

Corso di FISICA 1



Capitolo 5 – dinamica del punto materiale

Monica Malvezzi, Università degli
Studi di Siena



Introduzione

- **Cinematica:** studio del moto ^{del punto materiale} indipendentemente dalle cause che lo generano.

Nello studio della cinematica abbiamo determinato:

- Posizione $\mathbf{r}(t)$
- Velocità $\mathbf{v}(t)$ $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$
- Accelerazione $\mathbf{a}(t)$ $\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}$

Di un punto materiale durante il moto (in funzione del tempo).]

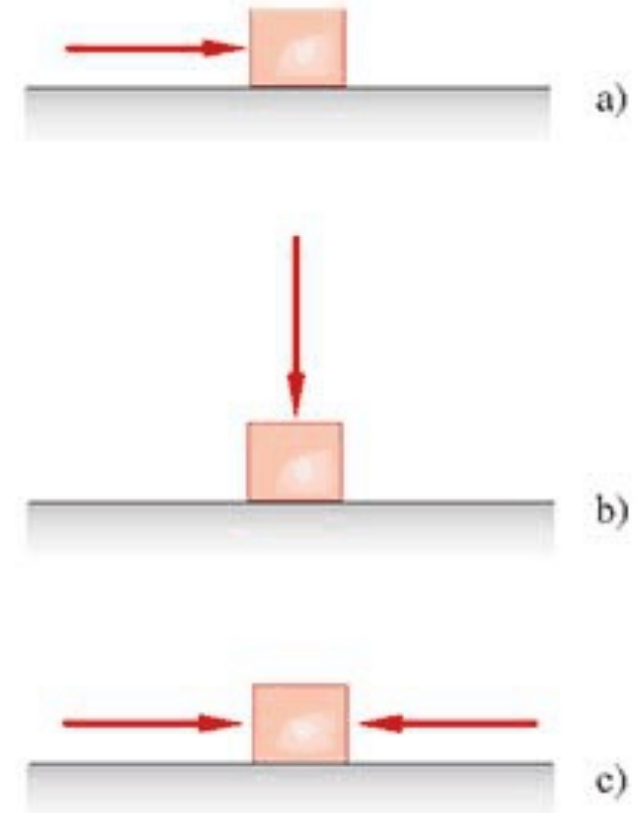
Dinamica: studio di come il moto di un sistema è influenzato dalle interazioni con l'ambiente circostante.

Introduzione

Per lo studio della dinamica dobbiamo definire delle nuove grandezze.

- Forza: rappresentazione dell'interazione del corpo con l'ambiente circostante. La forza è una grandezza vettoriale, dato che il suo effetto sul punto materiale dipende dalla direzione e dall'intensità. Quindi è caratterizzata da un modulo, una direzione, un verso e un punto di applicazione. Si rappresenta tramite un vettore applicato.

F , vettore applicato



Introduzione

Per lo studio della dinamica dobbiamo definire delle nuove grandezze.

- **Massa**: proprietà del corpo che descrive la sua "resistenza" a variazioni di moto (inerzia).

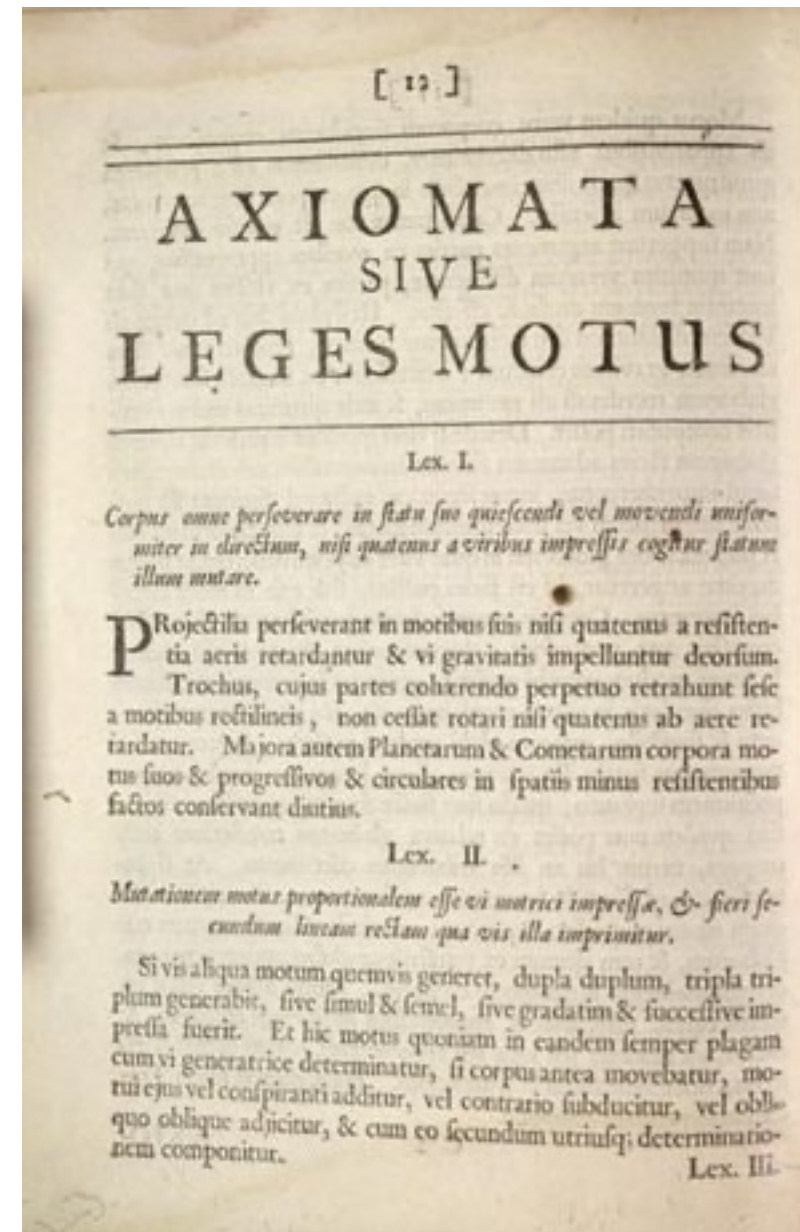
È una grandezza scalare. La massa è una delle grandezze fondamentali della fisica secondo il Sistema Internazionale. L'unità di misura della massa nel SI è il kg.



Massa, grandezza scalare e fondamentale.

Le leggi (o principi) della dinamica

Le tre leggi della dinamica sono alla base dello studio della meccanica classica e furono presentate da Newton nel 1687 nell'opera *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (I principi matematici della filosofia naturale)



• Primo principio (principio di inerzia)

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus à viribus impressis cogitur statum illum mutare

Un corpo non soggetto a forze non subisce variazioni di velocità, quindi:

Se era inizialmente in quiete ($v(0) = 0$) rimane in quiete ($v(t) = 0$)

Se inizialmente aveva velocità ($v(0) = v_0 \neq 0$) non nulla, continua a muoversi di moto rettilineo uniforme ($v(t) = v_0$).

Secondo principio

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Un punto materiale sottoposto a una o più forze si muoverà con un'accelerazione vettorialmente proporzionale alla risultante di tali forze.

un punto sottoposto a forze

Si muoverà con una accelerazione tale che

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$\vec{F}$ risultante (somma vettoriale) delle forze applicate al corpo

$m\vec{a} : \vec{F}$ risultante forze applicate al corpo

m massa inerziale, è una proprietà del punto materiale che descrive la sua resistenza a variare il proprio stato di moto, ossia a modificare la propria velocità

$\vec{a}$ accelerazione del punto materiale

Secondo principio

Analizziamo dimensionalmente la relazione che descrive il secondo principio della dinamica

$$\overset{N}{F} = m \overset{kg \frac{m}{s^2}}{a}$$

La forza $\mathbf{F}$ dimensionalmente è il prodotto di una massa per un'accelerazione, che a sua volta è pari a una lunghezza divisa per il quadrato di un tempo $[F]=ML/T^2$. Utilizzando le unità del SI il modulo della forza si misura quindi in $kg \cdot m/s^2$. Per misurare il modulo di una forza si definisce un'unità di misura derivata, il Newton N (Newton).

$$1 N = 1 kg \cdot m/s^2$$

Terzo principio (principio di azione e reazione)

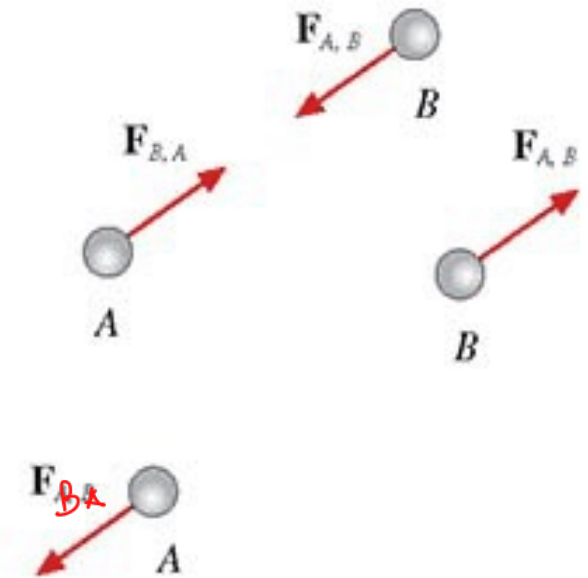
Actioni contrariam semper et equalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi

Se un corpo A esercita una forza $\mathbf{F}_{A,B}$ sul corpo B, il corpo B a sua volta eserciterà sul corpo A una forza $\mathbf{F}_{B,A}$ tale che

$$\mathbf{F}_{B,A} = -\mathbf{F}_{A,B}$$

Forza su
A causata dall'interazione
con B

Forza da
A esercitata sul
corpo B



linee , velocità < velocità luce
e masse molto piccole

Analisi della dinamica di un punto materiale

- Problema dinamico diretto: sono note le forze applicate ad punto materiale, si vuole determinare il suo moto. *dal'accelerazione*

PROBLEMA DIRETTO

Applicando il secondo principio della dinamica

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

E ricordando che l'accelerazione è definita come:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

Ho $\mathbf{F}$, trovo $\mathbf{a}$, trovo $\mathbf{r}$ con
2 integ.

Il problema si riconduce a risolvere un'equazione differenziale

$$\vec{\mathbf{F}} = m \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2}$$

Equazione differenziale vettoriale del secondo ordine.

Analisi della dinamica di un punto materiale

Problema dinamico inverso: il moto del punto materiale è noto, si vogliono determinare le forze che vi sono applicate.

In questo caso conosciamo $\mathbf{r}$ e possiamo determinare

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

NOTO $\mathbf{r}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{F}$
risultante $\mathbf{F}$

Il problema si riconduce a risolvere un sistema di equazioni di tipo algebrico:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Limiti di validità delle leggi di Newton

- **Velocità inferiore alla velocità della luce**
- **Massa: corpi macroscopici**

• Quantità di moto

- Definizione: la quantità di moto di un punto materiale è definita come il prodotto tra la sua massa (scalare) e la sua velocità (vettore)

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\left[\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right], [\text{N} \cdot \text{s}]$$

La quantità di moto è quindi un vettore che ha

- La stessa direzione della velocità $\vec{v}$
- Lo stesso verso della velocità $\vec{v}$ (dato che la massa è positiva)
- Modulo $m|\vec{v}|$ che dimensionalmente sarà una massa per una velocità
 $[p] = ML/T$
- Unità di misura per la quantità di moto nel SI: $\text{kg} \cdot \text{m/s}$. Ricordando inoltre che il Newton, unità di misura della forza, è definito come una massa per un'accelerazione, $N = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$ risulta anche che l'unità di misura della quantità di moto nel SI è $N \cdot s$

Altra formulazione della seconda legge di Newton

Forma DIFF, vale anche se la massa è variabile

- La seconda legge di Newton può essere formulata anche in questo modo:

$$\left[\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{p} = m \vec{v} \\ \vec{F} = m \vec{a} \end{array} \right\} \rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La risultante delle forze applicate a un punto materiale è pari alla variazione della quantità di moto rispetto al tempo.

Altra formulazione della seconda legge di Newton

Le due formulazioni

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

sono equivalenti? *se la massa è costante*

Ricordiamo che

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Se la massa è costante:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$$

Le due formulazioni sono equivalenti.

Altra formulazione della seconda legge di Newton

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Ma se la massa m non è costante

$$\left[\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{v} = m\vec{a} + \frac{dm}{dt} \vec{v} \right]$$

e in questo caso le due formulazioni non sono equivalenti.

Altra formulazione della seconda legge di Newton

La formulazione

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

E' più generale e vale anche per i sistemi a massa variabile.

La formulazione

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

valo solo se massa e'
costante

Si può applicare solo se il punto materiale ha massa costante.

Variazione della quantità di moto

VERSIONE INTEGRALE 2°
PRINCIPIO

- Consideriamo di nuovo la formulazione della seconda legge di Newton con la quantità di moto

$$\left[F = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right]$$

Possiamo riscrivere questa espressione come:

$$\vec{F} dt = d\vec{p}$$

Integrando tra un istante iniziale e un istante generico t otteniamo

impulso

$$\int_0^t \mathbf{F} dt = \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} d\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \Delta\mathbf{p}$$

L'integrale nel tempo della forza $\int_0^t \mathbf{F} dt$ è pari alla variazione della quantità di moto $\Delta\mathbf{p}$.

Impulso di una forza

- Definiamo l'impulso di una forza al tempo t come l'integrale tra un istante iniziale e un istante generico della forza nel tempo:

$$\vec{J} = \int_0^t \vec{F} dt$$

stella integrale

L'impulso è un vettore. La direzione e il verso dipendono da come varia la forza $\vec{F}$ nel tempo. Il modulo dell'impulso, dal punto di vista dimensionale, è dato da una forza per un tempo $[J] = [F]T$. Nelle unità del SI si esprime in N · s oppure kg · m/s (la stessa unità di misura della quantità di moto!)

eh bel

Teorema dell'impulso

Avendo definito l'impulso di una forza al tempo t come

$$J = \int_0^t F dt$$

E ricordando il risultato ottenuto integrando nel tempo la seconda legge di Newton espressa in termini di quantità di moto, otteniamo quindi:

nello stesso intervallo di tempo

$$J = p - p_0 = \Delta p$$

Teo impulso / Forma integ. 2° principio di Newton

La variazione della quantità di moto di un punto materiale in un dato intervallo di tempo è pari all'impulso della forza applicata al punto materiale nello stesso intervallo di tempo.

Questo risultato prende il nome di “Teorema dell'impulso” o forma integrale della seconda legge di Newton.

Teorema dell'impulso

Abbiamo visto quindi due diverse formulazioni della seconda legge di Newton.

Forma differenziale (rappresenta la situazione del punto materiale in un dato istante)

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}}$$

valore istantaneo

Forma integrale (valuta l'effetto della forza sul sistema in un tempo finito)

$$\boxed{\mathbf{J} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \Delta\mathbf{p}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = m \vec{a} \\ \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \vec{J} = \Delta\vec{p} \end{array} \right.$$

se m costante

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

$$\vec{J} = \int_0^t \vec{F} dt$$

Teorema dell'impulso

Riepilogando, il teorema dell'impulso può essere formulato come

$$J = p - p_0 = \Delta p$$

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

Se la massa m è costante risulta inoltre

$$J = p - p_0 = m(v - v_0) = m\Delta v$$

$$\vec{J} = m \Delta \vec{v} \quad \text{se } m \text{ costante}$$

Se, poi, la forza F è costante (in modulo, direzione e verso!),

velocità costante in
modulo, direzione e
verso

$$\vec{J} = \int_0^t \vec{F} dt = \vec{F}t$$

la variazione al tempo t della velocità rispetto alla velocità iniziale è data da

$$\Delta v = \frac{1}{m} F t$$

$\vec{F}$ costante e m costante

$$\vec{F}t = m \Delta \vec{v}$$

✓
variaz. velocità in un tempo t
rispetto a v_0

$$\Delta v = v(t) - v_0$$

Teorema dell'impulso , verifica primo principio

Infine, se $\mathbf{F} = 0$

$$J = \int_0^t \mathbf{F} dt = 0$$

$$m\Delta\mathbf{v} = 0$$

$\checkmark$ costante !

La velocità $\mathbf{v}$ non varia (in modulo, direzione e verso), quindi il punto materiale è fermo oppure si muove di moto rettilineo uniforme.

Abbiamo ri- trovato in questo modo un'altra formulazione del principio di inerzia.

se non applico forze nel tempo, il corpo non varia la sua velocità

Applicazione della seconda legge di Newton

Riprendiamo la formulazione della seconda legge di Newton in forma differenziale:

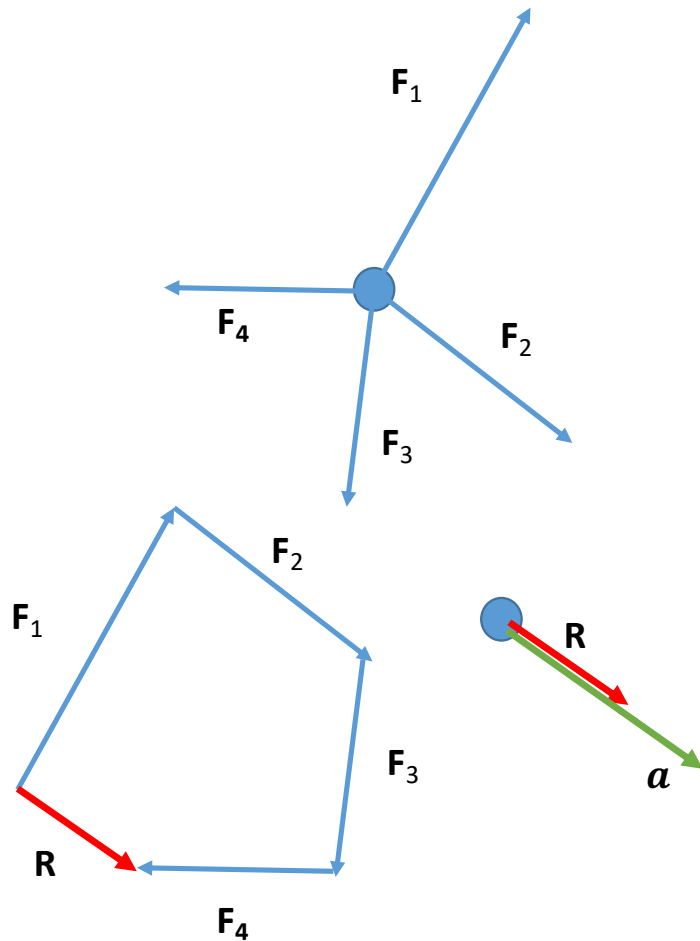
$$\bullet \quad \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$\bullet \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad m \text{ costante}$$

$\mathbf{F}$ è la risultante delle forze applicate al punto materiale. Somma VETT delle $\vec{F}_i$

Se su un corpo agiscono più forze la risultante è data dalla somma vettoriale.

Risultante delle forze applicate



Esempio: su un punto materiale sono applicate quattro forze, come mostrato in figura. Quale sarà la sua accelerazione? Calcoliamo la risultante delle forze (ricordando che si tratta di una somma vettoriale!):

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Summa vettoriale, regola parallelogramma

Per la seconda legge della dinamica, la risultante delle forze è pari alla derivata della quantità di moto:

$$\vec{R} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

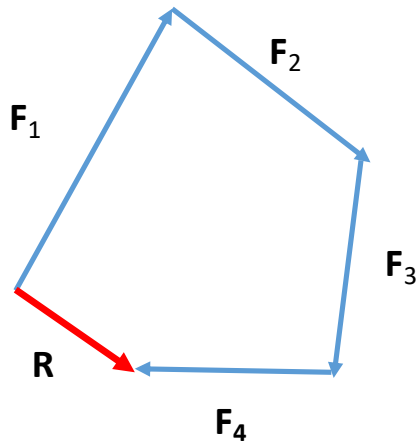
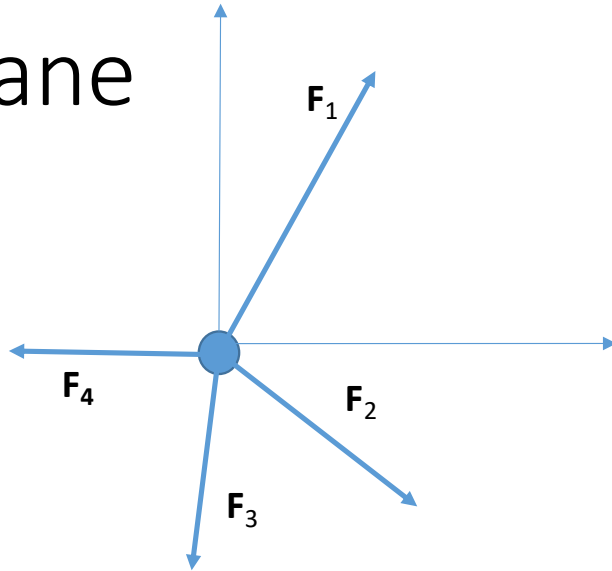
Se la massa è costante, la variazione della quantità di moto è pari al prodotto della massa per l'accelerazione.

$$\vec{R} = m\vec{a}$$

L'accelerazione del punto materiale sarà quindi pari a

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{R}$$

Risultante delle forze applicate, componenti cartesiane



La risultante delle forze applicate al punto materiale si calcola come somma vettoriale delle forze agenti sul punto:

$$\bullet \quad \mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

Se le forze sono espresse in coordinate cartesiane rispetto a un Sistema di riferimento Oxyz, possiamo calcolare le componenti cartesiane della risultante come:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x = \sum_{i=1}^n F_{xi} \\ R_y = \sum_{i=1}^n F_{yi} \\ R_z = \sum_{i=1}^n F_{zi} \end{array} \right.$$

• Statica del punto materiale

$$\text{Se } \vec{Q} = 0, \vec{v}(0) = \vec{0}$$

- Se la risultante delle forze applicate al punto materiale è nulla, $\mathbf{R} = 0$ e la sua velocità iniziale è nulla, $\mathbf{v}(0) = 0$, per il secondo principio della dinamica

$$\mathbf{R} = m\mathbf{a}$$

L'accelerazione del punto materiale è nulla

$$\mathbf{a} = 0$$

accelerazione nulla

e di conseguenza il punto rimane con velocità nulla $\mathbf{v}(t) = 0$
(condizione di equilibrio statico).

Quindi, condizione necessaria affinché un punto materiale si trovi in condizioni di equilibrio statico è che

$$\mathbf{R} = 0$$

Equilibrio statico = $\left\{ \begin{array}{l} \vec{Q} = 0 \\ \Rightarrow \vec{Q} = 0 \\ \vec{v} = \text{costante} \quad (v_0 = 0 \Rightarrow \vec{v}' = 0) \end{array} \right.$

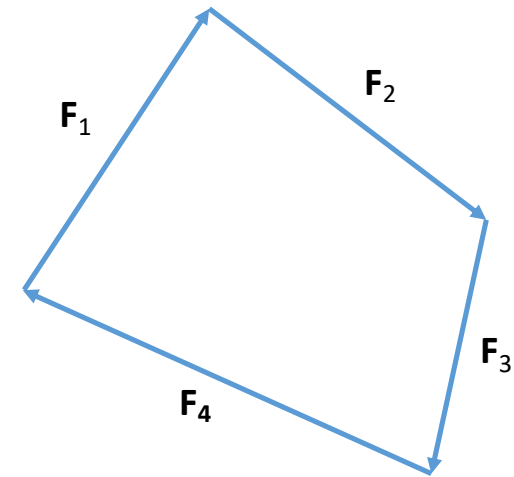
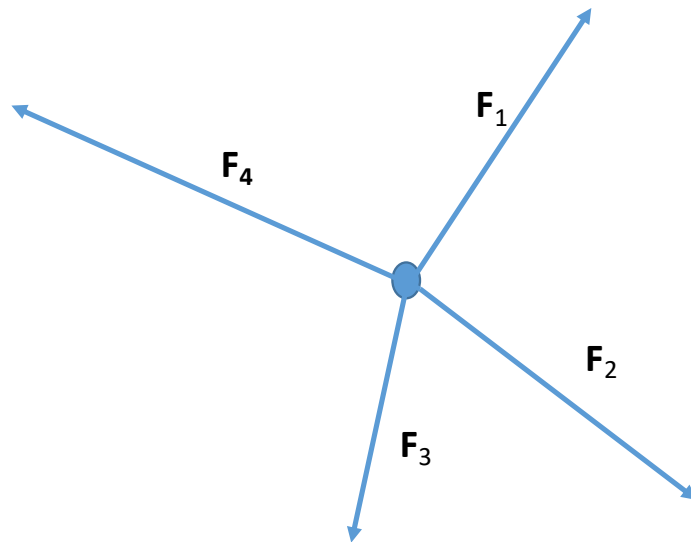
CONDIZ. NECESSARIA

Statica del punto materiale

Condizione necessaria affinché un punto materiale si trovi in condizioni di equilibrio statico

$$\mathbf{R} = 0$$

Graficamente, i vettori forza affiancati tra loro devono costituire una spezzata chiusa.



Statica del punto materiale

Condizione necessaria affinché un punto materiale si trovi in condizioni di equilibrio statico è che

$$\mathbf{R} = 0 \quad \text{NECESSARIA, NON SUFF}$$

In componenti cartesiane:

sono
valere
tre e 3

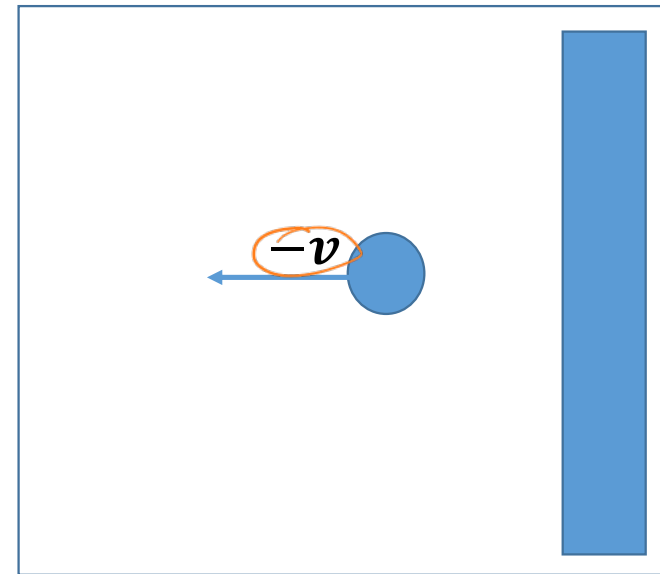
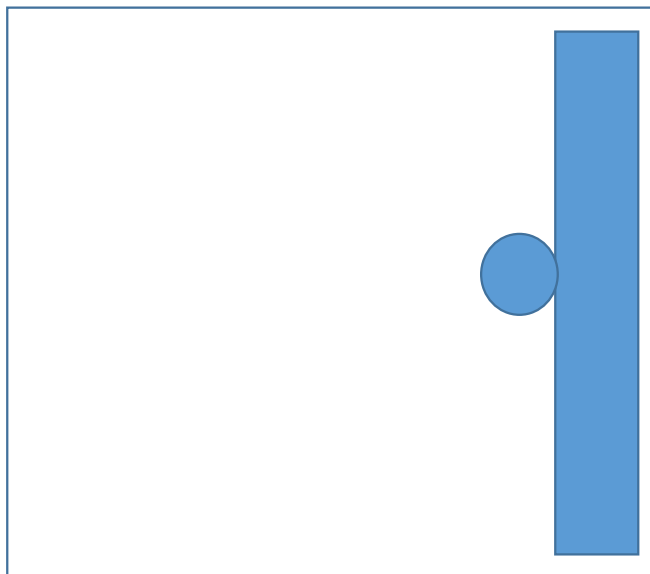
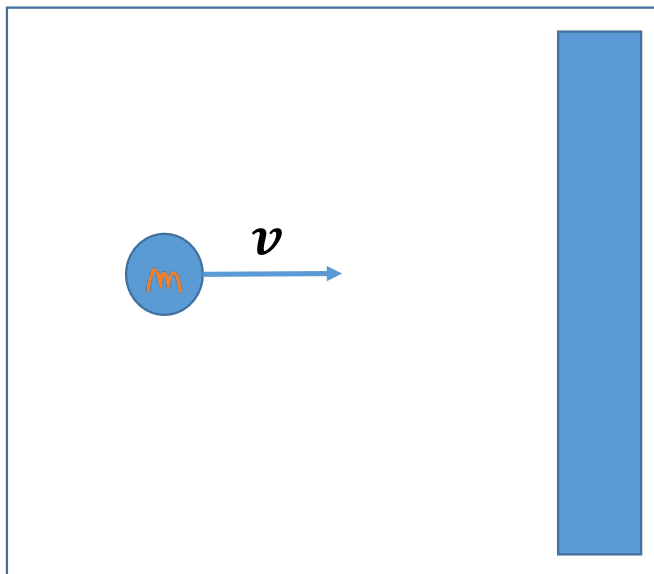
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{i=1}^n F_{xi} \\ 0 = \sum_{i=1}^n F_{yi} \\ 0 = \sum_{i=1}^n F_{zi} \end{array} \right.$$

MA NON MOMENTI NON NULLI,
P.es. coppia di
forze
(?)

Applicazione del teorema dell'impulso

$$\vec{J} = \Delta \vec{p} \quad m \text{ corrisp}$$
$$\int \vec{F} dt = m(\vec{v} - \vec{v}_0)$$

- Consideriamo un punto materiale P di massa m che si muove inizialmente a velocità costante $\vec{v}$ in un certo istante urta contro una superficie disposta ortogonalmente al vettore $\vec{v}$, rimbalza e quindi ripercorre la traiettoria con velocità opposta $-\vec{v}$. *urto perf. elastico*
Calcoliamo la variazione di quantità di moto durante l'urto. Supponendo che l'urto abbia una durata Δt , calcoliamo il valore medio della forza con cui il punto colpisce la superficie.



Applicazione del teorema dell'impulso

- Quantità di moto iniziale

$$\vec{p}_0 = m\vec{v}$$

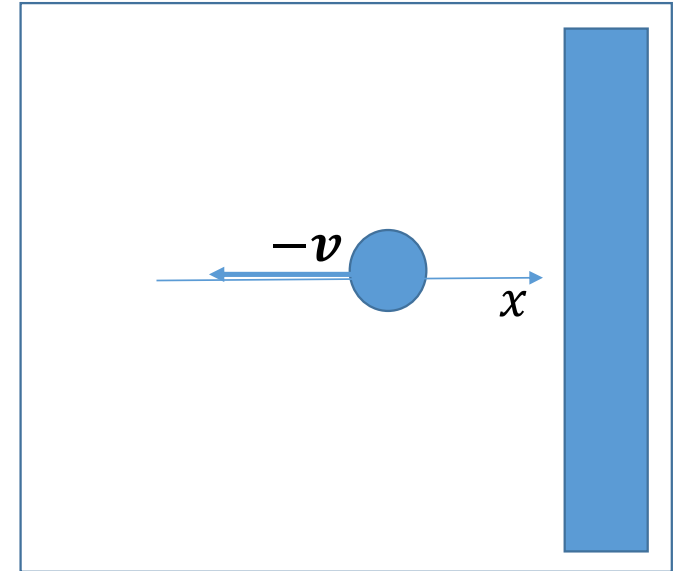
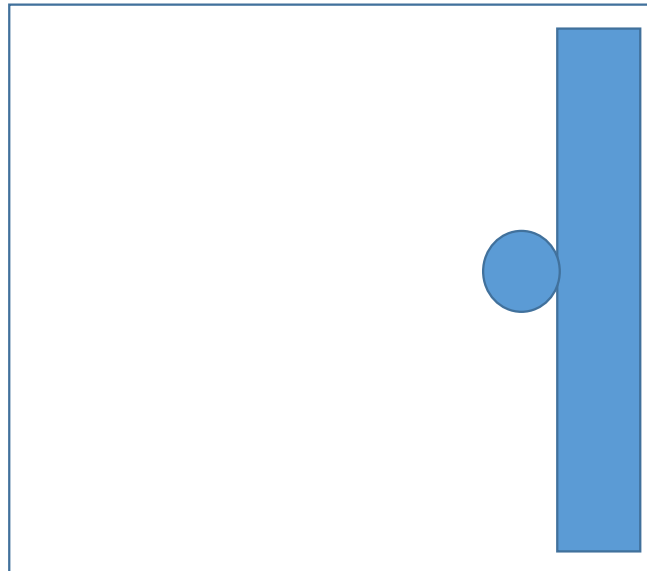
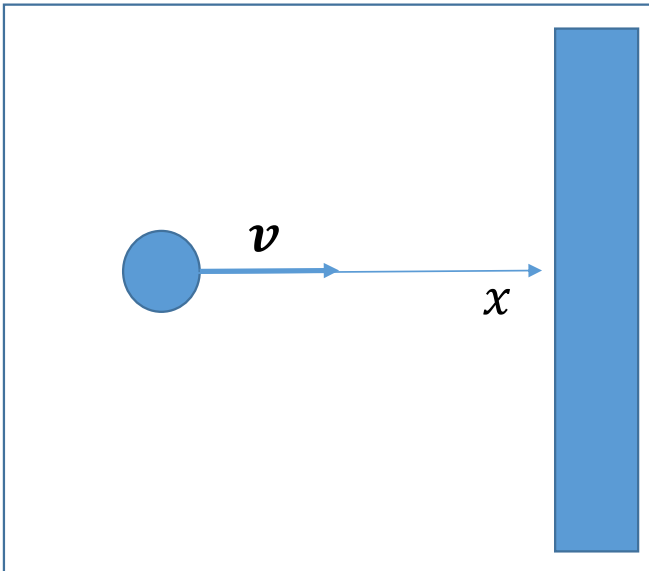
Quantità di moto finale

$$\vec{p}_1 = -m\vec{v}$$

$$\vec{v}_1 = -\vec{v}$$

Variazione quantità di moto

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0 = -2m\vec{v}$$



Applicazione del teorema dell'impulso

In componenti cartesiane, prendendo un asse x orientato come la velocità iniziale v :

$$v = v\mathbf{i}$$

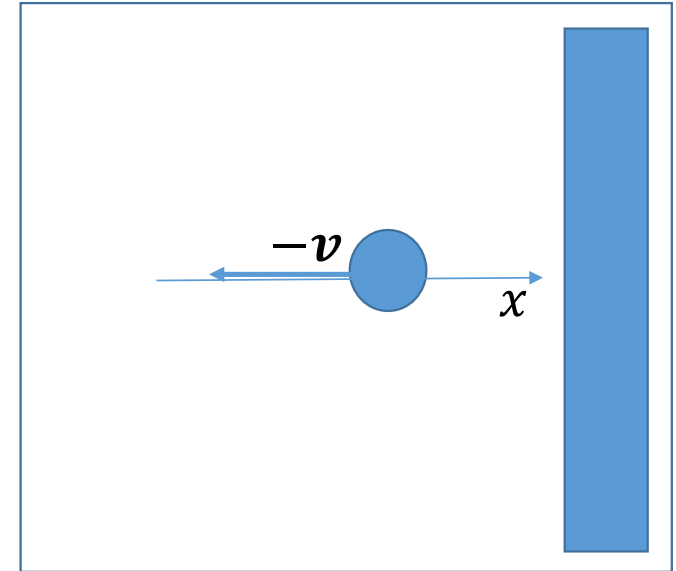
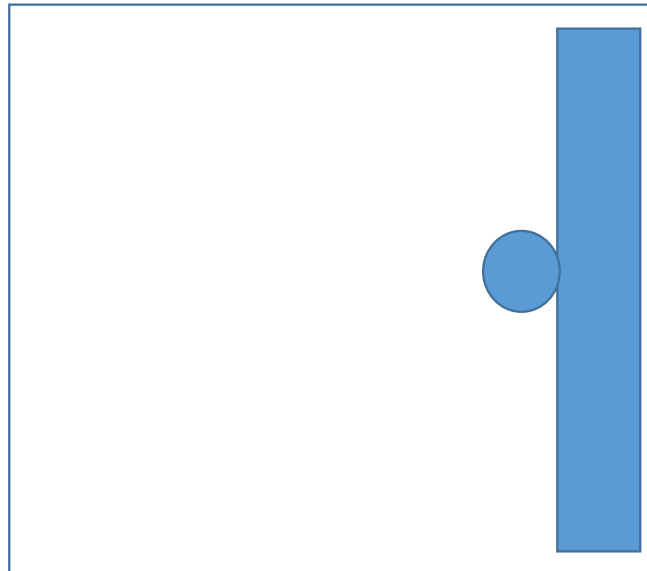
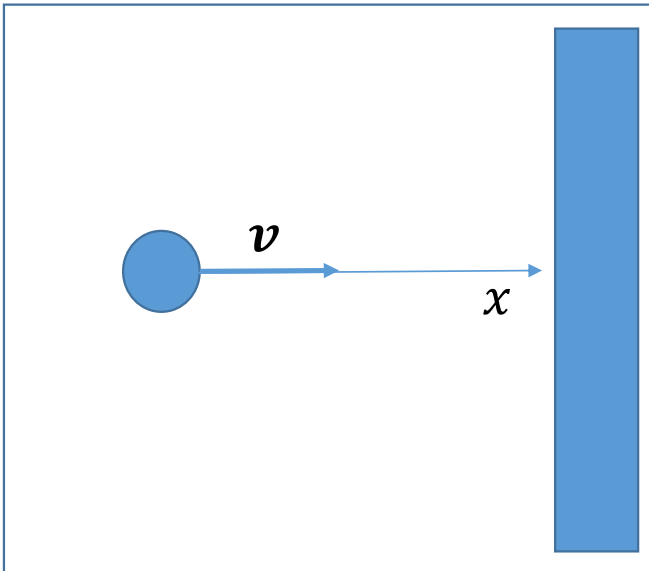
$$\underline{\Delta p} = p_1 - p_0 = \underline{-2mvi}$$

Per il teorema dell'impulso risulta

$$\underline{J} = \Delta p = p_1 - p_0 = \underline{-2mvi}$$

Ma per definizione di impulso abbiamo

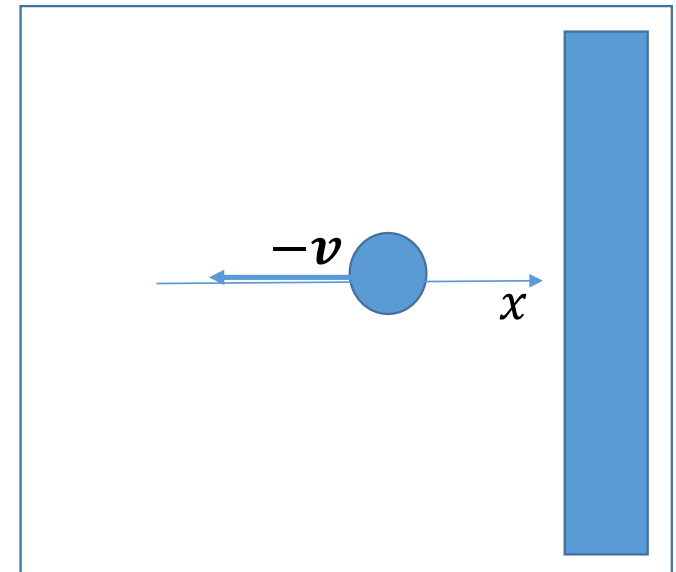
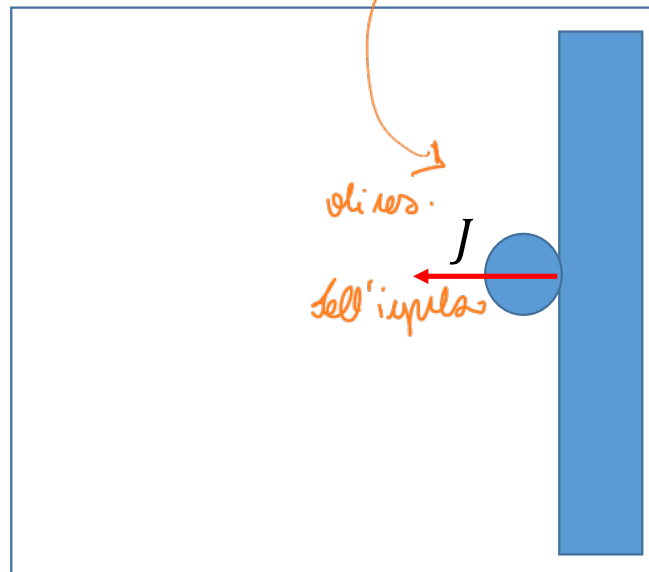
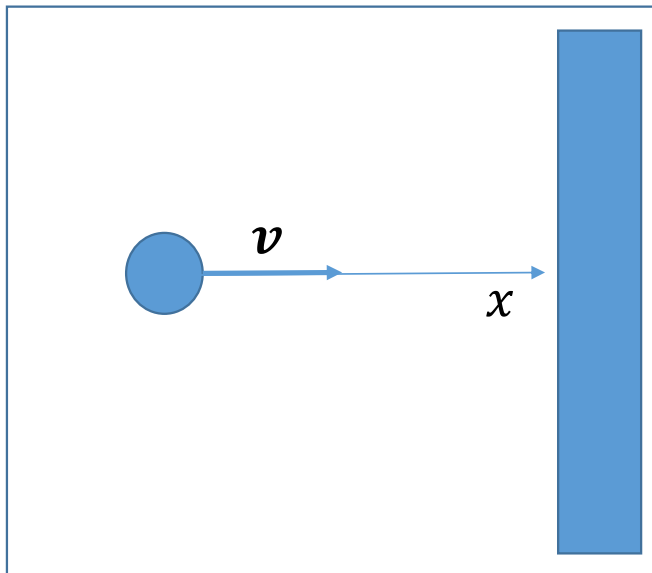
$$J = \int_0^t \mathbf{F} dt$$



Applicazione del teorema dell'impulso

Supponendo di considerare come istante iniziale un istante subito prima dell'urto e come istante finale uno immediatamente dopo, dato che l'urto ha una durata Δt possiamo scrivere

$$J = \int_0^{\Delta t} F dt = -2mvi$$



Applicazione del teorema dell'impulso

Ricordando come si valuta il valore medio di una funzione nel tempo, il valore medio della forza nel tempo Δt vale

$$F_m = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} F dt$$

media di un integrale

Ricordando la definizione di impulso abbiamo quindi

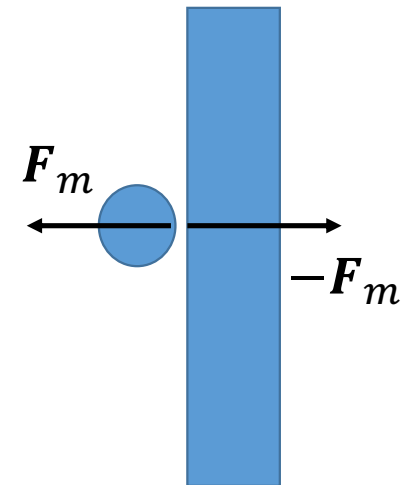
$$F_m = \frac{1}{\Delta t} J = -\frac{2mv}{\Delta t} \hat{i}$$

$$\vec{F}_m = -\frac{2mV}{\Delta t} \hat{i}$$

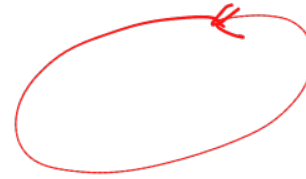
*sup. esercito
sul punto*

F_m è la forza (media) che la superficie esercita sul punto materiale durante l'urto. Per il terzo principio della dinamica, il punto materiale a sua volta eserciterà sulla superficie una forza

opposta - $F_m \cdot = \frac{2mV}{\Delta t} \hat{i}$



Moto circolare



Quali forze dobbiamo applicare ad un punto materiale affinché si muova di moto circolare?

In questo caso, il moto del punto materiale è noto, vogliamo determinare la forza necessaria per realizzarlo, si tratta di un problema di dinamica inversa. *NOTO IL MOTO, voglio determinare la Forza*



Applichiamo il secondo principio della dinamica nella forma

$$F = ma$$

Moto circolare

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Nello studio della cinematica del moto circolare abbiamo visto che l'accelerazione si compone di due termini:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t$$

La componente normale vale

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_n = \boxed{R\omega^2 \mathbf{u}_n = -\omega^2 \mathbf{r}} = \vec{a}_n$$

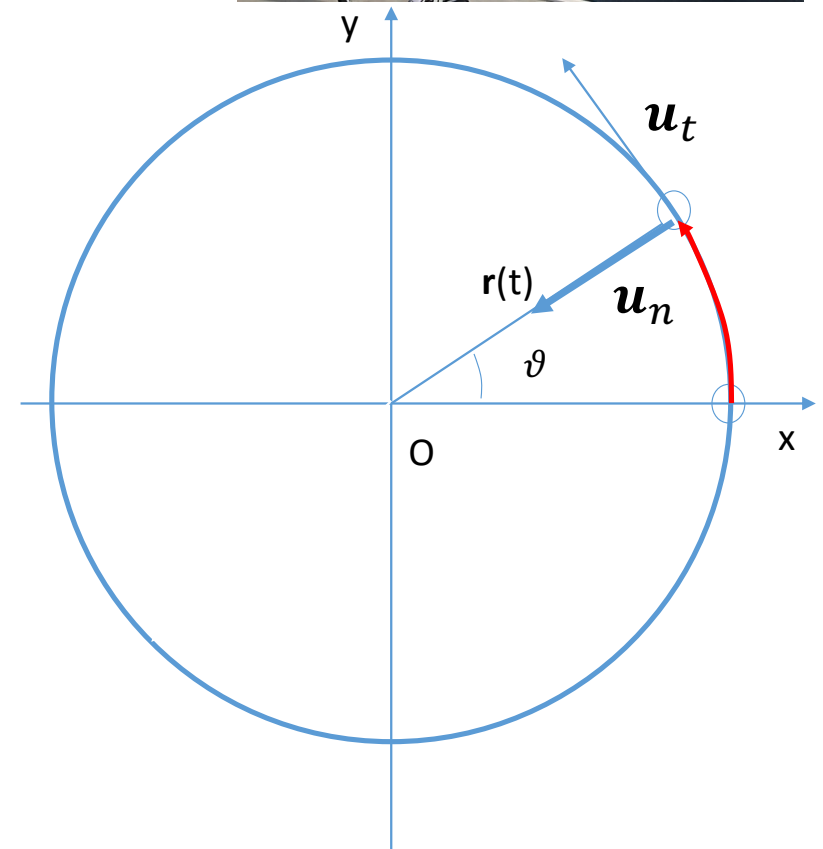
Mentre la componente tangenziale vale

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t = \boxed{R \frac{d\omega}{dt} \mathbf{u}_t} = \vec{a}_t$$

Avendo indicato con

ω la velocità angolare (rad/s) $\frac{d\theta}{dt}$ [rad/s]
 $\frac{d\omega}{dt}$ accelerazione angolare (rad/s²)

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$$



Moto circolare

Sostituendo nell'espressione del secondo principio della dinamica otteniamo:

$$\mathbf{F} = m(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t)$$

Possiamo scrivere quindi:

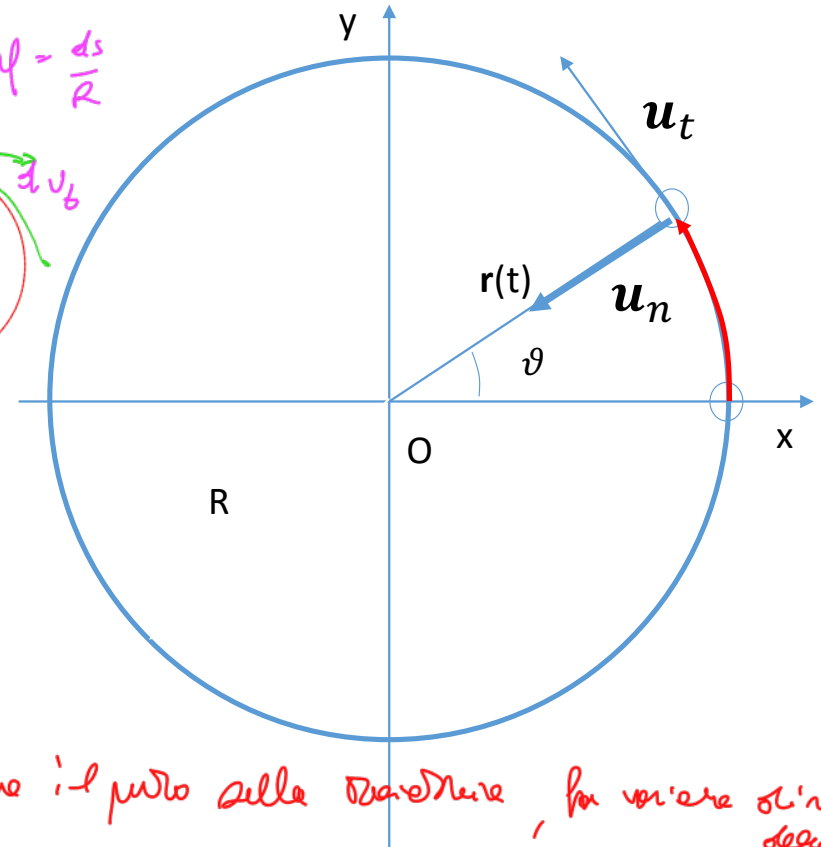
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n$$

$$\mathbf{F}_n = -m\omega^2 \mathbf{r}$$

$$\mathbf{F}_t = mR \frac{d\omega}{dt} \mathbf{u}_t$$

$\mathbf{F}_n$ componente normale della forza, contribuisce alla variazione della direzione della velocità e quindi a mantenere il punto sulla traiettoria circolare.

$\mathbf{F}_t$ componente tangenziale della forza, contribuisce alla variazione del modulo della velocità.



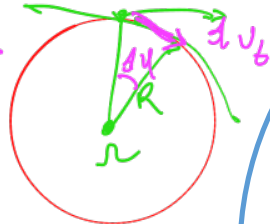
F_n ha il ruolo di mantenere il punto sulla traiettoria, per variazioni di ω o v .

F_t var. fornire il modulo della velocità.

Componente tang. e normale della forza

$$d\varphi = \frac{ds}{R}$$

$$\frac{d\vec{v}_t}{dt} = \frac{v^2}{R} \vec{u}_n$$



Moto circolare

- Nel caso di moto circolare uniforme

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_n$$

$$\mathbf{F}_n = -m\omega^2 \mathbf{r}$$

$$F_t = 0 \quad \text{poiché } \frac{d\omega}{dt} = 0$$

Ni sempre solo
forza risultante in direzione
centrale

Esercizio proposto: lancio del martello

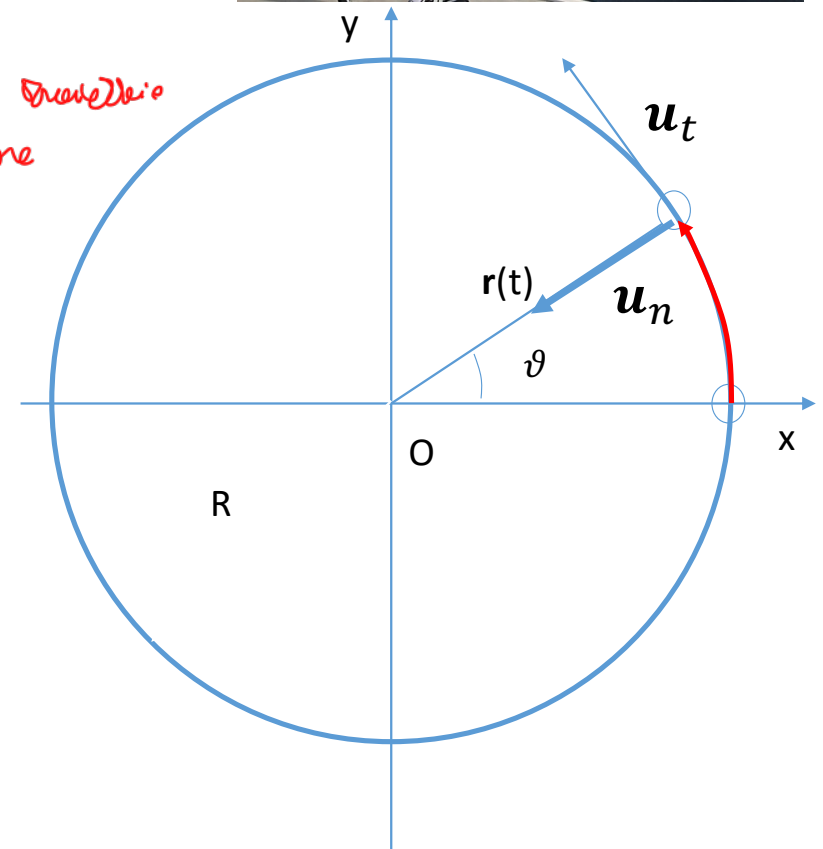
$$m = 7.27 \text{ kg}$$

$$R = (1.16 + 0.74) \text{ m}$$

$$v = 27 \text{ m/s}$$

da fare

Supponendo v costante, qual è la forza a cui è sottoposto il braccio dell'atleta subito prima del lancio?



• La forza peso

- Un corpo in caduta libera sulla terra cade con accelerazione g avente

- modulo pari a

modulo $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$

- direzione verticale (verso il centro della terra)
- verso diretto al centro della terra (discendente)



Moto circolare

Forza peso

*su un corpo che subisce una accelerazione
di $\vec{g}$, sul corpo agisce
una forza*

Per il secondo principio della dinamica sul
corpo in caduta libera agisce una forza

$$\boxed{\vec{F}_p = m\vec{g}}$$



- modulo pari a

mg

- direzione verticale (verso il centro della terra)
- verso diretto al centro della terra (discendente)



Massa e peso

Massa - Forza peso

Massa *proprietà del corpo, non dipende dalla gravità*

- Scalare
- Si misura in kg
- E' una proprietà del corpo

Peso *Forza che agisce sul corpo*

- Vettore
- Si dovrebbe misurare in N
- Dipende dal corpo e da *g*

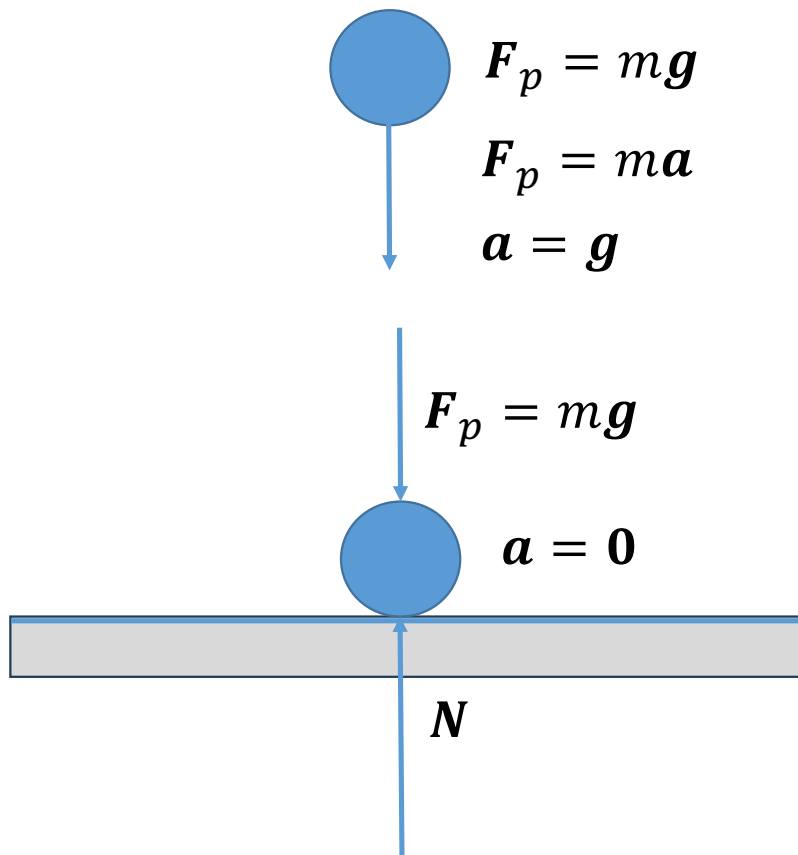
$$\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Forze di
interazione con
superficie
piana



Forze di Contatto e Reazioni vincolari

Forze di interazione (contatto) con superficie orizzontale



Abbiamo visto che un corpo in caduta libera è soggetto alla forza peso e accelera con accelerazione pari a g verso il suolo. Invece, un corpo appoggiato su una superficie piana orizzontale non si muove. Quindi ha anche accelerazione nulla, e per il secondo principio della dinamica la risultante delle forze agenti su di esso è nulla.

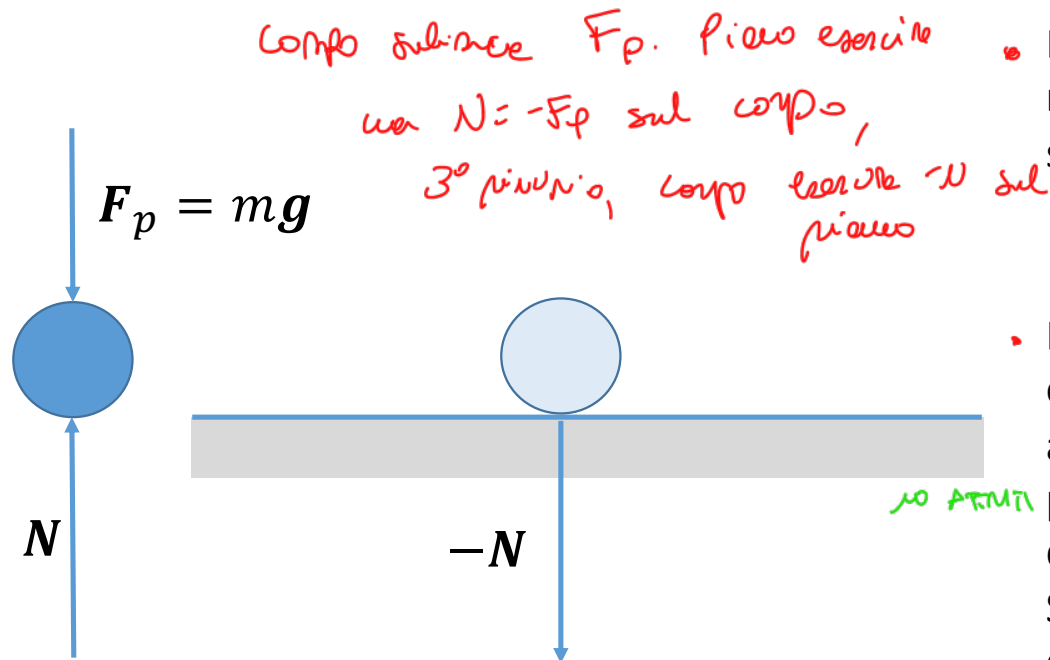
La superficie piana per effetto del contatto con il corpo esercita una forza N tale che:

$$F_p + N = 0$$

su un corpo su una $N = -F_p$
piano lungo agente per F_p ma è fermo quindi
 $a = 0$, c'è una reazione vincolare

$$\vec{F}_p + \vec{N} = 0 = m\vec{a} \rightarrow \vec{a} = 0$$

Forze di interazione (contatto) con superficie orizzontale



- Per il terzo principio della dinamica, il punto materiale eserciterà a sua volta una forza sulla superficie pari a $-N$.

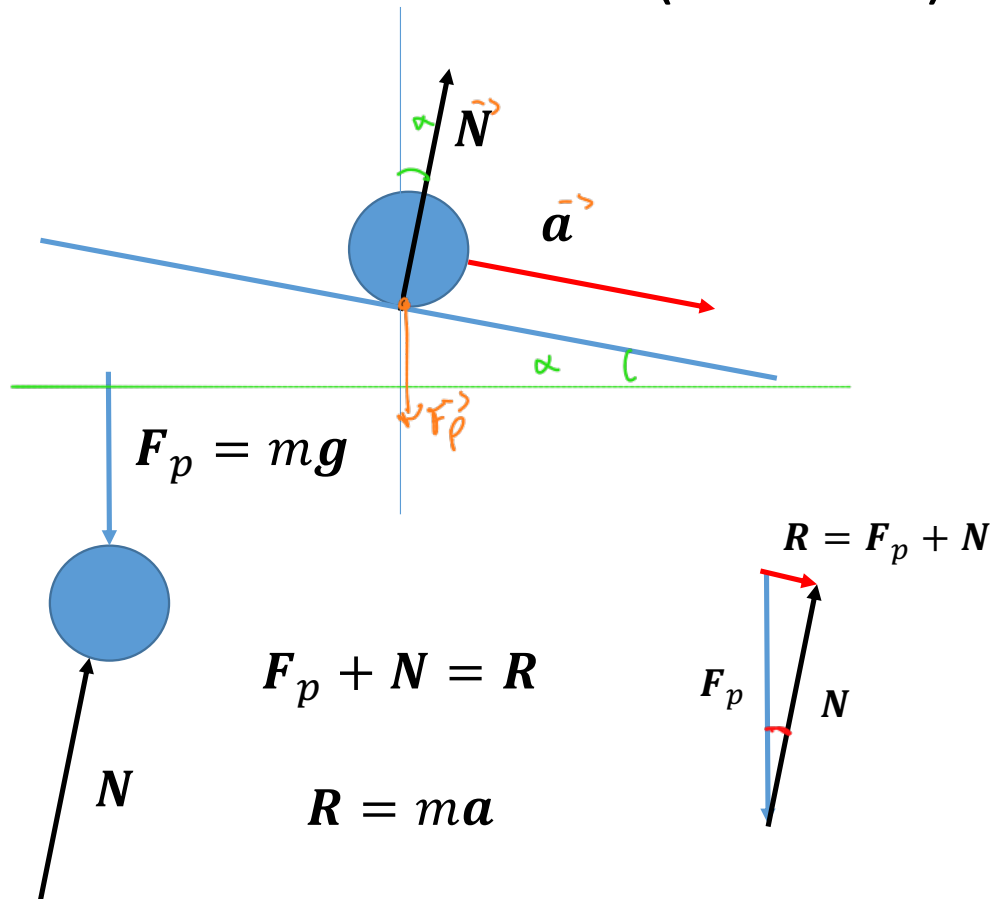
- La forza N che la superficie esercita sul corpo è necessaria affinché il corpo non penetri all'interno della superficie. Se la superficie è perfettamente liscia, la sua direzione è quindi perpendicolare alla superficie stessa. Se la superficie è orizzontale, la forza che essa esercita (detta anche reazione) è verticale.

SUPERFICIE LISCIA: REAZIONE VINCOLANTE
NORMALE ALLA SUP. STESSA

Piano inclinato



Forze di interazione (contatto) con superficie inclinata



- Abbiamo visto che la forza N che la superficie esercita sul corpo è perpendicolare alla superficie stessa. Questo vale anche se la superficie è inclinata. In questo caso la forza N non sarà più verticale. L'angolo tra N e la verticale è uguale all'inclinazione della superficie.

Per il secondo principio della dinamica,

- $R = ma$

Dove

- $F_p + N = R$

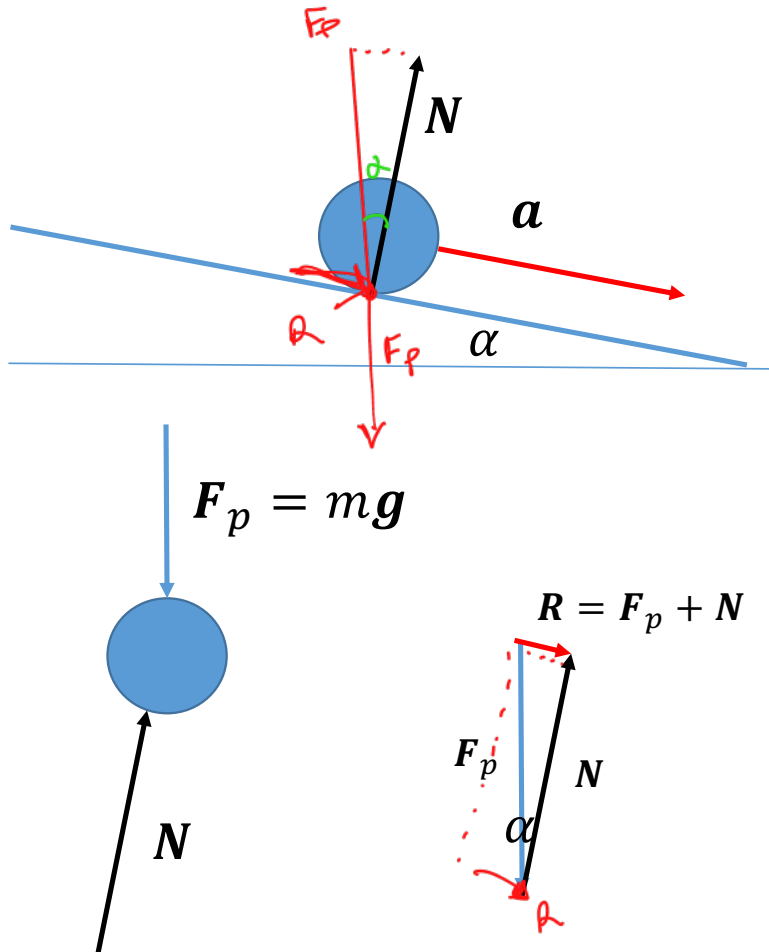
Dato che il moto si svolge parallelamente alla superficie, a avrà direzione parallela alla superficie e quindi anche R sarà parallela alla superficie.

Osservando la figura, vediamo che i vettori F_p , N ed R costituiscono un triangolo rettangolo di cui F_p è l'ipotenusa e l'angolo tra F_p ed N è pari all'inclinazione del piano.

Angolo tra N e la verticale è
come inclin. del piano.

F_p è verticale $\Rightarrow$ inclin. tra N e F_p è come inclin. del piano

Forze di interazione (contatto) con superficie inclinata



Indicando con α l'angolo di inclinazione del piano, e ricordando che il modulo della forza peso è $F_p = mg$, si verifica che:

$$\begin{cases} N = mg \cos \alpha & \text{N = proiezione forza peso} \\ R = mg \sin \alpha \end{cases}$$

E quindi il punto materiale scivola lungo il piano inclinato con accelerazione in modulo pari a a tale che

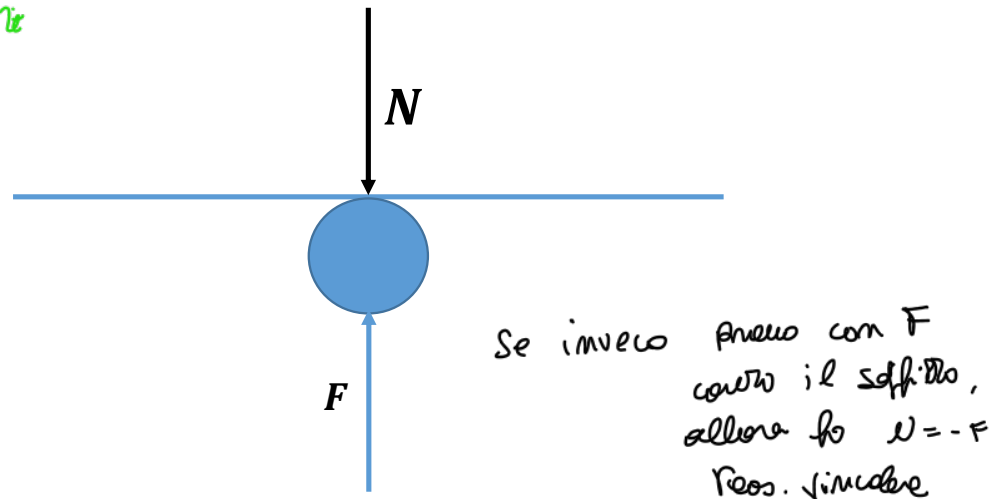
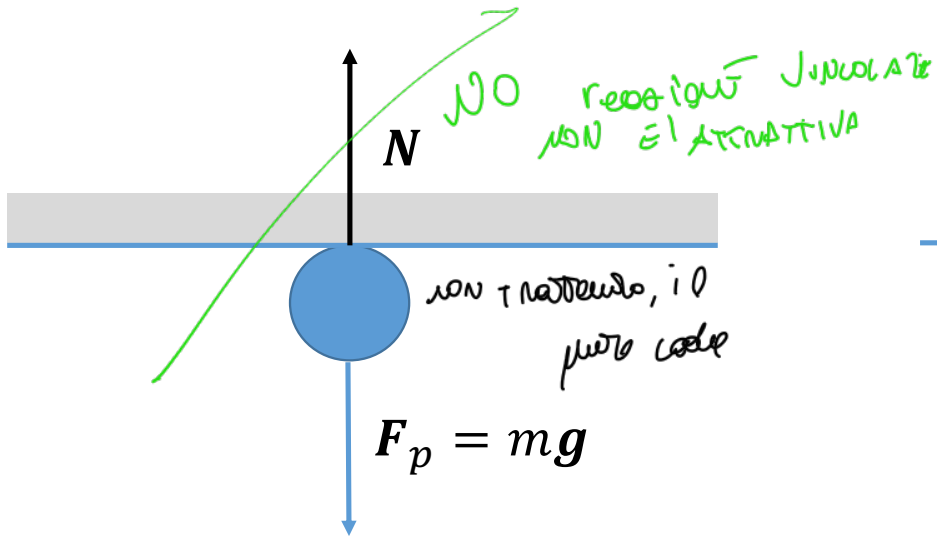
$$ma = \overset{R}{mg \sin \alpha}$$

quindi

$$\boxed{a = g \sin \alpha}$$

in modulo *Modulo accel. punto materiale*

Forze di interazione (contatto) con superficie – vincolo unilaterale



Si osserva che la forza di contatto ha solo carattere respingente, non può “attrarre” i corpi ma solo impedire che essi oltrepassino la superficie. Se il punto materiale è a contatto con il soffitto, ad esempio, per evitare la caduta dovrebbe attrarre verso di sé il punto, ma in un contatto semplice privo adesione questo non può succedere e il punto materiale, non trattenuto, cade.

Contatto con superficie liscia $\rightarrow$ vincolo unilaterale.

Forze di interazione con altri corpi - elementi flessibili

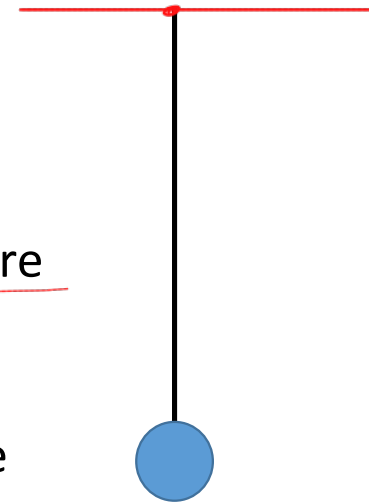
- Per poter trattenere un punto materiale al soffitto possiamo utilizzare un filo o un cavo. *per non farlo cadere*

Fili, cavi, funi, catene ecc. in meccanica sono chiamati elementi flessibili monodimensionali.

Monodimensionali--> una dimensione prevalente rispetto alle altre due

Flessibili --> quando non sono soggetti a forze, possono assumere qualsiasi configurazione, inoltre possono applicare e resistere solo forze di trazione (possono solo essere tesi).

*applicano forze di trazione
solo quando sono tesi*



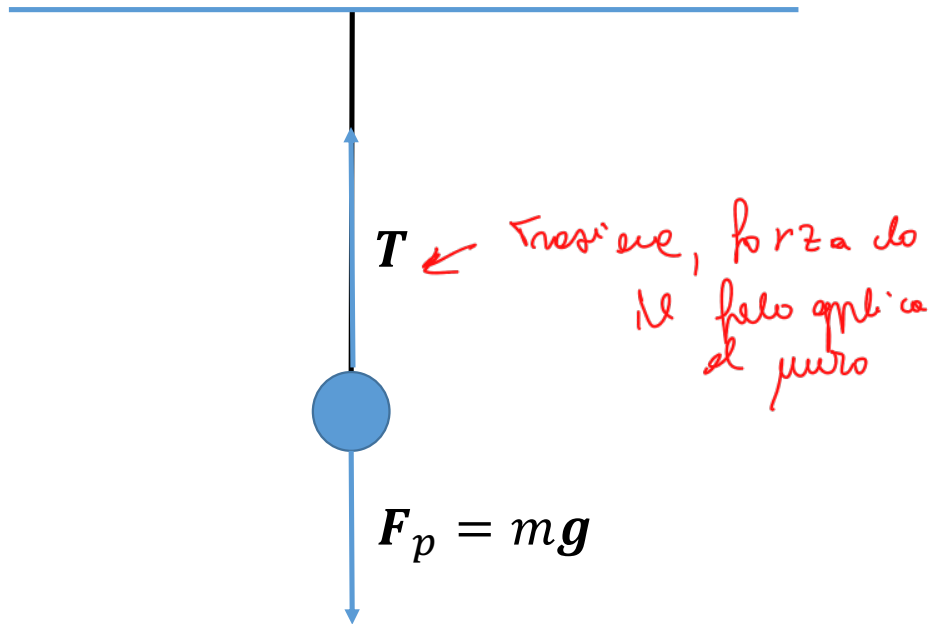
Corpo sospeso da un filo

- Analizziamo un corpo sospeso al soffitto con un filo in condizioni statiche. Il corpo è soggetto alla propria forza peso F_p . Dato che il corpo non cade, la risultante delle forze applicate su di esso deve essere nulla, quindi il filo esercita sul corpo una forza T tale che:

Del punto di vista del punto

$$\begin{aligned} F_p + T &= 0 \\ T &= -\vec{F}_p \end{aligned}$$

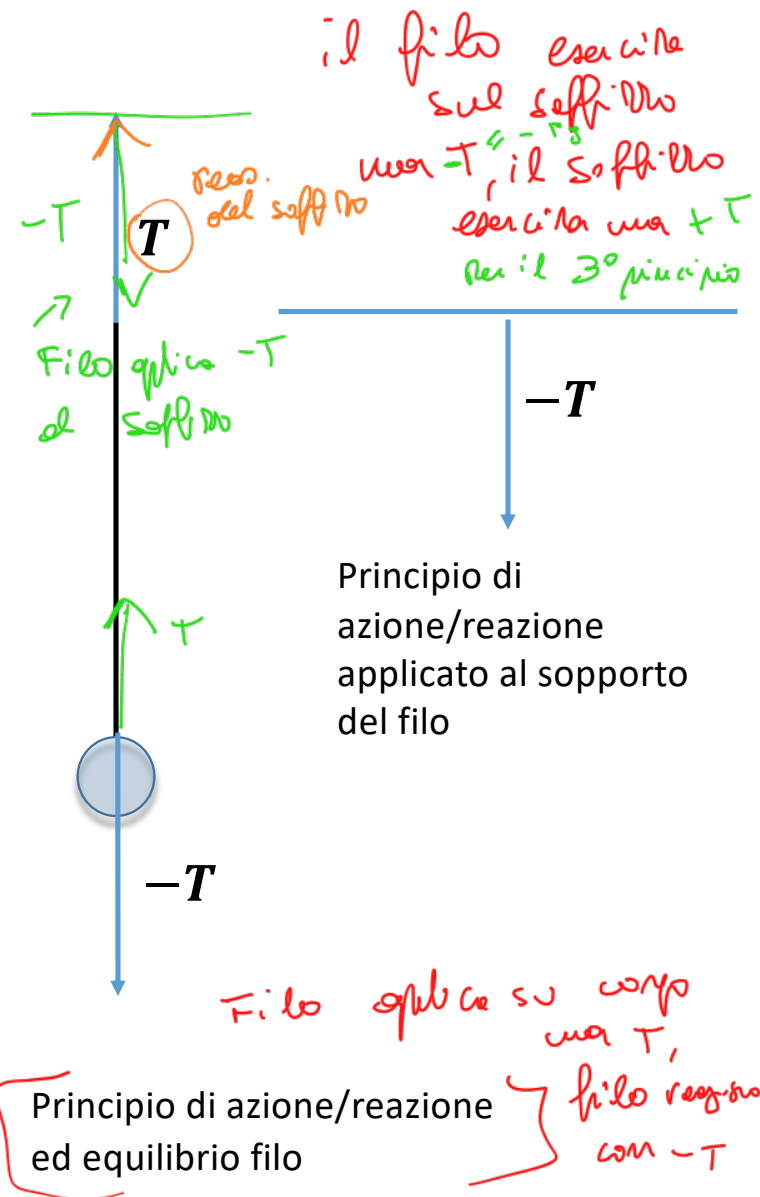
$m \vec{a} = 0$ $\vec{a} = 0$



Corpo sospeso da un filo

*dal punto di vista
del soffitto*

Per il terzo principio della dinamica, il corpo esercita sul filo una forza $-T$. Sul filo agisce anche la reazione applicata dal soffitto, che trattiene l'altro capo del filo. Anche il filo è in equilibrio, quindi la forza che il soffitto esercita sul filo sarà T . *Per tenerlo fisso* Applicando di nuovo il terzo principio della dinamica, sul soffitto, per effetto del filo, sarà esercitata una forza $-T = mg$.



Corpo sospeso da un filo

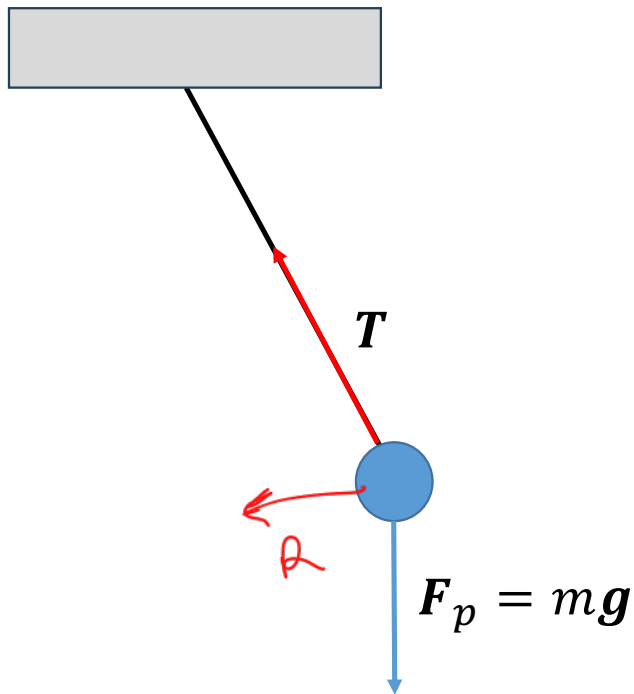
Forza tensione ha sempre la STESSA DIREZIONE DEL FILO!

In condizioni dinamiche, il corpo sospeso può avere accelerazione diversa da zero e risulta

se $\vec{a} \neq \vec{0}$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_p + \mathbf{T} = m\mathbf{a}$$

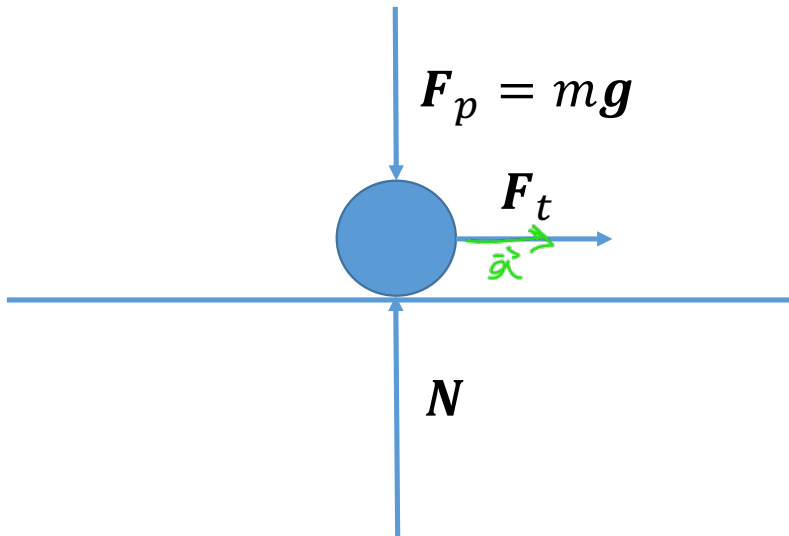
Dato che il filo può solo essere teso, la direzione della forza $\mathbf{T}$ è comunque la stessa del filo.



ATTENTO

Forze di interazione con altri corpi - introduzione all'attrito

Contatto con superficie liscia *orizzontale
e verticale.*



Consideriamo un punto materiale appoggiato su una superficie piana liscia (priva di attrito), a cui è applicata una forza orizzontale F_t , oltre che alla forza peso e alla reazione del piano. La risultante delle forze è data da:

$$F_p + N + F_t \neq 0 \quad Q = F_T$$

La risultante è diretta orizzontalmente, risulta infatti:

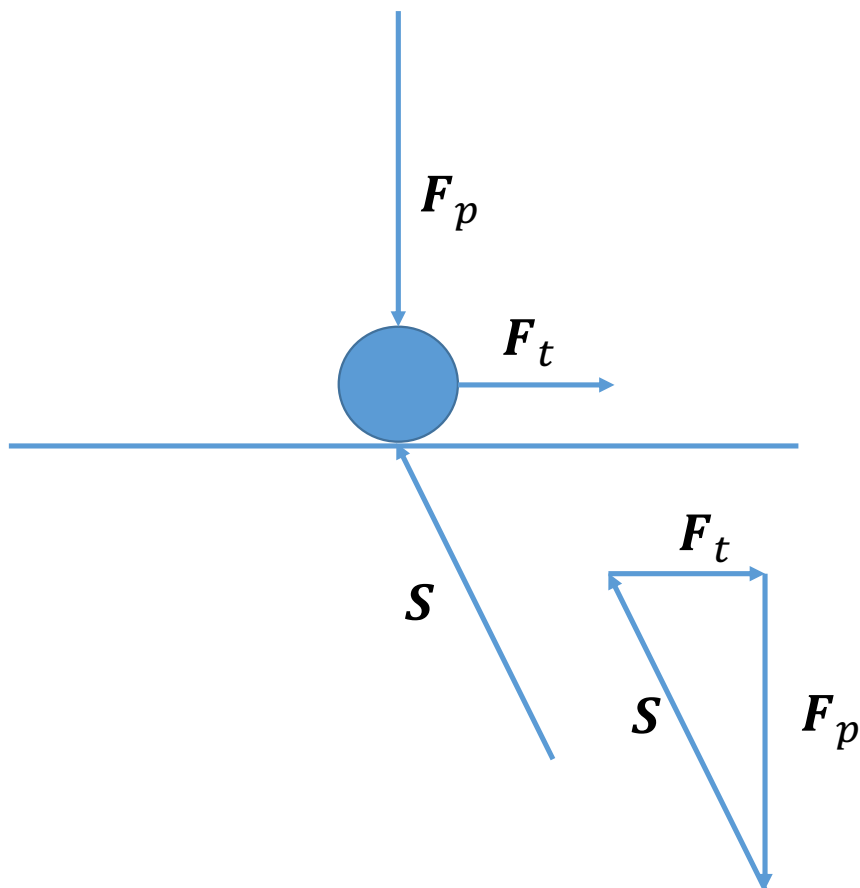
$$N = -F_p$$

e quindi per il secondo principio della dinamica l'accelerazione del punto materiale è data da:

$$F_t = ma \quad \text{orizzontale
sulle } \vec{a}$$

Forze di interazione con altri corpi - introduzione all'attrito

Forza di attrito – condizioni statiche



se $SUP.$ NON LISCIA
appl. $\vec{F}_t$ e il corpo non si muove

L'esperienza ci insegna che molto spesso, se la superficie non è perfettamente liscia, anche applicando una forza orizzontale $\vec{F}_t$ ad un punto materiale inizialmente in quiete, questo non inizia a muoversi.

- Questo significa che la risultante delle forze continua a essere nulla anche dopo l'applicazione della forza orizzontale, che è possibile solo se la reazione vincolare S del piano non è verticale, ma inclinata in modo che risulti

$$[\vec{F}_p + \vec{S} + \vec{F}_t = 0]$$

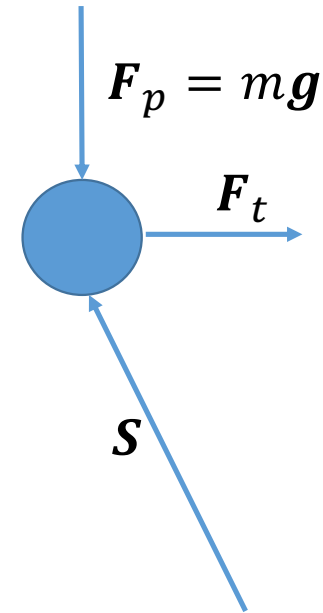
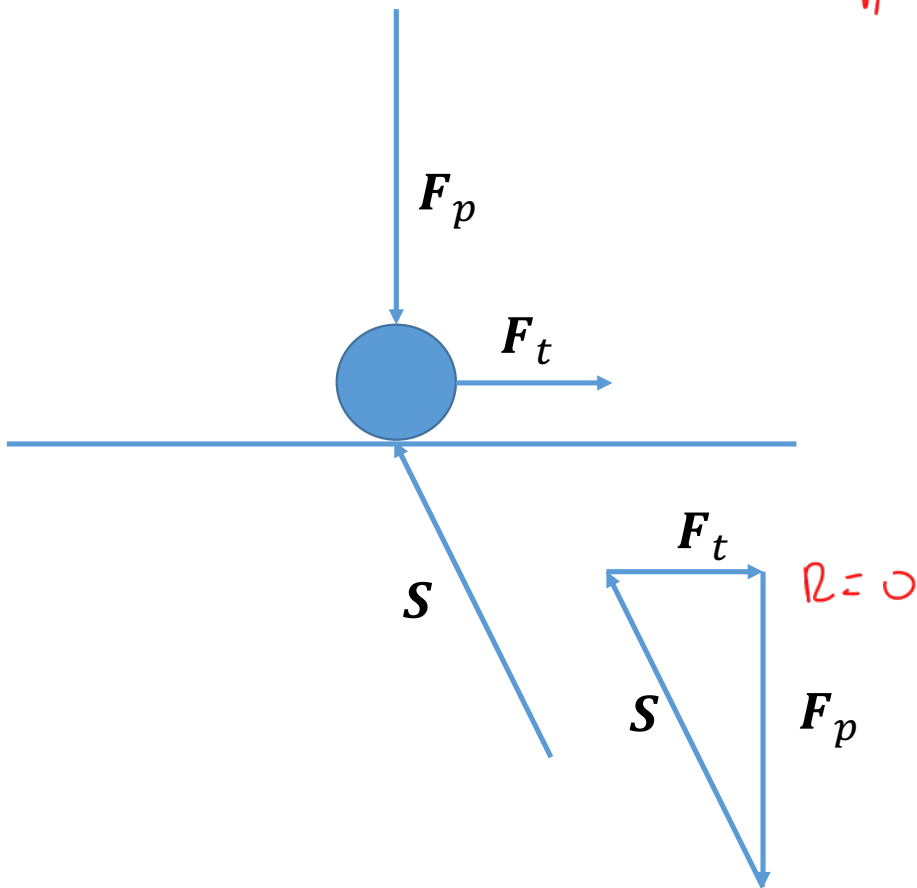
$$Q = 0 \quad \text{e} \quad \vec{a} = 0$$

→ Reazione vincolare $\vec{S}$ non sarà
verticale

Forze di interazione con altri corpi - introduzione all'attrito

Forza di attrito – condizioni statiche

applied $\vec{F}_t$, non
si muove il
corpo



$$F_p + F_t + S = 0$$

Forze di interazione con altri corpi - introduzione all'attrito

res. vincente
La forza $\mathbf{S}$ del piano in questo caso non è verticale e si può scomporre in due componenti $\mathbf{N}$ (verticale) ed $\mathbf{A}$ (orizzontale), tali che

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{N} + \mathbf{A}}$$

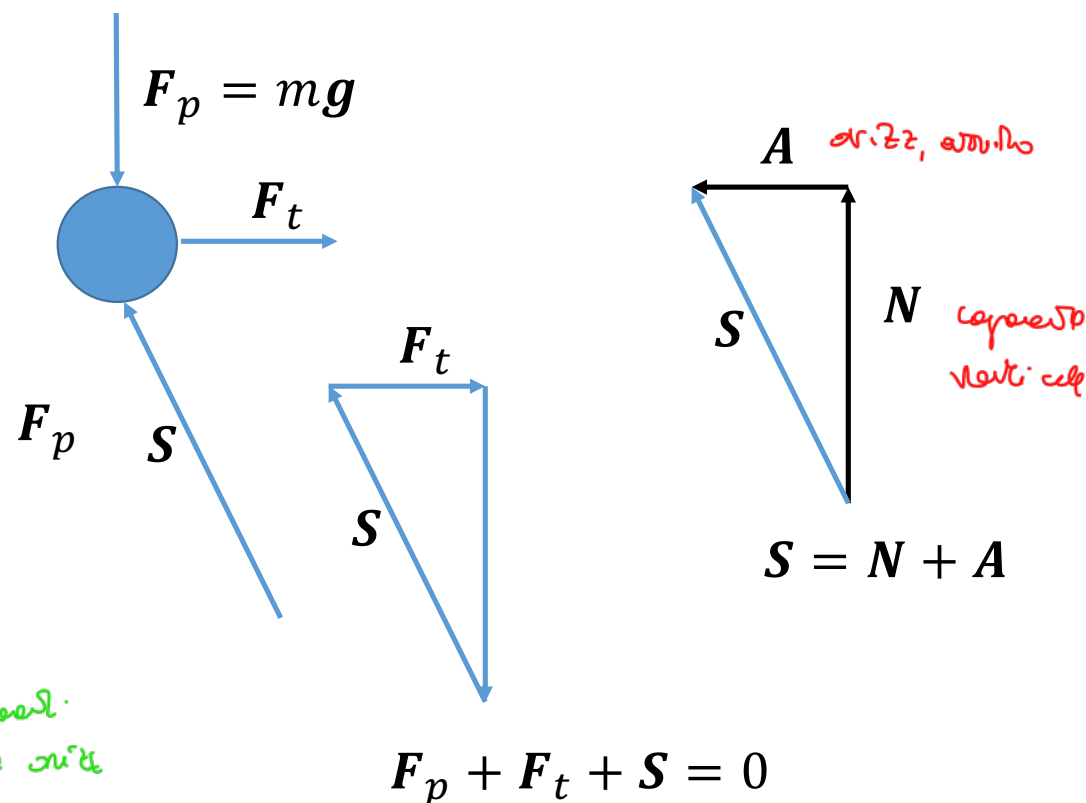
Per l'equilibrio del punto materiale abbiamo visto che risulta

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{S} + \mathbf{F}_t = 0$$

Dato che $\mathbf{F}_t$ è orizzontale e $\mathbf{F}_p$ verticale, per l'equilibrio risulta che

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\mathbf{F}_t \\ \mathbf{N} &= -\mathbf{F}_p \end{aligned}}$$

*diviso in componenti
verticali e orizzontali*



Forze di interazione con altri corpi – modello dell'attrito di Coulomb (statico)

$$\vec{A} = -\vec{F}_T$$

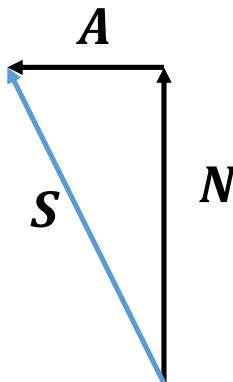
- Se il modulo di $\vec{F}_t$ (e quindi di A) aumenta oltre un certo limite, il punto materiale inizia a scivolare orizzontalmente sul piano. Quanto vale questo limite?

Secondo il modello di attrito proposto da Coulomb il punto materiale rimane in equilibrio fintanto che

MODULO

$$A \leq \mu_s N$$

corpo rimane statico
finché $A \leq \mu_s N$

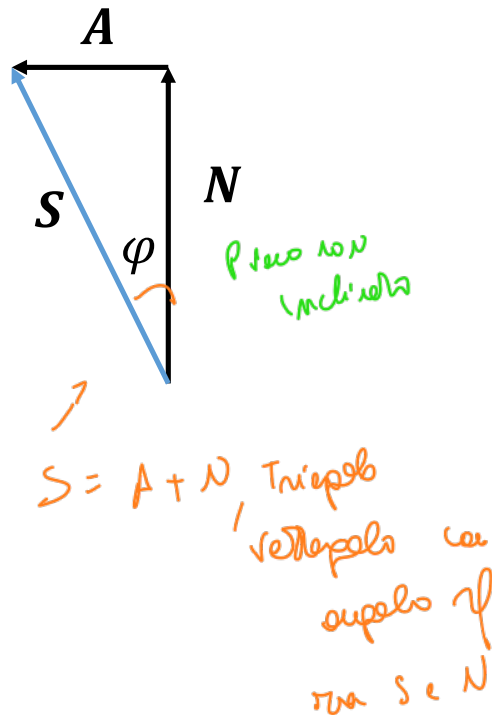


Il coefficiente μ_s prende il nome di coefficiente di attrito statico e dipende dalle caratteristiche delle superfici:

- Materiali
- Finitura superficiale
- Presenza di contaminanti
- Geometria delle superfici di contatto

Se cresce $\vec{F}_t$ cresce A , finché $A \leq \mu_s N$
 altrimenti poi scivola via
 MODULO
 $R = 0$

Forze di interazione con altri corpi – modello dell'attrito di Coulomb (statico)



Abbiamo introdotto μ_s coefficiente di attrito statico, tale che

$$A \leq \mu_s N \quad \text{MON 1}$$

Possiamo riscrivere questa relazione come

$$\frac{A}{N} \leq \mu_s$$

Ma osservando il triangolo rettangolo costituito dai vettori A , N (cateti) ed S (ipotenusa) risulta anche

$$\frac{A}{N} = \tan \varphi$$

$$A = S \sin \varphi$$

$$N = S \cos \varphi$$

dove φ è l'angolo tra la forza S e la direzione normale $\vec{S}$ e $\vec{N}$

$$\tan \varphi \leq \mu_s$$

Affinché il punto materiale rimanga in equilibrio è necessario che

$$\varphi \leq \varphi_s = \arctan \mu_s$$

Essendo $\varphi_s = \arctan \mu_s$ angolo di attrito statico.

SONO IN CONDIZ. STATICHE FINCHÉ $\varphi \leq \varphi_s = \arctan \mu_s$
 $\varphi = \text{angolo tra } S \text{ e } N$

Se avendo A , o d'impulso N , allora γ

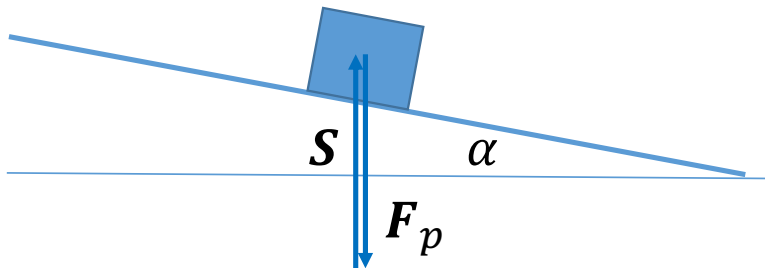
Piano inclinato con attrito, condizioni statiche

ATLANTO STATICO
PIANO INCLINATO

NO FORZE APPLICATE Consideriamo un punto materiale su un piano inclinato con attrito. Se l'inclinazione del piano è piccola e l'attrito sufficiente, osserviamo che il punto rimane in equilibrio sul piano. In queste condizioni risulta chiaramente

$$[S + F_p = 0]$$

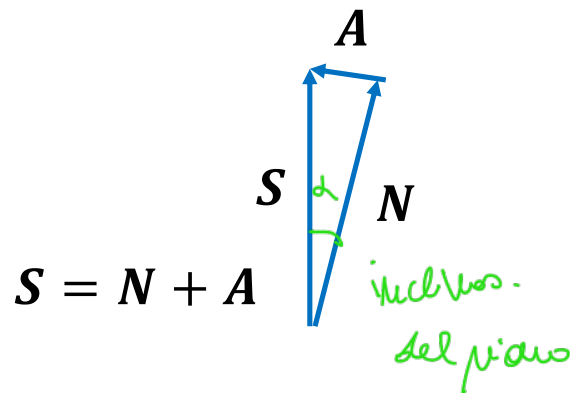
→
Se è verticale



Possiamo anche in questo caso scomporre la forza di contatto S nelle componenti normale N e tangenziale A , cioè

$$S = N + A$$

→
 N è ortogonale al piano.
→
 A è tangente al piano



Piano inclinato con attrito, condizioni statiche

Richiamando μ_s , il coefficiente di attrito statico definito in precedenza, anche in questo caso risulta

$$A \leq \mu_s N$$

Che possiamo riscrivere come

$$\frac{A}{N} \leq \mu_s$$

ma osservando il triangolo rettangolo formato dai vettori S , N ed A si vede facilmente che

$\alpha >$ inclin. piano

$$\frac{A}{N} = \tan \alpha$$

$$\begin{aligned} A &= S \sin \alpha \\ N &= S \cos \alpha \end{aligned}$$

la condizione imposta dal modello di attrito static di Coulomb può essere riscritta come

$$\boxed{\tan \alpha \leq \mu_s}$$

indicando quindi con $\varphi_s = \arctan \mu_s$ l'angolo di attrito statico, si conclude che il punto materiale rimane in equilibrio sul piano se

$$\alpha \leq \varphi_s$$

ANGOLO DI ATTRITO STATICO.

Cioè se l'inclinazione del piano è inferiore all'angolo di attrito. Se questa condizione non è verificata, il punto scivola lungo il piano.

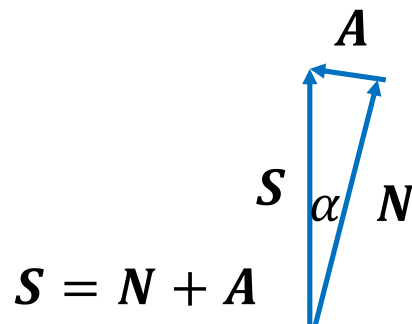
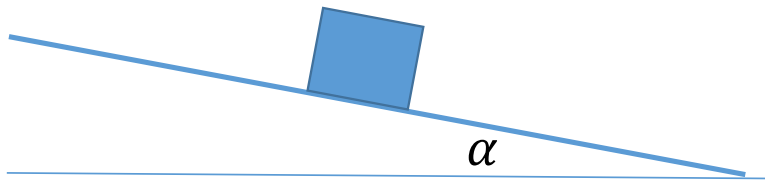
IL PUNTO RIMANE FERMO SE

inclin. piano

$$\alpha \leq \varphi_s = \arctan \mu_s$$

angolo di attrito statico

altrimenti il punto scivola



Forze di interazione con altri corpi – modello dell'attrito di Coulomb (dinamico)

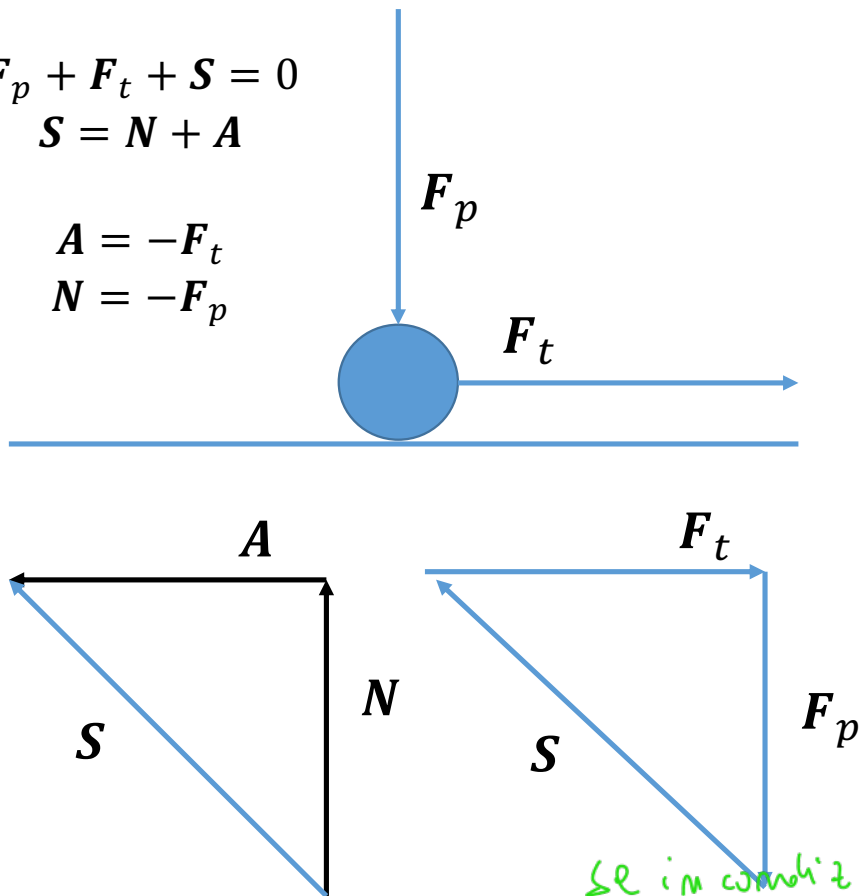
① Sup. piana, punto materiale, dinamico

$$F_p + F_t + S = 0$$

$$S = N + A$$

$$A = -F_t$$

$$N = -F_p$$



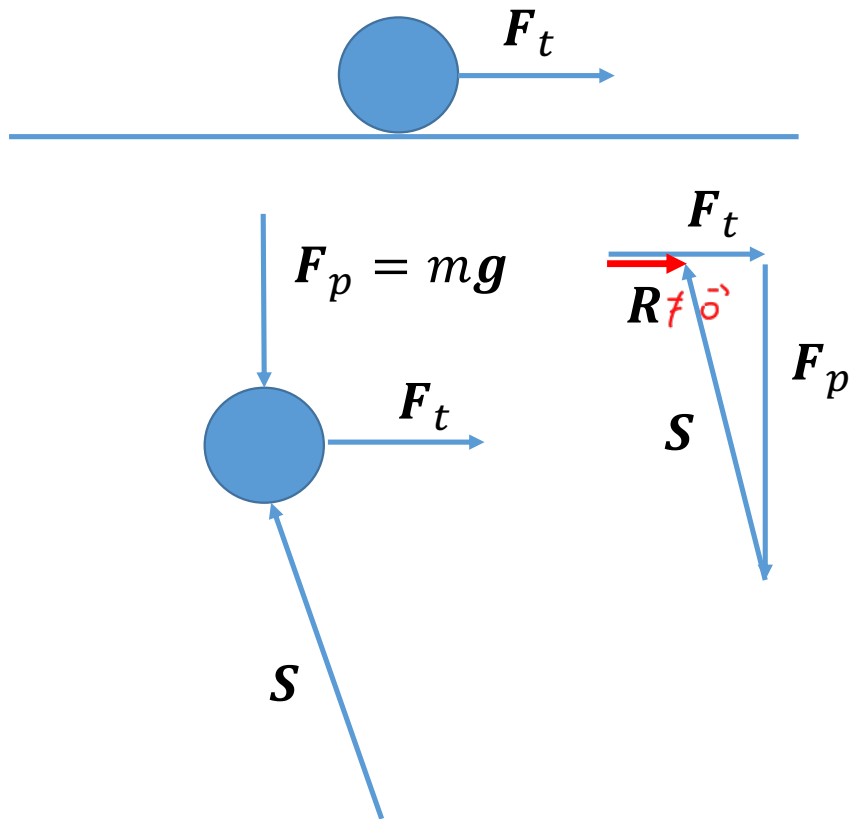
Analizziamo il caso dinamico. Consideriamo un punto materiale su una superficie orizzontale con attrito, soggetto a una forza tangenziale F_t . Abbiamo visto che in questo caso la reazione del piano S non è orizzontale e può essere scomposta in due componenti A ed N . Il punto rimane in equilibrio se $A \leq \mu_s N$

F_t cresce, cresce A finché

Se invece $A > \mu_s N$ il punto materiale inizia a scivolare sulla superficie, non è più in condizioni statiche.

Se in condizione statiche, posso usare formula di cui

Forze di interazione con altri corpi – modello dell'attrito di Coulomb (dinamico)



Se $A > \mu_s N$ il punto materiale inizia a scivolare sulla superficie, avrà quindi un'accelerazione $a \neq 0$ diretta orizzontalmente. $\vec{Q} \neq \vec{0}$

Per il secondo principio della dinamica, ricordiamo che

$$[R = ma]$$

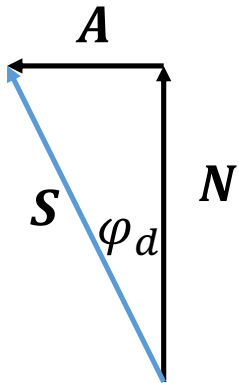
quindi la risultante delle forze applicate al punto materiale non è nulla

$$F_p + F_t + S = R$$

Ed ha direzione orizzontale (dato che l'accelerazione a è orizzontale).

Forze di interazione con altri corpi – modello dell'attrito di Coulomb (dinamico)

$$A = \mu_d N$$



In questo caso il modello di attrito di Coulomb introduce la seguente relazione tra la componente normale e tangenziale della forza di contatto

$$A = \mu_d N$$

Essendo μ_d il coefficiente di attrito dinamico.

La relazione precedente può essere riscritta come

$$\frac{A}{N} = \mu_d$$

$$\frac{A}{N} = \tan \varphi_d$$

essendo $\varphi_d = \arctan \mu_d$ angolo di attrito dinamico

*q' angolo tra $\vec{S}$ e $\vec{N}$
(verticale)*

*piano non
inclinato*

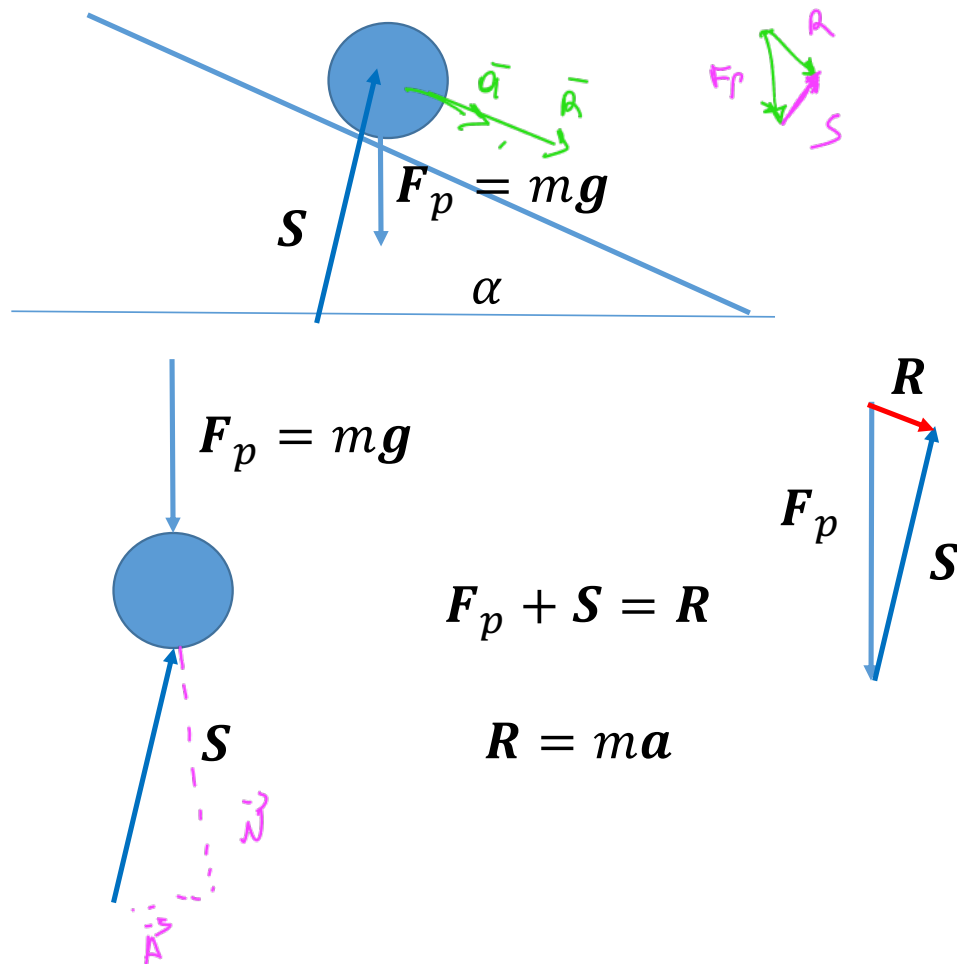
$$\tan \varphi_d = \mu_d$$

$$\varphi_d = \arctan \mu_d$$

*angolo
di attrito
dinamico*

Piano inclinato con attrito, condizioni dinamiche

lo include dopo
il piano
 $\alpha > \varphi_s = \arctan \mu_s$



In condizioni dinamiche, il punto materiale scivola lungo il piano inclinato con un'accelerazione $\underline{a \neq 0}$. Per il secondo principio della dinamica risulta

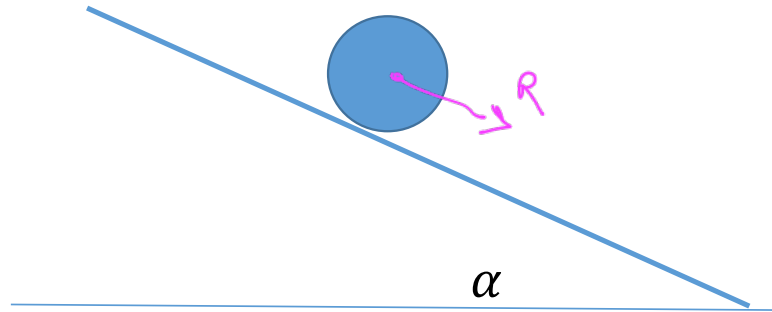
$$\underline{R = ma} \quad \underline{R \neq \vec{0}}$$

Essendo R la risultante delle forze applicate al punto, cioè

$$\underline{F_p + S = R}$$

In condizioni dinamiche $\underline{R \neq 0}$ e ha direzione parallela al piano.

Piano inclinato con attrito, condizioni dinamiche



In condizioni dinamiche $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ e ha direzione parallela al piano. Possiamo anche in questo caso scomporre la forza di contatto nella componente normale e parallela al piano

$$\mathbf{S} = \mathbf{N} + \mathbf{A}$$

Per il modello coulombiano dell'attrito risulta, come abbiamo visto in precedenza

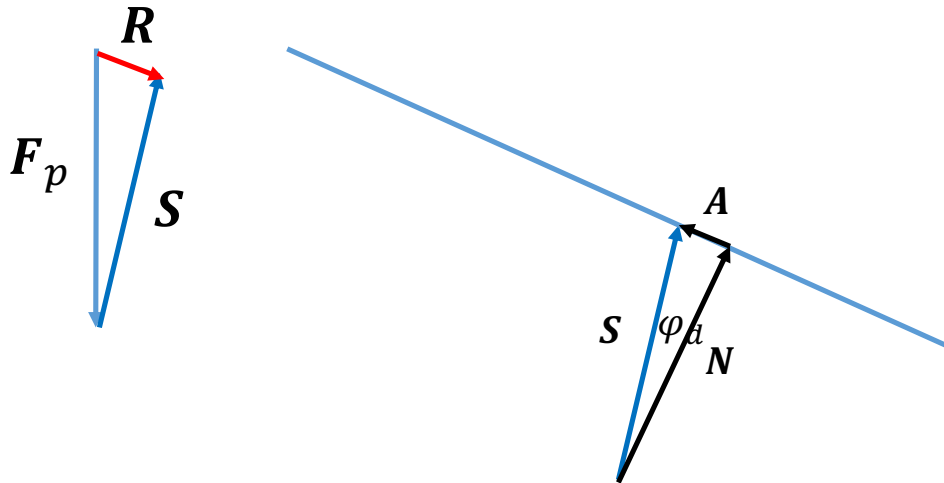
$$A = \mu_d N$$

$$\frac{A}{N} = \mu_d$$

$$\frac{A}{N} = \tan \varphi_d$$

$$\tan \varphi_d = \mu_d$$

si applica solo se $S < N$



Piano inclinato con attrito, condizioni dinamiche



$$A = \mu_d N$$

*NON E' piu diretta
come Fp (costante)*

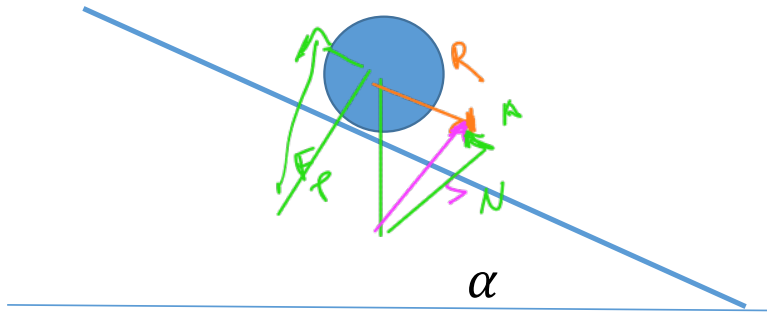
$$A = \mu_d N$$

Osserviamo che la componente normale è pari a

$$N = mg \cos \alpha$$

Sostituendo e sviluppando i calcoli si ottiene

$$A = \mu_d N = \mu_d mg \cos \alpha$$



MODULO

$$R = mg \sin \alpha - \mu_d mg \cos \alpha$$

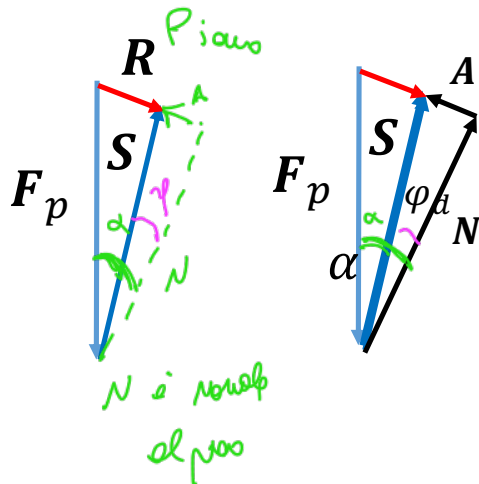
L'accelerazione del punto materiale che scivola lungo un piano inclinato è

$$a = g \sin \alpha - \mu_d g \cos \alpha$$

$$= g(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)$$

*accelerazione
sul
piano inclinato*

Ricordiamo che l'accelerazione nel caso di superficie liscia era $a = g \sin \alpha$, in presenza di attrito l'accelerazione diminuisce di $\mu_d g \cos \alpha$



*A è diretta
con R*



$$R = mg \sin \alpha$$

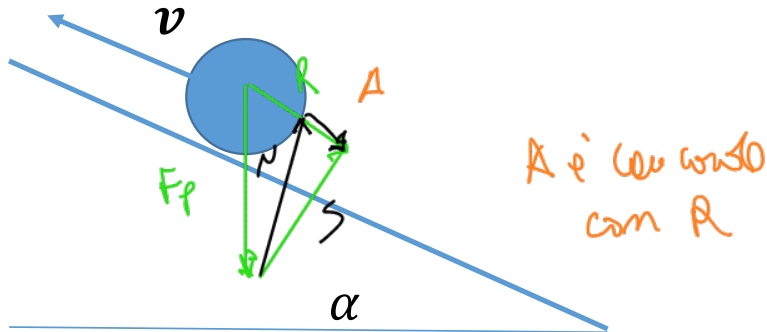
$$R = ma$$

$$a = g \sin \alpha$$



atrito, forze dissipative
si oppone al moto

Piano inclinato con attrito, condizioni dinamiche



- Analizziamo il caso in cui il punto materiale è lanciato sul piano verso l'alto e si sta muovendo in salita.

Anche in questo caso risulta cos dinamico

$$A = \mu_d N$$

$$N = mg \cos \alpha$$

$$A = \mu_d N = \mu_d mg \cos \alpha$$

Ma dobbiamo fare attenzione al verso di A che in questo caso è verso il basso (l'attrito ostacola il moto quindi la direzione della forza di attrito è sempre opposta a quella del moto). Sostituendo e sviluppando i calcoli si ottiene

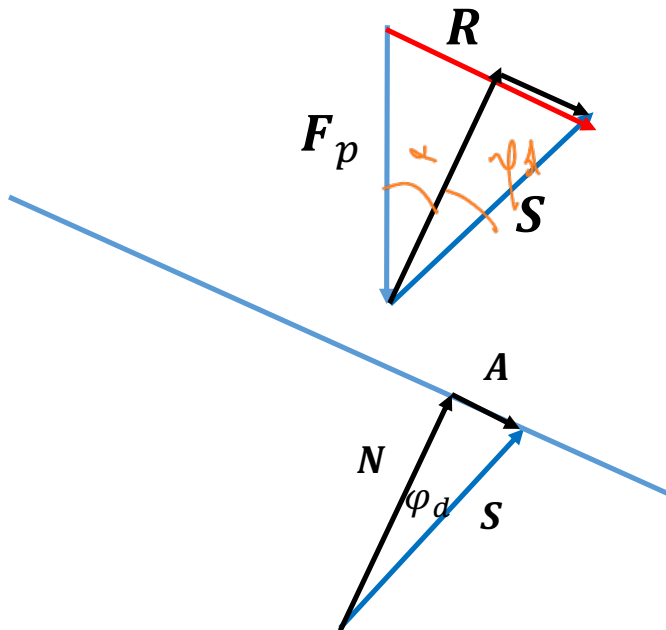
$$R = mg \sin \alpha + \mu_d mg \cos \alpha$$

e l'accelerazione in questo caso è pari a

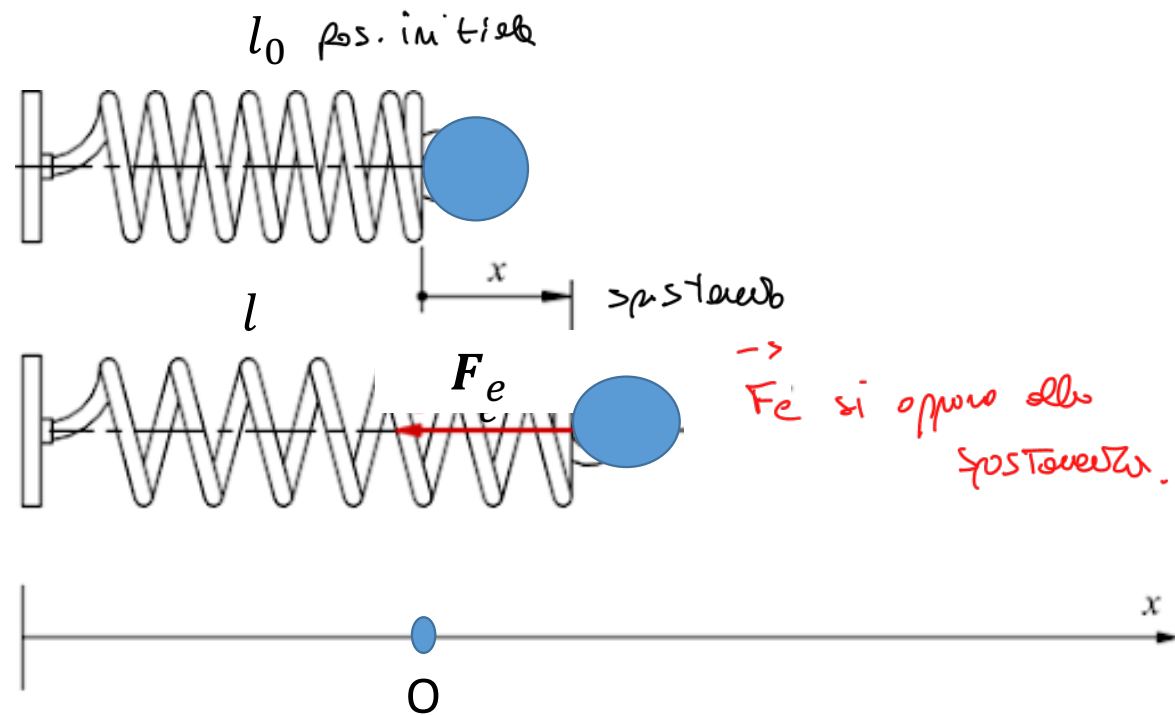
$$a = g \sin \alpha + \mu_d g \cos \alpha$$

$$= g(\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha)$$

da frenata e
aiuto dell'atrito



Forza elastica - introduzione

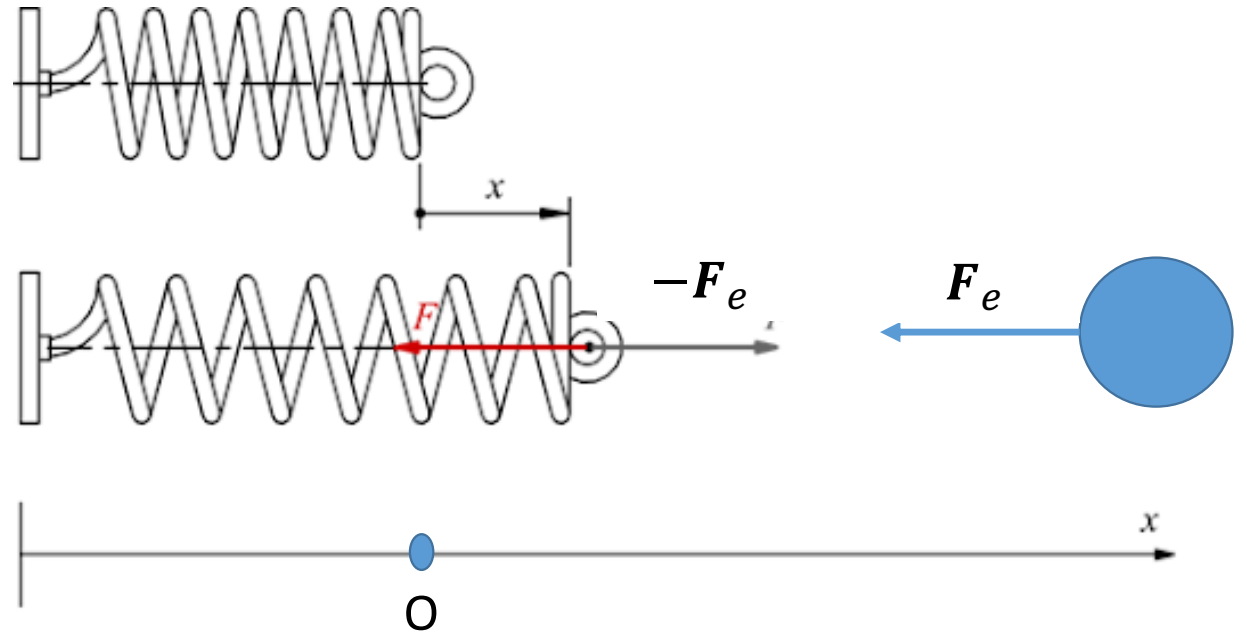


$\rightarrow F_e$ si oppone allo spostamento.

$$x = l - l_0$$

$$\vec{F}_e = -kx\hat{i}$$

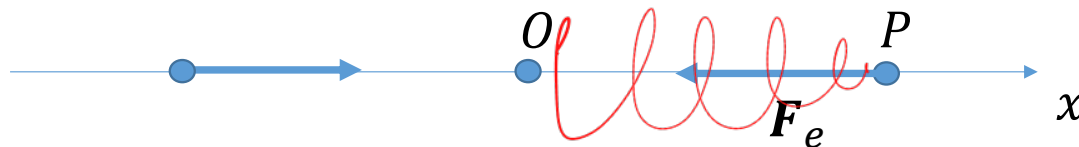
Forza elastica - introduzione



$$\mathbf{F}_e = -kx\mathbf{i}$$

il corp esercita
sulla molla
un $-F_e$

Forza elastica: elemento elastico



Un elemento elastico lineare che agisce in direzione x è un sistema in grado di applicare una forza pari a

(legge di Hooke)

$$\mathbf{F}_e = -kx\mathbf{i}$$

hup i
la molla applica
k = RIGIDEZZA [N/m]

k costante di rigidità dell'elemento elastico $[k]=[F]/L$

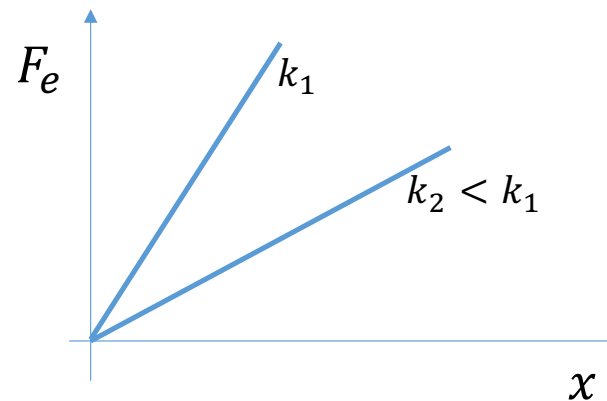
Nel SI si misura in N/m.

Molti componenti meccanici hanno (almeno in prima approssimazione) un comportamento che può essere rappresentato da questa legge.

Osserviamo che:

La direzione della forza è opposta allo spostamento. ←

Il modulo della forza è proporzionale allo spostamento.



• Forza elastica

Analizziamo la dinamica di un punto materiale di massa m collegato a un supporto fisso tramite una molla con costante elastica k . Applicando la seconda legge di Newton si ha:

lungo x, sul punto $F_e = ma$ *l'unica forza che agisce sul punto*

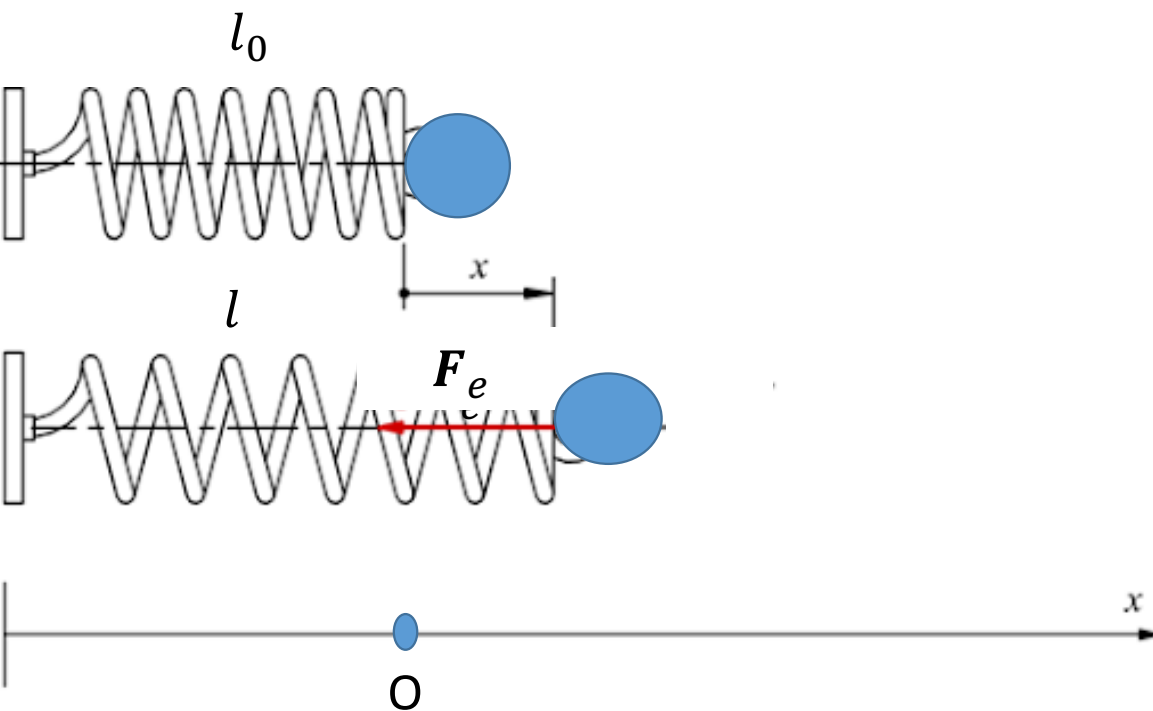
Considerando la componente in direzione del moto x e ricordando la relazione tra accelerazione e spostamento

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

Che possiamo riscrivere come

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

la forza, voglio sapere moto, so che sono di tipo armonico



Otteniamo quindi la seguente equazione differenziale

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

eq. di ff. del moto armonico

Forza elastica

Otteniamo la seguente equazione differenziale

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Che abbiamo visto essere l'equazione differenziale caratteristica del moto armonico, la cui soluzione è

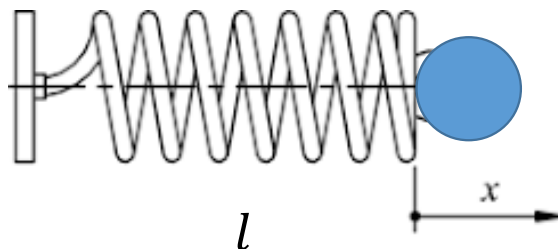
$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = A \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

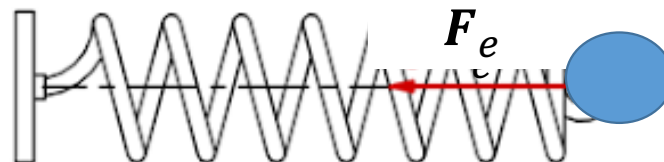
$$a(t) = -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

l_0



$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$



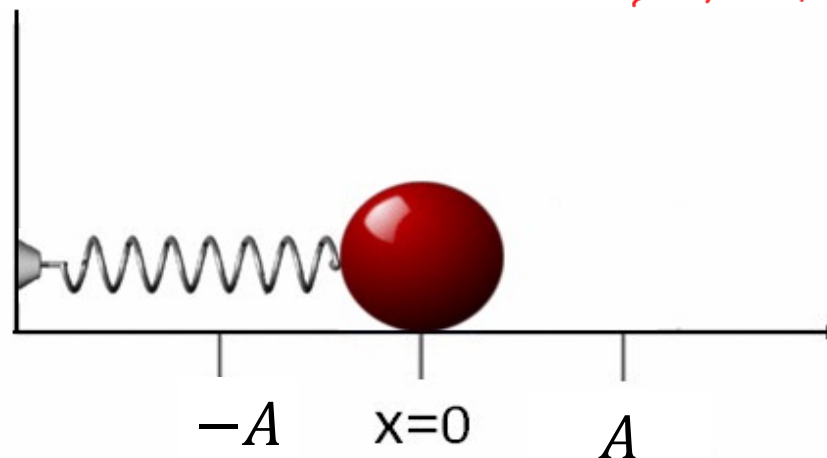
in questo caso

$$m \vec{a} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$



$$\Rightarrow x = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi\right)$$



Forza elastica

L'equazione differenziale che abbiamo trovato è:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Quella del moto armonico che abbiamo visto nelle lezioni precedenti era

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

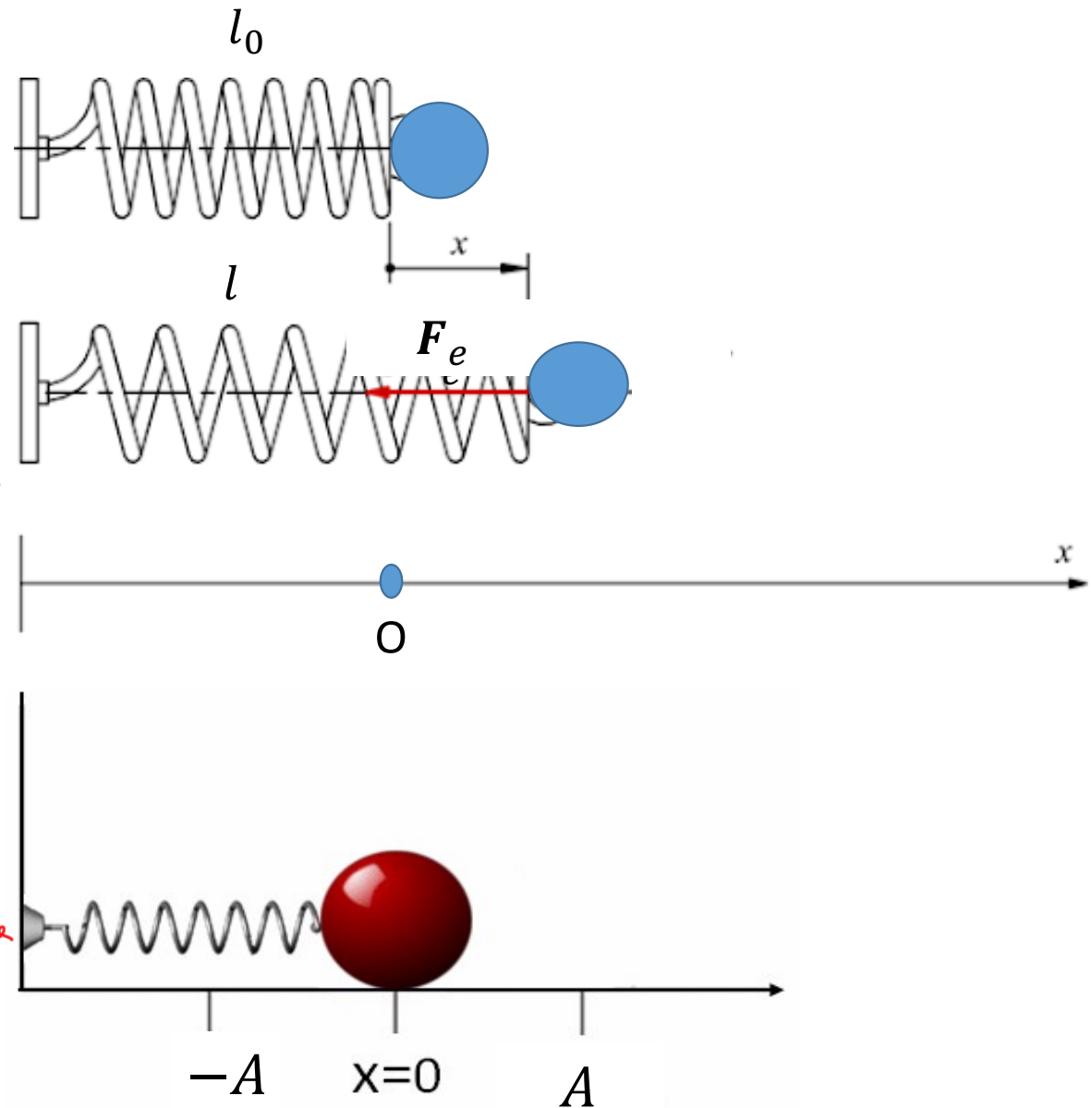
Hanno la stessa struttura, quindi anche in questo caso la soluzione è

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Moto armonico con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Moto armonico con pulsazione
si applica una forza elastica
e il moto è armonico.



Forza elastica

Caratteristiche del moto: *elastico*

- $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$
- $v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$
- $a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$

Pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ sec}$$

Frequenza

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ Hz}$$

PIC del 2° ordine, servono x_0, v_0 per trovare A, φ

L'ampiezza A e la fase φ dipendono dalle condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = v_0 = \frac{dx}{dt} \end{cases}$$

Ad esempio se il punto parte da una configurazione in cui la molla e' deformata, con velocita' nulla

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ v(0) &= 0 \end{aligned} \quad t=0$$

Sostituendo nelle espressioni di $x(t)$ e $v(t)$ i valori noti si ottengono due equazioni da cui possiamo ricavare A e φ

$$\begin{aligned} x_0 &= A \sin(\varphi) & A &= x_0 \\ 0 &= A\omega \cos(\varphi) & \varphi &= \pi/2 \end{aligned}$$

Risolvendo si ottiene

$$\begin{aligned} \varphi &= \pi/2 \\ A &= x_0 \end{aligned}$$

$$x > x_0 \cos(\omega t)$$

Elementi flessibili (fili, funi, ecc.)

Per modellare elementi flessibili come fili, cavi, funi, catene, tendini, ecc., in meccanica solitamente si fanno le seguenti ipotesi. Gli elementi flessibili sono:

- Inestensibili (la sua lunghezza non varia)
- Perfettamente flessibili (possono applicare forze soltanto se sono tesi)
- Massa trascurabile

*applicano Forze solo
di Tensione e
solo quando
sono Tesi*



Elementi flessibili (fili, funi, ecc.)

Consideriamo un elemento flessibile mantenuto teso grazie all'applicazione di due forze di trazione F_A ed F_B



Consideriamo due tratti infinitesimi di filo all'inizio e alla fine.

Indichiamo con T la tensione della fune.

Nel tratto iniziale

$$F_A + T = m_f a$$

2^a legge di Newton in un periodo di tempo

Ma abbiamo detto che la massa è trascurabile, quindi:

$$F_A = -T$$

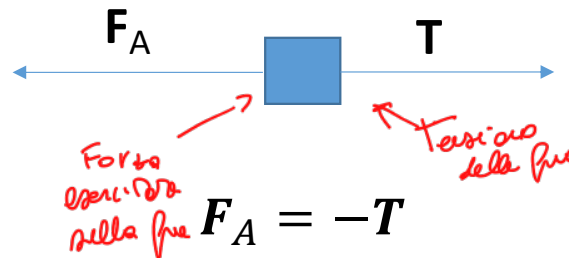
Analogamente nel tratto finale si ottiene

$$F_B - T = 0$$

Risulta quindi

$$F_B = -F_A = T$$

La tensione nella fune è costante, *in ogni punto*

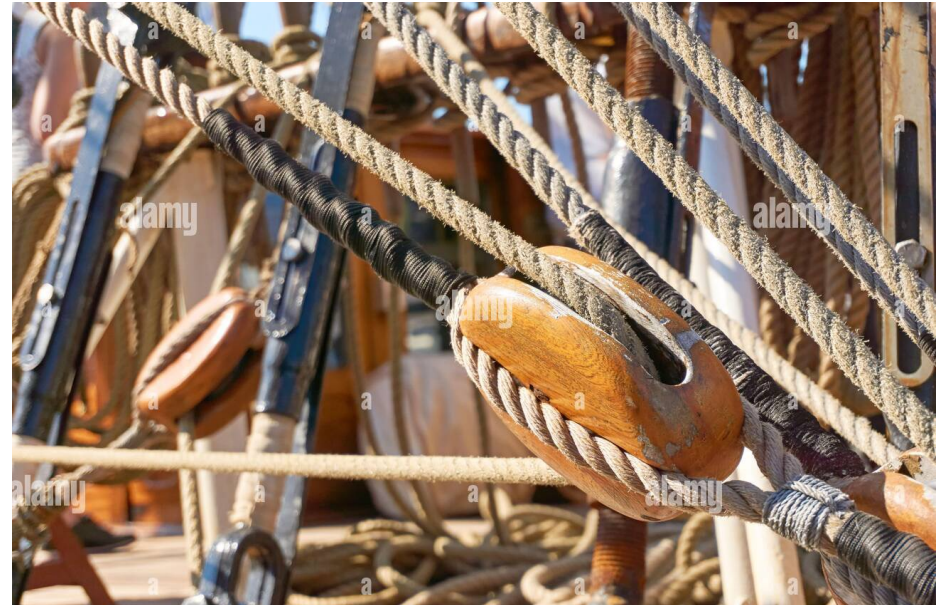
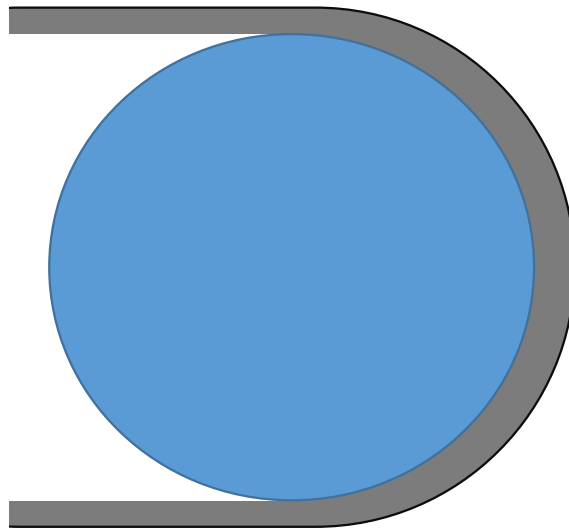


$$F_B = T = -F_A$$

Elementi flessibili (fili, funi, ecc.)

- Gli elementi flessibili sono spesso avvolti intorno a supporti rigidi, utilizzati per variarne la direzione. Questi elementi possono essere ad esempio carrucole, pulegge, perni ecc.

Supponiamo che il supporto sia fisso e che la fune possa scivolare senza attrito su di esso.



Elementi flessibili (fili, funi, ecc.)

Analizziamo un tratto di fune infinitesimo lungo il tratto in cui è a contatto con la carrucola.

Supponiamo che la carrucola sia circolare e che il tratto infinitesimo sia un arco di circonferenza con angolo al centro α . Indichiamo con T_1 e T_2 le tensioni ai capi del tratto infinitesimo, con N la reazione vincolare della carrucola.

Applichiamo la seconda legge di Newton al tratto infinitesimo, considerando le componenti delle forze in direzione tangente alla circonferenza

$$ma_t = T_2 \cos(\alpha/2) - T_1 \cos(\alpha/2)$$

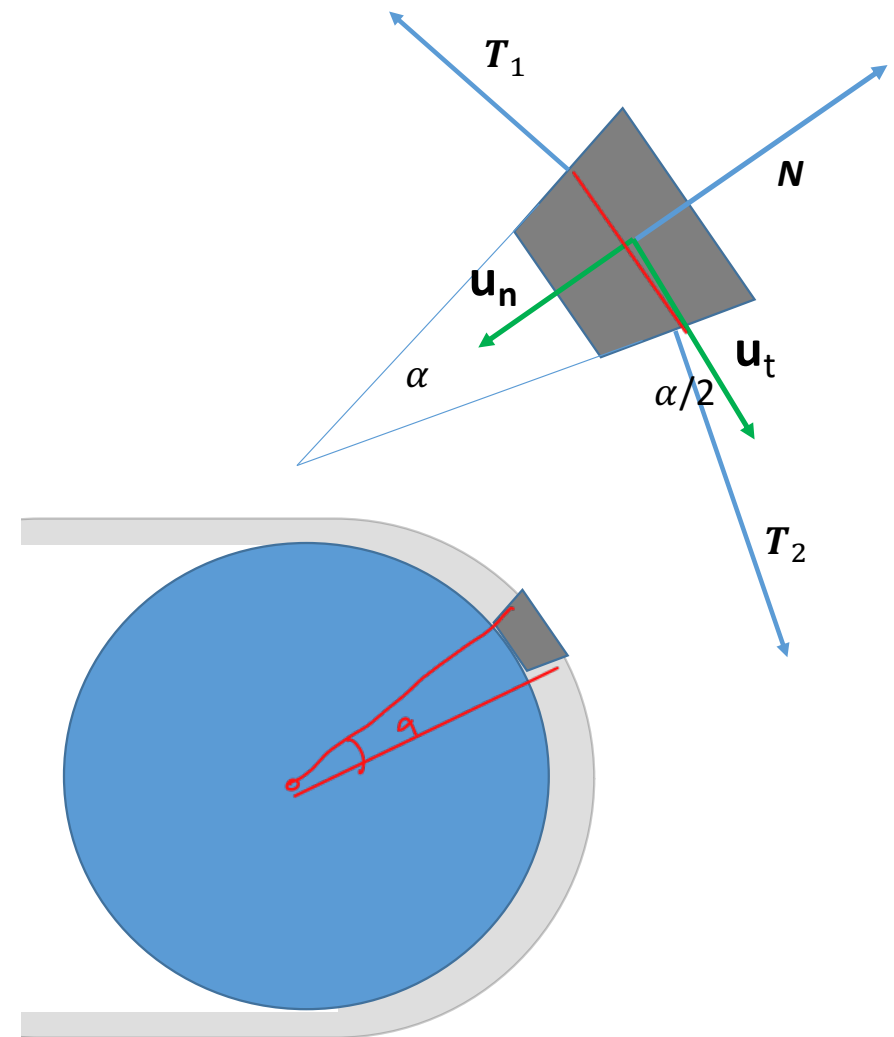
Dato che la massa è trascurabile

$$0 = T_2 \cos(\alpha/2) - T_1 \cos(\alpha/2)$$

Da cui si ottiene

$$T_2 = T_1 = T$$

Il modulo della tensione non varia lungo l'arco di contatto, cambia solo la direzione, che è tangente alla carrucola.

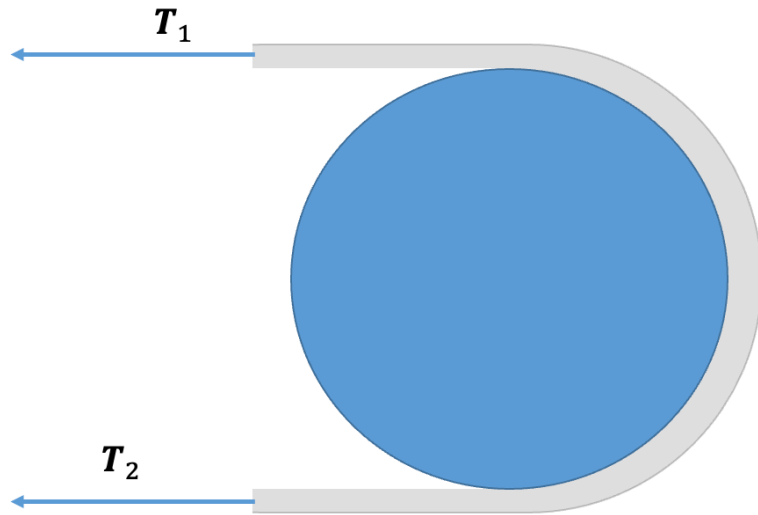


→ il modulo della tensione è costante e non varia su tutta la FUNE. Se su una carrucola ecc, il modulo è costante e

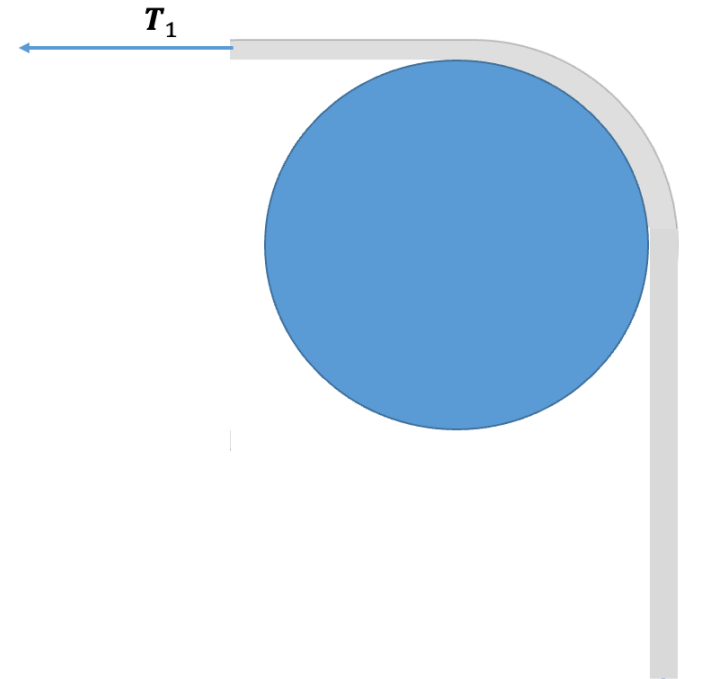
VARIA SOLO LA DIREZIONE, TANGENTE ALLA CURVATURA

Esempi

T = forza di tensione del filo quando viene tirato



$$T_1 = T_2$$



$$T_1 \neq T_2$$
$$|T_2| = |T_1| = T$$

Modulo sempre uguale

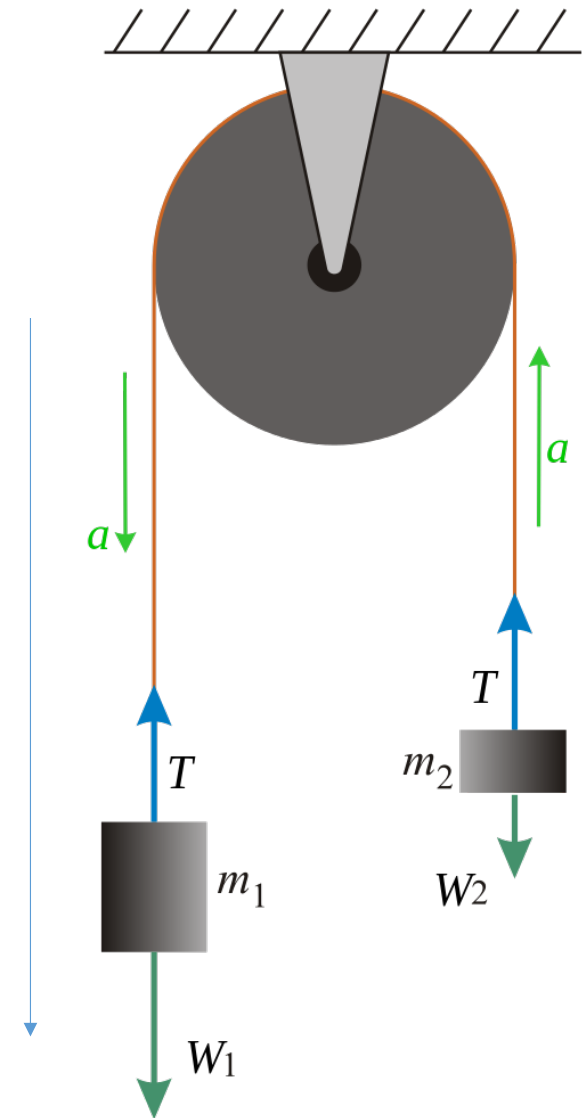
Da TROVARE T

Esempio #1, la macchina di Atwood

Consideriamo due masse sospese tramite un'unica fune ideale, che passa attraverso una carrucola di massa trascurabile.

Determiniamo l'accelerazione delle due masse e la tensione nella fune.

$\vec{a}?$ $\vec{\tau}?$



Esempio #1, la macchina di Atwood

Applichiamo la seconda legge di Newton alle due masse *Forza peso, lungo y ↓ y*

$$1) \quad m_1 a_1 = m_1 g - T$$

$$2) \quad m_2 a_2 = m_2 g - T \quad \text{è la stessa}$$

Dato che la fune è inestensibile, risulta necessariamente che

$$a_2 = -a_1 = -a \quad \text{in modulo sono uguali}$$

Sostituendo otteniamo:

$$m_1 a = m_1 g - T$$

$$-m_2 a = m_2 g - T \rightarrow \text{TOLGO LA TENSIONE}$$

Sottraendo membro a membro:

$$(m_1 + m_2) a = (m_1 - m_2) g$$

Da cui ricaviamo l'accelerazione

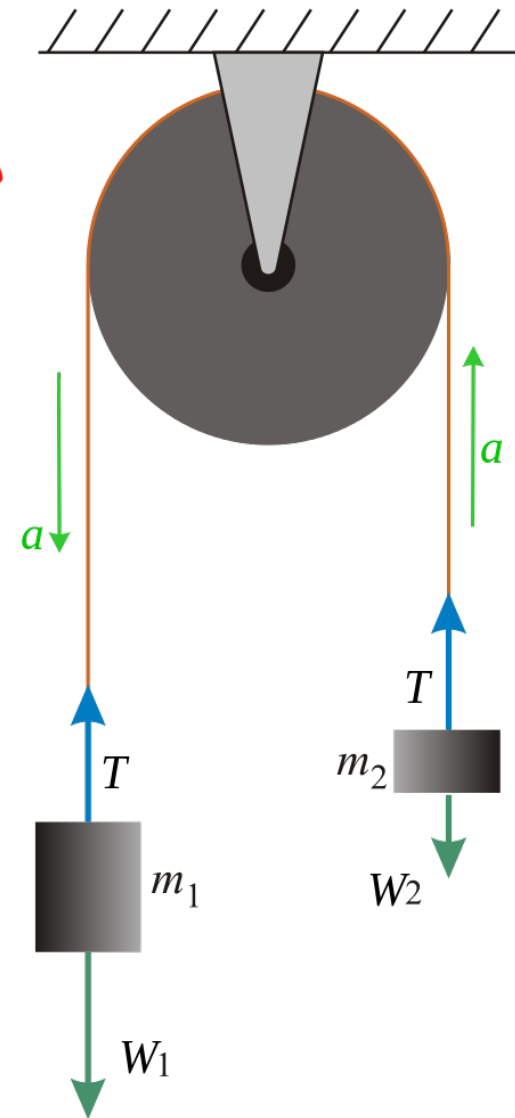
$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

determino l'accelerazione

Possiamo quindi determinare la tensione nella fune, che vale:

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$m_1 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) g = m_1 g - T$$



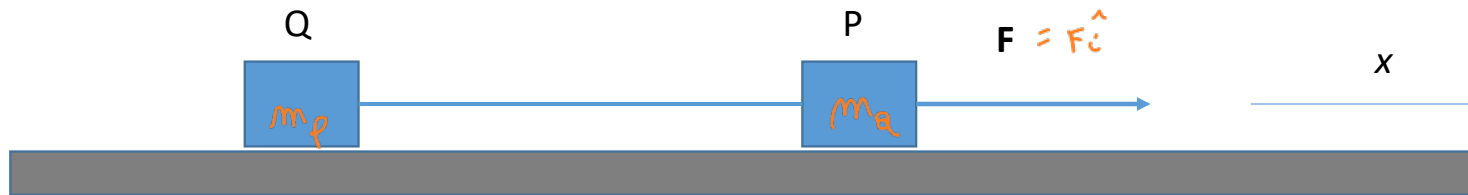
$$T = m_1 g - m_1 \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} g$$

$$= \frac{m_1 + m_1 m_2}{m_1 + m_2} g - \frac{m_1 + m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = T$$

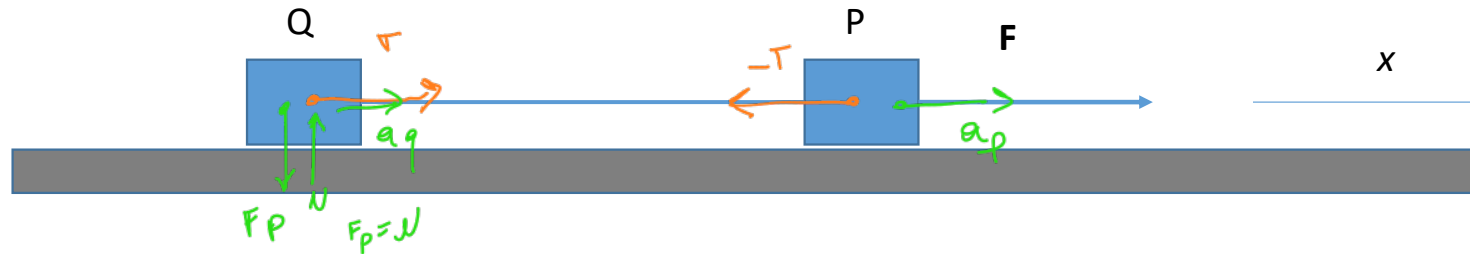
Esempio #2

Due punti materiali di massa m_P ed m_Q rispettivamente sono collegati da un filo e vincolati a scorrere su una superficie priva di attrito. Al punto P è applicata una forza $\mathbf{F} = F\mathbf{i}$. Calcoliamo l'accelerazione dei due punti e la tensione nel filo

$Q, T?$



Esempio #2



- Applichiamo la seconda legge di Newton alle due masse *lungo x*

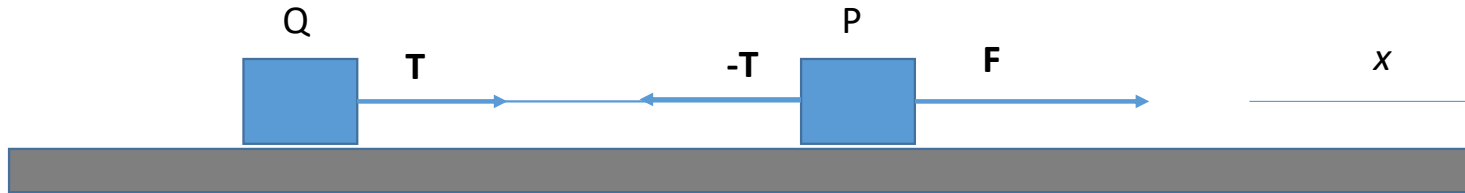
$$m_P a_P = F - T$$

$$m_Q a_Q = T$$

Dato che il filo è inestensibile, risulta *stemmo anche*

$$a_P = a_Q = a$$

Esempio #2



$$m_P a = F - T$$

$$m_Q a = T$$

Sommando membro a membro ottengo *tolgo T*

$$(m_P + m_Q) a = F$$

Da cui posso ricavare l'accelerazione

$$a = \frac{F}{m_P + m_Q}$$

Sostituisco nell'equazione di moto di Q e trovo T

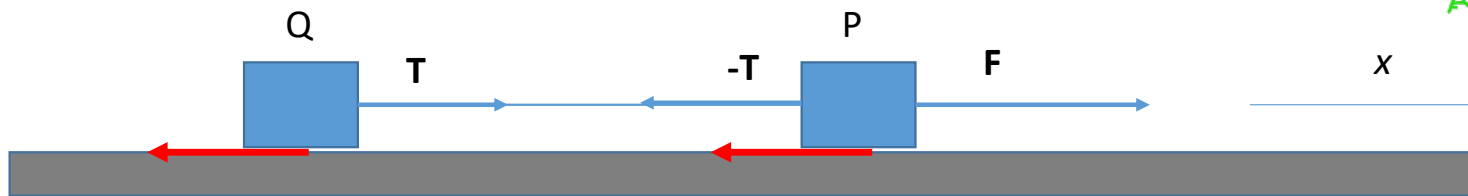
$$m_Q a = T$$

$$T = \frac{m_Q}{m_P + m_Q} F$$

Esempio #3

Analizziamo lo stesso problema supponendo che tra le superfici dei due corpi e il piano sia presente attrito, caratterizzato da coefficienti di attrito dinamico μ_P e μ_Q , rispettivamente

Corpo in movimento



$$A = \mu_P N$$

$$N = m_P g$$

$$A = -\mu_P m_P g \hat{i}$$

Applichiamo di nuovo la seconda legge di Newton alle due masse, considerando in questo caso le forze di attrito. Dato che la superficie è orizzontale, $\mathbf{F}_{aP} = -\mu_P m_P g \hat{i}$ e $\mathbf{F}_{aQ} = -\mu_Q m_Q g \hat{i}$

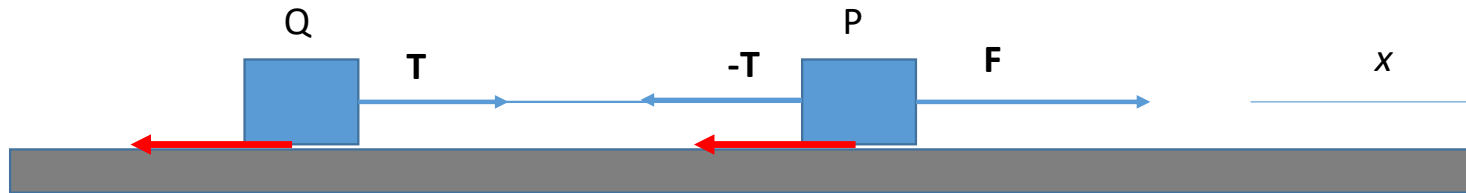
$$\bullet P \quad m_P a_P = F - T - \mu_P m_P g$$

$$\bullet Q \quad m_Q a_Q = T - \mu_Q m_Q g$$

Dato che il filo è inestensibile, risulta

$$\bullet a_P = a_Q = a$$

Esempio #3



- Sostituendo e sviluppando i calcoli si ottiene:

$$\begin{cases} m_P a = F - T - \mu_P m_P g \\ m_Q a = T - \mu_Q m_Q g \end{cases}$$

Somma

$$(m_P + m_Q) a = F - (\mu_P m_P + \mu_Q m_Q) g$$

$$a = \left(F - (\mu_P m_P + \mu_Q m_Q) g \right) \frac{1}{m_P + m_Q}$$

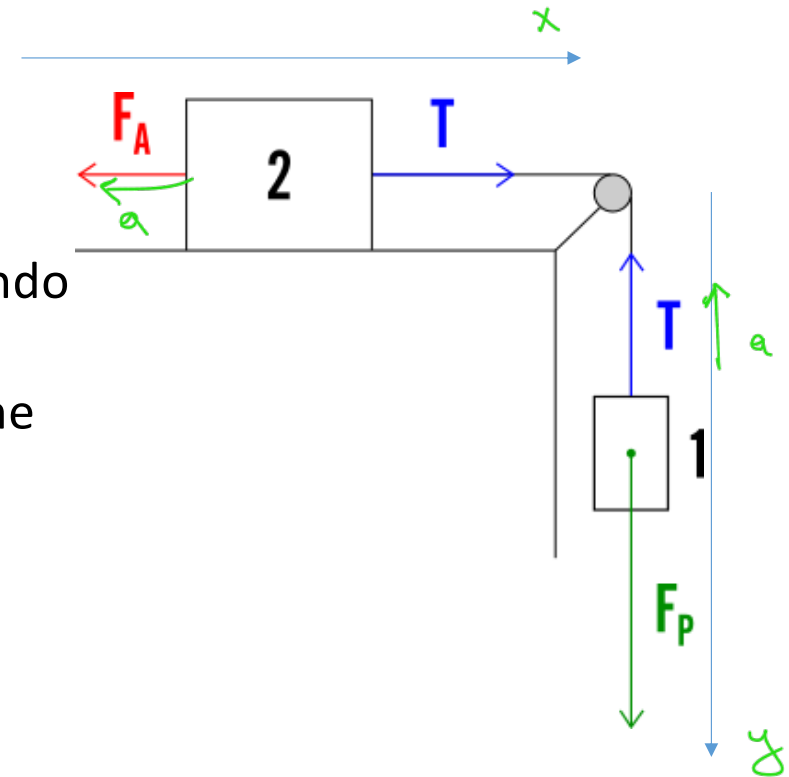
*diminuisce dov'è
all'addirittura*

Ricordiamo che senza attrito avevamo trovato

$$a = \frac{F}{m_P + m_Q}$$

Esempio #4

- Due punti materiali sono collegati da una fune inestensibile che passa su una carrucola di massa trascurabile, il primo è sospeso verticalmente, il secondo scorre su una superficie orizzontale priva di attrito. Determinare l'accelerazione dei due punti e la tensione nella fune.



Esempio #4

Applichiamo la seconda legge di Newton ai due corpi, considerando per il primo la componente in direzione verticale e per il secondo quella in direzione orizzontale.

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 g - T && \text{lung } y \\ m_2 a_2 &= T - F_A && \text{lung } x \end{aligned}$$

Dato che il filo è inestensibile, anche in questo caso risulta

$$a_1 = a_2 = a$$

Sostituendo si ottiene

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g - T \\ m_2 a &= T - F_A \end{aligned}$$

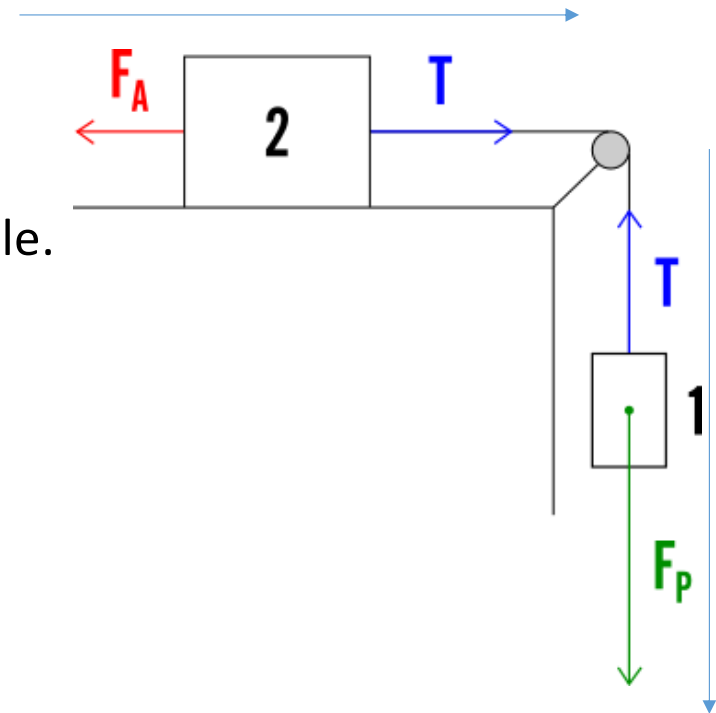
Sommando membro a membro:

$$(m_1 + m_2) a = m_1 g$$

Da cui si ottiene

$$a = m_1 g / (m_1 + m_2)$$

da qui trova T



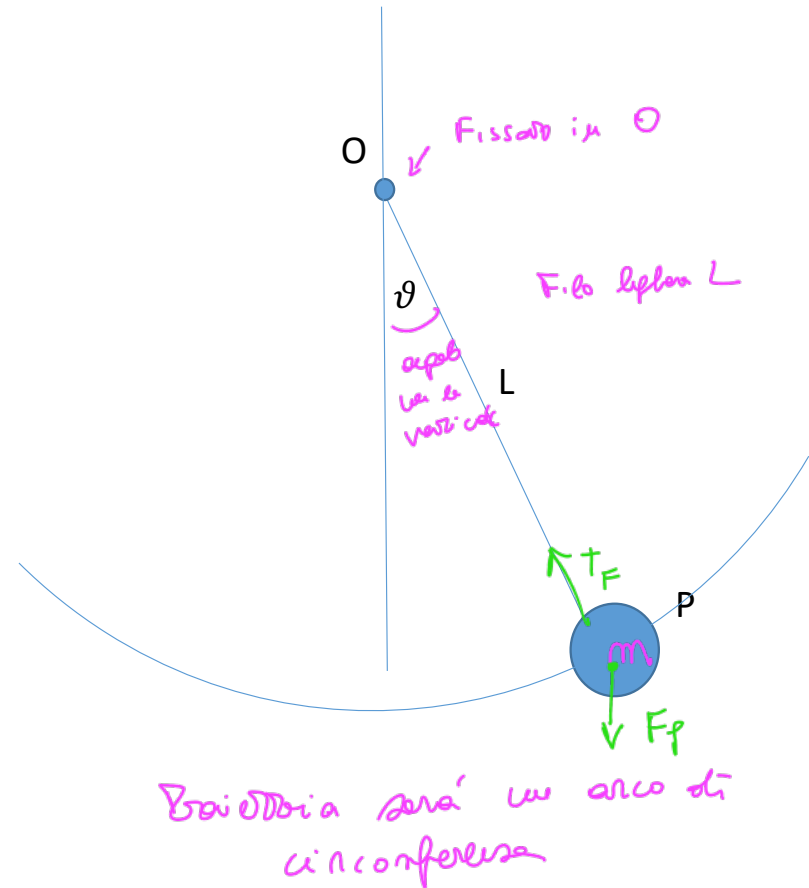


Pendolo semplice

- Consideriamo un punto materiale P di massa m sospeso con un filo inestensibile di lunghezza L fissato in un punto O .

Indichiamo con ϑ l'angolo che il filo forma con la verticale in una generica configurazione.

Dato che il filo è inestensibile ed è fissato in O , il punto P si muove lungo un arco di circonferenza di centro O e raggio L .



Pendolo semplice

Sul punto agiscono due forze:

La forza peso $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$

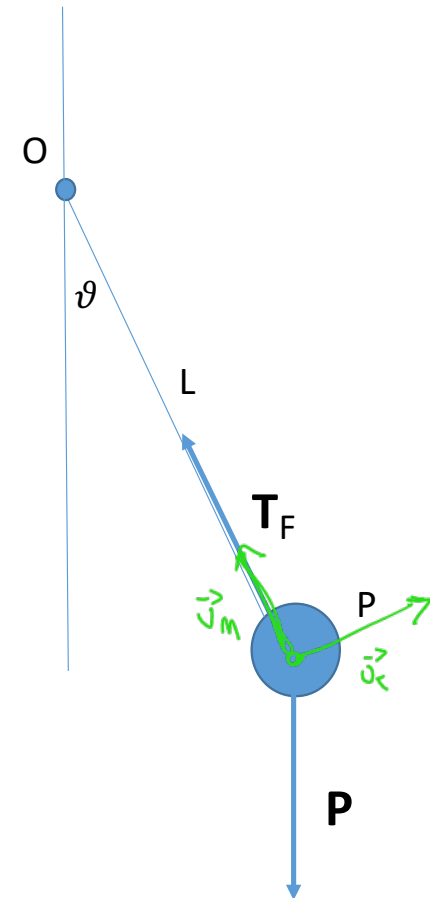
La tensione del filo $\mathbf{T}_F$

La risultante delle forze è quindi

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{T}_F$$

E applicando la seconda legge di Newton risulta

$$m\mathbf{a} = \mathbf{R} = \vec{P} + \vec{T}_F$$



Pendolo semplice, posizione di equilibrio

CONDIZ. STATICHE
in cui $\vec{\theta} = 0$

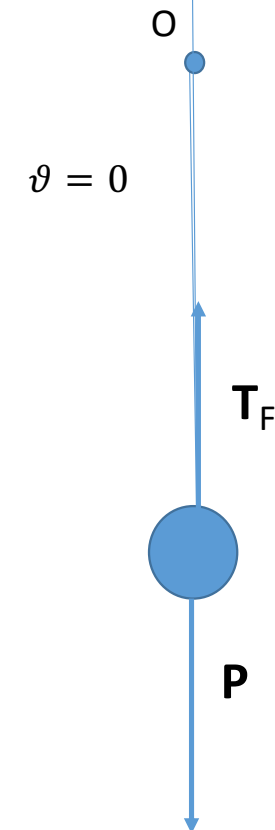
- Se il pendolo è nella configurazione in cui il filo è verticale $\vartheta = 0$, $\mathbf{P}$ e $\mathbf{T}_F$ hanno la stessa direzione, risulta quindi

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

$$\vec{a} = \vec{0}$$

$$\mathbf{P} + \mathbf{T}_F = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{T}_F = -\mathbf{P}$$



• forze applicate T_F al
massa
• forze applicate $-T_F$
al filo.

Pendolo semplice, posizione di equilibrio

Anche per $\vartheta = \pi$ le due forze hanno la stessa direzione, quindi

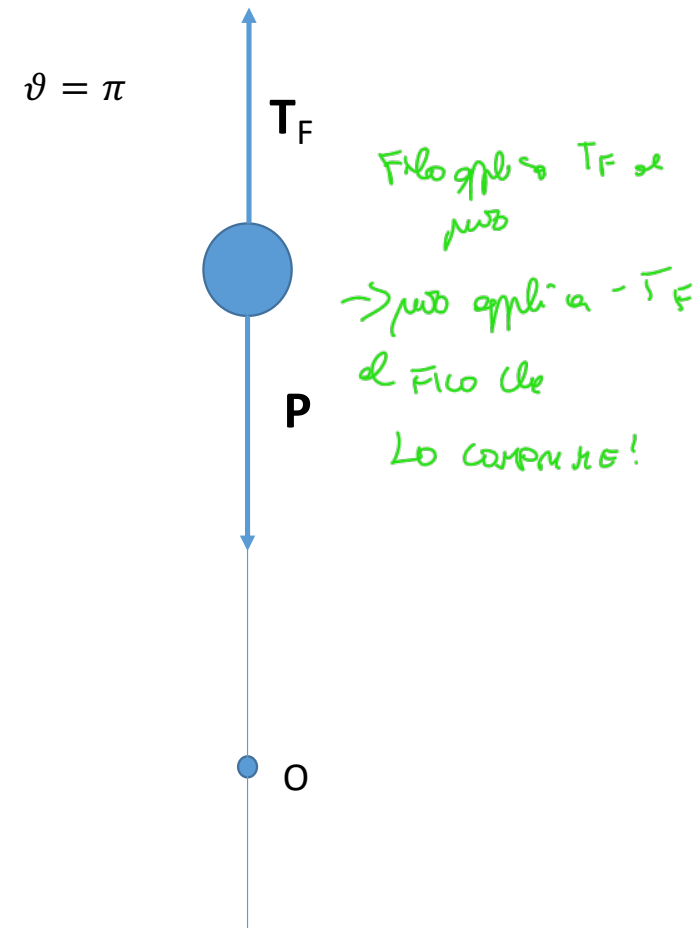
$$\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{P} + \mathbf{T}_F = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{T}_F = -\mathbf{P}$$

Ma in questo caso sulla fune per il principio di azione e reazione sarebbe applicata una forza di compressione, che non può resistere.

Questa configurazione non può essere assunta dal pendolo in condizioni statiche (a meno di sostituire la fune con un elemento rigido, ad esempio un'asticella, in grado di sostenere una forza di compressione).



• Pendolo semplice, configurazione generica

Per una configurazione generica del pendolo, identificata dall'angolo ϑ , applicando il secondo principio della dinamica si ottiene $R \neq 0$

$$ma = R = P + T_F = mg + T_F$$

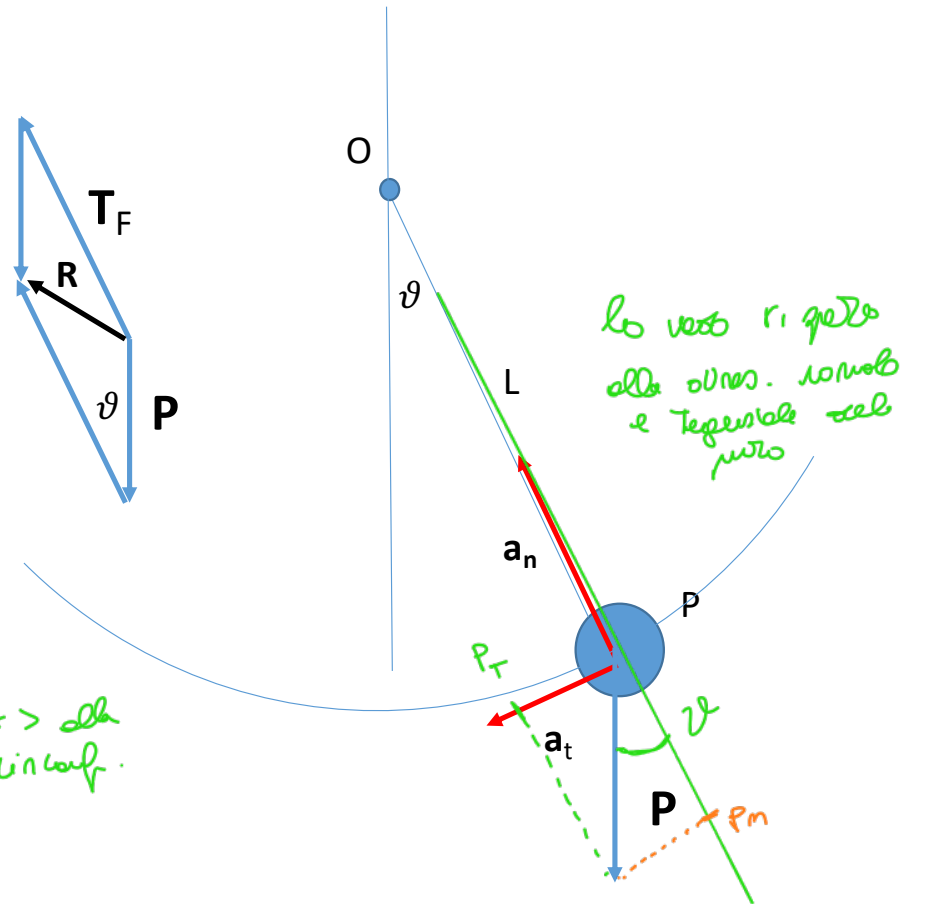
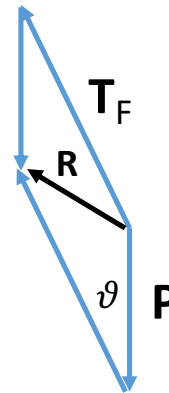
Ricordiamo che l'accelerazione in un moto bidimensionale generico può essere scritta come

$$a = a_t + a_n$$

(a_t) è la componente tangenziale, tangente all'arco di circonferenza percorso dal punto materiale; *tangente alla traiettoria => alla circ.*

(a_n) è la componente normale, diretta come il filo.

centripeta



lo vettore rispetto alla ovale. normale e tangenziale del punto

*T_F ha solo componente NORMALE
P invece no*

$$P_n = -P \cos \vartheta$$

$$P_t = -P \sin \vartheta$$

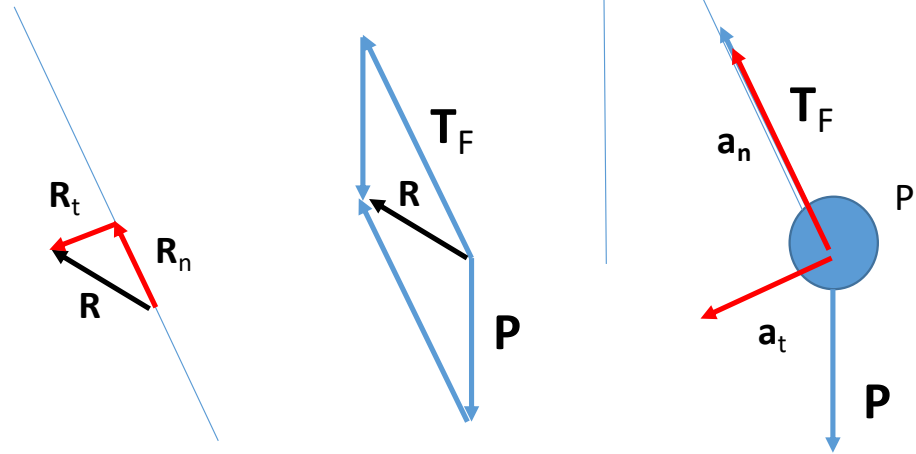
Pendolo semplice, configurazione generica

Possiamo scomporre anche la risultante delle forze $\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{T}_F$ nelle stesse direzioni:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_t + \mathbf{R}_n$$

Per cui possiamo scrivere

$$\begin{cases} m\mathbf{a}_t = \mathbf{R}_t \\ m\mathbf{a}_n = \mathbf{R}_n \end{cases}$$



Pendolo semplice, configurazione generica

Osservando le relazioni geometriche tra i vettori e sviluppando i calcoli si ottiene

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_t + \mathbf{R}_n$$

$$R_n = T_F - mg \cos \vartheta$$

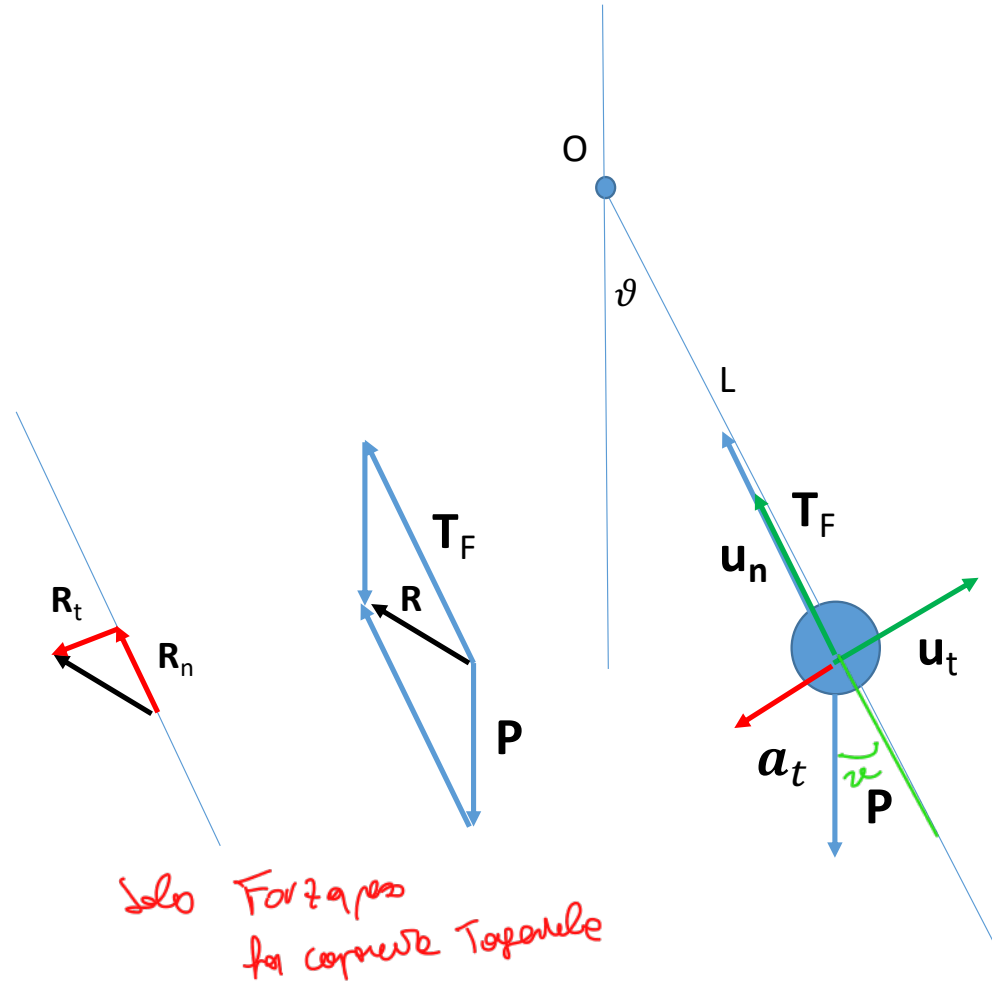
$$R_t = -mg \sin \vartheta$$

$$m\mathbf{a}_t = \mathbf{R}_t$$

$$m\mathbf{a}_n = \mathbf{R}_n$$

$$\left[\begin{array}{l} ma_n = T_F - mg \cos \vartheta \\ ma_t = -mg \sin \vartheta \end{array} \right]$$

$$a_t = -g \sin \vartheta$$



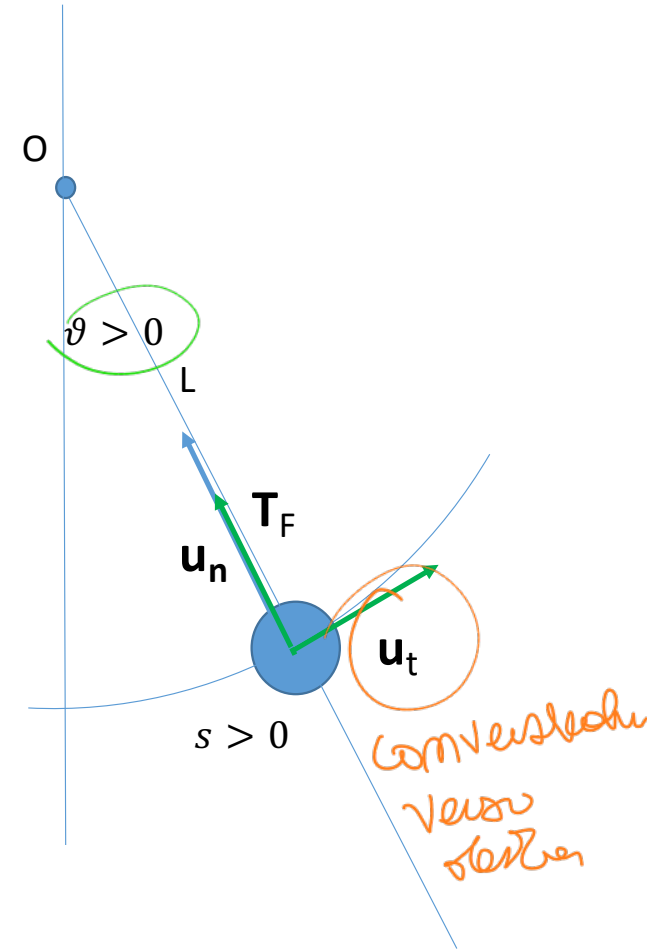
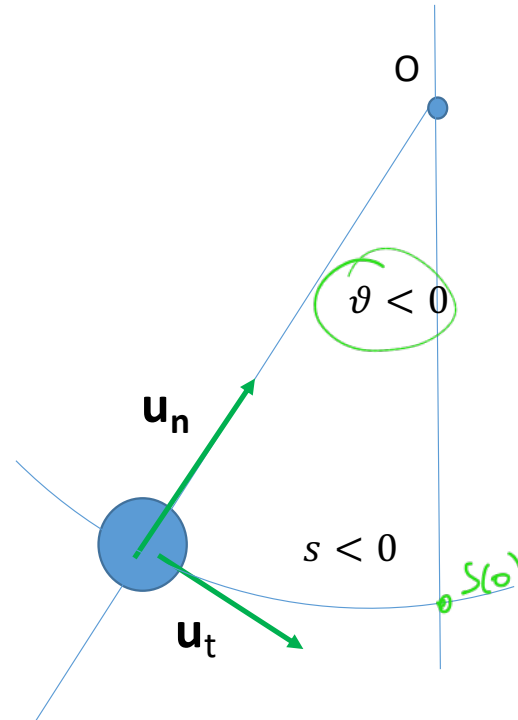
Pendolo semplice, configurazione generica

Dato che la traiettoria del punto materiale è un arco di circonferenza, l'angolo ϑ è legato all'ascissa curvilinea dalla relazione

$$s = L\theta \quad s(+)=L\vartheta(+)$$

Le direzioni normale e tangenziale sono individuate dai versori $\mathbf{u}_n$ e $\mathbf{u}_t$.

Il verso di $\mathbf{u}_t$ in particolare è convenzionalmente definito secondo la direzione in cui l'ascissa curvilinea s aumenta, quindi verso destra.



• Pendolo semplice, configurazione generica

$$\bullet \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_t + \mathbf{R}_n$$

$$R_n = T_F - mg \cos \vartheta \quad \bullet$$

$$R_t = -mg \sin \vartheta \quad \bullet$$

$$m\mathbf{a}_t = \mathbf{R}_t$$

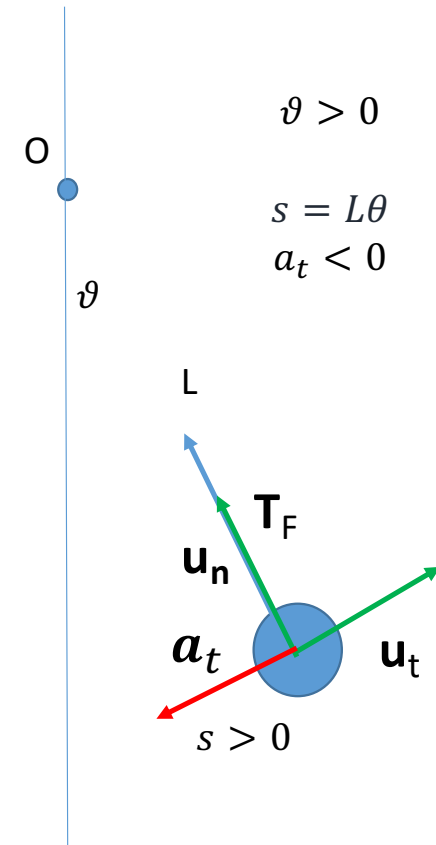
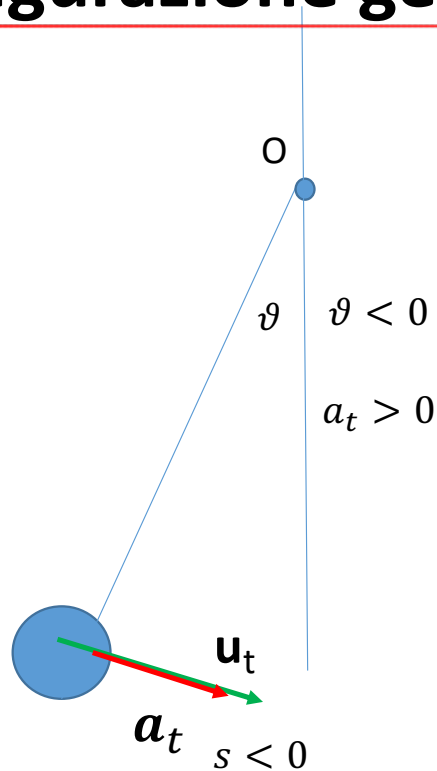
$$m\mathbf{a}_n = \mathbf{R}_n$$

$$ma_n = T_F - mg \cos \vartheta$$

$$ma_t = -mg \sin \vartheta$$

$$a_t = -g \sin \vartheta$$

modulo



Pendolo semplice, equazione differenziale

$$a_t = L \frac{d^2 \vartheta}{dt^2}$$

$$ma_n = T_F - mg \cos \vartheta$$

$$ma_t = -mg \sin \vartheta$$

ora voglio risalire alla posizione

- Consideriamo la componente tangenziale:

$$\vec{a}_t = -g \sin \vartheta \vec{u}_t$$

Ricordiamo anche che

$$\vec{a}_t = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{u}_t$$

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{u}_t$$

$$\vec{a}_t = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{u}_t$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{u}_n$$

E che $s = L\theta$, si ottiene:

$$\vec{a}_t = L \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} \vec{u}_t$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{L} \vec{u}_n$$

Sostituendo nell'equazione di moto si ottiene:

$$L \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -g \sin \vartheta$$

Equazione differenziale del pendolo

risolvendola posso determinare l'incognita

$\vartheta(t)$ per cui poi posso $s(t) = L \vartheta(t)$

La seconda equazione, in direzione normale

$$m \frac{v^2}{L} = T_F - mg \cos \vartheta$$

Può essere utilizzata per calcolare la tensione del filo.

$$a_n = \frac{v^2}{L}$$

$$R = L$$

Pendolo semplice, ipotesi delle piccole oscillazioni

Equazione differenziale del pendolo, non è facilmente risolvibile, dato che è non lineare per la presenza del termine $\sin \vartheta$

$$L \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -g \sin \vartheta$$

Approssimazione delle **piccole oscillazioni**. Se le oscillazioni sono piccole (pochi gradi) possiamo approssimare $\sin \vartheta \cong \vartheta$. Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$L \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -g \vartheta$$

Che possiamo riscrivere come:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{g}{L} \vartheta = 0$$

eq del moto armonico
 $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

Equazione differenziale di un moto armonico $\vartheta = A \sin(\omega t + \phi)$ con pulsazione

- $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

$$\vartheta = A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t + \phi\right)$$

Pendolo semplice, ipotesi delle piccole oscillazioni

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{L}\vartheta = 0$$

Per trovare ϑ (moto)
mi sono soffermato sulla
O.M.E.T. Taperata e
poi ho risolto
l'eq. diff.

Equazione differenziale di un moto armonico con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

La soluzione è

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$A = \vartheta_0$

ϑ_0, φ dipendono dalle condizioni iniziali.
devono avere la velocità

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad [\text{sec}]$$

Il periodo delle oscillazioni del pendolo (piccole oscillazioni) è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Pendolo semplice, ipotesi delle piccole oscillazioni

Trova l'angolo del pendolo, cioè la ROTAZIONE! $\vartheta(t)$, e quindi $s(t) = L\vartheta(t)$

- Riassumendo, nell'ipotesi delle piccole oscillazioni, la rotazione del pendolo varia nel tempo secondo la legge:

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

- L'ascissa curvilinea quindi è data da:

$$s(t) = L\theta(t) = L\vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

- La velocità è pari a:

Tangente, ovvia

$$v = \frac{ds}{dt} = L\omega\vartheta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

E la velocità angolare:

$$\Omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \omega\vartheta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

*Trova $s(t)$, trova $v(t)$
L'angolo è solo
d'interesse
(tangente)*

$$v = L\omega = L \frac{d\vartheta}{dt}$$

Pendolo semplice, riepilogo sulle fasi del moto

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

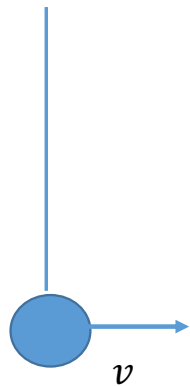
*lunghezza estesa, corrisponde al punto di partenza
v=0*

$$(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\vartheta = 0$$

$$s = 0$$

$$v = L\omega\vartheta_0$$

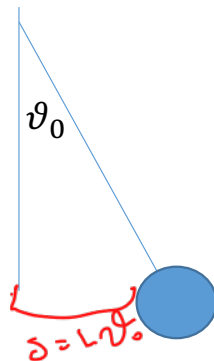


$$(\omega t + \varphi) = \frac{\pi}{2}$$

$$\vartheta = \vartheta_0$$

$$s = L\vartheta_0$$

$$v = 0$$



$$(\omega t + \varphi) = \pi$$

$$\vartheta = 0$$

$$s = 0$$

$$v = -L\omega\vartheta_0$$

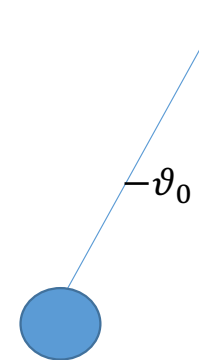


$$(\omega t + \varphi) = 3/2\pi$$

$$\vartheta = -\vartheta_0$$

$$s = -L\vartheta_0$$

$$v = 0$$



Pendolo semplice, ipotesi delle piccole oscillazioni

- Una volta determinato l'angolo di rotazione del pendolo

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

l'ascissa curvilinea

$$s = L\vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

e la velocità

$$v = \frac{ds}{dt} = L\omega\vartheta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Ricordando che la risultante delle forze in direzione normale al moto è pari a:

Riprendo la componente normale

$$ma_n = T_F - mg \cos \vartheta$$

$$a_n = \frac{v^2}{L}$$

e che l'accelerazione normale è pari a:

$$a_n = \frac{v^2}{L}$$

Possiamo calcolare la tensione del del filo:

$$T_F = m \frac{v^2}{L} + mg \cos \vartheta$$

MOMENTO di UNA FORZA e MOMENTO ANGOLARE

• Momento polare

Ricordiamo la definizione di momento polare di un vettore applicato, che abbiamo visto nella parte del corso relativa ai vettori.

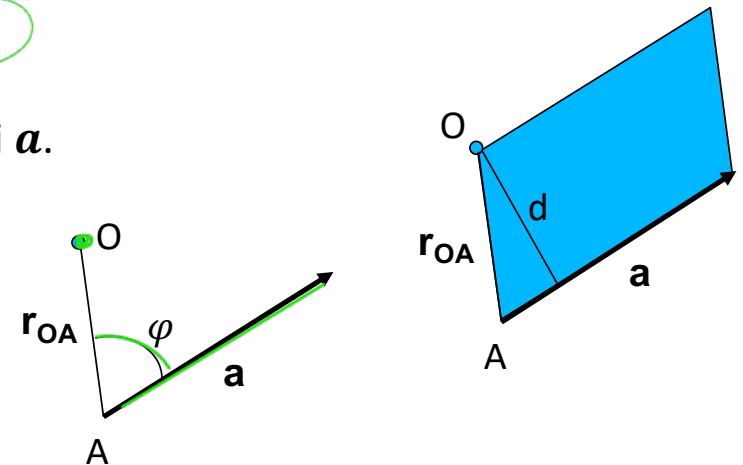
Momento polare: si definisce momento di un vettore applicato $\mathbf{a}$ con punto di applicazione A ($A, \mathbf{a}$), rispetto ad un punto generico O , il vettore $\mathbf{M}(O)$ così definito:

$$\mathbf{M}(O) = \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{a} \quad d = |\mathbf{r}_{OA}| \sin \varphi = \text{braccio}$$

Il modulo del momento è $|\mathbf{M}(O)| = |\mathbf{r}_{OA}| |\mathbf{a}| \sin \varphi$ dove φ è l'angolo formato dai vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{r}_{OA}$, direzione ortogonale al piano definito da $\mathbf{r}_{OA}$ ed $\mathbf{a}$ e verso definito secondo la regola della mano destra.

Il modulo del momento $\mathbf{M}(O)$ indicato con $|\mathbf{M}(O)|$ è pari all'area del parallelogramma individuato dai vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{r}_{OA}$, che può essere espressa come $|\mathbf{a}|d$

$d = |\mathbf{r}| \sin \varphi$ indica il **braccio** o distanza di O dalla retta d'azione di $\mathbf{a}$.

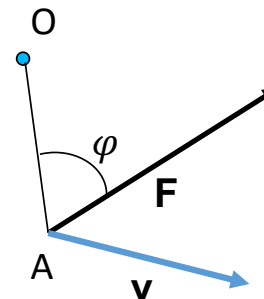


Momento polare

Questa definizione e le proprietà dei momenti che abbiamo visto nelle lezioni scorse valgono per un generico vettore applicato $\mathbf{a}$.

Nello studio della meccanica ci interessano due casi significativi

- Momento di una forza $\mathbf{F}$
- Momento della quantità di moto $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$



Momento di una forza

MOMENTO TORCENTE : misura

del'efficacia di una forza nel
causare la rotazione di un
corpo attorno ad un asse
(rispetto a O)

Momento di una forza *rispetto ad un polo*

$$[M(O) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}] \quad [\text{Nm}]$$

Modulo $M = r F \sin \varphi = F d$

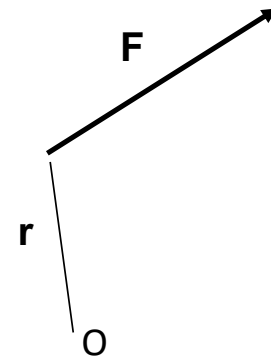
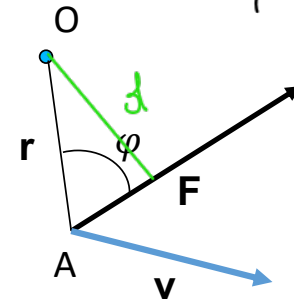
Essendo $d = r \sin \varphi$ il braccio del momento.

Dimensioni $[M] = [F]L$

unità di misura nel SI: Nm

Direzione $\rightarrow$ perpendicolare al piano che contiene $\mathbf{F}$ ed $\mathbf{r}$

Verso $\rightarrow$ con la regola della mano destra (come per il prodotto vettoriale)



Momento di una forza

- Se sul punto materiale agiscono più forze

MOMENTO RESULTANTE

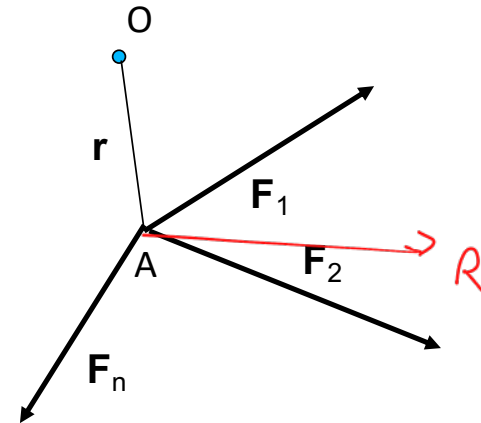
$$M(O) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_3 + \dots = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots) = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$$

Essendo

$$\mathbf{R} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots)$$

la risultante delle forze applicate in A.

Attenzione: questo risultato vale solo se le forze sono applicate tutte nello stesso punto!



Momento della quantità di moto (momento angolare)

MISURA della ~~Tendenza~~ di un corpo a ruotare
avendo ad un ASSE

Dato un punto materiale A che si muove con velocità ~~$\vec{v}$~~ $\vec{v}$, la sua quantità di moto è definita come:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

- Si definisce momento angolare o momento della quantità di moto del punto A rispetto a un dato polo O il vettore

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

$$\left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \right]$$

Il momento angolare $\vec{L}$ è un vettore caratterizzato da:

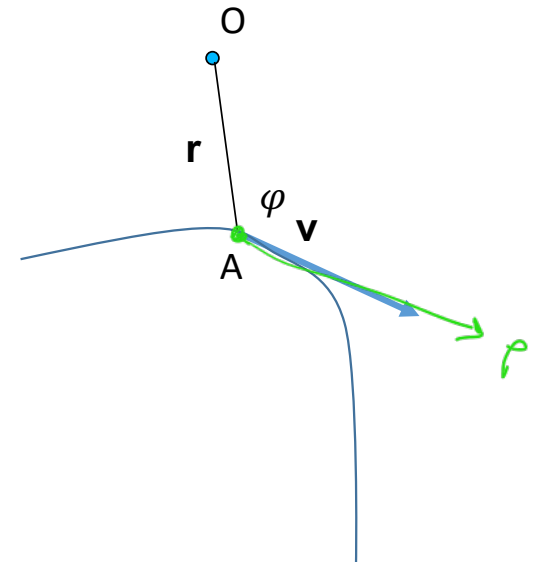
$$\text{Modulo } L = mvr \sin \varphi = m v r \sin \varphi$$

$$\text{Dimensioni } [L] = M[v]L = M L^2/T$$

Unità di misura nel SI $\rightarrow \text{kg m}^2/\text{s}$

Direzione perpendicolare al piano che contiene $\vec{r}$ e $\vec{v}$

Verso definito con la regola della mano destra.



Teorema del momento angolare

$$\vec{H} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Consideriamo la definizione di momento angolare appena vista:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

Deriviamo rispetto al tempo (assumiamo la massa costante per semplicità)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}$$

Osserviamo che

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$$

(il prodotto vettoriale tra vettori paralleli è nullo).

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}$$

Otteniamo quindi

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \underbrace{\mathbf{r} \times m\mathbf{a}}_{\mathbf{M}} \quad \text{momento di forza}$$

Teorema del momento angolare

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$$

Ma per il secondo principio della dinamica

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

Abbiamo dimostrato il teorema del momento angolare: la derivata rispetto al tempo ^{di un vettore} del momento della quantità di moto (momento angolare) calcolata rispetto a un generico polo O è pari al momento della forza risultante $\mathbf{F}$ applicata al punto materiale rispetto ad O. ^{allo stesso polo}