

Lezione 14– Dinamica del punto materiale

Si definisce lavoro della forza $\mathbf{F}$ durante lo spostamento del punto da A a B il risultato della seguente operazione:

Il lavoro dipende dalla forza e dal percorso del punto materiale in un determinato intervallo.



Lavoro di una forza – lavoro infinitesimo

Analizziamo meglio l'integrale e consideriamo uno spostamento infinitesimo $d\vec{s}$.

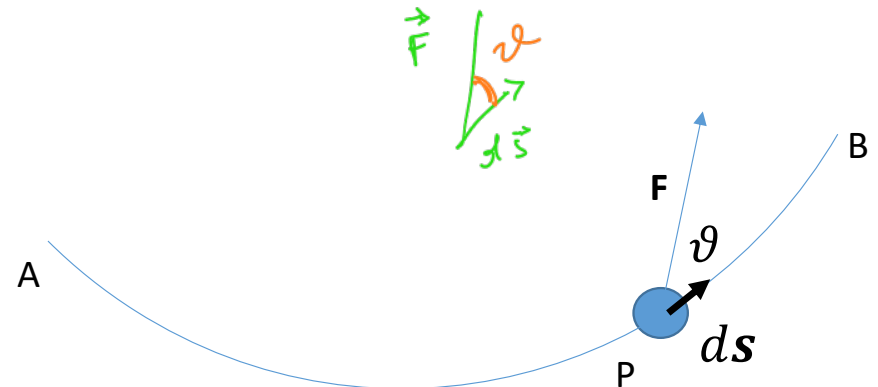
Sia la forza che lo spostamento infinitesimo sono due vettori. Si definisce il lavoro infinitesimo:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Che per la definizione di prodotto scalare risulta

$$[dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F ds \cos \vartheta]$$

L'angolo ϑ è l'angolo che la forza $\mathbf{F}$ forma con lo spostamento $d\mathbf{s}$ (e quindi con la tangente alla traiettoria).



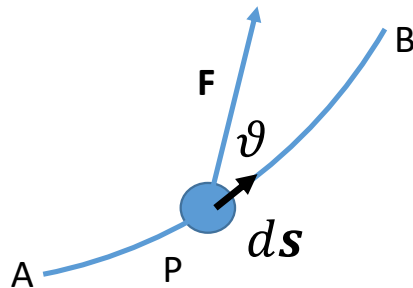
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds \cos \vartheta$$

angolo tra i
2 vettori.

Lavoro di una forza – lavoro infinitesimo

A seconda del valore dell'angolo ϑ , il lavoro infinitesimo può essere positivo (se $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, $\cos \vartheta > 0$), negativo (se $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$, $\cos \vartheta < 0$) o nullo (se $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\cos \vartheta = 0$)

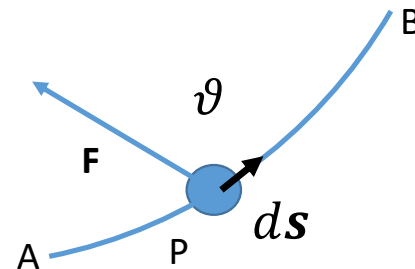
$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F ds \cos \vartheta$$



$$dW > 0$$

Lavoro
positivo
se

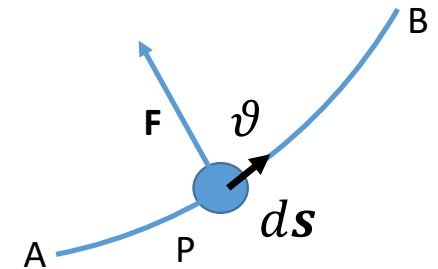
$$0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$



$$dW < 0$$

NEGATIVO
SE

$$\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$$



$$dW = 0$$

NULO se
 $\vartheta = \pi/2$

Forza ortogonale allo spostamento non
fa lavoro ($\cos \pi/2 = 0$)

• Lavoro di più forze applicate nello stesso punto

Lavoro

$$• \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n$$

Forze applicate allo stesso punto

$$\begin{aligned} \left[W &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \right. \\ &= \int_A^B (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n) \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_A^B \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s} + \dots + \int_A^B \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{s} \\ &= \underbrace{W_1 + W_2 + \dots + W_n}_{\left. \right]} \end{aligned}$$

*LAVORO FORZE = SOMMA DEI
SINGOLI LAVORI*

VEDI SOTTO



Lavoro di più forze applicate nello stesso punto

Supponiamo che sul punto materiale siano applicate più forze, calcoliamo la risultante $\vec{F}$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

Il lavoro della risultante $\vec{F}$ è dato da:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Che possiamo sviluppare:

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n) \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} + \cdots + \int_A^B \vec{F}_n \cdot d\vec{s} \\ &= W_1 + W_2 + \cdots + W_n \end{aligned}$$

Otteniamo quindi che:

$$W = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$$

Il lavoro della risultante è pari alla somma dei lavori delle singole forze.

• Lavoro, potenza, unità di misura

- Abbiamo definite il lavoro di una forza applicate a un punto che percorre una traiettoria dal punto A al punto B come:

$$\rightarrow \left[W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \right] \quad [W] = [N \cdot m]$$

risultante

Si definisce la potenza come la derivata del lavoro rispetto al tempo: velocità con cui viene fatto il lavoro

Sono
sceltesi
arbitrariamente

$$\rightarrow P = \frac{dW}{dt} \quad \begin{array}{c} \text{derivata} \\ \text{Tempo} \end{array}$$

Analizziamo le unità di misura:

$$P \left[\frac{J}{s} \right] = [W] = \left[\frac{Nm}{s} \right]$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad [J]$$

$$P = \frac{dW}{dt} \quad \begin{array}{c} [W] \\ \frac{J}{s} \end{array}$$

• Lavoro:

- Dimensioni: $[W] = [F]L$ Nm
- Unità di misura nel sistema internazionali: Nm = J (Joule)

Potenza

- Dimensioni $[P] = [W]/T = [F]L/T = [F][v]$
- Unità di misura (SI): Nm/s = J/s = W (Watt)

Lavoro, potenza, unità di misura

Analizziamo di nuovo la definizione di potenza, considerando uno spostamento infinitesimo:

Abbiamo visto che

- $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$

Sostituendo nell'espressione della potenza otteniamo

$$\left[P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \right]$$

Potenza = Prodotto Scalare
tra $\vec{F}$ e $\vec{v}$ sp
mis. in A e B

Punto per punto, la potenza si ottiene calcolando il prodotto scalare tra forza e velocità.

• Energia cinetica

- Energia cinetica. Consideriamo nuovamente il punto materiale di massa m che si muove lungo una data traiettoria. Indichiamo con $\vec{v}$ la sua velocità in un determinato istante e con v il modulo della velocità, si definisce energia cinetica del punto materiale la quantità:

$$\left[E_k = \frac{1}{2} m v^2 \right] \quad [J]$$

Analisi dimensionale:

$$[E_k] = M(L/v)^2 = ML/v^2 L = M[a]L = [F]L = [W] \quad J$$

L'energia cinetica ha le stesse dimensioni del lavoro.

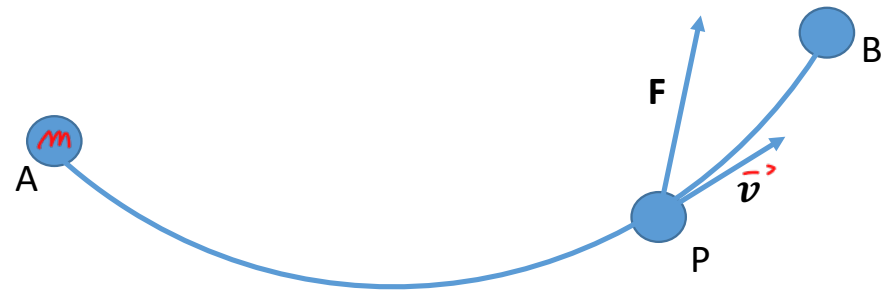
Nel sistema internazionale, anche per l'energia cinetica l'unità di misura è il J (Joule).

energia cinetica del punto materiale che si muove da A → B con modulo $\vec{v} = v$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

TUTTO SCOLARE

$$[kg \frac{m^2}{s^2}] = Nm = J$$



DIMS.

• Lavoro ed energia cinetica #1

$$W_{AB} = \Delta E_{K_{A,B}}$$

- Consideriamo nuovamente il lavoro di una forza lungo un dato percorso. Punto per punto possiamo scomporre la forza nella componente normale e tangenziale alla traiettoria:

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n}$$

Sostituendo nell'espressione del lavoro si ottiene:

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B (\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n) \cdot d\mathbf{s}$$

- Analizziamo il lavoro infinitesimo:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n) \cdot d\mathbf{s} = \boxed{\mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} + \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{s}} \quad \text{col W}$$

Ma $\mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{s} = 0$ dato che per definizione $\mathbf{F}_n$ e $d\mathbf{s}$ sono tra loro perpendicolari, risulta quindi

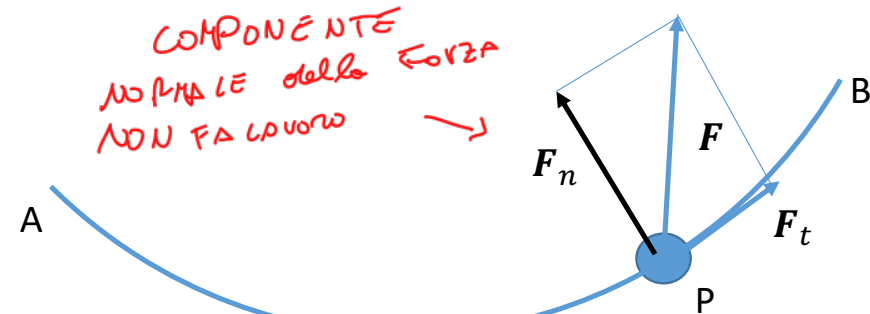
$$dW = \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} = F_t ds$$

Essendo F_t la componente (scalare) di $\mathbf{F}$ in direzione tangenziale.

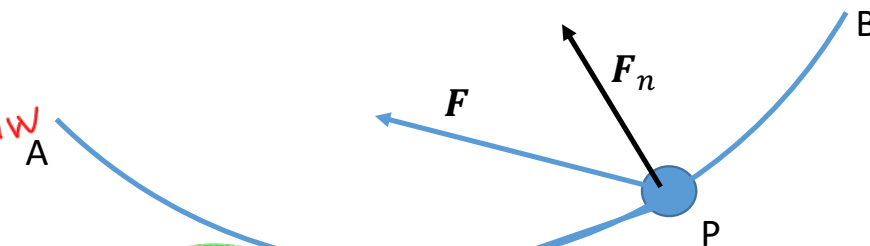
in ogni punto se $\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_t$

$$\boxed{dW = \vec{F}_t \cdot d\vec{s} = F_t ds}$$

$$\cos \phi = 1$$



$$dW = F_t ds > 0$$



$$dW = F_t ds < 0$$

solo componente tangenziale fa lavoro

Lavoro ed energia cinetica #2

Abbiamo espresso il lavoro infinitesimo come:

$$[dW = F_t ds]$$

Dal secondo principio della dinamica, abbiamo visto che

$$\rightarrow \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Considerando solo le componenti di forza e accelerazione in direzione tangenziale, risulta

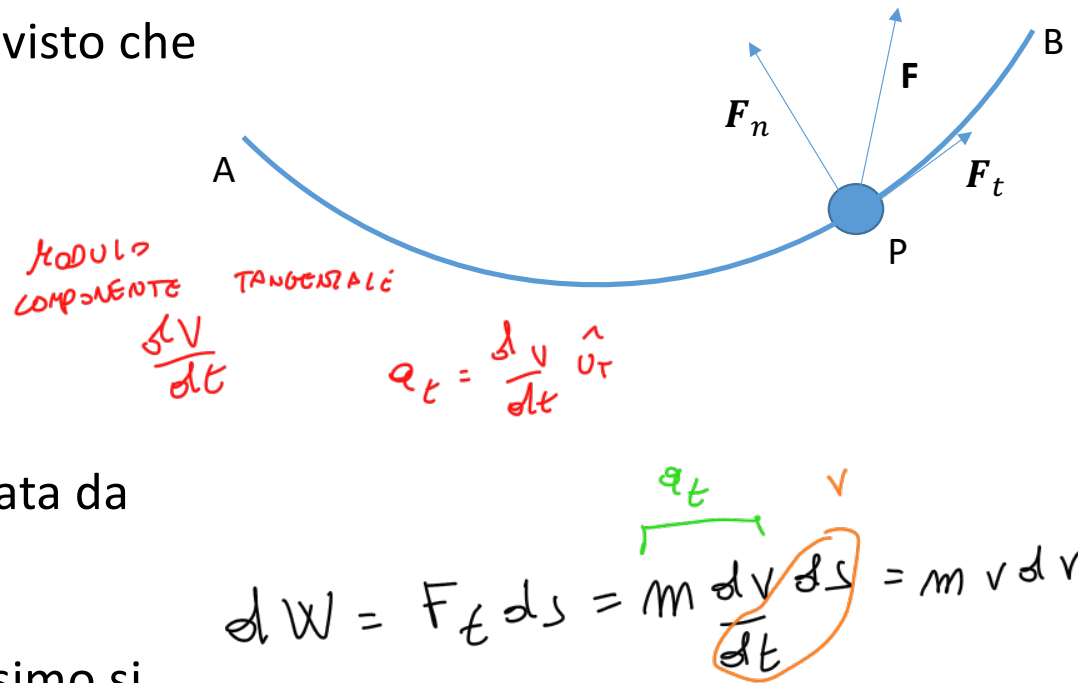
$$[F_t = ma_t = m \frac{dv}{dt}]$$

Ma dall'analisi cinematica abbiamo visto che la componente tangenziale dell'accelerazione è data da

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Sostituendo nell'espressione del lavoro infinitesimo si ottiene:

$$dW = F_t ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = m v dv$$



Lavoro ed energia cinetica #3

Nella slide precedente, utilizzando la definizione di lavoro, la scomposizione del vettore forza in direzione normale e tangenziale, il secondo principio della dinamica e la definizione di accelerazione tangenziale, abbiamo espresso il lavoro infinitesimo come:

$$dW = mv dv$$

INTEGRO IN A e B



Consideriamo adesso uno spostamento finito, dal punto A al punto B e calcoliamo il lavoro, utilizzando i risultati appena trovati

$$\begin{aligned} W &= \int_{W_A}^{W_B} dW = \int_{v_A}^{v_B} mv dv = \frac{1}{2} mv^2 \Big|_{v_A}^{v_B} \\ &= \frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2 = E_{kB} - E_{kA} \end{aligned}$$

$$\int_{W_A}^{W_B} dW = m \int_{v_A}^{v_B} v dv$$

$$\Rightarrow W_{A,B} = \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{v_A}^{v_B}$$

$$W = E_{kB} - E_{kA}$$

$$\rightarrow W = \Delta E_{kA,B} = E_{kB} - E_{kA}$$

Lavoro ed energia cinetica #4

Abbiamo dimostrato quindi che

$$[W = E_{kB} - E_{kA}]$$

Il lavoro della risultante delle forze applicate a un punto materiale nel percorso dal punto A al punto B è pari alla variazione dell'energia cinetica. *del punto*
(Teorema dell'energia cinetica).

Questo risultato ci permette di analizzare la dinamica di un sistema considerando che cosa succede nel passaggio da una configurazione A a una configurazione B.

$\rightarrow$ dove $E_k = \frac{1}{2} m v^2$

} posso studiare la dinamica per via energetica



Lavoro della forza peso #1

Calcoliamo il lavoro della forza peso applicata a un corpo che passa dalla posizione A alla posizione B

$$W = \int_A^B \mathbf{F}_p \cdot d\mathbf{s}$$

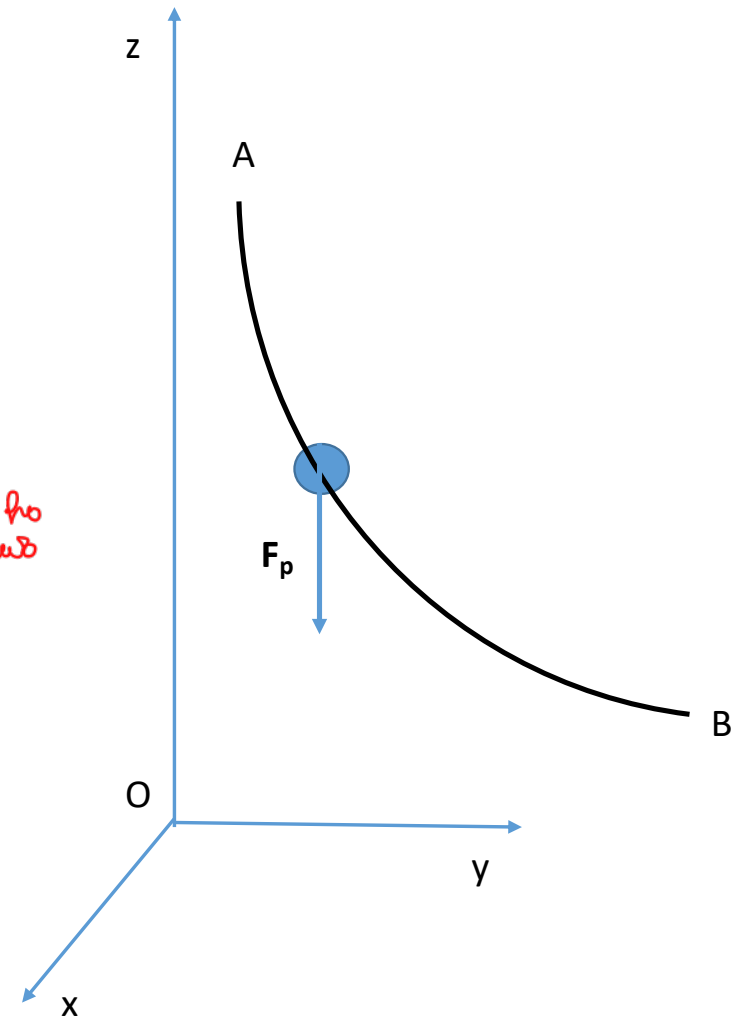
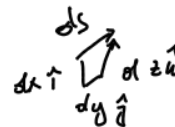
$$\mathbf{F}_p = m\mathbf{g} \rightarrow \text{nessun segno, ancora non ho fissato alcun riferimento}$$

$$W = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{s}$$

Prendiamo un Sistema di riferimento con asse z verticale ascendente

$$d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

$$\vec{g} = -g\vec{k}$$



Lavoro della forza peso #2

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0, \text{ ortogonali}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k^2 = 1$$

(vettore)

$$W = \int_A^B -mg \mathbf{k} \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) =$$

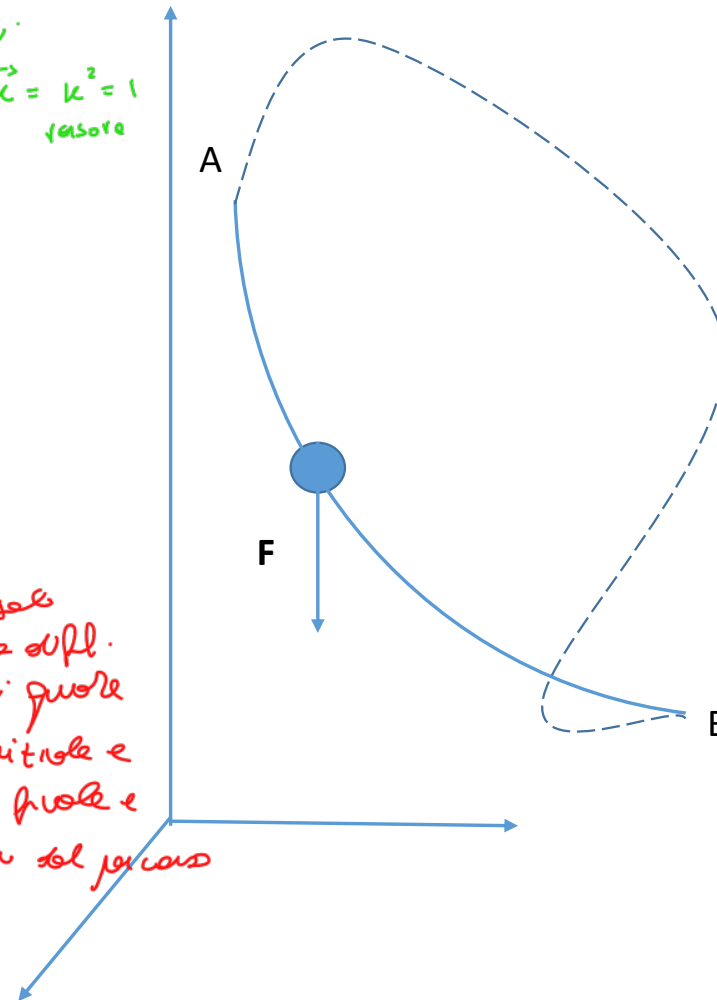
$$= \int_{z_A}^{z_B} -mg dz = -mg(z_B - z_A)$$

Si osserva che:

$$W_{Fp, AB} = -mg(z_B - z_A)$$

- Il lavoro dipende soltanto dalla posizione iniziale e finale del punto materiale e non dal percorso seguito.
- Il lavoro dipende solo dalla quota verticale del punto iniziale e finale (in questo caso indicata con z)

si può solo
della diff.
si può
iniziale e
finale e
non del percorso

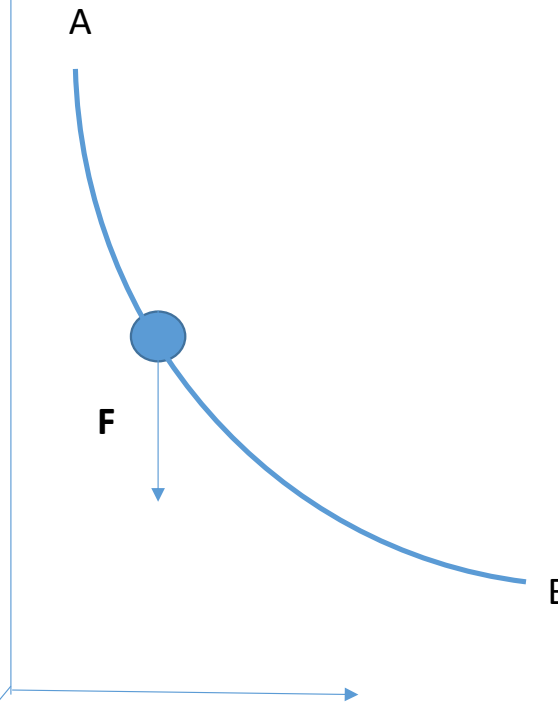


Lavoro della forza peso #3

$$W = -mg(z_B - z_A)$$

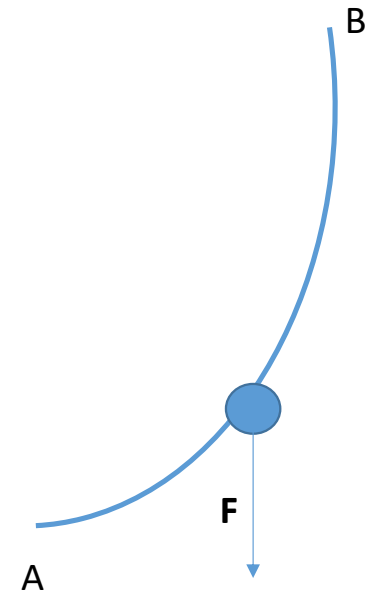
Si osserva anche che:

- Se la quota del punto materiale diminuisce tra il punto di partenza e quello di arrivo (cioè se il punto scende verso il basso) il lavoro della forza peso è positivo.
- Se la quota del punto materiale aumenta tra il punto di partenza e quello di arrivo (cioè se il punto sale verso l'alto) il lavoro della forza peso è negativo.



$$W = -mg(z_B - z_A) > 0$$

*Se perso quota, lavoro positivo
lavoro mi dà energia*



$$W = -mg(z_B - z_A) < 0$$

*Se aumento di quota,
lavoro è POSITIVO,
Devo spendere energia
per risalire*

Lavoro della forza peso #4, energia potenziale

Definiamo una funzione

$$E_p(z) = mgz \quad \text{energia potenziale forza peso}$$

$$kg \frac{m^2}{s^2} = J = N \cdot m$$

$$E_p(z) = mgz$$

Che chiamiamo energia potenziale della forza peso.

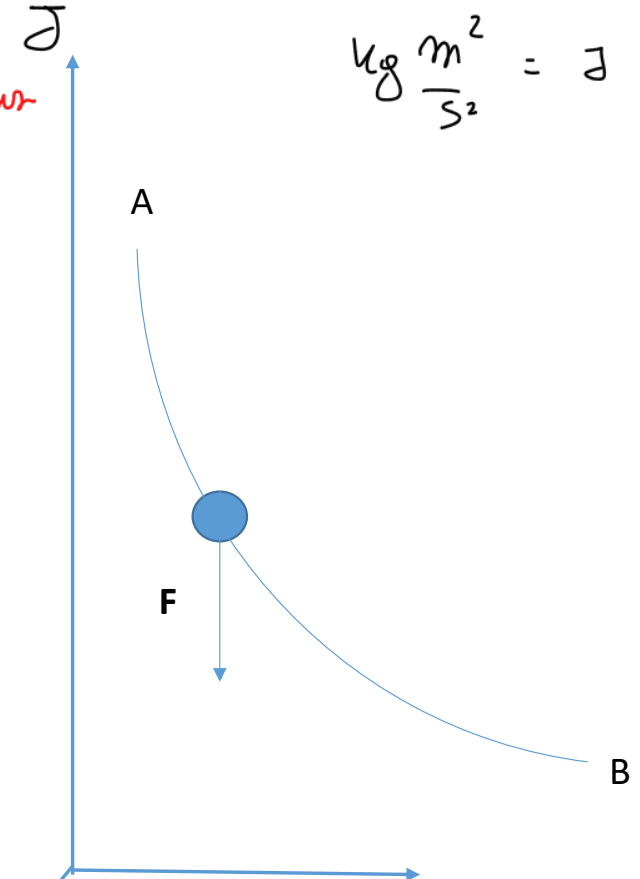
Il lavoro della forza peso nel passaggio dal punto A al punto B è pari a:

$$W = -mg(z_B - z_A) = -(E_p(z_B) - E_p(z_A)) = -\Delta E_p$$

$$W = -\Delta E_p_{z_{A \rightarrow B}} \quad E_p = mgz$$

Il lavoro della forza peso tra A è opposto alla variazione di energia potenziale tra A e B.

Se energia potenziale E_p aumenta, lavoro negativo (ho perduto quota)



Lavoro ed energia cinetica - esempio

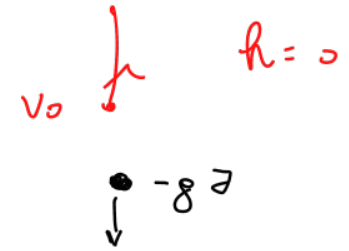
Come possiamo utilizzare i risultati appena visti per l'analisi della dinamica del punto materiale?

*o so le energie per risolvere
problemi di dinamica*

Un esempio:

Un punto materiale è lanciato verso l'alto con velocità iniziale v_0 , quale sarà la massima altezza raggiunta?

caduta libera, $y_0 = 0$
 $v(0) = v_0$
per via energetica



Lavoro ed energia cinetica - esempio

Possiamo analizzare il moto applicando la seconda legge di Newton, calcolando l'accelerazione e tramite integrazione calcolare la velocità e lo spostamento: lungo y

$$v(t) = v_0 - gt$$
$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

$y_0 = 0$

Nel punto in cui si raggiunge la quota più alta la velocità si annulla $v(t_M) = 0$

$$0 = v_0 - gt_M$$

Da cui ricaviamo

$$t_M = \frac{v_0}{g}$$

Sostituendo nell'espressione dello spostamento troviamo

$$y_M = v_0 t_M - \frac{1}{2} gt_M^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$

$y(t_M)$

risolto per via cinetica

risolto per via energetica

Lavoro ed energia cinetica - esempio

Analizziamo il problema con considerazioni sul lavoro e la variazione di energia cinetica.

Energia cinetica iniziale:

$$E_{k0} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Energia cinetica finale (quando raggiungo la massima altezza la velocità si annulla):

$$v(t_{max}) = 0$$

$$E_{kf} = 0$$

Variazione di energia cinetica dall'istante iniziale all'istante in cui il punto raggiunge la massima altezza

$$\Delta E_k = E_{kf} - E_{k0} = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

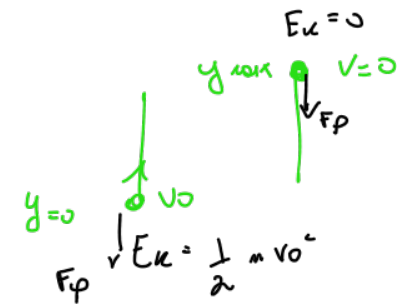
$$W = \Delta E_k$$

$$A = 0$$

$$B = y_{max}$$

$$B = y_{max}$$

$$F_p = -mg$$



Lavoro ed energia cinetica - esempio

Lavoro della forza peso durante il volo

sostituendo lungo y
direz. positiva

$$W = \int_0^{y_M} -mg dy = -mg(y_M - y_0) = -mgy_M$$

Ho fatto lavoro per
potenza a y_M

Dato che per il teorema dell'energia cinetica risulta

$$[W = \Delta E_k]$$

Sostituendo i valori calcolati in precedenza si ottiene

$$-mgy_M = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

Da cui possiamo ricavare

$$\left[y_M = \frac{v_0^2}{2g} \right]$$

Stesso risultato

altro esempio di Forze conservative

Lavoro di una forza costante #1

- Supponiamo che sul punto materiale agisca una forza $\mathbf{F}_c$ costante in modulo, direzione e verso. Supponiamo per semplicità che la sua direzione sia parallela all'asse x e il suo verso sia opposto:

$$\mathbf{F}_c = -F\mathbf{i}$$

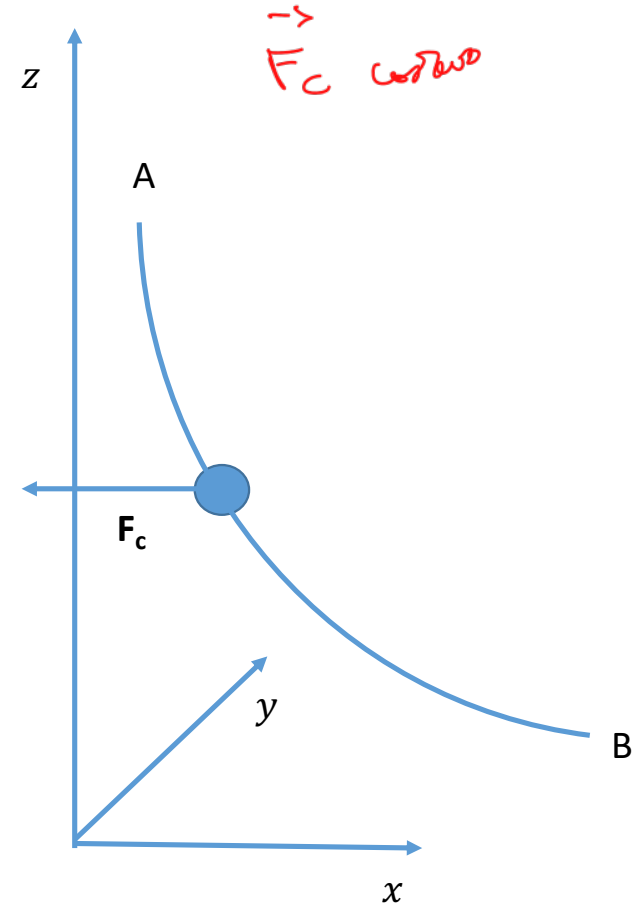
Calcoliamo il lavoro in corrispondenza dal passaggio dal punto A al punto B lungo una traiettoria generica:

$$W = \int_A^B \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s}$$

Sostituendo l'espressione della forza e esprimendo lo spostamento infinitesimo $d\mathbf{s}$ come:

$$d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

Si ottiene...



Lavoro di una forza costante #2

$$\begin{aligned}
 W &= \int_A^B -F \mathbf{i} \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) = \\
 &= \int_{x_A}^{x_B} -F dx = \boxed{-F(x_B - x_A) = W}
 \end{aligned}$$

$d\vec{s} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$
contes.

lavoro
di una
Forza
costante

- Anche in questo caso il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale e finale e non dal percorso. Possiamo definire una funzione (energia potenziale per la forza costante diretta come l'asse x)

$$E_p(x) = Fx$$

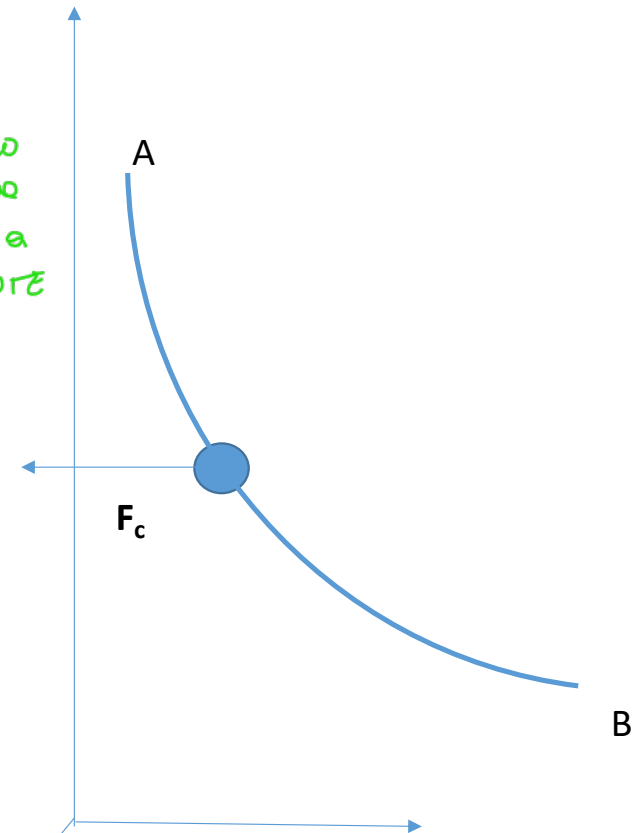
Energia potenziale
Forza costante

Tale che:

$$W = -F(x_B - x_A) = -(E_p(x_B) - E_p(x_A)) = -\Delta E_p$$

$$W = -\Delta E_p \quad E_p(x) = F(x)$$

Energia potenziale di una Forza costante



con $\vec{F}_c = -F \hat{i}$

$\vec{F}_c = -F \hat{i}$

Lavoro di una forza costante #3

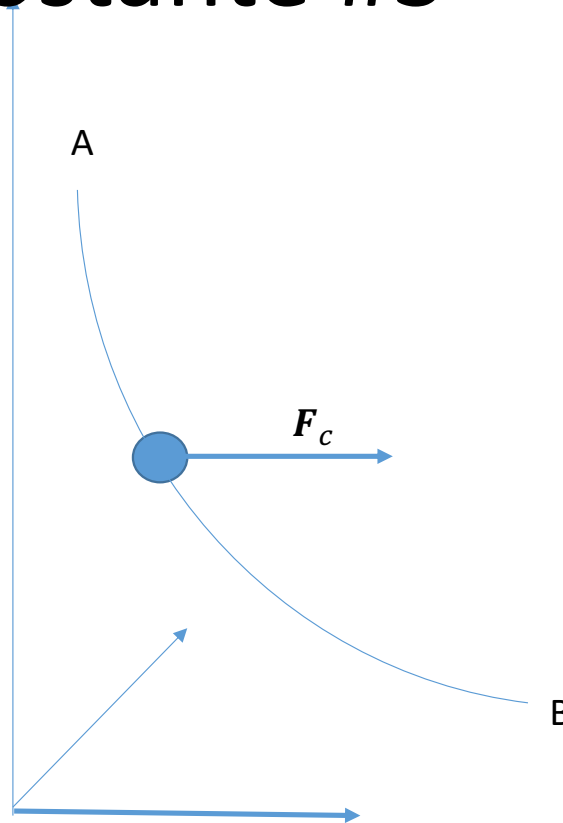
Se il verso della forza $\mathbf{F}_c$ è concorde con l'asse x si ha:

$$W = \int_A^B \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s}$$

$$\mathbf{F}_c = F\mathbf{i}$$

$$W = \int_A^B F\mathbf{i} \cdot d\mathbf{s}$$

$$d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$



Lavoro di una forza costante #4

Se $\vec{F}_c = F\hat{i}$

$$W = \int_A^B F\hat{i} \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) =$$

$$= \int_{x_B}^{x_A} F dx = F(x_B - x_A)$$

Anche in questo caso possiamo definire una funzione energia potenziale, che in questo caso vale:

Sono tutti scalari...

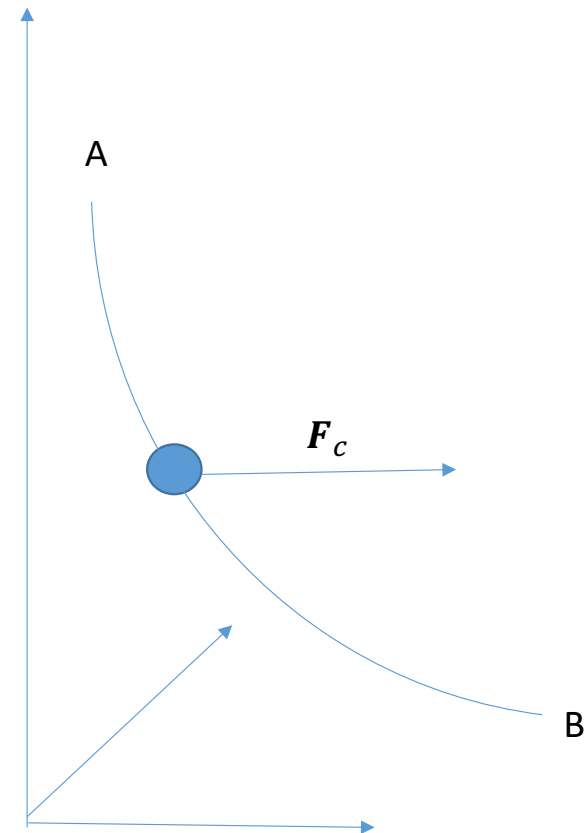
$$E_p(x) = -Fx$$

Se $\vec{F}_c = F\hat{i}$

Tale che

$$W = F(x_B - x_A) = - (E_p(x_B) - E_p(x_A)) = -\Delta E_p$$

$W = -\Delta E_p$



✓ Lavoro dipende solo dalle
posizioni iniziale e
finale del punto
e non del percorso

altra forza conservativa

• Lavoro di una forza elastica #1

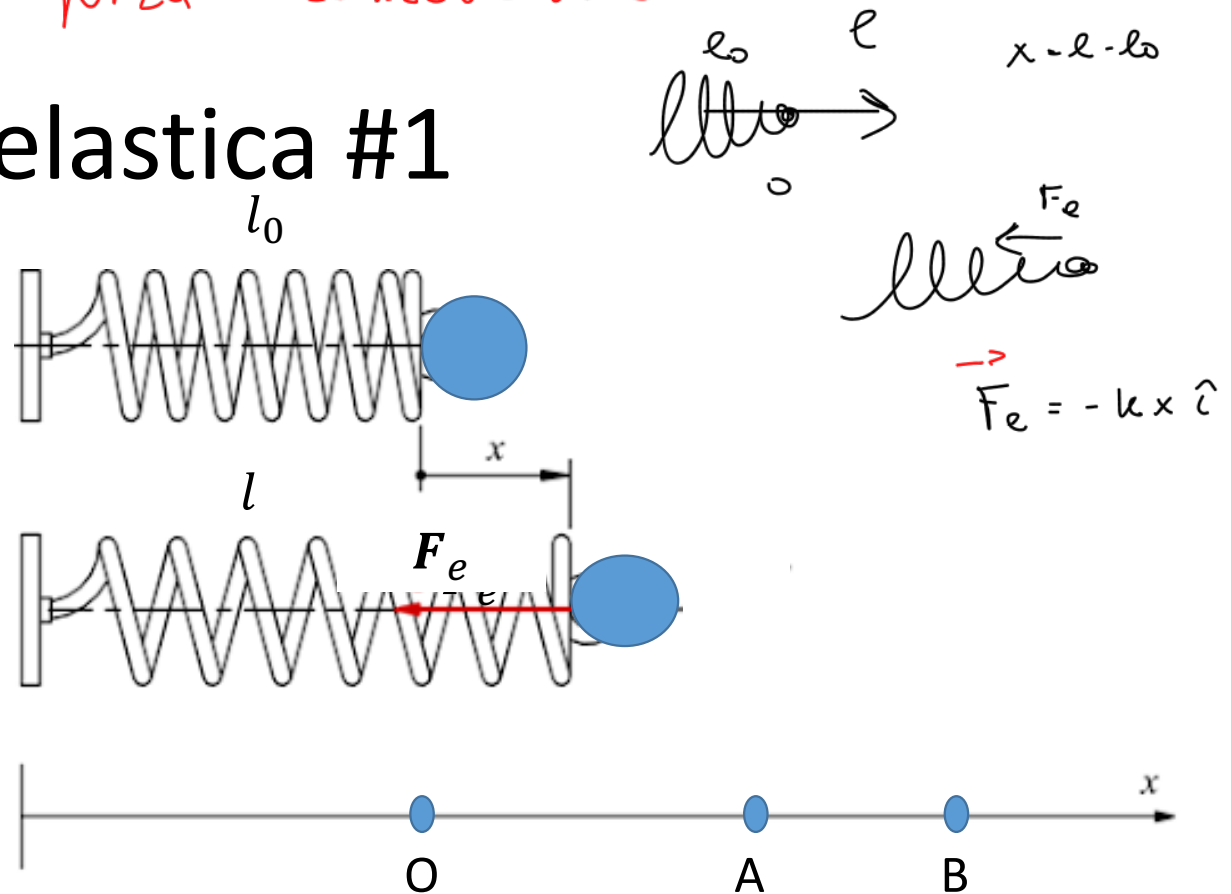
Consideriamo un elemento elastico ideale allineato con l'asse x, scegliamo l'origine del sistema di riferimento nella posizione indeformata l_0 dell'elemento, la variazione di lunghezza sarà quindi:

$$x = l - l_0$$

E la forza elastica:

$$\vec{F}_e = -kx\hat{i}$$

Calcoliamo il lavoro della forza elastica nel passaggio dalla posizione A (ascissa x_A) alla posizione B (ascissa x_B).



Lavoro Forza elastica da A a B
(x_A) (x_B)

Lavoro di una forza elastica #2

Calcoliamo il lavoro: $\vec{F}_e = -kx \hat{i}$

$$d\vec{s} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$$

$$W = \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = \int_{x_A}^{x_B} -kx dx$$

$$= -k \int_{x_A}^{x_B} x dx = -\frac{1}{2} kx^2 \Big|_{x_A}^{x_B}$$

$$= -\frac{k}{2} (x_B^2 - x_A^2)$$

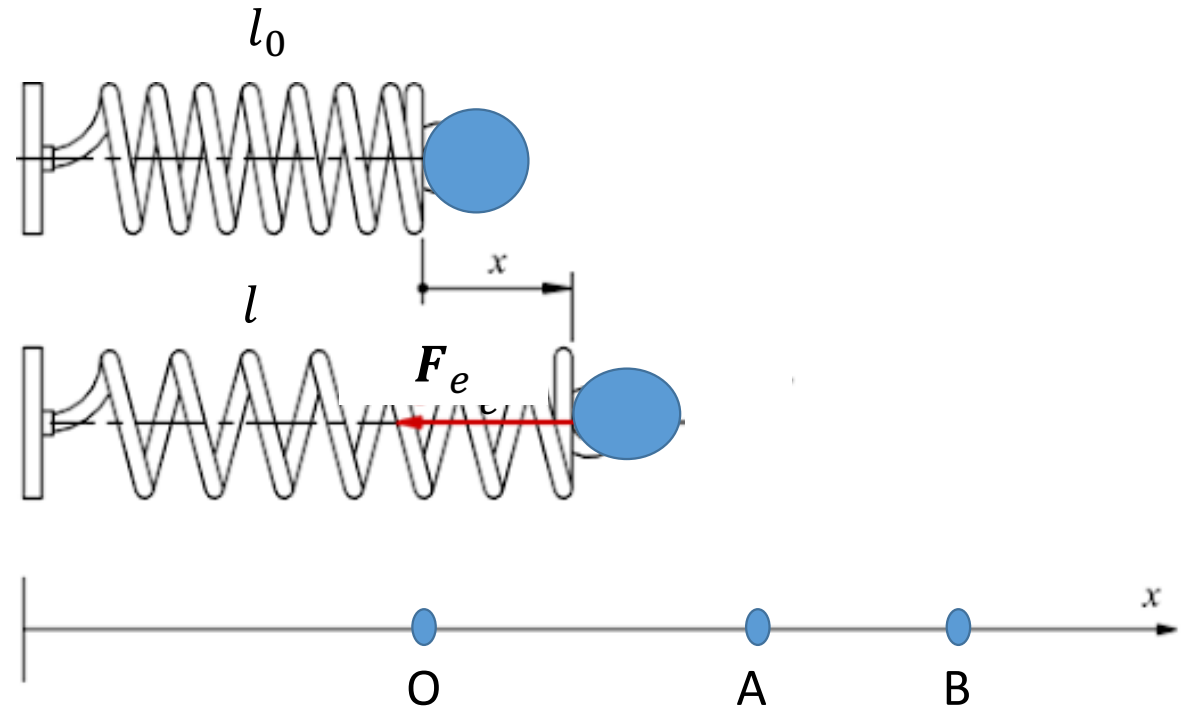
$$W_{AB} = -\frac{k}{2} (x_B^2 - x_A^2)$$

lavoro della forza elastica

$$E_p(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

energia potenziale della
Forza elastica

$$\rightarrow W_{AB} = -\Delta E_{p_{A,B}}$$



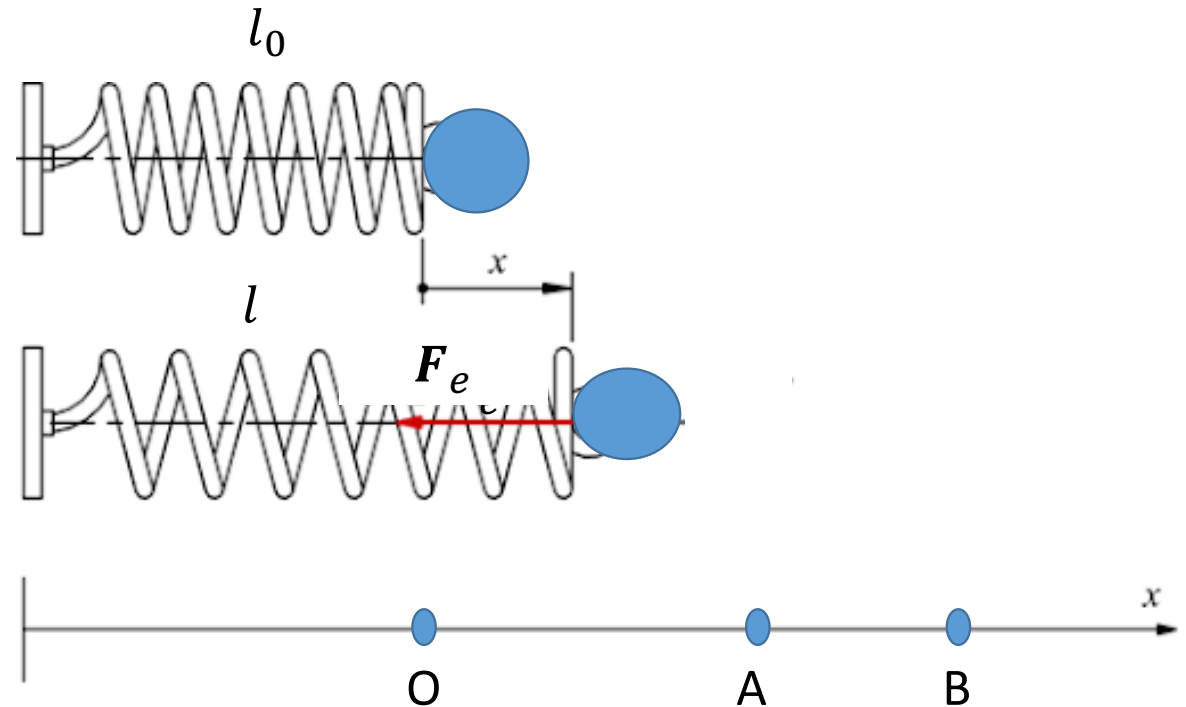
Lavoro di una forza elastica #3

- Anche in questo caso il lavoro dipende solo dalle configurazioni iniziale e finale e non dal percorso. Possiamo definire una funzione energia potenziale della forza elastica come:

$$E_P(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

Ottenendo:

$$\left\{ \begin{aligned} W &= -(E_P(x_B) - E_P(x_A)) \\ &= -\Delta E_P \end{aligned} \right.$$



Lavoro ed energia potenziale

Nei casi analizzati finora abbiamo visto che il lavoro dipende solo dalla configurazione iniziale e finale e non dal percorso e abbiamo definito una funzione della posizione energia potenziale tale che:

$$W = -\Delta E_p$$

Questo risultato vale sempre, per qualsiasi forza?

Abbiamo verificato che vale per

- Forza peso $E_p(z) = m g z$

- Forza costante

- Forza elastica $\frac{1}{2} k x^2$

$$\vec{F}_e = -k x \hat{c}$$

es. se $\vec{F}_c = -F \hat{c}$, $E_p = F x$

$$\vec{F}_c = F \hat{c} \rightarrow E_p = -F x$$

$E_p(x)$

Analizziamo un altro esempio – forza di attrito

Forza non conservativa, dissipativa.

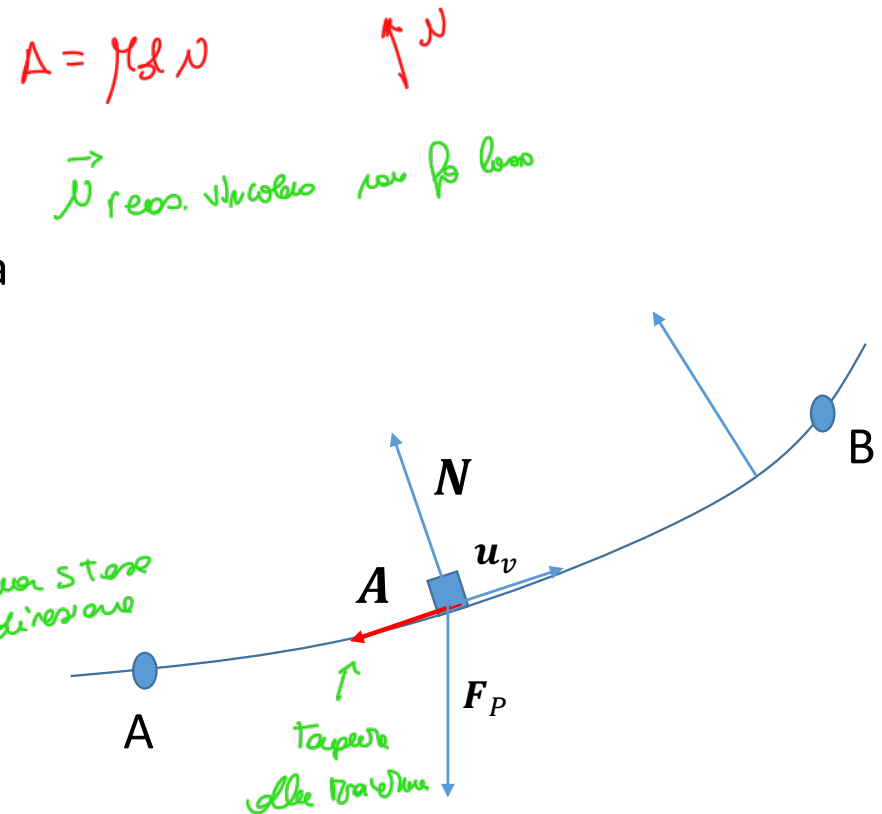
• Lavoro della forza di attrito #1

La forza di attrito dinamico ha modulo pari a $\mu_D N$, essendo N la componente della reazione vincolare perpendicolare alla traiettoria e μ_D il coefficiente di attrito dinamico. La direzione della forza di attrito è tangente alla traiettoria, il verso opposto alla velocità. Possiamo quindi scrivere la forza di attrito come:

$$\vec{A} = -\mu_D N \vec{u}_v \rightarrow \text{verso opposto alla velocità, non stessa direzione}$$

Essendo $\vec{u}_v$ il versore che identifica la direzione della velocità (è uguale al versore tangente alla traiettoria $\vec{u}_t$ se il punto percorre la traiettoria in senso concorde con l'ascissa curvilinea).

$\vec{u}_T$ sempre concorde al verso di percorrenza, $\vec{u}_N$ no...



Lavoro della forza di attrito #2

Se conosco la velocità lo posso scrivere come:

$$\left[\mathbf{u}_v = \frac{\mathbf{v}}{v} \right. \text{Trucco} \quad \left. \vec{A} = -\mu_D N \hat{u}_v \right]$$

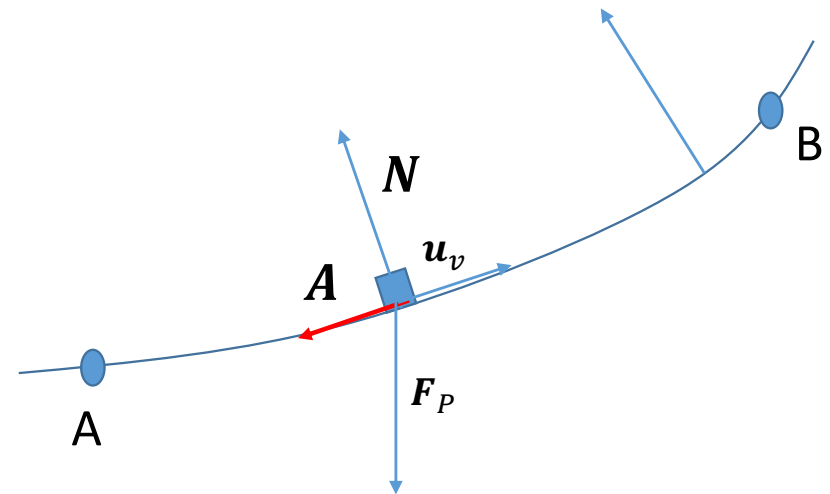
Calcoliamo il lavoro tra A e B

$$W = \int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -\mu_D N \mathbf{u}_v \cdot d\vec{s}$$

Si osserva che $\mathbf{u}_v \cdot d\vec{s} = ds$ quindi risulta

$$W = \int_A^B -\mu_D N ds$$

Per risolvere questo integrale dobbiamo conoscere il percorso effettivo.



Seppure
dipende dallo
spostamento

→ dipende dalla direzione

Lavoro della forza di attrito #3

Abbiamo verificato quindi che il lavoro della forza di attrito:

$$\mathbf{A} = -\mu_D N \mathbf{u}_v$$

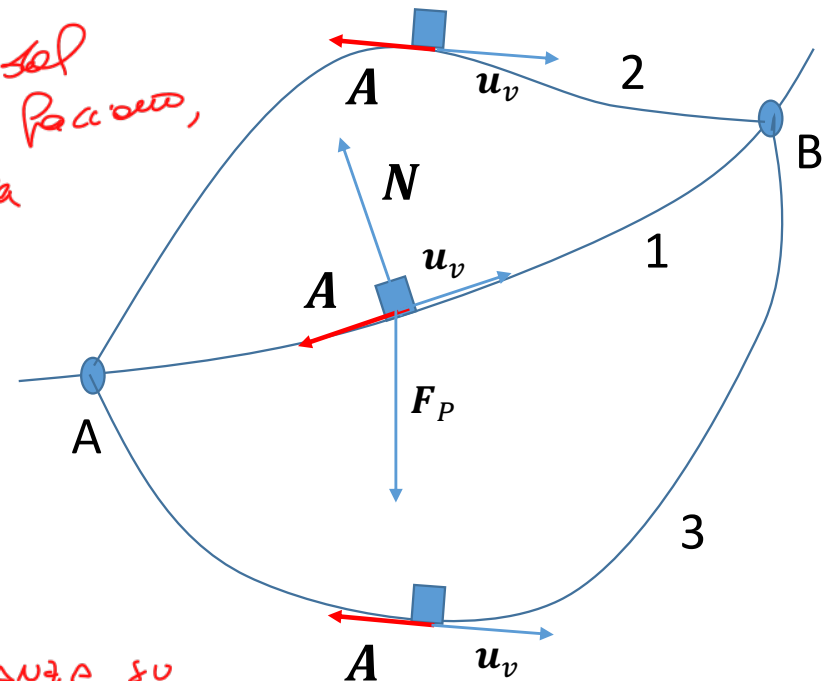
$$W = \int_A^B -\mu_D N ds$$

DIPENDE dal
percorso che faccio,
ds cambia

Dipende dal percorso, quindi se definisco tre diversi percorsi, 1, 2 e 3 per andare da A a B, ottengo tre valori diversi di lavoro:

$$W_1 \neq W_2 \neq W_3$$

Se il percorso è più breve, la distanza su cui agisce la forza di attrito è minore, meno lavoro



Lavoro ed energia potenziale

Torniamo alla domanda delle slide precedente, la relazione tra lavoro ed energia potenziale

$$\underline{W = -\Delta E_p}$$

Vale sempre?

Risposta: NO

Abbiamo verificato che vale per

- Forza peso
- Forza costante
- Forza elastica

Ma **non vale** per la forza di attrito.

• Forze conservative

Definizioni:

- Una forza si dice **conservativa** se per essa il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale e finale e non dal percorso.
lavoro è un f. che dipende solo da pos. iniz. e fin.
 $E_p(\vec{r})$ f. solo della pos. iz.
- Per le forze conservative è possibile definire **l'energia potenziale**, una grandezza scalare $E_p(\vec{r})$ funzione solo della posizione (identificata nel caso generale dal vettore $\vec{r}$ definito rispetto a un dato sistema di riferimento) tale che
E.L.
$$W_{AB} = -\Delta E_{pAB}$$
- Una forza in cui il lavoro dipende dalla posizione iniziale e finale, ma anche dal percorso (ad esempio la forza di attrito) si dice **non conservativa**.

Forze conservative e non conservative

Riassumendo, abbiamo definito il lavoro di una forza *o risultante* applicata a un punto materiale che passa dalla posizione A alla posizione B come:

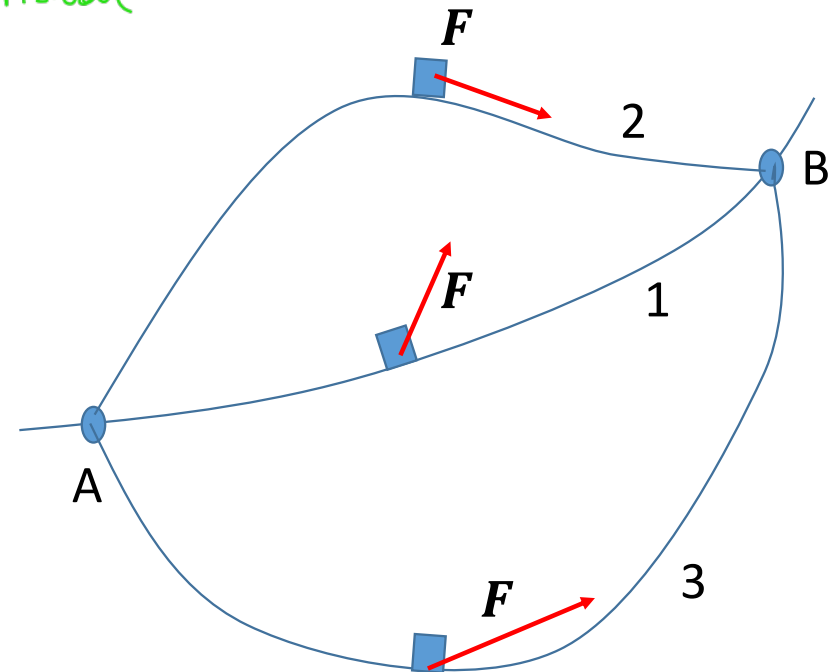
$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad [J]$$

se la forza $\vec{F}$ è conservativa il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale e finale ma non dal percorso

$$W_1 = W_2 = W_3$$

Se la forza $\vec{F}$ non è conservativa il lavoro dipende anche dal percorso quindi:

$$W_1 \neq W_2 \neq W_3$$



• Lavoro, percorso diretto e inverso

Consideriamo un percorso tra due punti A e B. Il lavoro per andare da A a B (percorso diretto) vale:

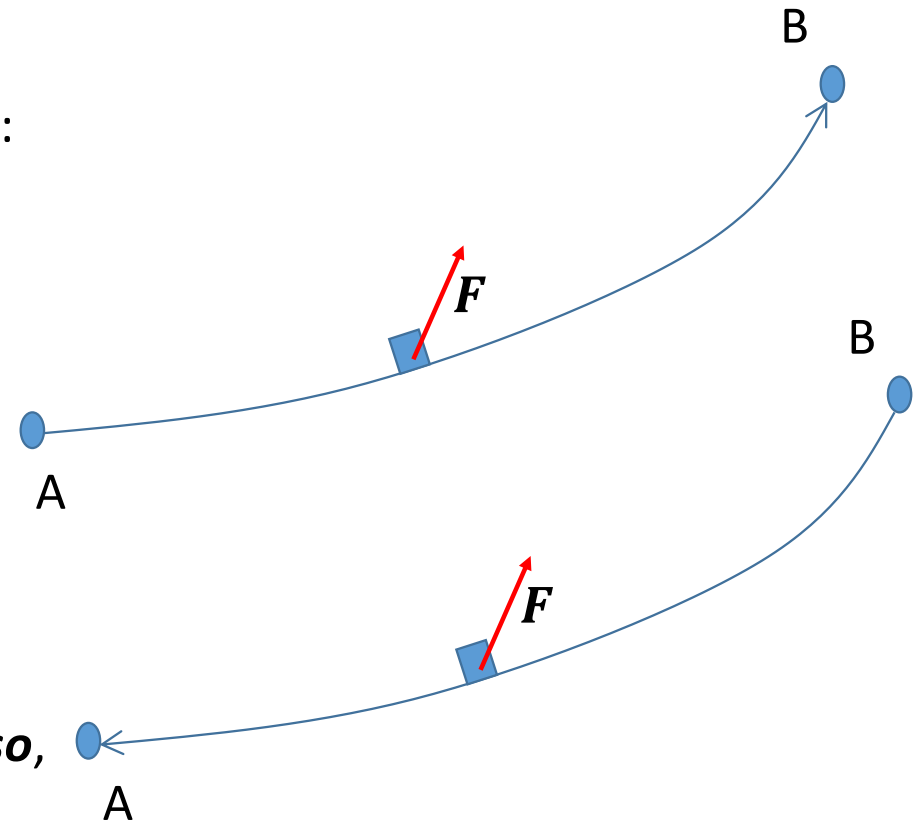
$$W_d = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Il lavoro per passare da B ad A (percorso inverso) vale:

$$W_i = \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Se percorriamo lo stesso percorso in senso inverso, sia che nel caso di forza conservativa che non conservativa risulta

$$W_i = -W_d$$



$$W_i = -W_d$$

Lavoro Percorso = - Lavoro Percorso
DIRETTO INDIRIZZO

vale anche per Forze NON
CONSERVATIVE

Lavoro, percorso chiuso

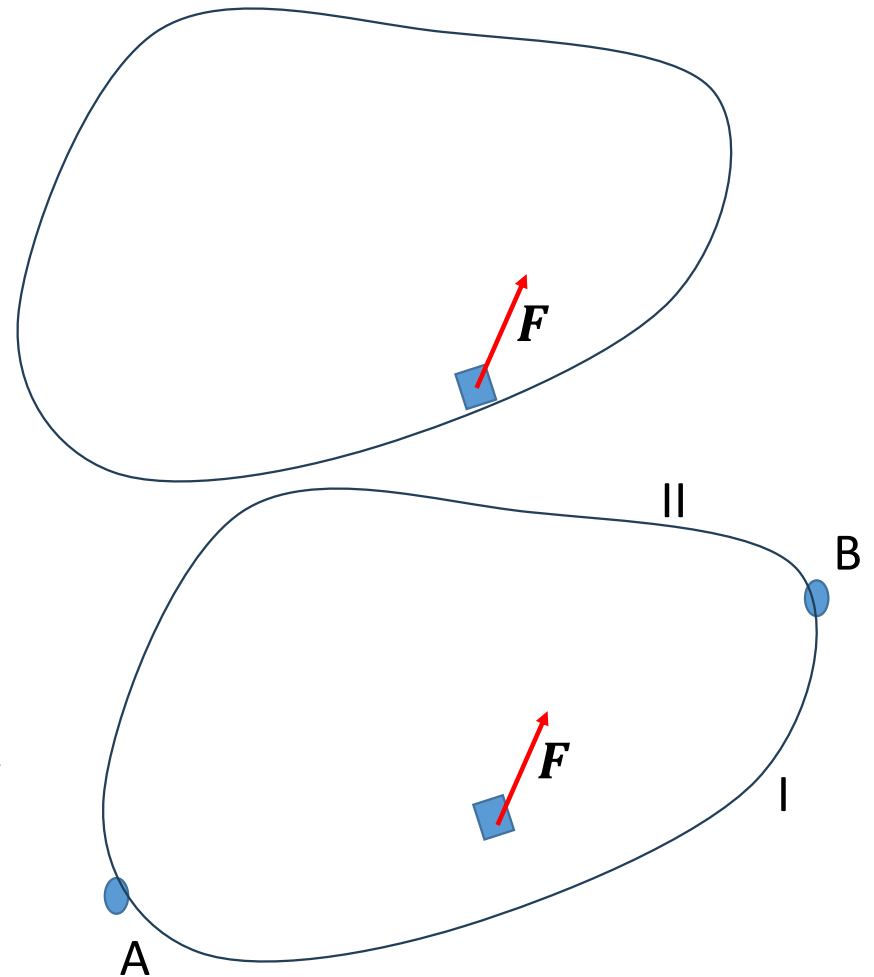
- Calcoliamo il lavoro di una forza applicata a un punto che percorre un percorso chiuso

$$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Possiamo definire due punti arbitrari sul A e B percorso e dividere il percorso in due tratti I e II.

$$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_I + \int_B^A (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{II}$$

↑
Percorso I



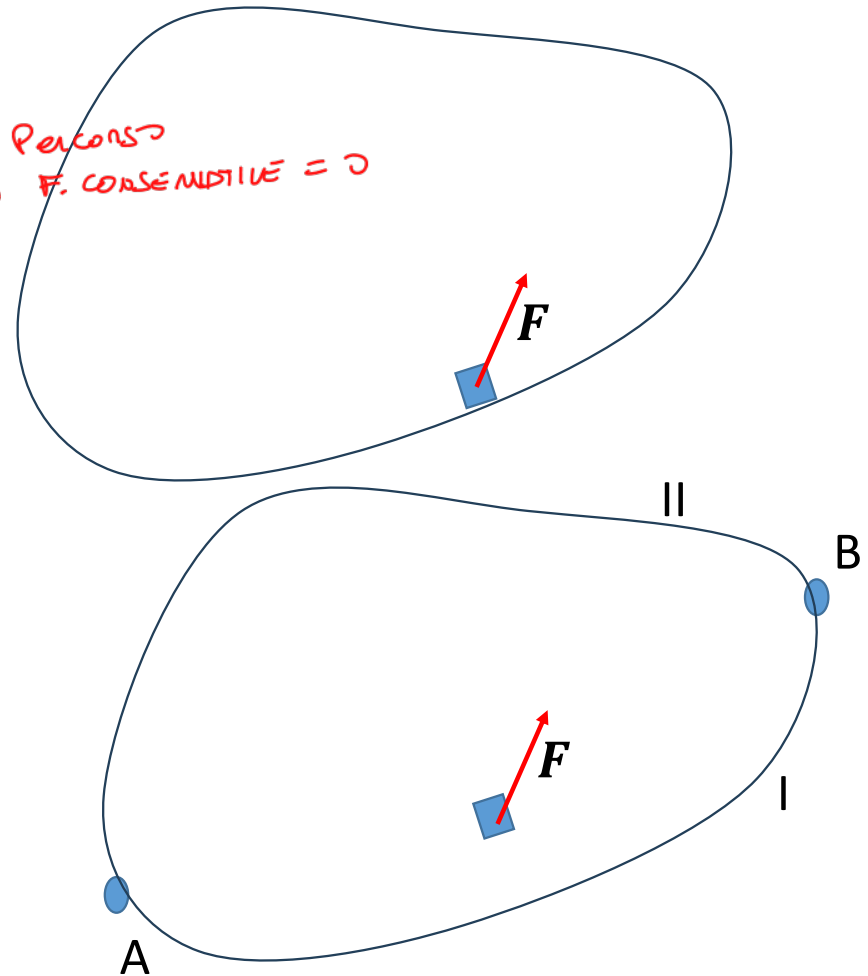
Lavoro, percorso chiuso

Se la forza è conservativa il lavoro è indipendente dal percorso e quindi

LAVORO PERCORSO
CHIUSO F. CONSERVATIVE = 0

$$\begin{aligned}
 W &= \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_I + \int_B^A (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{II} \\
 &= -\left(E_P(\vec{\mathbf{r}}_B) - E_P(\vec{\mathbf{r}}_A)\right) - \left(E_P(\vec{\mathbf{r}}_A) - E_P(\vec{\mathbf{r}}_B)\right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$-\Delta E_{PAB} - \Delta E_{PBA} = 0$



Se invece la forza è non conservativa

$$\begin{aligned}
 W &= \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_I + \int_B^A (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{II} \\
 &= \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_I - \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{II} \neq 0
 \end{aligned}$$

DIPENDE DAL
PERCORSO, NON SONO UGUALI

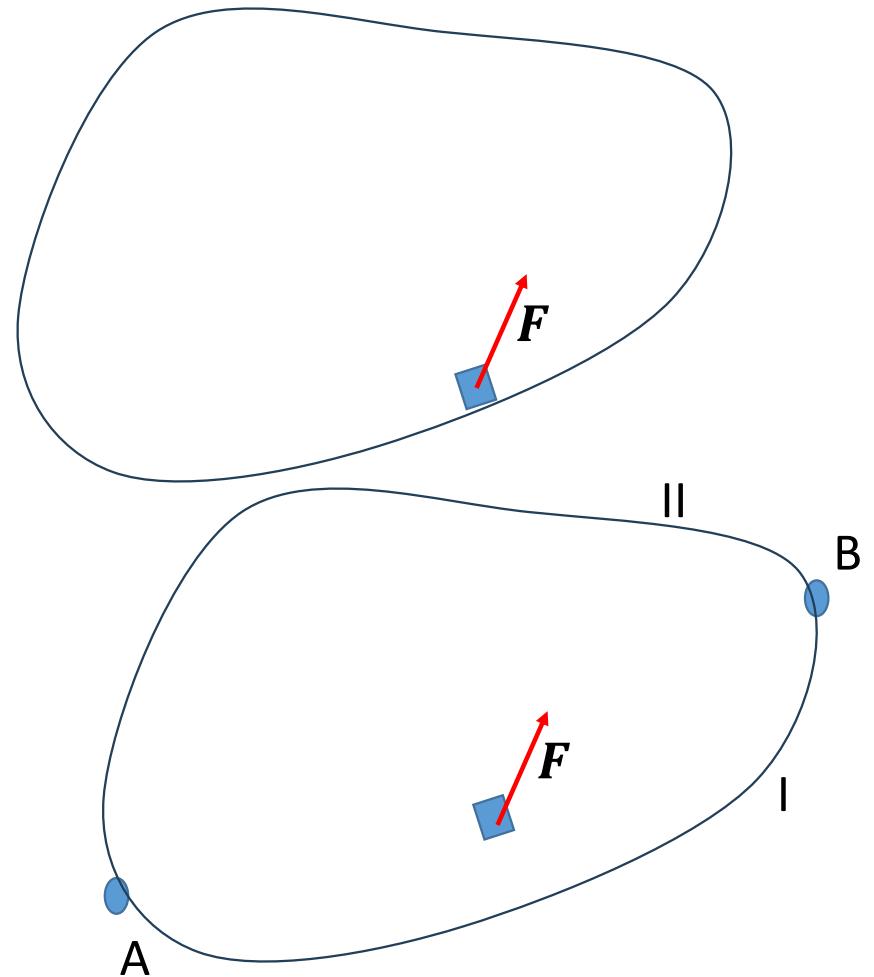
Lavoro, percorso chiuso

Se la forza è conservativa, per qualunque percorso chiuso risulta

LAVORO PERCORSO CHIUSO $\Rightarrow$
SE F CONSERV.

$$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Questa è un'altra definizione di forza conservativa.



• Energia potenziale

Energia potenziale

- Per le forze conservative è possibile definire ***l'energia potenziale***, una grandezza scalare $E_P(\mathbf{r})$ funzione solo della posizione (identificata nel caso generale dal vettore $\mathbf{r}$ definito rispetto a un dato sistema di riferimento) tale che

$\vec{r}$

$$W = -\Delta E_P \quad]$$

Per un percorso dal punto A al punto B abbiamo

$$\Delta E_P = E_P(\mathbf{r}_B) - E_P(\mathbf{r}_A) \quad]$$

$E_P(\mathbf{r})$ è una funzione della posizione che dipende dal tipo di forza

Energia potenziale

$E_P(\mathbf{r})$ è una funzione della posizione che dipende dal tipo di forza.

Per la forza peso $\vec{F}_p = -mg\hat{z}$
lungo z

$$E_P(\mathbf{r}) = E_P(z) = mgz$$

Per una forza elastica che agisce lungo la direzione x

$$\vec{F}_e = -kx\hat{x}$$

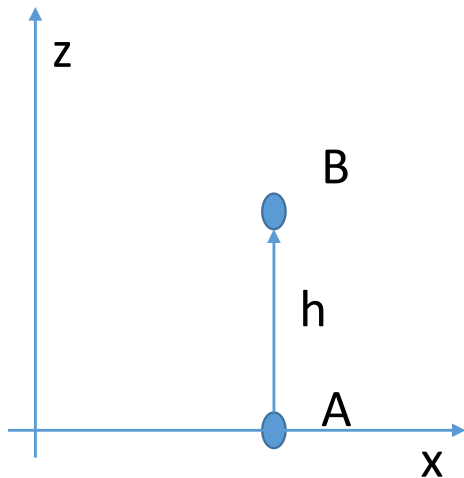
$$E_P(\mathbf{r}) = \underline{E_P(x)} = \frac{1}{2}kx^2$$

Ecc.

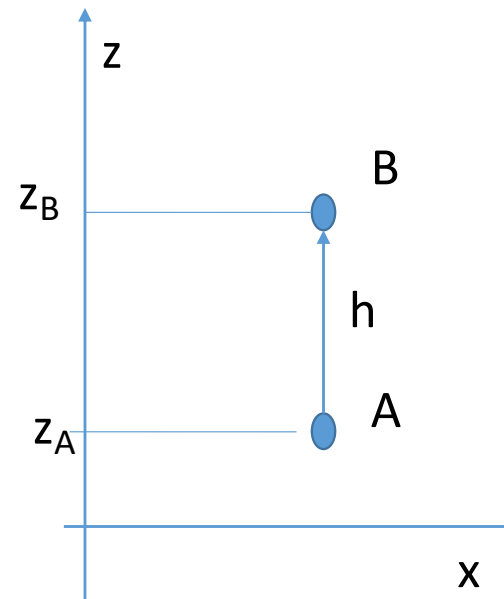
Energia potenziale

Se cambia sistema di RF
 $E_P(\vec{r})$ cambia ma
 ΔE_P rimane la stessa

Osserviamo che la posizione $\vec{r}$ è espressa rispetto a un dato sistema di riferimento, se cambia il sistema di riferimento cambiano i valori di $E_P(\vec{r})$ nei singoli punti, ma non la variazione. Per la forza peso ad esempio



$$\begin{aligned}E_P(z_A) &= mgz_A = 0 \\E_P(z_B) &= mgz_B = mgh \\ \Delta E_P &= E_P(z_B) - E_P(z_A) = mgh\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}E_P(z_A) &= mgz_A \\E_P(z_B) &= mgz_B \\ \Delta E_P &= E_P(z_B) \\ &\quad - E_P(z_A) = mgh\end{aligned}$$

$h = z_B - z_A$

Energia potenziale

La posizione $\mathbf{r}$ è espressa rispetto a un dato sistema di riferimento, se cambia il sistema di riferimento cambiano i valori di $E_p(\mathbf{r})$ nei singoli punti, ma non la variazione.

$$E_p(\vec{r}') \neq E_p(\vec{r})$$

In altri termini, se cambia il sistema di riferimento e la posizione è espressa dal vettore $\mathbf{r}'$, $E_p(\mathbf{r}')$ cambia rispetto a $E_p(\mathbf{r})$ di un valore costante che dipende dalla posizione relativa del nuovo sistema di riferimento rispetto al primo.

Quando utilizzo l'energia potenziale per il calcolo del lavoro di una forza conservativa, ne considero la variazione (= differenza tra il valore finale e iniziale) e quindi il termine costante si elimina.

Energia potenziale

Per le forze conservative il lavoro è dato da

$$W = -\Delta E_p$$

- Se $\Delta E_p > 0, W < 0$ → quando la variazione di energia potenziale è positiva, il lavoro è negativo: devo "spendere" lavoro per aumentare l'energia potenziale.
- Se $\Delta E_p < 0, W > 0$ → quando la variazione di energia potenziale è negativa, il lavoro è positivo: posso "sfruttare" la diminuzione di energia potenziale per ottenere lavoro (che posso utilizzare ad esempio per azionare una macchina...)

Energia cinetica e potenziale

Abbiamo visto che il lavoro delle forze applicate su un punto materiale è pari alla variazione di energia cinetica

$$[W = \Delta E_k] \quad \text{v.t. di forza vello}$$

$$W = \Delta E_k$$

Ricordiamo che l'energia cinetica per un punto materiale è definita come $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Se sul punto materiale agiscono solo forze conservative il lavoro è opposto alla variazione di energia potenziale:

se ho solo forze e cons.

$$W = -\Delta E_P = -(E_{PB} - E_{PA})$$

$$W = -\Delta E_P$$

Quindi

$$\Rightarrow \Delta E_k = -\Delta E_P$$

Esplicitando le variazioni tra il punto A e il punto B di energia cinetica e potenziale:

$$E_{kB} - E_{kA} = -(E_{PB} - E_{PA})$$

Energia meccanica

se su un corpo agiscono
solo f. conservative

Lavoro, energia cinetica ed energia potenziale

$$\bullet \Delta E_k = -\Delta E_p$$
$$E_{kB} - E_{kA} = -(E_{pB} - E_{pA})$$

$$\boxed{E_{kB} + E_{pB} = E_{pA} + E_{kA}}$$

Se sul punto materiale agiscono solo forze conservative la quantità

$$\underline{E_m = E_k + E_p}$$

Rimane costante (**si conserva**). Definiamo

$$\boxed{E_m = E_k + E_p}$$

Energia meccanica del sistema

Energia meccanica

Energia meccanica del sistema

$$E_m = E_k + E_p$$

Se su un punto materiale agiscono solo forze conservative l'energia meccanica si conserva (principio di conservazione dell'energia meccanica)

Se su un punto agiscono solo
F. conservative, l'energia
meccanica si conserva e

$$E_{mA} = E_{mB}$$

$$E_{kA} + E_{pA} = E_{kB} + E_{pB}$$

$$\frac{1}{2}mv^2$$

sol. di punto
delle forze del grav.

Corso di FISICA 1



Capitolo 6 – lavoro, potenza, energia cinetica

Monica Malvezzi, Università degli
Studi di Siena



caso MISTO

se ho solo F. conservative

$$\Delta E_m = 0, E_m \text{ costante}$$

Forze conservative e non conservative

Se nel punto materiale agiscono sia forze conservative che non conservative il lavoro compiuto dalla risultante delle forze nel passaggio del punto materiale dalla posizione A alla posizione B può essere scomposto in due parti

Per la proprietà del modello Solido

$$W = W_c + W_{nc}$$
$$W = \int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{s} + \int_A^B \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{s}$$

- Essendo W_c il lavoro delle forze conservative e W_{nc} quello delle forze non conservative. Abbiamo visto che per le forze conservative risulta

- $W_c = -\Delta E_p$

Per il teorema dell'energia cinetica abbiamo visto che

- $W = \Delta E_k$

Sostituendo l'espressione del lavoro otteniamo

$$W_c + W_{nc} = \Delta E_k$$
$$-\Delta E_p + W_{nc} = \Delta E_k$$
$$\Delta E_k + \Delta E_p = W_{nc}$$

Ricordando la definizione di energia meccanica si ottiene:

$$\Delta E_m = W_{nc}$$

In presenza di forze non conservative l'energia meccanica non si conserva e la sua variazione è pari al lavoro delle forze non conservative.

si conserva

$$E_{pA} + E_{kA} = E_{pB} + E_{kB}$$

Se sul punto solo F. cons.

$$\Delta E_m = 0$$

allora

$$\Delta E_m = W_{nc}$$

NON SI CONSERVA!
è pari al lavoro delle forze non cons.

Forze conservative e non conservative

Tra le forze non conservative abbiamo visto in particolare quelle dovute all'attrito, che sono anche dissipative. Per le forze dissipative risulta

$$W_{nc} < 0$$

FORZE DISSIPAT. $W_{nc} < 0$

Intuitivamente, le forze di attrito si oppongono al moto e quindi compiono lavoro negativo, dato che

$$\mathbf{F}_{diss} \cdot d\mathbf{s} < 0$$

poiché si oppone al moto

$$\mathbf{F}_{diss} \cdot d\mathbf{s} < 0$$

Se su un punto materiale agiscono forze non conservative di tipo dissipativo

$$\Delta E_m = W_{nc} < 0$$

$$\vartheta > \pi/2$$

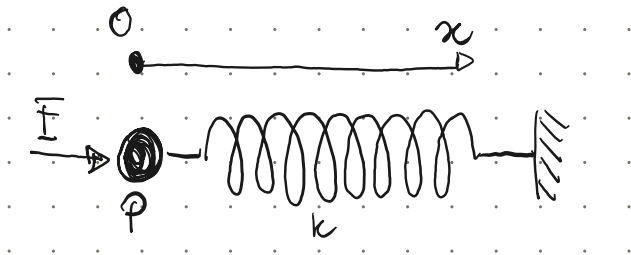
L'energia meccanica diminuisce durante il moto.

$$\Rightarrow \Delta E_m = W_{nc} < 0$$

ho diminuzione dell'energia
meccanica del punto durante
il moto

Esempio #1

Consideriamo un punto materiale P che può muoversi lungo una direzione x , inizialmente in quiete nella configurazione che coincide con l'origine del sistema di riferimento. In un generico istante si applica una forza costante $F = F\mathbf{i}$. Il punto è collegato a una molla con costante elastica k fissata nell'altro estremo. La molla è a riposo quando $x = 0$. Calcoliamo la velocità del punto materiale in funzione dello spostamento x e il valore di x per il quale la velocità si annulla.



L'energia cinetica del sistema è:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Mentre l'energia potenziale è

$$E_p = E_{pe} + E_{pc}$$

Dove E_{pe} è l'energia potenziale della forza elastica, data da:

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k x^2$$

E E_{pc} è l'energia potenziale della forza costante, che è data da

$$E_{pc} = -Fx$$

Dato che nel sistema agiscono solo forze conservative, l'energia meccanica si conserva, quindi

$$E_m = E_k + E_p = \text{costante}$$

Nella configurazione iniziale, che indichiamo con il pedice $_0$ (dato che $x(0) = 0$) risulta

$$E_{p0} = 0$$

Dato che inoltre il punto è inizialmente in quiete risulta $v_0 = 0$ e quindi

$$E_{k0} = 0$$

Esempio #1

Risulta quindi

$$E_{m0} = 0$$

Dato che l'energia meccanica si conserva,

$$E_m = 0$$

in tutte le configurazioni, quindi

$$\frac{1}{2}mv^2 - Fx + \frac{1}{2}kx^2 = 0$$

Da questa relazione possiamo ricavare $v(x)$:

$$\frac{1}{2}mv^2 = Fx - \frac{1}{2}kx^2 = 0$$

$$v^2 = \frac{2}{m}x\left(F - \frac{1}{2}kx\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}x\left(F - \frac{1}{2}kx\right)}$$

Calcoliamo per quali valori di x la velocità si annulla

$$\sqrt{\frac{2}{m}x\left(F - \frac{1}{2}kx\right)} = 0$$

Da cui otteniamo

$$\begin{aligned}x &= 0 \\x &= \frac{2F}{k}\end{aligned}$$

Consideriamo la seconda soluzione, si tratta di una posizione di equilibrio? Calcoliamo la risultante delle forze in questa configurazione (consideriamo la componente in direzione x)

$$R = F - kx = F - k \cdot \frac{2F}{k} = -F \neq 0$$

La posizione $x = \frac{2F}{k}$ non è una posizione di equilibrio: in quella posizione risulta $v = 0$ ma l'accelerazione vale:

$$a = \frac{R}{m} = -\frac{F}{m}$$

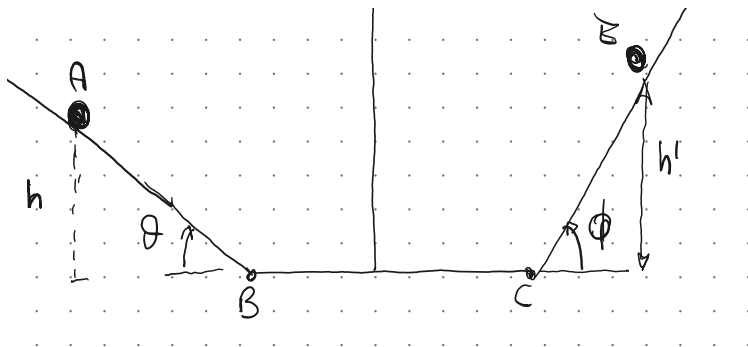
Esempio #2

Consideriamo un punto materiale P che si muove lungo una superficie costituita da

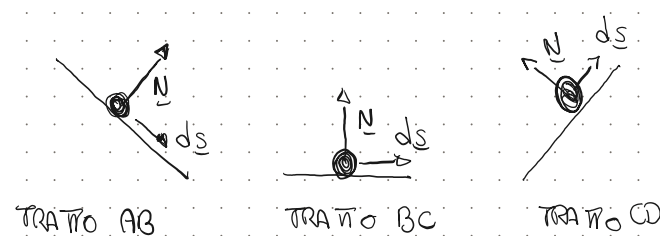
- Un primo tratto AB lineare inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale.
- Un tratto orizzontale BC orizzontale.
- Un terzo tratto CD, inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo ϕ .

I tre tratti sono privi di attrito. Supponiamo di posizionare il punto materiale nella posizione A, ad un'altezza h dal tratto orizzontale, con velocità iniziale nulla, e lasciarlo scivolare lungo il piano.

Determiniamo il punto di arrivo.



Il punto materiale è soggetto alla forza peso e alla reazione del piano, che in assenza di attrito è perpendicolare al piano stesso. Nei tre tratti considerati quindi si ha una configurazione come quella riportata in figura.



In tutti e tre i casi, la forza è perpendicolare allo spostamento, quindi

$$N \cdot ds = 0$$

La forza N non compie lavoro.

Per quanto riguarda la forza peso, abbiamo visto che è conservativa.

Esempio #2

Prendiamo un sistema di riferimento con origine alla quota del tratto BC.

Nel tratto AB l'energia potenziale vale

$$E_{pA} = mgh$$

$$E_{pB} = 0$$

Mentre l'energia cinetica vale (ricordiamo che il punto parte da A con velocità nulla)

$$E_{kA} = 0$$

$$E_{kB} = \frac{1}{2}mv_B^2$$

Nel tratto AB agiscono solo forze conservative, quindi l'energia meccanica si conserva.

$$E_{pA} + E_{kA} = E_{pB} + E_{kB}$$

Sostituendo otteniamo

$$mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$$

Da cui ricaviamo

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

Nel tratto BC l'energia potenziale vale

$$E_{pB} = E_{pC} = 0$$

Mentre l'energia cinetica vale

$$E_{kB} = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$E_{kC} = \frac{1}{2}mv_C^2$$

Anche nel tratto BC agiscono solo forze conservative, quindi l'energia meccanica si conserva.

$$E_{pB} + E_{kB} = E_{pC} + E_{kC}$$

Sostituendo otteniamo

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_C^2$$

Da cui ricaviamo

$$v_C = v_B = \sqrt{2gh}$$

Fseminio #2

Nel tratto CD l'energia potenziale vale

$$E_{pC} = 0$$
$$E_{pD} = mgh'$$

Mentre l'energia cinetica vale (ricordiamo che alla massima altezza h' la velocità è nulla

$$E_{kC} = \frac{1}{2}mv_C^2$$
$$E_{pD} = 0$$

Anche nel tratto CD agiscono solo forze conservative, quindi l'energia meccanica si conserva.

$$E_{pC} + E_{kC} = E_{pD} + E_{kD}$$

Sostituendo otteniamo

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = mgh'$$

Da cui ricaviamo

$$h' = \frac{v_C^2}{2g} = h$$

In assenza di attrito, se il punto parte con velocità nulla raggiungerà, sul tratto CD, la stessa altezza da cui è partito nel tratto AB.

E se il punto fosse partito da A con velocità $v_A \neq 0$?

Nel tratto AB l'energia potenziale vale ancora

$$E_{pA} = mgh$$
$$E_{pB} = 0$$

Mentre l'energia cinetica vale in questo caso

$$E_{kA} = \frac{1}{2}mv_A^2$$
$$E_{kB} = \frac{1}{2}mv_B^2$$

Nel tratto AB agiscono solo forze conservative, quindi l'energia meccanica si conserva.

$$E_{pA} + E_{kA} = E_{pB} + E_{kB}$$

Sostituendo otteniamo

$$mgh + \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2$$

Da cui ricaviamo

$$v_B = \sqrt{2gh + v_A^2}$$

Esempio #2

Nel tratto BC l'energia potenziale vale ancora

$$E_{pB} = E_{pC} = 0$$

Mentre l'energia cinetica vale

$$E_{kB} = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$E_{kC} = \frac{1}{2}mv_C^2$$

Anche nel tratto BC agiscono solo forze conservative, quindi l'energia meccanica si conserva.

$$E_{pB} + E_{kB} = E_{pC} + E_{kC}$$

Sostituendo otteniamo

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_C^2$$

Da cui ricaviamo

$$v_C = v_B = \sqrt{2gh + v_A^2}$$

Nel tratto CD l'energia potenziale vale

$$E_{pC} = 0$$

$$E_{pD} = mgh'$$

Mentre l'energia cinetica vale (ricordiamo che alla massima altezza h' la velocità è nulla)

$$E_{kC} = \frac{1}{2}mv_C^2$$

$$E_{pD} = 0$$

Anche nel tratto CD agiscono solo forze conservative, quindi l'energia meccanica si conserva.

$$E_{pC} + E_{kC} = E_{pD} + E_{kD}$$

Sostituendo otteniamo

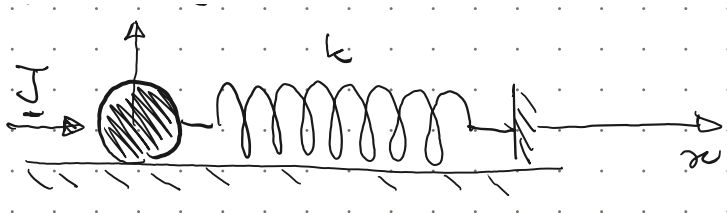
$$\frac{1}{2}mv_C^2 = mgh'$$

Da cui ricaviamo

$$h' = \frac{v_C^2}{2g} = \frac{1}{2g}(2gh + v_A^2) = h + \frac{v_A^2}{2g}$$

Esempio #3

Un punto materiale di massa m scorre su una superficie orizzontale liscia (priva di attrito) ed è collegato all'estremità libera di una molla con costante elastica k , fissata nell'altra estremità ad un punto O . Alla massa viene applicata una forza per un breve istante, con impulso J , parallelo all'asse x lungo cui si deforma la molla. Di quanto si comprime la molla?



Applichiamo il teorema dell'impulso

$$J = \Delta p$$

Il punto materiale era inizialmente fermo prima dell'impulso, per cui la variazione della quantità di moto è pari a

$$\Delta p = mv_0 - 0 = mv_0$$

Da cui otteniamo facilmente

$$v_0 = J/m$$

Durante l'applicazione dell'impulso si ha una variazione finita della quantità di moto che porta la sua velocità da 0 a v_0 . La velocità v_0 ha la stessa direzione e lo stesso verso di J . Dopo l'impulso, il punto si muove sotto l'azione della forza elastica, che è conservativa. L'energia meccanica si conserva.

Indichiamo con 0 la configurazione iniziale, immediatamente dopo l'impulso, e con 1 quella immediatamente dopo l'impulso.

Analizziamo l'energia cinetica e potenziale nelle due configurazioni

Esempio #3

Configurazione 0 (la molla non è deformata e il punto si sta muovendo alla velocità v_0)

$$E_{k0} = \frac{1}{2} m v_0^2$$
$$E_{p0} = 0$$

Configurazione 1 (la molla ha la massima compressione x_1 e il punto ha velocità nulla, dato che il moto si sta invertendo)

$$E_{k1} = 0$$
$$E_{p1} = \frac{1}{2} k x_1^2$$

Dato che l'energia meccanica si conserva in presenza di forze conservative, risulta

$$E_{k0} + E_{p0} = E_{k1} + E_{p1}$$

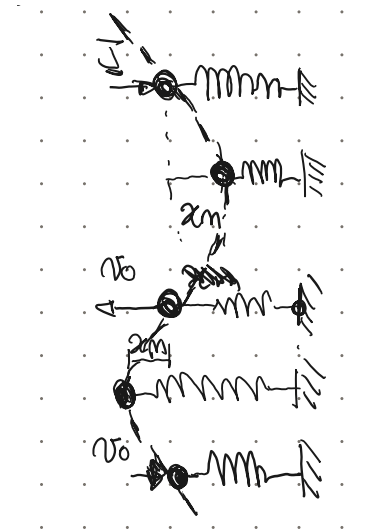
Sostituendo le espressioni trovate in precedenza si ottiene:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k x_1^2$$

Da cui possiamo ricavare la massima compressione della molla:

$$x_1 = \sqrt{\frac{m}{k}} v_0$$

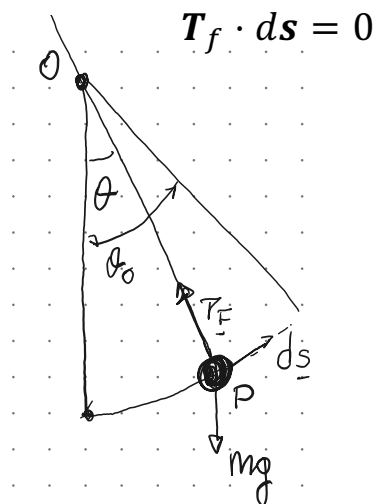
Quando il punto materiale arriva a x_1 , la velocità si annulla e il moto si inverte. Successivamente il punto torna indietro, quando ripassa da $x = 0$ avrà velocità opposta a quella iniziale e proseguirà verso sinistra, fino a raggiungere la posizione $-x_1$, per poi tornare indietro nuovamente, secondo un moto oscillatorio (che abbiamo visto essere armonico).



Esempio #4

Analizziamo il moto di un pendolo semplice utilizzando il teorema dell'energia cinetica e la conservazione dell'energia meccanica.

Sulla massa sospesa dal filo in un pendolo semplice abbiamo visto che agiscono due forze: la forza peso, che è conservativa, e la tensione del filo $\mathbf{T}_f$, la cui direzione è sempre radiale. Dato che il punto si muove lungo un arco di circonferenza, per la tensione del filo, in ogni istante, risulta:



Indichiamo con θ l'angolo tra il filo e la direzione verticale in un generico istante e con θ_0 il suo valore massimo, corrispondente alla massima ampiezza dell'oscillazione.

Calcoliamo l'energia potenziale della forza peso.

Assumiamo come configurazione di riferimento per il calcolo quella in cui il filo è verticale, quindi

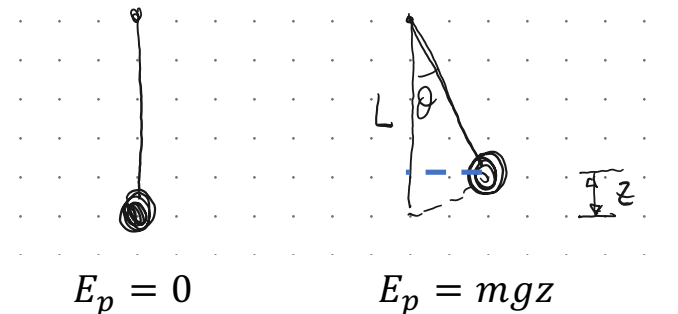
$$E_p = 0 \text{ per } \theta = 0$$

In una generica configurazione risulta

$$E_p = mgz$$

Con semplici considerazioni geometriche possiamo scrivere

$$E_p = mgz = mg(L - L \cos \theta) = mgL(1 - \cos \theta)$$



Esempio #4

In una configurazione generica, l'energia potenziale vale quindi

$$E_p = mgL(1 - \cos \theta)$$

l'energia cinetica vale

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Quando il pendolo raggiunge la massima ampiezza θ_0 la sua energia potenziale sarà

$$E_{p0} = mgL(1 - \cos \theta_0)$$

Mentre l'energia cinetica è

$$E_{k0} = 0$$

Quando il filo è verticale l'energia potenziale risulta nulla per come abbiamo scelto il riferimento

$$E_{p1} = 0$$

Mentre l'energia cinetica sarà

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv_1^2$$

Possiamo scrivere quindi le espressioni dell'energia meccanica:

- In una configurazione generica

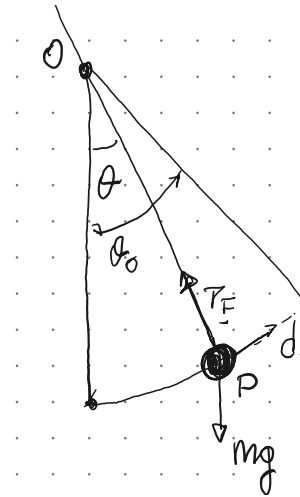
$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos \theta)$$

- Quando il pendolo raggiunge la massima ampiezza

$$E_{m0} = mgL(1 - \cos \theta_0)$$

- Quando il pendolo è verticale

$$E_{m1} = \frac{1}{2}mv_1^2$$



Esempio #4

Possiamo scrivere quindi le espressioni dell'energia meccanica:

- In una configurazione generica

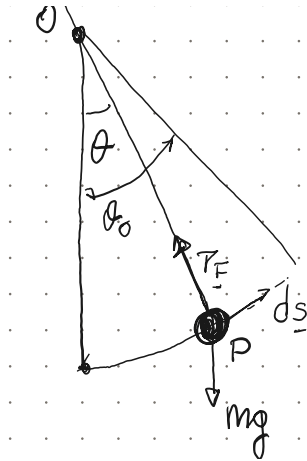
$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos \theta)$$

- Quando il pendolo raggiunge la massima ampiezza

$$E_{m0} = mgL(1 - \cos \theta_0)$$

- Quando il pendolo è verticale

$$E_{m1} = \frac{1}{2}mv_1^2$$



Dato che nel sistema agiscono solo forze conservative, l'energia meccanica si conserva. Confrontando la configurazione generica con quella in cui si raggiunge la massima ampiezza otteniamo:

$$E_m = E_{m0}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos \theta) = mgL(1 - \cos \theta_0)$$

Possiamo sviluppare questa espressione per determinare come varia la velocità in funzione di θ

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL(1 - \cos \theta_0) - mgL(1 - \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= mgL(\cos \theta - \cos \theta_0) \\ v^2 &= 2gL(\cos \theta - \cos \theta_0) \end{aligned}$$

$$v = \pm \sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

In particolare, per $\theta = 0$ abbiamo

$$v_1 = \pm \sqrt{2gL(1 - \cos \theta_0)}$$

In questo caso non abbiamo fatto ipotesi semplificative sull'ampiezza dell'oscillazione (come invece avevamo fatto per le piccole oscillazioni), quindi questi risultati valgono anche per ampiezze dell'oscillazione «grandi»

Esempio #4

In questo caso non abbiamo fatto ipotesi semplificative sull'ampiezza dell'oscillazione (come invece avevamo fatto per le piccole oscillazioni), quindi questi risultati valgono anche per ampiezze dell'oscillazione «grandi».

Ad esempio, se prendiamo $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ rad ($\cos \theta_0 = 0$), otteniamo:

In una generica configurazione

$$v = \pm \sqrt{2gL(\cos \theta)}$$

E la velocità nella configurazione verticale vale

$$v_1 = \pm \sqrt{2gL}$$

Conoscendo l'espressione della velocità in una generica configurazione

$$v = \pm \sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

Possiamo determinare anche la tensione del filo. Dall'analisi della dinamica del pendolo con la seconda legge di Newton abbiamo infatti trovato che

$$T_f = m \left(\frac{v^2}{L} + g \cos \theta \right)$$

Sostituendo i risultati trovati in precedenza si ottiene

$$\begin{aligned} T_f &= m \left(\frac{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)}{L} + g \cos \theta \right) \\ &= m(2g(\cos \theta - \cos \theta_0) + g \cos \theta) \\ &= m(3g \cos \theta - 2g \cos \theta_0) \end{aligned}$$

$$T_f = m(3g \cos \theta - 2g \cos \theta_0)$$

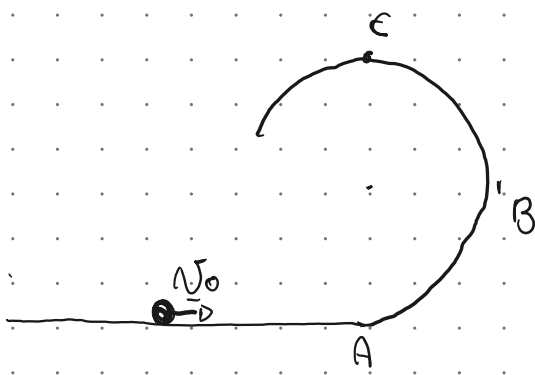
Anche per questo risultato non abbiamo fatto ipotesi sull'ampiezza dell'oscillazione, vale quindi per qualsiasi valore di θ_0

Esempio #5

(Giro della morte) Un punto materiale di massa m si muove con velocità iniziale di modulo v_0 lungo una guida orizzontale liscia. Dalla posizione A inizia a percorrere una guida circolare di raggio R sul piano verticale.

Calcoliamo la velocità del punto materiale nelle posizioni A , B e C

Calcoliamo la reazione della guida nei punti A , B e C
Qual è il minimo valore della velocità v_0 affinché il punto materiale possa completare il giro rimanendo aderente alla guida?



Esempio #5

Indichiamo con θ l'angolo che il raggio passante per il punto materiale in una generica configurazione forma con la direzione verticale, in modo simile a come lo abbiamo definito per il pendolo.

Risulta chiaramente

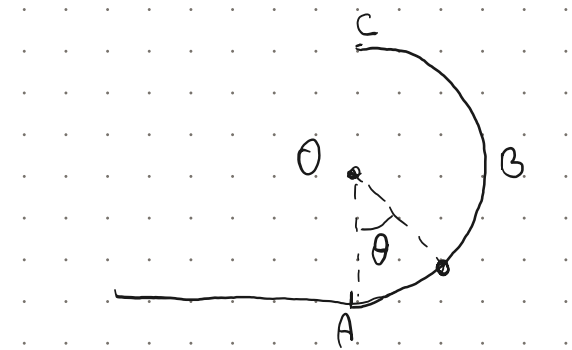
$$\begin{aligned}\theta_A &= 0 \\ \theta_B &= \frac{\pi}{2} \text{ rad} \\ \theta_C &= \pi \text{ rad}\end{aligned}$$

Prendendo come quota di riferimento quella della posizione A , come abbiamo fatto per il pendolo, possiamo scrivere in una generica configurazione l'energia potenziale della forza peso come:

$$E_p = mgR(1 - \cos \theta)$$

E quindi verifichiamo facilmente che

$$\begin{aligned}E_{p0} &= 0 \\ E_{pA} &= mgR(1 - \cos 0) = 0 \\ E_{pB} &= mgR\left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right) = mgR \\ E_{pC} &= mgR(1 - \cos \pi) = 2mgR\end{aligned}$$



Per quanto riguarda l'energia cinetica, in una generica configurazione possiamo esprimerla come

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Quindi, nella posizione iniziale 0 e nelle posizioni A , B e C abbiamo

$$\begin{aligned}E_{k0} &= \frac{1}{2} m v_0^2 \\ E_{kA} &= \frac{1}{2} m v_A^2 \\ E_{kB} &= \frac{1}{2} m v_B^2 \\ E_{kC} &= \frac{1}{2} m v_C^2\end{aligned}$$

Esempio #5

Dato che la guida è liscia, la reazione $\mathbf{N}$ (forza di contatto con la guida) sarà istante per istante normale alla guida stessa quindi il lavoro durante il percorso sarà nullo

$$\mathbf{N} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

L'unica altra forza agente sul punto materiale è la forza peso, che è conservativa. Durante il moto quindi l'energia meccanica si conserva.

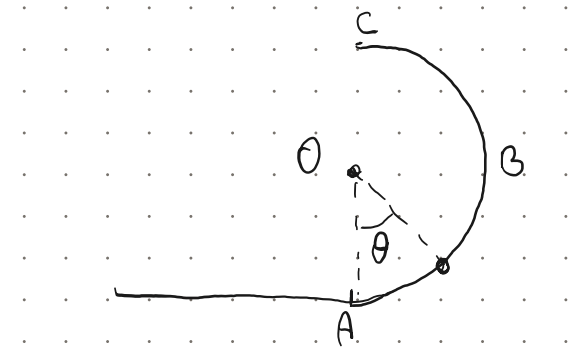
L'energia meccanica, nella posizione iniziale O e nelle posizioni A , B e C risulta

$$E_{m0} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$E_{pA} = \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$E_{pB} = mgR + \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$E_{pC} = 2mgR + \frac{1}{2} m v_C^2$$



Dato che

$$E_{m0} = E_{mA}$$

Risulta immediatamente che

$$v_A = v_0$$

Calcoliamo quindi la velocità nella posizione B , ponendo

$$E_{m0} = E_{mB}$$
$$mgR + \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$v_B^2 = v_0^2 - 2gR$$

$$v_B = \sqrt{v_0^2 - 2gR}$$

Esempio #5

Osserviamo che l'espressione

$$v_B = \sqrt{v_0^2 - 2gR}$$

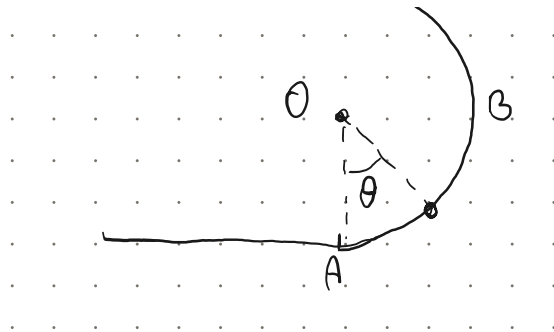
Ha senso solo se

$$v_0^2 > 2gR$$

Dal punto di vista fisico, questo significa che per poter arrivare alla posizione B la velocità iniziale deve essere:

$$v_0 > \sqrt{2gR}$$

Altrimenti il punto materiale si ferma e torna indietro prima di arrivare a B .



Calcoliamo quindi la velocità nella posizione C , ponendo

$$E_{m0} = E_{mc}$$
$$2mgR + \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v_C^2 = v_0^2 - 4gR$$

$$v_C = \sqrt{v_0^2 - 4gR}$$

Anche in questo caso, l'espressione di v_C ha senso se

$$v_0^2 > 4gR$$

Dal punto di vista fisico, questo significa che per poter arrivare alla posizione C la velocità iniziale deve essere:

$$v_0 > \sqrt{4gR}$$

Altrimenti il punto materiale si ferma e torna indietro prima di arrivare a C .

Esempio #5

Analizziamo quindi la reazione della guida, N . Abbiamo visto che la sua direzione è in ogni configurazione perpendicolare alla guida (quindi radiale, dato che la guida è una circonferenza). Per la seconda legge di Newton risulta

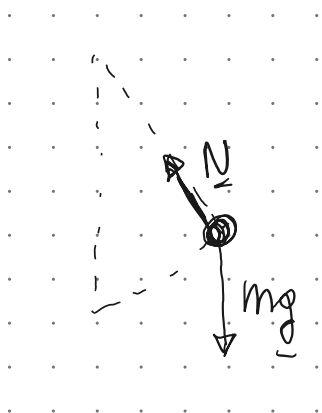
$$m\mathbf{a} = \mathbf{N} + m\mathbf{g}$$

Se consideriamo solo la componente normale dei vettori, otteniamo

$$ma_n = N - mg \cos \theta$$

Ma ricordiamo che la componente normale dell'accelerazione è pari a

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$



Si ottiene quindi

$$N = m \left(\frac{v^2}{R} + g \cos \theta \right)$$

Analizziamo i valori di N nelle varie configurazioni.

Nella posizione A abbiamo:

$$N_A = m \left(\frac{v_0^2}{R} + g \cos \theta_A \right) = m \left(\frac{v_0^2}{R} + g \right)$$

Nella posizione B abbiamo:

$$\begin{aligned} N_B &= m \left(\frac{v_B^2}{R} + g \cos \theta_B \right) = m \left(\frac{v_0^2 - 2gR}{R} \right) \\ &= m \left(\frac{v_0^2}{R} - 2g \right) \end{aligned}$$

Nella posizione C abbiamo:

$$\begin{aligned} N_C &= m \left(\frac{v_C^2}{R} + g \cos \theta_C \right) = m \left(\frac{v_0^2 - 4gR}{R} - g \right) \\ &= m \left(\frac{v_0^2}{R} - 5g \right) \end{aligned}$$

Se la guida è costituita da un semplice supporto, deve risultare $N > 0$ in tutte le configurazioni, altrimenti il punto si stacca.

Esempio #5

Se la guida è costituita da un semplice supporto, deve risultare $N > 0$ in tutte le configurazioni, altrimenti il punto si stacca.

Per la posizione A abbiamo che, per qualsiasi valore di v_0

$$N_A = m \left(\frac{v_0^2}{R} + g \right) > 0$$

Nella posizione B abbiamo:

$$N_B = m \left(\frac{v_0^2}{R} - 2g \right)$$

Risulta $N_B > 0$ se $v_0 > \sqrt{2gR}$, che era la stessa condizione che abbiamo trovato dalla conservazione dell'energia meccanica.

Nella posizione C abbiamo:

$$N_C = m \left(\frac{v_0^2}{R} - 5g \right)$$

Risulta $N_C > 0$ se $v_0 > \sqrt{5gR}$, condizione più stringente rispetto a quella trovata dalla conservazione dell'energia meccanica, che era $v_0 > \sqrt{4gR}$.

In pratica,

Se

$$v_0 > \sqrt{5gR}$$

Il punto riesce ad arrivare alla posizione C mantenendo il contatto con la guida.

Se invece:

$$\sqrt{4gR} < v_0 < \sqrt{5gR}$$

il punto potrebbe arrivare alla posizione C , ma con un valore di N_C negativo, la guida dovrebbe essere quindi in grado di »trattenere« il punto materiale, altrimenti si stacca e cade.

Se infine :

$$v_0 < \sqrt{4gR}$$

Il punto materiale torna indietro prima di arrivare in C