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2} \right) x^2 = h_1 - h_2$$

→ sottrazione membro a membro x e z

$$\frac{g}{2} \left(\frac{1}{2gh_1} - \frac{1}{2gh_2} \right) x^2 = h_1 - h_2$$

da Torricelli

$$\frac{h_1 - h_2}{4h_1h_2} x^2 = h_1 - h_2$$

$$x^2 = 4h_1h_2$$

$$x_A = 2\sqrt{h_1h_2}$$

risostituisco in $z(x)$ nella traiettoria

$$z_A = \frac{g}{2v_1^2} \cdot 4h_1h_2 + h_1 =$$

$$= \frac{g}{4gh_1} \cdot 4h_1h_2 + h_1 = h_1 + h_2$$

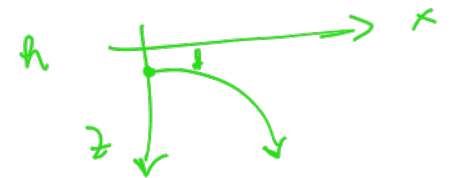
$h_1 + h_2$

si incalzano in $h_1 + h_2$

$$z_0 = h$$

$$z_0 = h$$

+



$$v_z(t) = v_{0z} + gt$$

$$v_x(t) = v_{0x}$$

$$z = h + v_{0z}t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$x = v_{0x}t$$

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

$$z(x) = h + \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}} x^2$$

$$z = h + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} x + \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} x^2$$

$$v_{0x} = v_1 \quad v_{0z} = 0$$

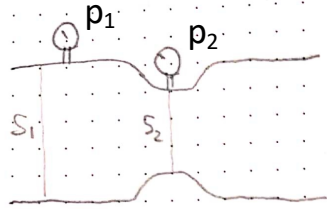
Tubo di Venturi

Metodo per misurare portata con una struttura usata un barometro.

Così trova velocità

con struttura trova la portata voluta

ESEMPIO - TUBO DI VENTURI



$$z_1 = z_2 \text{ costante}$$

MISURANDO $\Delta p = p_2 - p_1$ POSSO CALCOLARE LA PORTATA COME

$$Q = \sqrt{\frac{2 S_1^2 S_2^2}{\rho (S_2^2 - S_1^2)} (p_1 - p_2)}$$

(1) e poi trova la portata

① Bernoulli

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Conservazione del moto

② Continuità

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = Q \quad \text{Portata}$$

$$v_1 = \frac{Q}{S_1} \quad v_2 = \frac{Q}{S_2}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

li ho trovati
Barometri

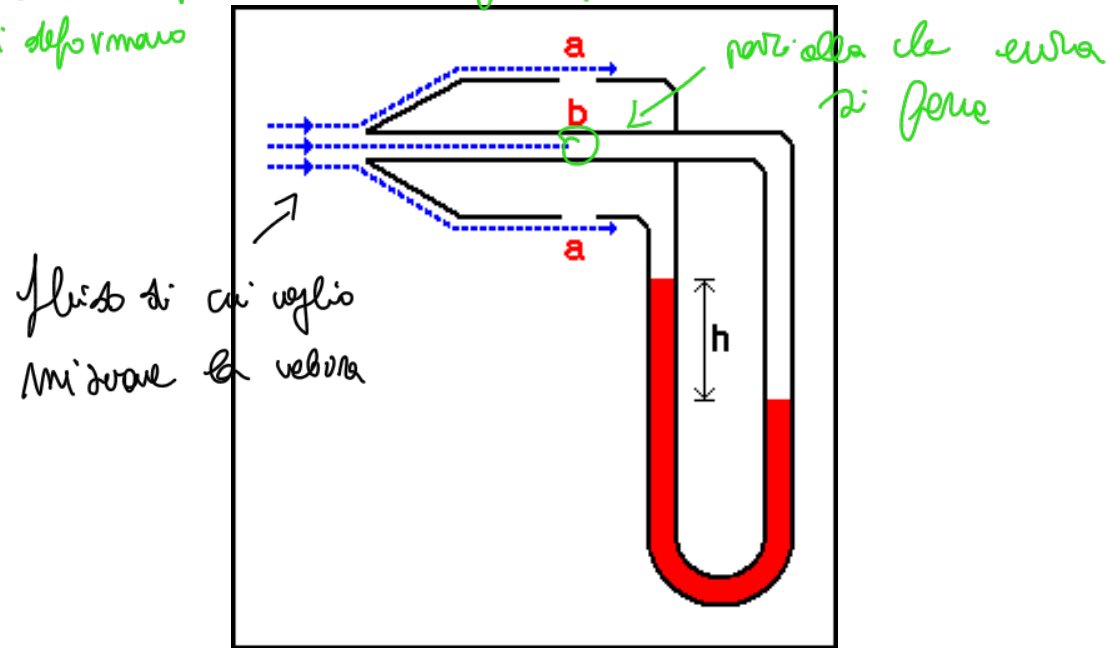
$$= \frac{1}{2} \rho Q^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \rho Q^2 \frac{S_2^2 - S_1^2}{S_1^2 S_2^2}$$

$$\frac{1}{2} \rho Q^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right)$$

Tubo di Pitot *allo scopo per trovare velocità fluido in un condotto*

linee di flusso (vortici) si deformano



① Bernoulli
considera vortici
e uguale
o piccola
h

$$p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2$$

v_B = 0, si ferma

$$v_A = v = \sqrt{\frac{2(p_B - p_A)}{\rho}}$$

Se utilizzo un manometro a U per misurare la differenza di pressione *tra b e a*

$$p_B - p_A = \rho_l g h$$

Stevino $v = \sqrt{2gh\rho_l/\rho}$

il liquido

Teo. Quantita' di moto per fluidi incompressibili

$$\frac{dP}{dQ} = R^{(E)} \quad \text{risultante delle forze sul tubo}$$

$$\vec{P}_1 = \frac{dm}{dt} \vec{V}_{im} = \rho A_1 \frac{dx}{dt} \vec{V}_{im}$$

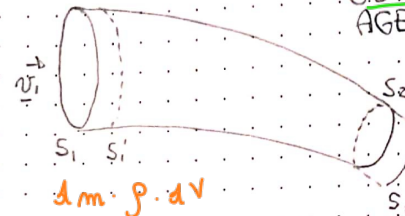
$$\vec{P}_2 = \frac{dm}{dt} \vec{V}_{out} = \rho A_2 \frac{dx}{dt} \vec{V}_{out}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \rho Q (\vec{V}_{out} - \vec{V}_{im}) = R^{(E)}$$

$$Q_m = \int A_1 v_1$$

Per capire sforzi
sulle pareti (tubi)
Forze su un tubo

QUANTITA' DI
MOTO



QUAL È LA RISULTANTE
DELLE FORZE (DI VOLUME
E DI SUPERFICIE)
AGENTI SU UNA PORZIONE
(TUBO DI
FLUSSO) GENERICA?

$$\frac{dP}{dt} = R^{(E)}$$

forza d'imp. 2° Teo
dim
vita anche per i
flussi

QUANTITA' DI MOTO VARIABILE IN UN TEMPO dt

$$dP = v_1 dm \quad P_{in} = \int dm v_1 = \rho S_1 v_1 dt \quad \text{DEL FLUIDO CHE ENTRA NEL TUBO}$$

$$P_{out} = \int \rho dV v_2 = \rho S_2 v_2 dt \quad \text{DEL FLUIDO CHE ESCE DAL TUBO}$$

$$dP = P_{out} - P_{in} = \rho Q dt (v_2 - v_1)$$

$$\frac{dP}{dt} = \rho Q (v_2 - v_1)$$

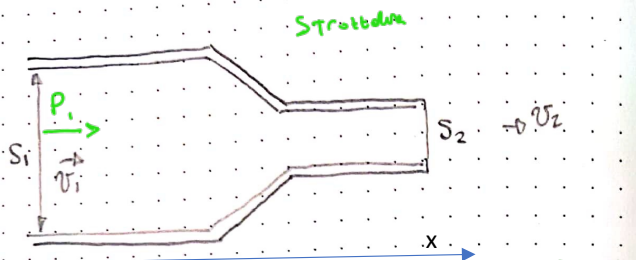
$$\frac{dP}{dt} = R^{(E)} = \rho Q (v_2 - v_1)$$

$$R^{(E)} = \rho Q (v_2 - v_1)$$

$$R^{(E)} = Q_m (v_2 - v_1)$$



Esempio



$R_x^{(e)} = \rho Q (v_2 - v_1)$

RISULTANTE DELLE FORZE AGENTI SUL FLUIDO

$R_x^{(e)} = \rho Q (v_2 - v_1)$

$R_x^{(e)} = p_1 S_1 - p_2 S_2 - F_x$

→ F_x FORZA CHE IL FLUIDO ESERCE SUL TUBO

- F_x FORZA CHE IL TUBO ESERCE SUL FLUIDO

$F_x = p_1 S_1 - p_2 S_2 - \rho Q (v_2 - v_1)$

$= p_1 S_1 - p_2 S_2 - \rho Q^2 \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1} \right)$

MI RICORDO (TUBO DI VENTURI) CHE

$Q^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1} \right)}$

SOSTITUENDO POSSO VERIFICARE CHE

$F_x = (p_1 S_1 + p_2 S_2) \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2}$

$v_2 > v_1$ per continuità

$Q = v_1 S_1 = v_2 S_2$

$v_1 = \frac{Q}{S_1}$

Forze di volume

$$\textcircled{1} \quad \nabla p(x,y,z) = \nabla E_p(x,y,z)$$

↳ legge Pascal: la pressione lungo una sup. equipotenziale è costante.

$$\hookrightarrow E_p = \text{Forza peso} = \rho g z$$

$\Rightarrow$ Legge di STEVINO

$$\bullet \quad \frac{dp}{dz} = -\rho g$$

$\bullet$ Pressione costante se z costante

se ρ costante

$$\bullet \quad p_1 = p_0 + \rho g h$$

$\leftarrow$ vale in cond. di quiete

$\bullet$ Spinta di Archimede: oggetto nel fluido riceve spinta pari al volume del liquido che ha spostato

$$F_A = \int \rho g dV = \int \rho g dV$$

$\bullet$ portata volumica $Q = \frac{dV}{dt} = A \vec{v}$

$$Q_m = \frac{dm}{dt} = \rho A \vec{v}$$

$\bullet$ Eq. di continuità Q costante $A_1 v_1 = A_2 v_2$

$\bullet$ Eq. Bernoulli

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

in quiete $v=0 \Rightarrow p_1 + \dots = p_2 + \dots = \text{costante}$

in cond. staz. $\Rightarrow E_k$ costante, $v_{1,2}$ costanti, vale Bernoulli

$\bullet$ Equazione di Moto

(forze che agiscono sul fluido entro, forze sul tubo)

$$\frac{dp}{dt} = Q^{(ce)}$$

$$\frac{dp}{dt} = \underbrace{\rho A \frac{dx}{dt}}_{Q} (v_1 - v_2) = \rho Q (v_2 - v_1) = R \dot{v}$$

$$\Rightarrow R^{(\varepsilon)} = \frac{\Delta P}{\Delta t} \approx Q_m (v_2 - v_1)$$