

Corso di FISICA 1



Capitolo 7 – Moti relativi

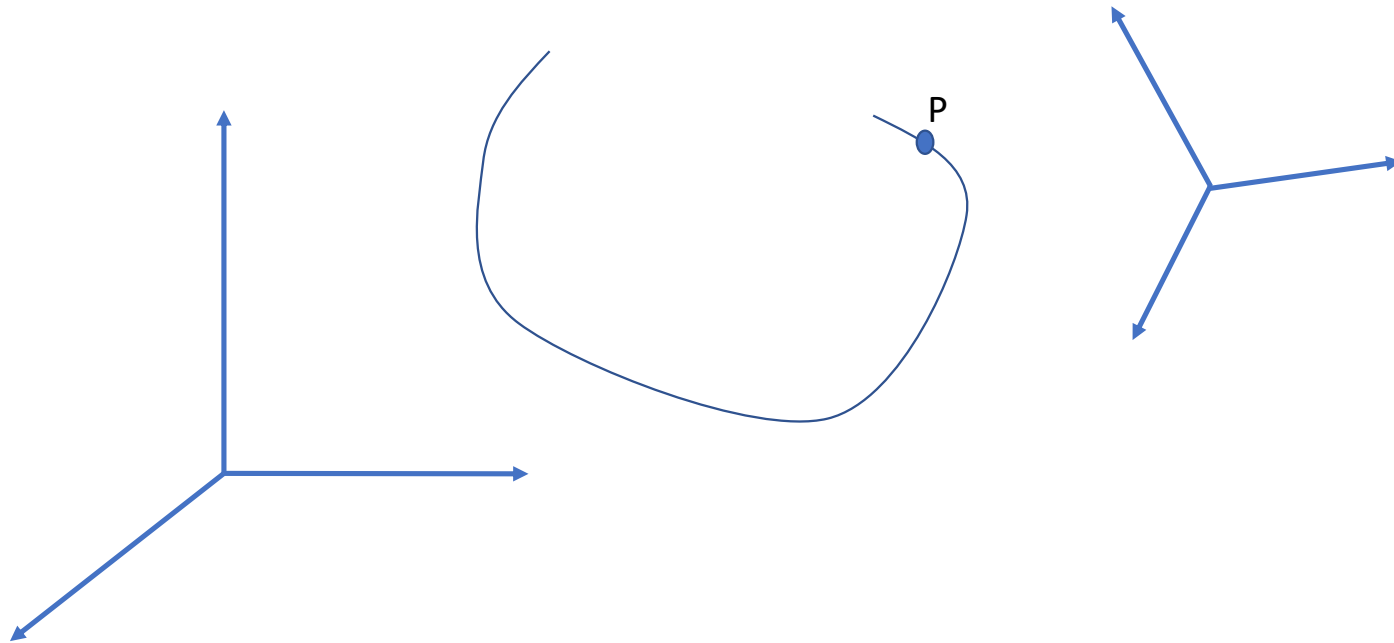
Monica Malvezzi, Università degli
Studi di Siena



Introduzione

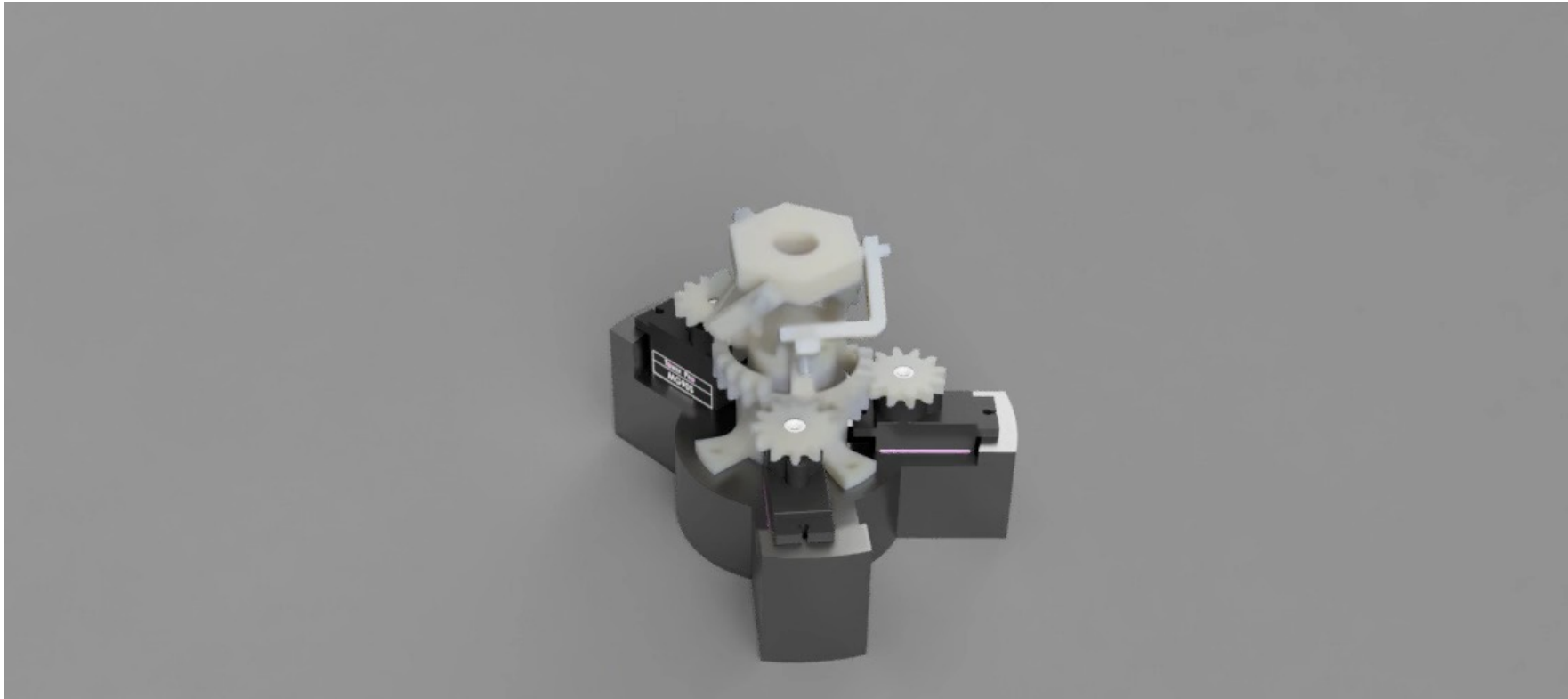
- Nei capitoli precedenti abbiamo visto come si rappresenta il moto di un punto materiale (posizione, velocità, accelerazione, dinamica) rispetto ad un dato sistema di riferimento

Cosa vede un osservatore su un altro sistema di riferimento, che si muove a sua volta rispetto al primo?



Introduzione

- Meccanismi
- Robot



Introduzione

Consideriamo quindi un punto materiale P che si muove seguito una determinata traiettoria. Supponiamo che il punto sia osservato da due distinti osservatori:

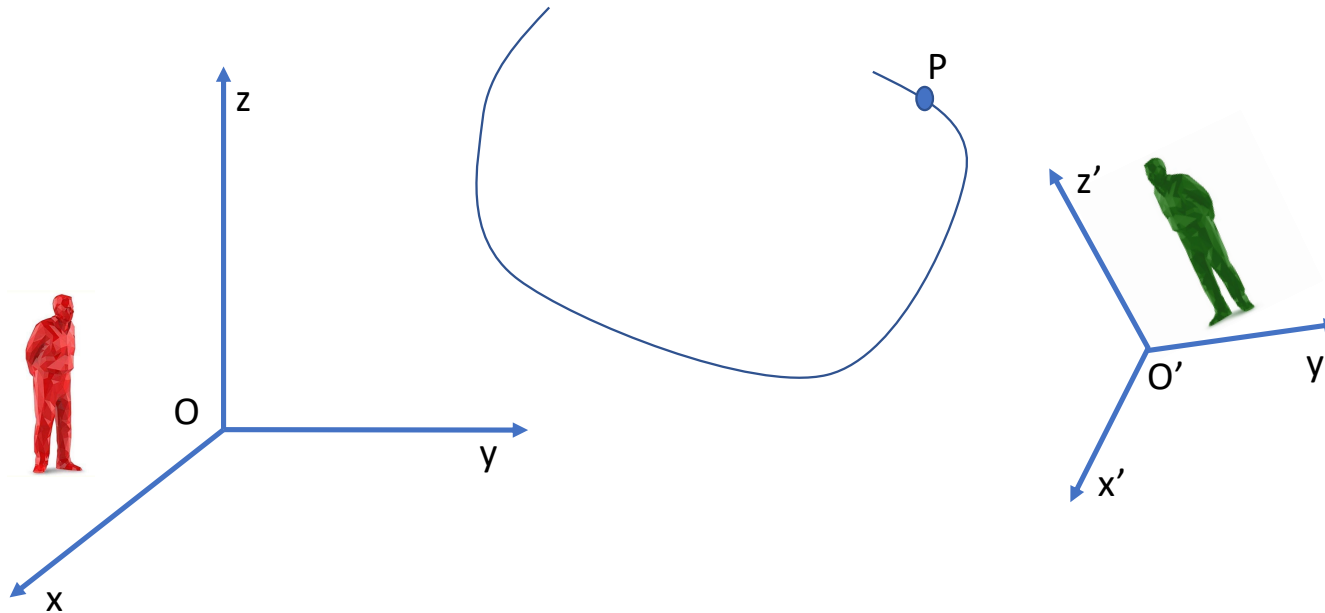


Il primo è solidale a un sistema di riferimento con origine in O e assi x, y, z



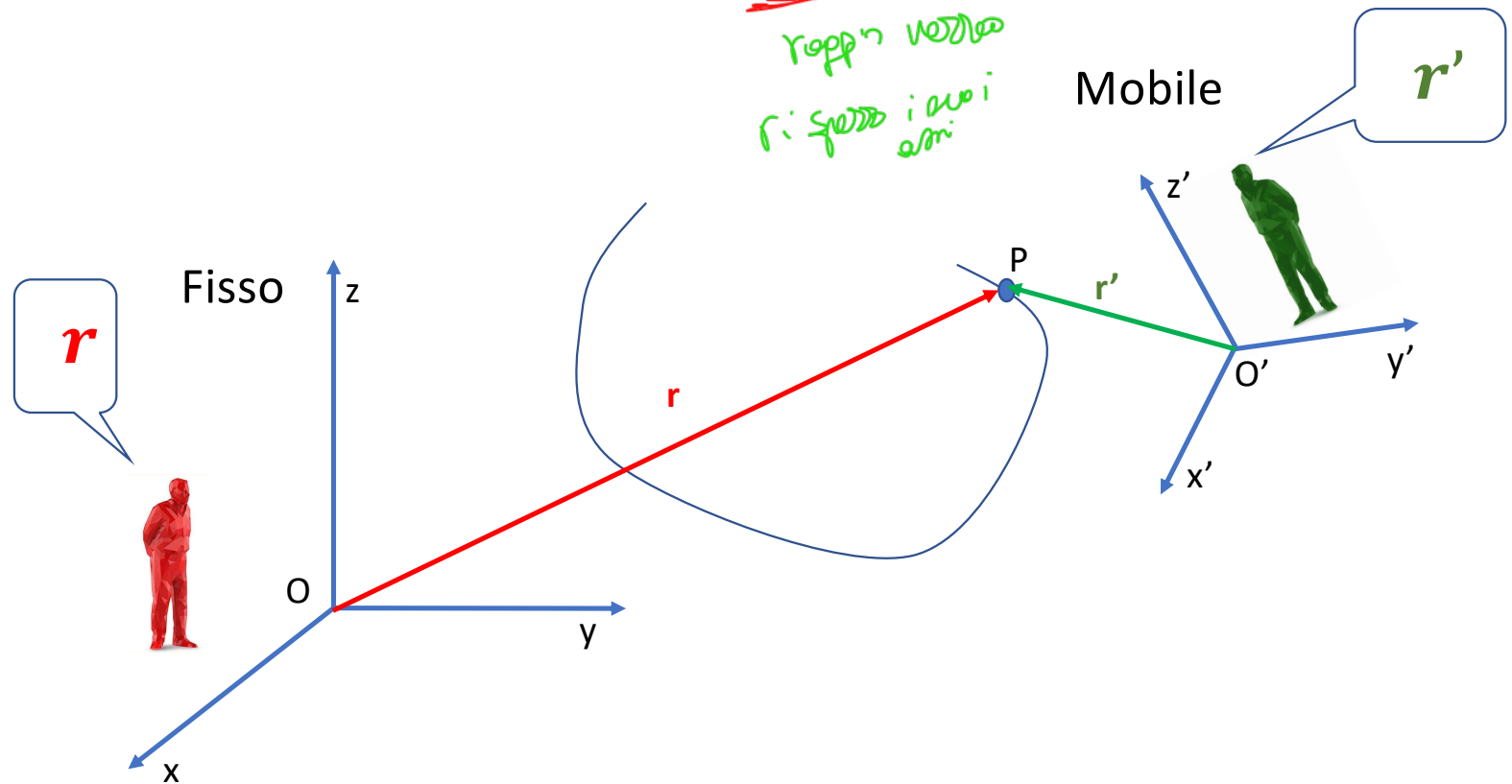
Il secondo è solidale a un sistema di riferimento con origine in O' e assi x', y', z'

- I due sistemi di riferimento sono in moto uno rispetto all'altro, assumiamo il primo come fisso e il secondo come mobile.



Posizione

- Il primo osservatore rappresenta la posizione del punto con il vettore $\mathbf{r} =$
- $x_P \mathbf{i} + y_P \mathbf{j} + z_P \mathbf{k}$
- Il secondo rappresenta la posizione con il vettore $\mathbf{r}' = x'_P \mathbf{i}' + y'_P \mathbf{j}' + z'_P \mathbf{k}'$



Posizione

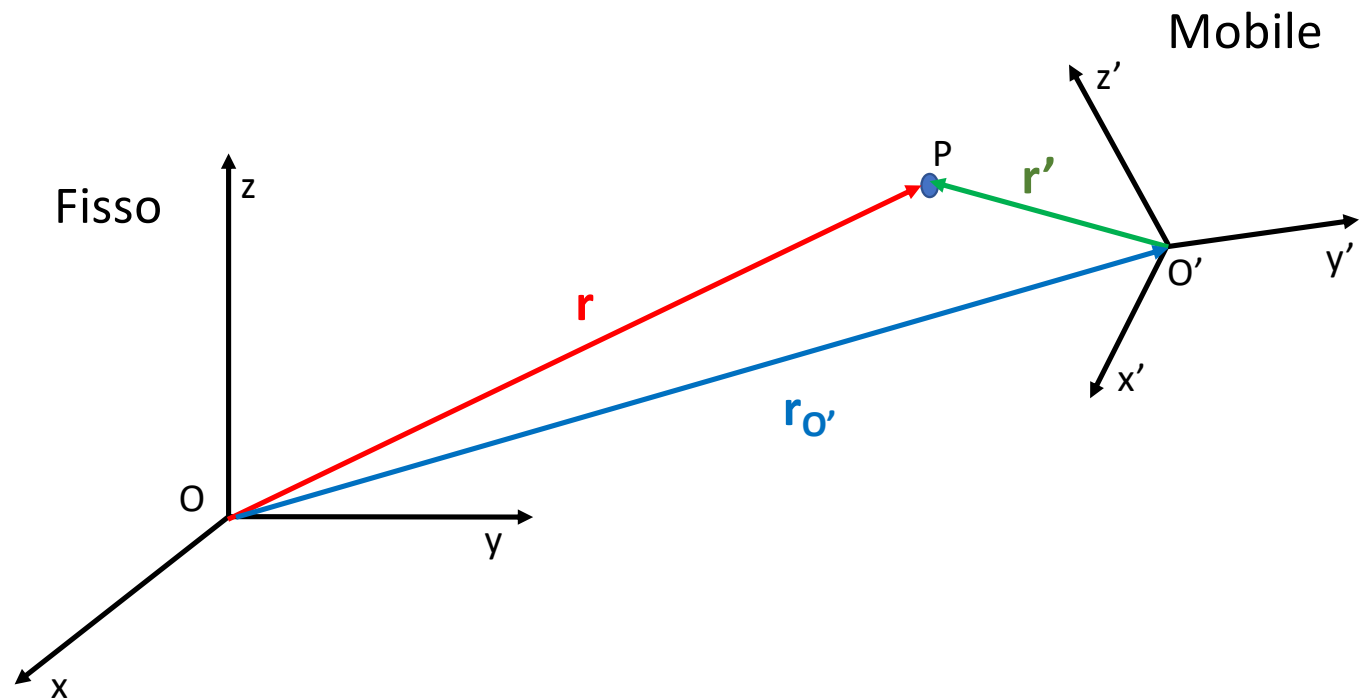
- Il primo osservatore rappresenta inoltre la posizione dell'origine del secondo sistema di riferimento con il vettore $\mathbf{r}_{O'} = x_O \mathbf{i} + y_O \mathbf{j} + z_O \mathbf{k}$ *posizione origine piano MOBILE*
- Si osserva che *rispetto al Fisso*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_{O'}$$

$$\mathbf{r} = x_P \mathbf{i} + y_P \mathbf{j} + z_P \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}' = x'_P \mathbf{i}' + y'_P \mathbf{j}' + z'_P \mathbf{k}'$$

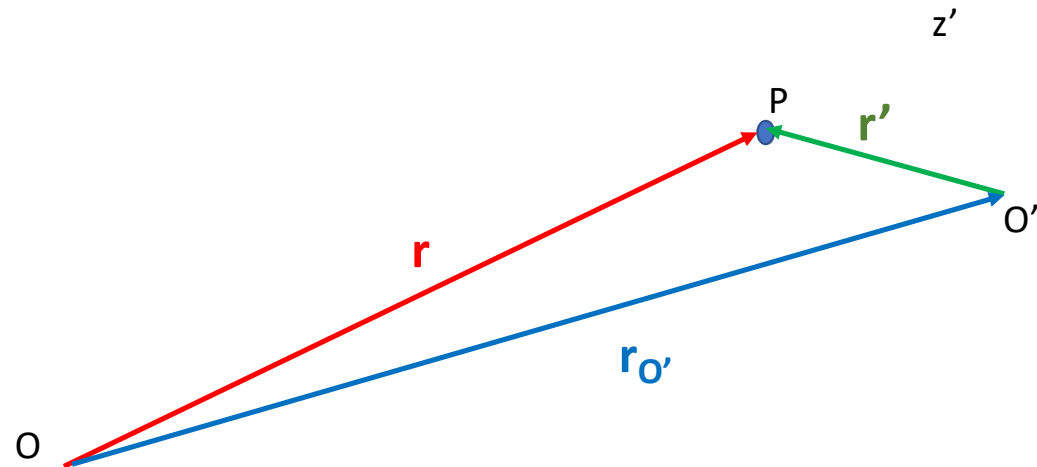
$$\mathbf{r}_{O'} = x_O \mathbf{i} + y_O \mathbf{j} + z_O \mathbf{k}$$



Posizione

- Il primo osservatore rappresenta inoltre la posizione dell'origine del secondo sistema di riferimento con il vettore $\mathbf{r}_{O'} = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}$ da O a O'
- Si osserva che

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_{O'}$$



Posizione

$$\mathbf{r} = x_P \mathbf{i} + y_P \mathbf{j} + z_P \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}' = x'_P \mathbf{i}' + y'_P \mathbf{j}' + z'_P \mathbf{k}'$$

$$\mathbf{r}_{O'} = x_{O'} \mathbf{i} + y_{O'} \mathbf{j} + z_{O'} \mathbf{k}$$

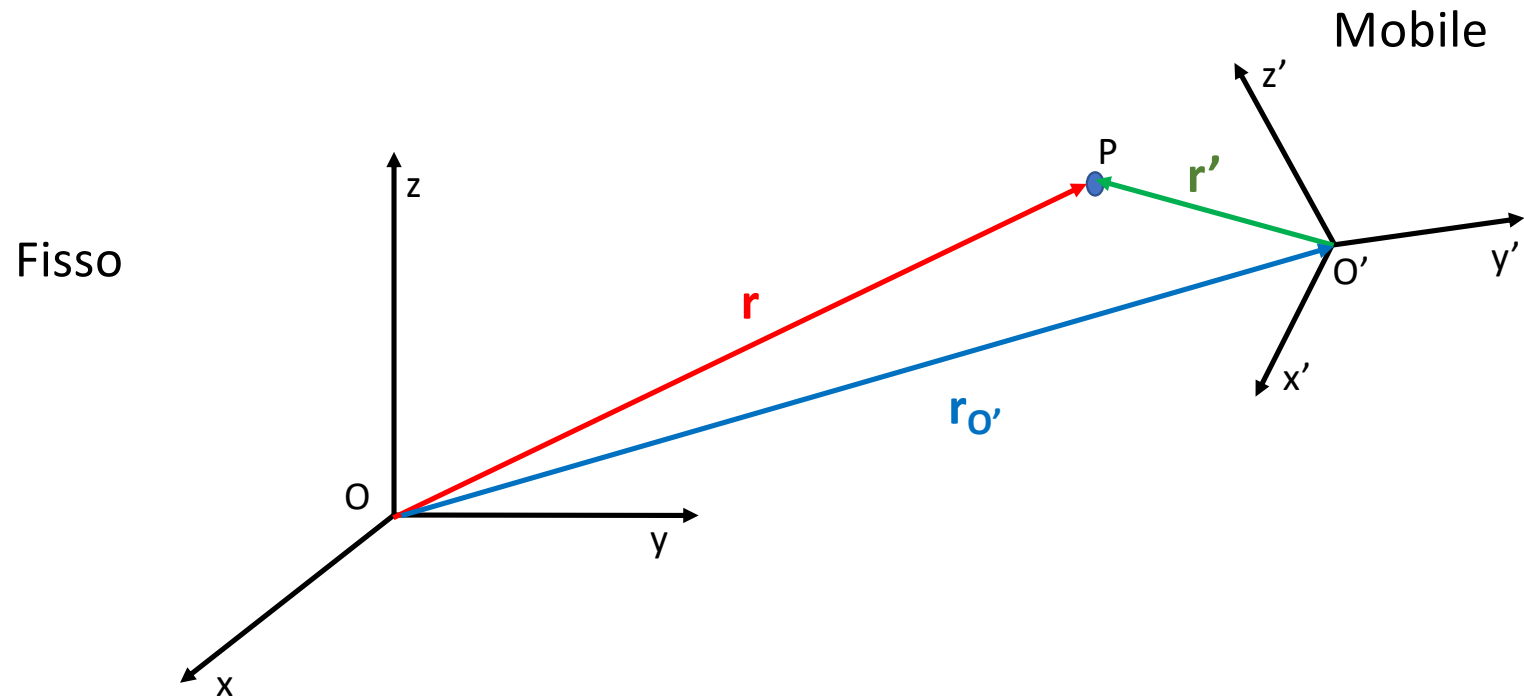
La relazione

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_{O'}}$$

Esprime la posizione di un punto materiale nel sistema di riferimento fisso in funzione della posizione dello stesso punto nel sistema di riferimento mobile e della posizione relativa tra i due sistemi di riferimento.

Pos. rel. tra i due sistemi di rif.
al S.d.R. mobile

Pos. rel. tra i due sistemi di rif.



Posizione

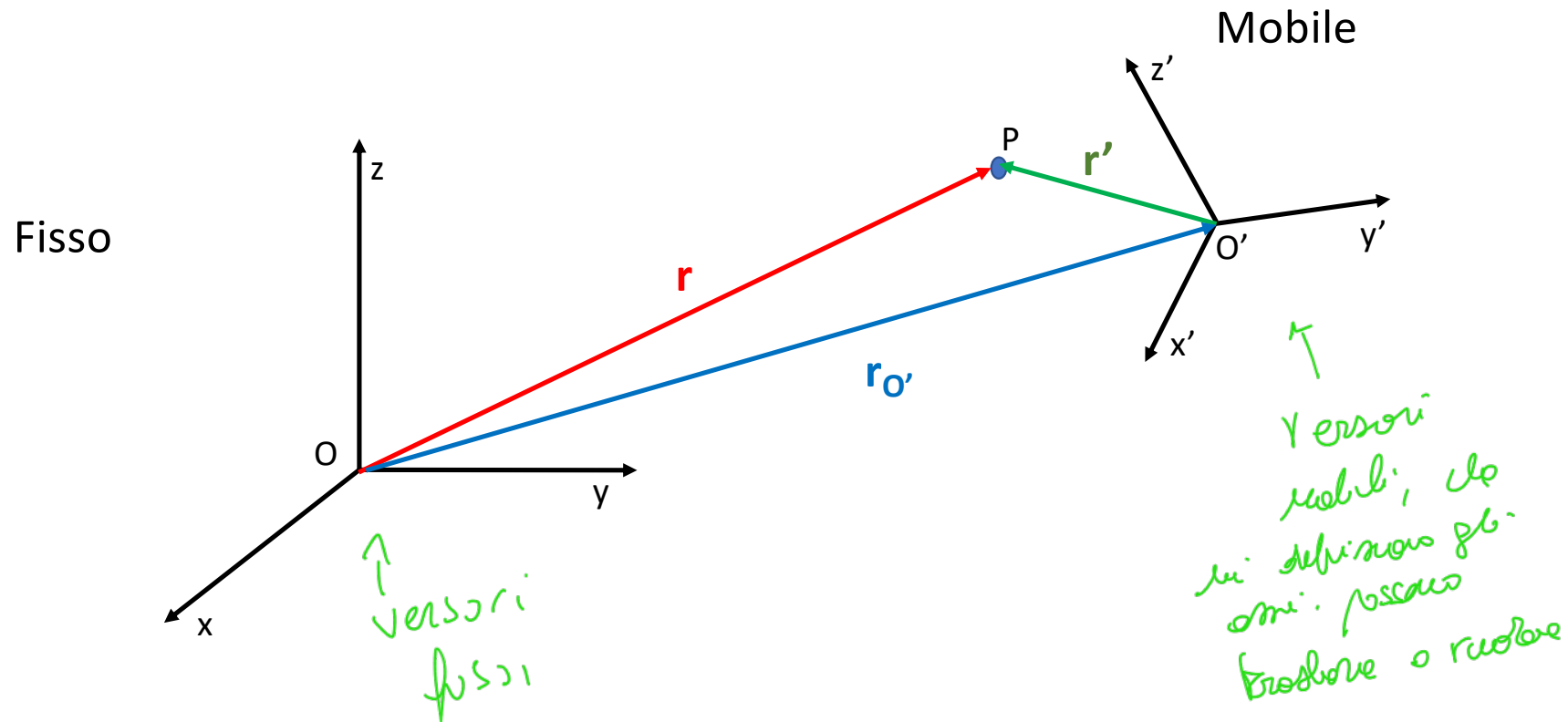
$$\mathbf{r} = x_P \mathbf{i} + y_P \mathbf{j} + z_P \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}' = x'_P \mathbf{i}' + y'_P \mathbf{j}' + z'_P \mathbf{k}'$$

$$\mathbf{r}_{O'} = x_O \mathbf{i} + y_O \mathbf{j} + z_O \mathbf{k}$$

Assumendo il primo sistema di riferimento come fisso e il secondo come mobile, risulta che i versori

- $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rightarrow$ sono indipendenti dal tempo
- $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}' \rightarrow$ variano nel tempo



Velocità



Velocità

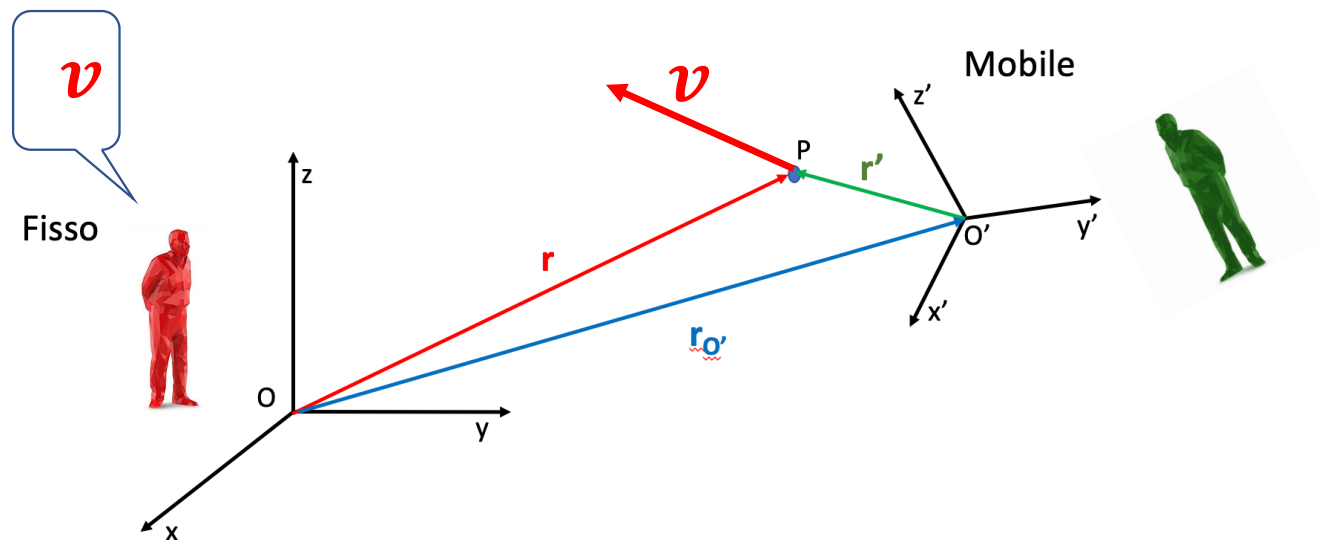
ho le componenti cartesiane, dunque

- La velocità del punto P "vista" dal sistema fisso (velocità assoluta) è data da:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \underbrace{\frac{dx_P}{dt}}_{v_x} \hat{\mathbf{i}} + \underbrace{\frac{dy_P}{dt}}_{v_y} \hat{\mathbf{j}} + \underbrace{\frac{dz_P}{dt}}_{v_z} \hat{\mathbf{k}}$$

NORMALE

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



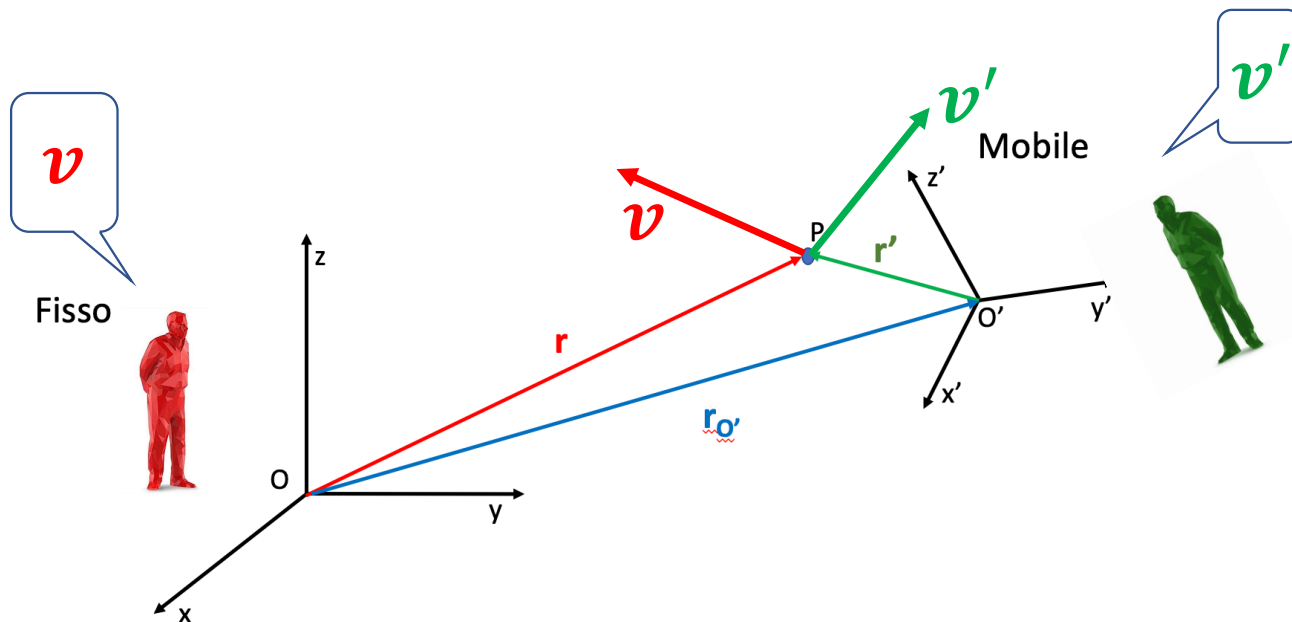
Velocità

L'osservatore solidale al sistema di riferimento mobile vedrà il punto materiale muoversi con velocità diversa (velocità relativa)

$$\left[v' = \frac{dx'_P}{dt} \hat{i}' + \frac{dy'_P}{dt} \hat{j}' + \frac{dz'_P}{dt} \hat{k}' \right]$$

$v_{x'}$

$$v' \neq \frac{dr'}{dt}$$



Attenzione!

Mentre possiamo scrivere che

$v = \frac{dr}{dt}$, per il sistema di riferimento mobile, dato che gli assi del sistema si muovono a loro volta, non possiamo scrivere

$$v' \neq \frac{dr'}{dt}$$

*r' proprio vettore
che collega O' a P.
ma O' si muove!*

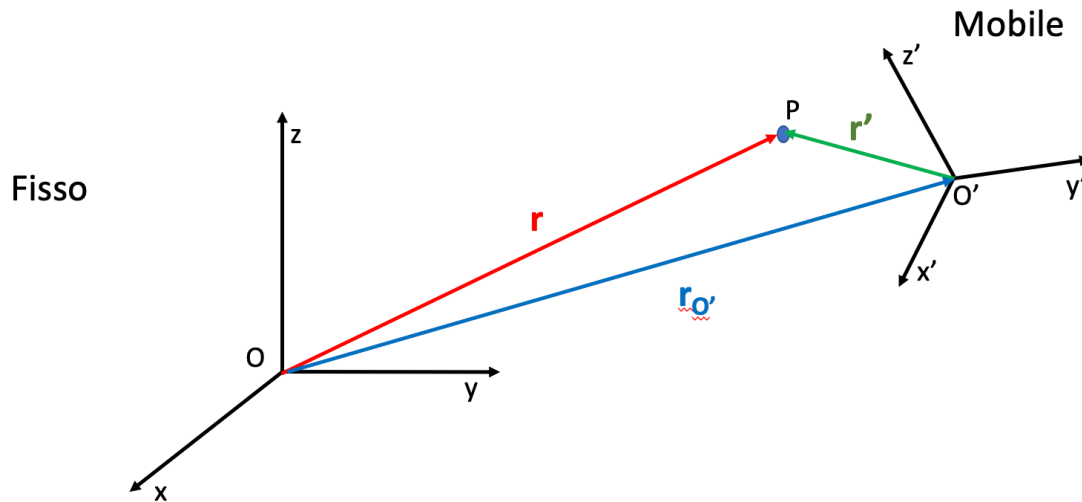
*gli assi
si muovono
velocità anche loro
nel tempo*

Velocità

- L'origine del sistema di riferimento mobile O' rispetto al sistema fisso è data da

$$\mathbf{v}_{O'} = \frac{dx_{O'}}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy_{O'}}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz_{O'}}{dt} \mathbf{k} = \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt}$$

per il sistema fisso

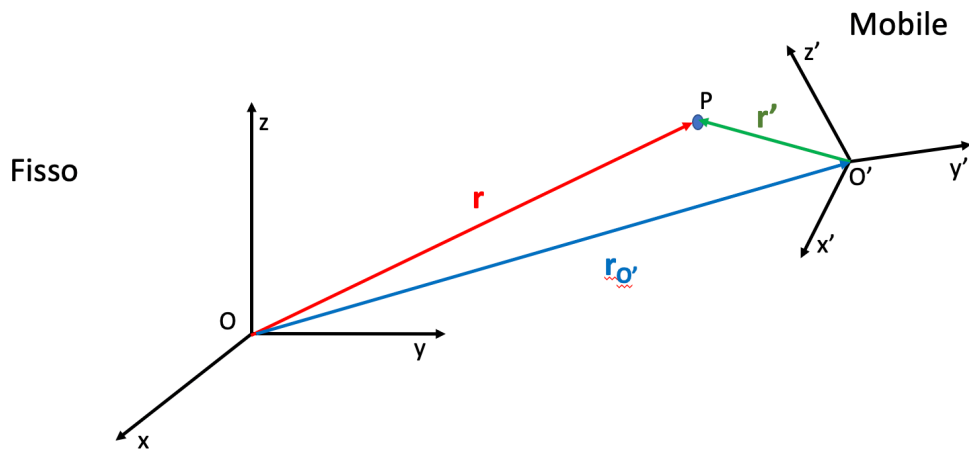


Velocità

$$\mathbf{r} = x_P \mathbf{i} + y_P \mathbf{j} + z_P \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}' = x'_P \mathbf{i}' + y'_P \mathbf{j}' + z'_P \mathbf{k}'$$

$$\mathbf{r}_{O'} = x_{O'} \mathbf{i} + y_{O'} \mathbf{j} + z_{O'} \mathbf{k}$$



Per la posizione abbiamo visto che

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_{O'}$$

Deriviamo rispetto al tempo per calcolare la velocità.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'}$$

Abbiamo visto che:

$$\mathbf{v}_{O'} = \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt}$$

E invece:

$$\frac{dx'_1}{dt} \hat{i}' + \frac{dy'_1}{dt} \hat{j}' + \dots = \mathbf{v}' \neq \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$$

Dato che $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ variano nel tempo. Calcoliamo quindi:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} ?$$

Velocità

Calcoliamo $\frac{d\mathbf{r}'}{dt}$, ricordiamo che:

$$\mathbf{r}' = x'_P \mathbf{i}' + y'_P \mathbf{j}' + z'_P \mathbf{k}' \quad \left. \vphantom{\mathbf{r}'} \right\} \text{an' variaw...}$$

Deriviamo rispetto al tempo

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = & \frac{dx'_P}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'_P}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'_P}{dt} \mathbf{k}' + \left. \vphantom{\frac{d\mathbf{r}'}{dt}} \right\} \text{Variaz. delle} \\ & + x'_P \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'_P \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'_P \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \left. \vphantom{\frac{d\mathbf{r}'}{dt}} \right\} \text{Termini dovuti alla variaz.} \\ & \text{degli an', dei versori} \end{aligned}$$

Ma abbiamo visto che

$$\mathbf{v}' = \frac{dx'_P}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'_P}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'_P}{dt} \mathbf{k}' \quad \left. \vphantom{\mathbf{v}'} \right]$$

Quindi

$$\left[\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}' + x'_P \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'_P \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'_P \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \right]$$

Dobbiamo caratterizzare meglio i termini rimanenti, in particolare le derivate dei versori del sistema di riferimento mobile, $\frac{d\mathbf{i}'}{dt}, \frac{d\mathbf{j}'}{dt}, \frac{d\mathbf{k}'}{dt}$

derivate dei versori!

Velocità – derivata dei versori del sistema mobile

Studiamo i termini

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt}, \frac{d\mathbf{j}'}{dt}, \frac{d\mathbf{k}'}{dt}$$

$\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ sono tre versori e sono tra loro ortogonali. Queste due condizioni si mantengono durante il moto.

Dato che sono versori:

Per un versore vale

$$\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}' = 1$$

$$\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j}' = 1$$

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' = 1$$

Dato che sono ortogonali:

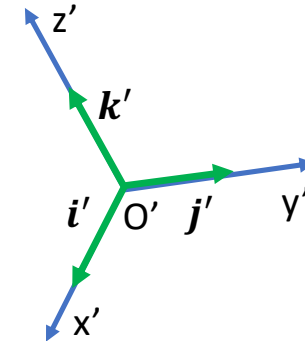
$$\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}' = 0$$

$$\mathbf{j}' \cdot \mathbf{k}' = 0$$

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{i}' = 0$$

derivato e derivata di $\frac{d\mathbf{i}'}{dt}$ e $\hat{c}$ sono ortogonali
versori modulo UNITARIO

ortogonali tra loro



derivato e derivata

le combinazioni di $\vec{\omega}$, velocità angolare

Velocità – derivata dei versori del sistema mobile

Deriviamo rispetto al tempo queste tre:

$$\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}' = 1$$

$$\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j}' = 1$$

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' = 1$$

Dalla prima ad esempio si ottiene

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} \cdot \mathbf{i}' + \mathbf{i}' \cdot \frac{d\mathbf{i}'}{dt} = 0$$

Dato che il prodotto scalare è commutativo otteniamo:

$$2 \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \cdot \mathbf{i}' = 0$$

→ derivata di un versore è ortogonale al versore stesso

E derivando le altre due otteniamo:

$$2 \frac{d\mathbf{j}'}{dt} \cdot \mathbf{j}' = 0$$

$$2 \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \cdot \mathbf{k}' = 0$$

→ Abbiamo capito che la derivata rispetto al tempo di un versore è perpendicolare al versore stesso.

Velocità – derivata dei versori del sistema mobile

Deriviamo rispetto al tempo le altre tre relazioni (ortogonalità tra i versori):

$$\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}' = 0$$

$$\mathbf{j}' \cdot \mathbf{k}' = 0$$

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{i}' = 0$$

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} \cdot \mathbf{j}' + \frac{d\mathbf{j}'}{dt} \cdot \mathbf{i}' = 0$$

$$\frac{d\mathbf{j}'}{dt} \cdot \mathbf{k}' + \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \cdot \mathbf{j}' = 0$$

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} \cdot \mathbf{k}' + \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \cdot \mathbf{i}' = 0$$

Da cui otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \cdot \mathbf{j}' = -\frac{d\mathbf{j}'}{dt} \cdot \mathbf{i}' = \omega'_z \\ \frac{d\mathbf{j}'}{dt} \cdot \mathbf{k}' = -\frac{d\mathbf{k}'}{dt} \cdot \mathbf{j}' = \omega'_x \\ \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \cdot \mathbf{k}' = -\frac{d\mathbf{k}'}{dt} \cdot \mathbf{i}' = \omega'_y \end{array} \right.$$

Velocità – derivata dei versori del sistema mobile

Possiamo definire tre scalari

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} \cdot \mathbf{j}' = -\frac{d\mathbf{j}'}{dt} \cdot \mathbf{i}' = \omega'_z$$

$$\frac{d\mathbf{j}'}{dt} \cdot \mathbf{k}' = -\frac{d\mathbf{k}'}{dt} \cdot \mathbf{j}' = \omega'_x$$

$$\frac{d\mathbf{k}'}{dt} \cdot \mathbf{i}' = -\frac{d\mathbf{i}'}{dt} \cdot \mathbf{k}' = \omega'_y$$

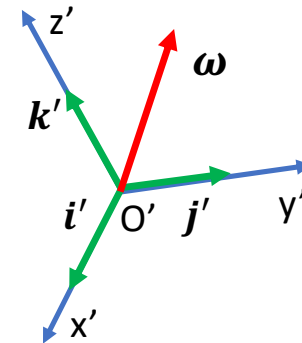
E con questi tre scalari costruiamo un vettore

$$\boldsymbol{\omega} = \omega'_x \mathbf{i}' + \omega'_y \mathbf{j}' + \omega'_z \mathbf{k}'$$

(espresso rispetto alla terna mobile).

Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ prende il nome di **velocità angolare**.

*rispetto rispetto
al sistema
MOBILE!*



Velocità – derivata dei versori del sistema mobile

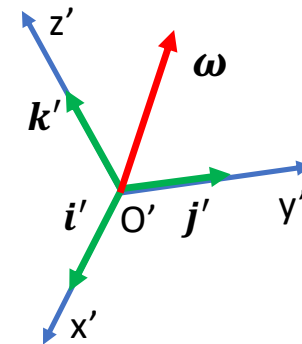
Definiamo il vettore

$$\boldsymbol{\omega} = \omega'_x \mathbf{i}' + \omega'_y \mathbf{j}' + \omega'_z \mathbf{k}'$$

$$\times \quad \hat{i}' \quad \omega_y = \frac{d\hat{i}'}{dt} \cdot \mathbf{k}' = -\frac{d\omega'}{dt} \cdot \hat{i}'$$

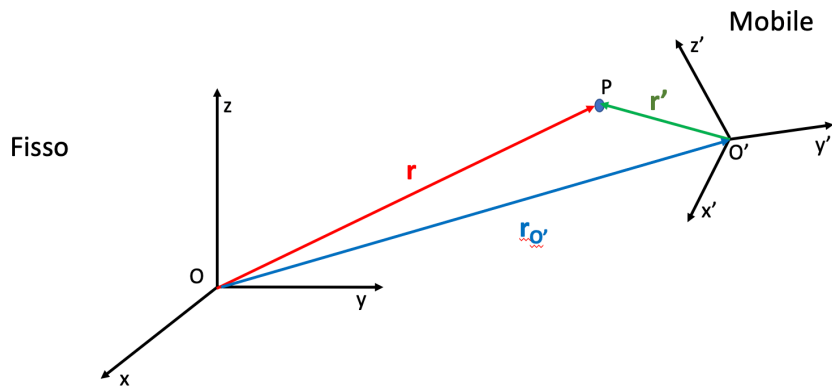
E' possibile verificare (potete provare per esercizio!) che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}' = \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}' = \frac{d\mathbf{j}'}{dt} \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}' = \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \end{array} \right.$$



Formule di Poisson.

Velocità



Torniamo alla relazione

$$\vec{\omega} \times \hat{i}'$$

$$\omega \times u'$$

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}' + x'_P \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'_P \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'_P \frac{d\mathbf{k}'}{dt}$$

$$\vec{\omega} \times \hat{j}'$$

A questo punto, avendo espresso le derivate dei versori con le formule di Poisson, possiamo scrivere:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}' + x'_P \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}' + y'_P \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}' + z'_P \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}' =$$

$$\hookrightarrow \omega / \text{secondo } \omega$$

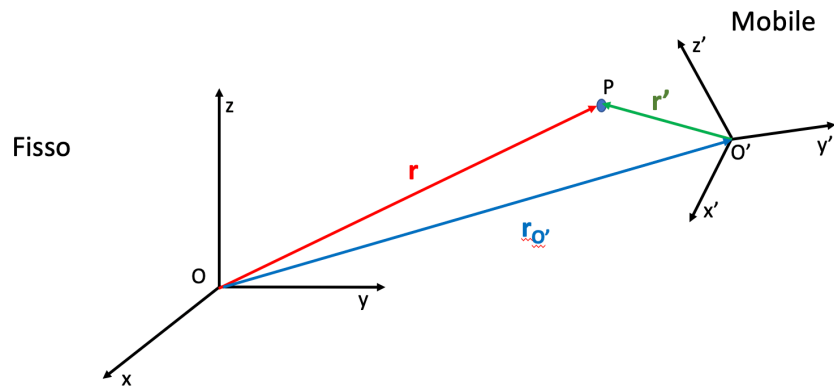
Sviluppando i calcoli otteniamo

$$\begin{aligned} &= \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times x'_P \mathbf{i}' + \boldsymbol{\omega} \times y'_P \mathbf{j}' + \boldsymbol{\omega} \times z'_P \mathbf{k}' = \\ &= \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (x'_P \mathbf{i}' + y'_P \mathbf{j}' + z'_P \mathbf{k}') = \\ &= \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \end{aligned}$$

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

$\rightarrow$ $\vec{\omega}$ vettore velocità angolare, come ruotano gli assi

Velocità



- Analizziamo meglio la relazione:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

velocità rispetto al sistema mobile

rotazione del sistema mobile rispetto al fisso

$\mathbf{v}'$ tiene conto di come il punto materiale si muove rispetto al sistema mobile (velocità relativa).

$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ tiene conto di come il sistema mobile sta ruotando rispetto a quello fisso.

Velocità

Ricapitolando, derivando rispetto al tempo la relazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_{O'}$ DENUNO
Abbiamo ottenuto

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'}$$

Abbiamo poi visto che il termine $\frac{d\mathbf{r}'}{dt}$ dipende sia dalla velocità relativa che dalla rotazione degli assi del sistema mobile rispetto a quello fisso

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{r}' = x' \hat{i}' + y' \hat{j}' + z' \hat{k}'$$

$$\mathbf{v}' = \frac{dx'}{dt} \hat{i}' + \frac{dy'}{dt} \hat{j}' + \frac{dz'}{dt} \hat{k}'$$

Abbiamo anche definito la velocità dell'origine del sistema mobile rispetto al sistema fisso

$$\frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} = \mathbf{v}_{O'}$$

Possiamo quindi scrivere:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{i}' \cdot \hat{j}') = -\frac{d\hat{j}'}{dt} \cdot \hat{i}'$$

velocità
relativa

velocità
con cui l'origine O'
si sposta rispetto ad O

Tiene conto della
rotazione
degli assi

dove

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \hat{i}' + \omega_y \hat{j}' + \omega_z \hat{k}'$$

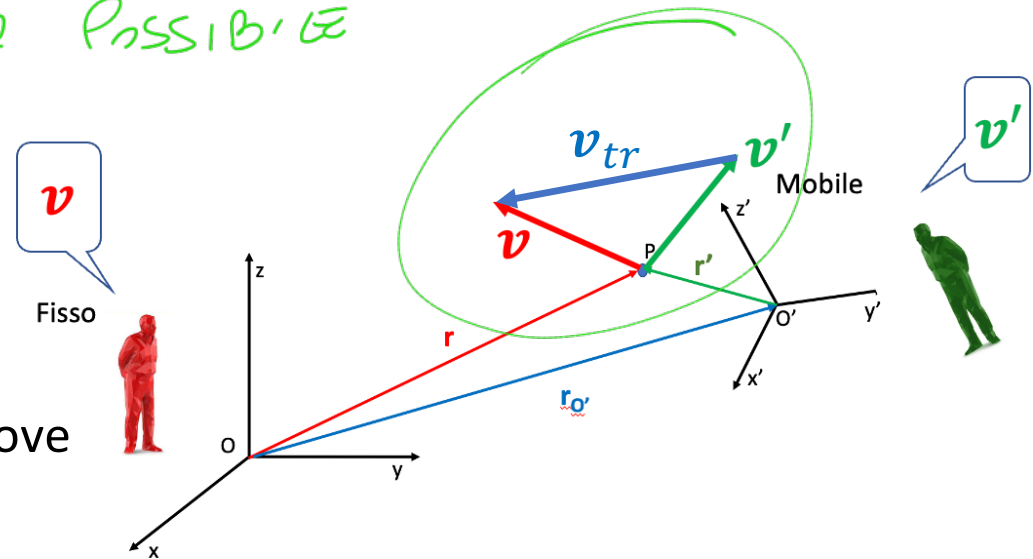
$$\text{con p.es. } \boldsymbol{\omega} \times \hat{i}' = \frac{d\hat{i}'}{dt}$$

ricorda che il $\vec{\omega}$ è un vettore $\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v} = \omega R \vec{v}_t$

Velocità, caso relativo più generale possibile

$$\vec{v} = \underbrace{\vec{v}'}_{\vec{v}_r} + \underbrace{\vec{v}_{O'} + \omega \times \vec{r}'}_{\vec{v}_{tr}}$$

- $\vec{v}'$ tiene conto di come il punto materiale si muove rispetto al sistema mobile $\rightarrow$ velocità relativa
- $\vec{v}_{tr} = \vec{v}_{O'} + \omega \times \vec{r}'$ tiene conto di come il sistema mobile si muove (rotazione e spostamento) rispetto a quello fisso $\rightarrow$ velocità di trascinamento
La velocità di trascinamento può anche essere vista come la velocità che P avrebbe se fosse solidale (=fissato) al sistema di riferimento mobile.



$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{tr}$$

velocità di trascinamento se P fosse solidale a O', e così $\vec{v}' = 0$

Accelerazione



• Accelerazione

I due sistemi di riferimento vedranno il punto materiale muoversi con accelerazioni diverse tra loro:

- Accelerazione di P vista dal sistema di riferimento fisso (accelerazione assoluta)

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 x_P}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y_P}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 z_P}{dt^2} \mathbf{k} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

acc. ASSOLUTA
in conteso

$$\mathbf{a}' = \frac{d^2 x'_P}{dt^2} \mathbf{i}' + \frac{d^2 y'_P}{dt^2} \mathbf{j}' + \frac{d^2 z'_P}{dt^2} \mathbf{k}'$$

- Accelerazione di P vista dal sistema di riferimento mobile (accelerazione relativa)

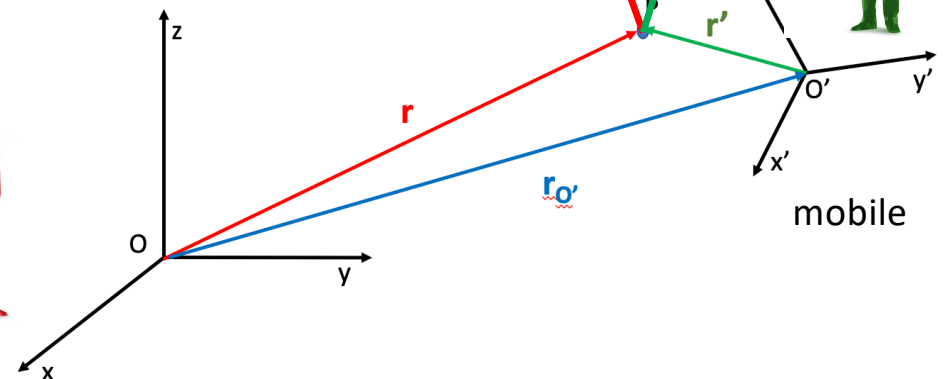
$$\mathbf{a}' = \frac{d^2 x'_P}{dt^2} \mathbf{i}' + \frac{d^2 y'_P}{dt^2} \mathbf{j}' + \frac{d^2 z'_P}{dt^2} \mathbf{k}'$$

acc. relativa

→ Che relazione esiste tra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}'$?

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 x_P}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y_P}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 z_P}{dt^2} \mathbf{k}$$

Fisso



Accelerazione

→ Che relazione esiste tra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}'$?

Riprendiamo la relazione che abbiamo trovato per la velocità

$$\bullet \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

E calcoliamo la derivata rispetto al tempo, procediamo con i singoli termini:

$$\bullet \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')}{dt}$$
$$\frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} = \mathbf{a}_{O'} \quad \ddot{\vec{a}} \quad ? \quad = \ddot{\vec{a}}_{O'} \quad ?$$

con sistema rotante non fissi

Accelerazione

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_O$$

- Consideriamo il termine $\omega \times r'$

$$\frac{d(\omega \times r')}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \times r' + \omega \times \frac{dr'}{dt}$$

Ricordiamo che

$$\dot{r}' \neq \frac{dr'}{dt} = v' + \omega \times r'$$

Quindi:

$$\frac{d(\omega \times r')}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \times r' + \omega \times \frac{dr'}{dt} = \left[\frac{d\omega}{dt} \times r' + \omega \times (v' + \omega \times r') \right] =$$

$$\left[\frac{d(\omega \times r')}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \times r' + \omega \times v' + \omega \times (\omega \times r') \right]$$

Accelerazione

- Infine consideriamo il termine $\frac{d\mathbf{v}'}{dt}$

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx'_P}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'_P}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'_P}{dt} \mathbf{k}' \right)$$

, gli assi
ruotano

Sviluppiamo le derivate, ricordando che in questo caso anche i versori variano nel tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = & \frac{d^2 x'_P}{dt^2} \mathbf{i}' + \frac{d^2 y'_P}{dt^2} \mathbf{j}' + \frac{d^2 z'_P}{dt^2} \mathbf{k}' + \\ & + \frac{dx'_P}{dt} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \frac{dy'_P}{dt} \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \frac{dz'_P}{dt} \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \end{aligned}$$

$\vec{a}'$

$\vec{\omega} \times \vec{i}'$ $\vec{\omega} \times \vec{j}'$ $\vec{\omega} \times \vec{k}'$

Accelerazione

Ricordando i risultati trovati in precedenza

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}'}{dt} &= \mathbf{a}' + \frac{dx'_P}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}' + \frac{dy'_P}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}' + \frac{dz'_P}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}' = \\ &= \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{dx'_P}{dt} \mathbf{i}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{dy'_P}{dt} \mathbf{j}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{dz'_P}{dt} \mathbf{k}' = \\ &= \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'\end{aligned}$$

Handwritten green notes:
A wavy line above the last term of the first line points to $\mathbf{v}'$.
Below the last term of the first line is the expression $\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{dx'_P}{dt} \mathbf{i}' + \dots + \frac{dz'_P}{dt} \mathbf{k}' \right)$.

Accelerazione

- Mettiamo insieme tutte le parti che abbiamo calcolato

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

$$\bullet \quad \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

$$\bullet \quad \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} = \mathbf{a}_{O'}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \\ \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \end{array} \right.$$

$$\frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

Accelerazione

Otteniamo quindi

acc. Trascinamento

acc. Coriolis

$$a = a' + a_{O'} + \frac{d\omega}{dt} \times r' + \omega \times (\omega \times r') + 2\omega \times v'$$

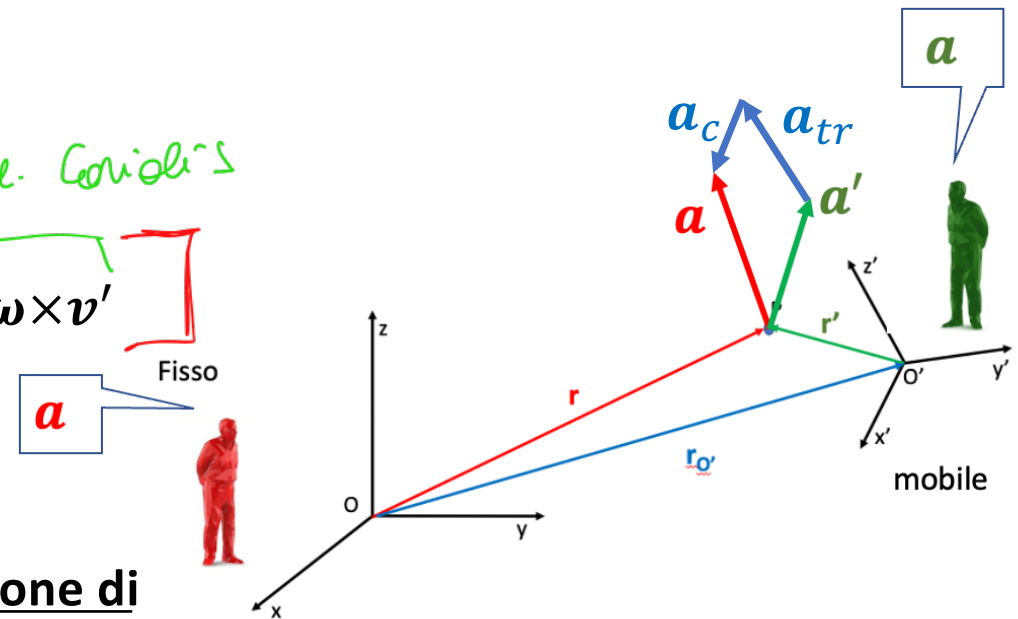
acc. relativa *$\vec{a}_{tr}$*

$a' \rightarrow$ accelerazione relativa

$a_{tr} = a_{O'} + \frac{d\omega}{dt} \times r' + \omega \times (\omega \times r') \rightarrow$ accelerazione di trascinamento

$a_c = 2\omega \times v' \rightarrow$ accelerazione complementare o di Coriolis

$$a = a' + a_{tr} + a_c$$



$$\vec{V} = \underbrace{\vec{V}' + \vec{V}_{O'}}_{\vec{V}_{relol}} + \omega \times \vec{r}$$

$\vec{V}_{tr}$

Moti relativi, riepilogo delle relazioni cinematiche

Posizione

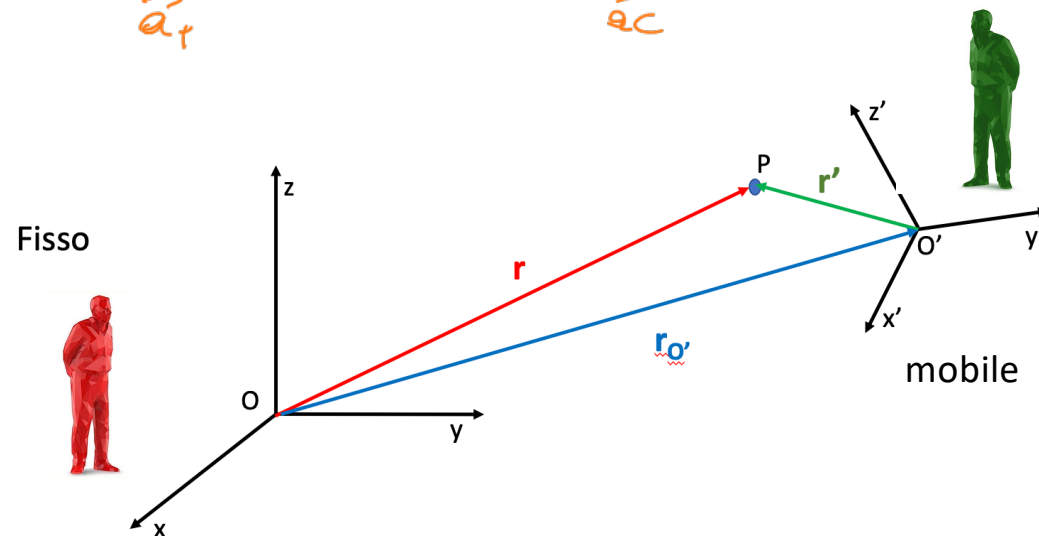
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_{O'}$$

Velocità

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{tr}$$

Accelerazione

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{O'} + \underbrace{\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')}_{\mathbf{a}_r} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'}_{\mathbf{a}_c} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{tr} + \mathbf{a}_c$$



Moti relativi, riepilogo delle relazioni cinematiche

$$\textcircled{a} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_O'$$

$$\textcircled{b} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{tr}$$

$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \rightarrow$ velocità assoluta

$\mathbf{v}' \rightarrow$ accelerazione relativa

$\mathbf{v}_{tr} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \rightarrow$ velocità di trascinamento

$$\textcircled{c} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{O'} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{tr} + \mathbf{a}_c$$

$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rightarrow$ accelerazione assoluta

$\mathbf{a}' \rightarrow$ accelerazione relativa *rispetto al SdR mobile*

$\mathbf{a}_{tr} = \mathbf{a}_{O'} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \rightarrow$ accelerazione di trascinamento

$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ *acc. Coriolis*

Casi Generali

Caso 1 – moto di
trascinamento
rettilineo
uniforme



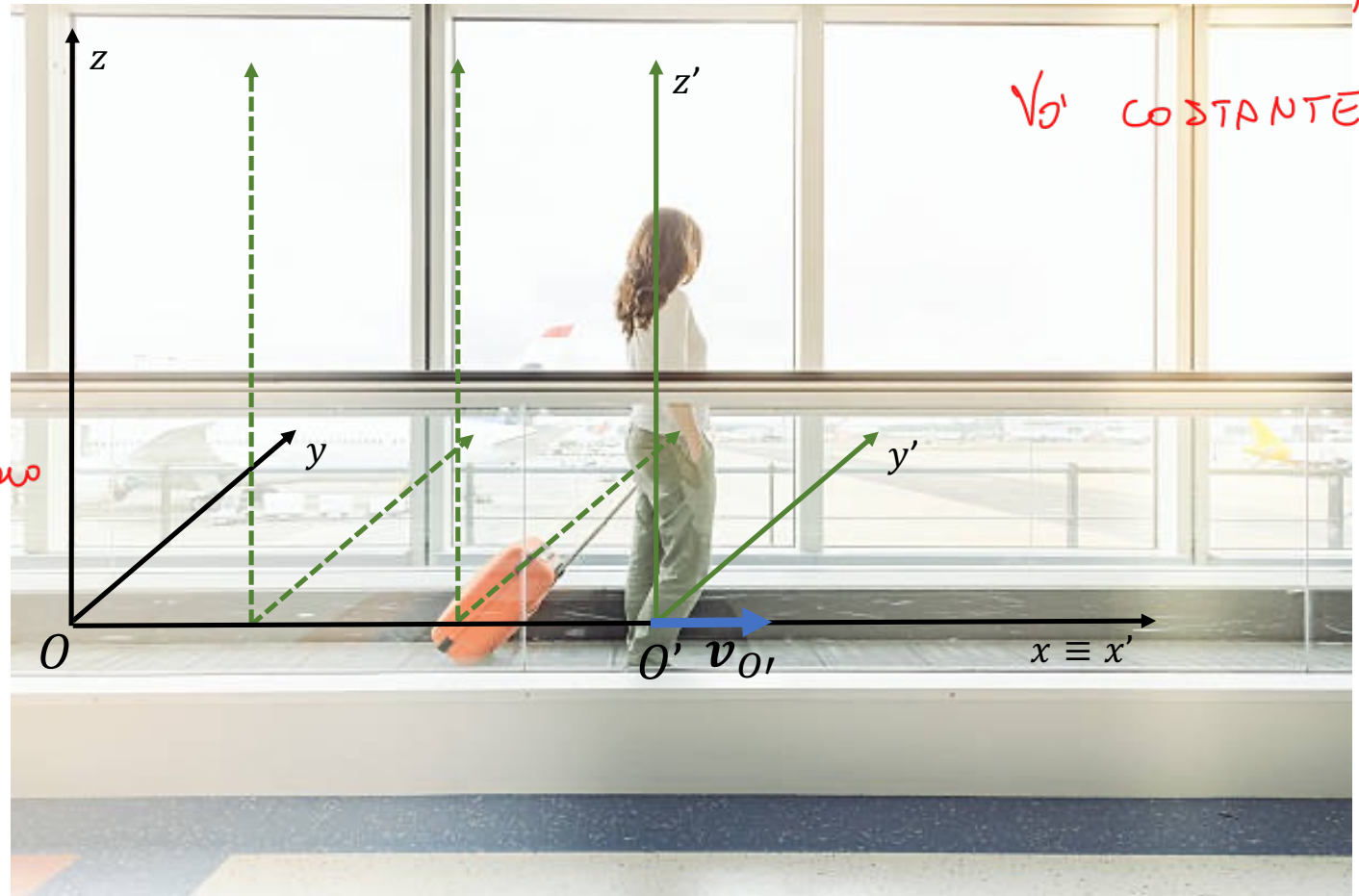
Esempio 1 – moto di trascinamento rettilineo uniforme

NO NOTAZ.
O' si muove
in moto rettil.
uniforme,

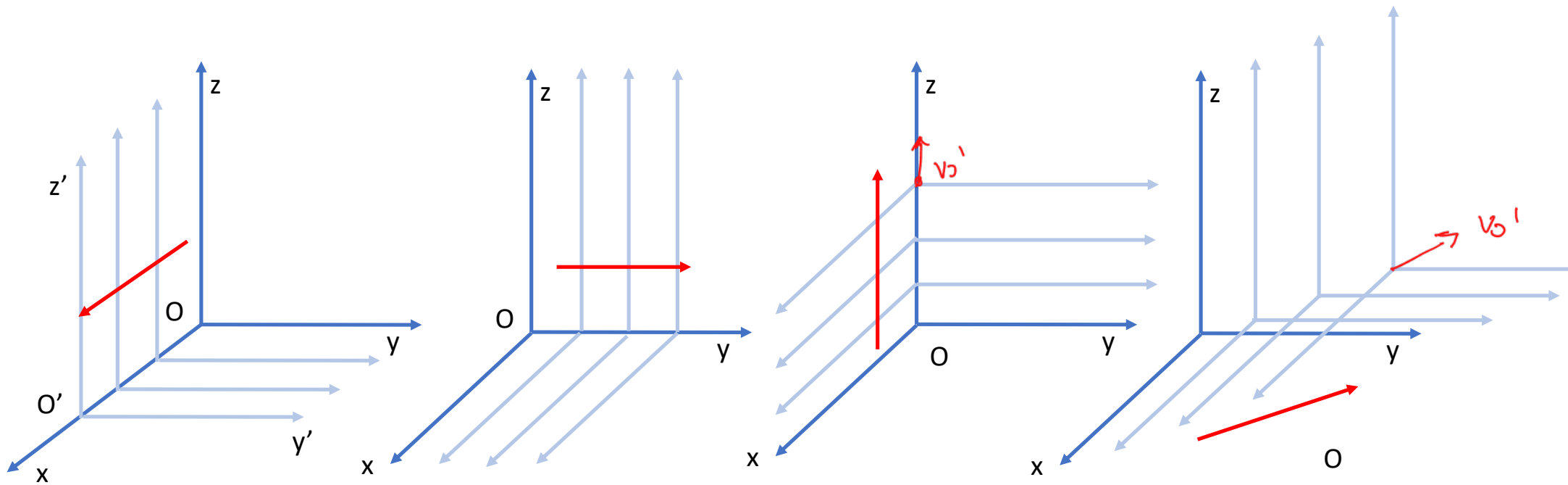
L'origine del sistema di riferimento mobile si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $v_{O'}$ rispetto a quello fisso, gli assi rimangono paralleli a quelli dell'asse fisso. *non ruotano*

Supponiamo per semplicità che il movimento avvenga in direzione parallela a uno dei tre assi, in questo caso l'asse x .

$v_{O'}$ COSTANTE



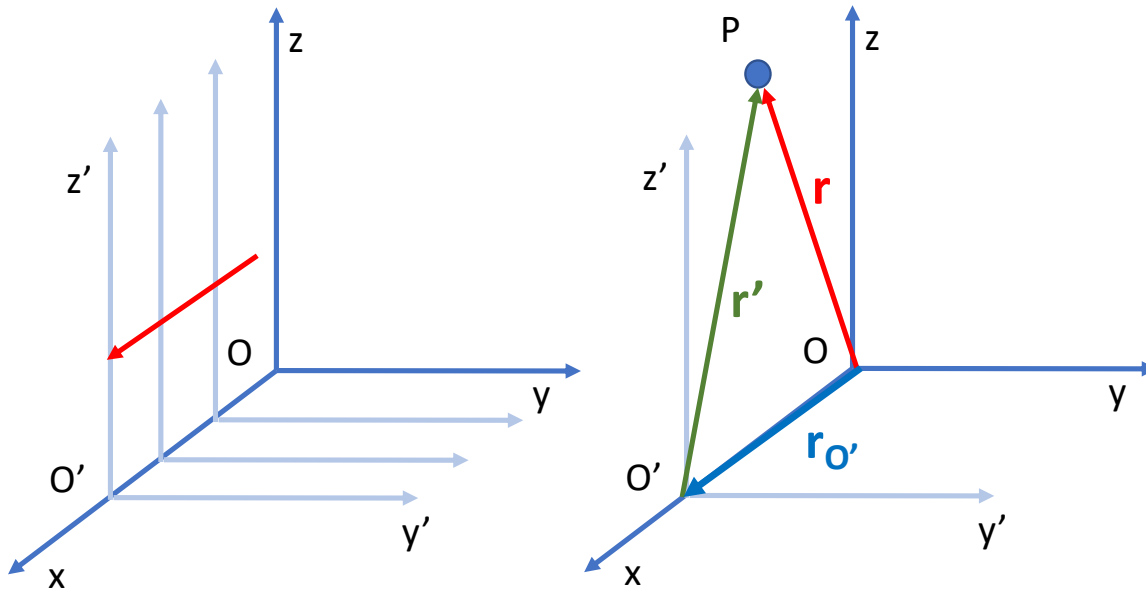
Moto di trascinamento rettilineo uniforme



L'origine del sistema di riferimento mobile si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v_0 , rispetto a quello fisso, gli assi rimangono paralleli a quelli dell'asse fisso. *non ruotano*
In generale, la direzione di v_0 , può essere parallela a uno dei tre assi oppure può essere generica.

v_0 può essere anche generica.

Moto di trascinamento rettilineo uniforme



SIST. MOBILE si muove lungo
asse x

Posizione: i due sistemi di riferimento vedono uno stesso punto materiale rappresentato da due distinti vettori geometrici. Per il sistema di riferimento fisso si ha:

$$\bullet \quad \mathbf{r} = x_P \mathbf{i} + y_P \mathbf{j} + z_P \mathbf{k}$$

Mentre per il sistema di riferimento mobile si ha:

$$\bullet \quad \mathbf{r}' = x'_P \mathbf{i}' + y'_P \mathbf{j}' + z'_P \mathbf{k}'$$

L'origine del sistema di riferimento mobile rispetto a quello fisso è data da:

$$\bullet \quad \mathbf{r}_{O'} = x_O \mathbf{i} + y_O \mathbf{j} + z_O \mathbf{k} = x_O \mathbf{i}$$

Risulta quindi:

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_{O'}}$$

Moto di trascinamento rettilineo uniforme

$$\omega \times (x'_P \hat{i}' + y'_P \hat{j}' + z'_P \hat{k}')$$

- Per quanto riguarda la velocità, abbiamo visto in precedenza che risulta

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{tr}}$$

Ricordiamo che

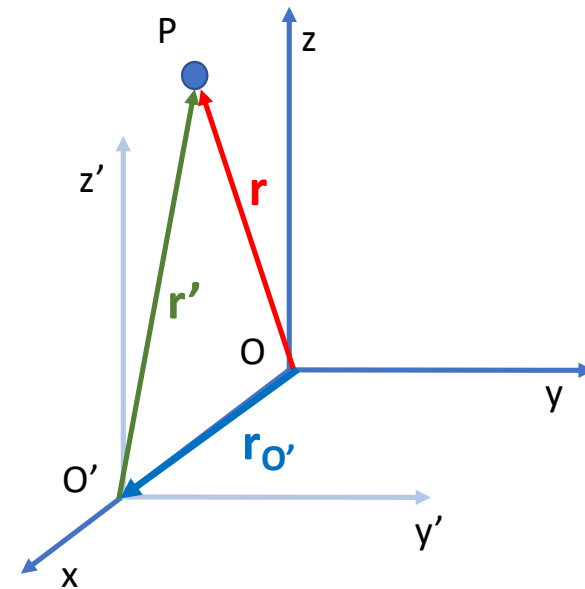
$$\boldsymbol{\omega} \times \hat{i}' = \frac{d\hat{i}'}{dt}, \boldsymbol{\omega} \times \hat{j}' = \frac{d\hat{j}'}{dt}, \boldsymbol{\omega} \times \hat{k}' = \frac{d\hat{k}'}{dt} \quad \text{non uniforme}$$

Ma, $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ non variano in questo caso, quindi

$$\boldsymbol{\omega} \times \hat{i}' = \frac{d\hat{i}'}{dt} = 0, \boldsymbol{\omega} \times \hat{j}' = \frac{d\hat{j}'}{dt} = 0, \boldsymbol{\omega} \times \hat{k}' = \frac{d\hat{k}'}{dt} = 0$$

Da cui si deduce facilmente che per questo tipo di moto:

$$\rightarrow \boldsymbol{\omega} = 0 \quad \text{non ruotano gli assi, velocità angolare annula.}$$



Moto di trascinamento rettilineo uniforme

Dato che

$$\omega = 0$$

La velocità di trascinamento è data dalla velocità del sistema di riferimento mobile rispetto a quello fisso:

$$\mathbf{v}_{tr} = \mathbf{v}_{O'} + \omega \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}_{O'}$$

E quindi possiamo esprimere la relazione tra la velocità del punto P vista da sistema di riferimento fisso e mobile come:

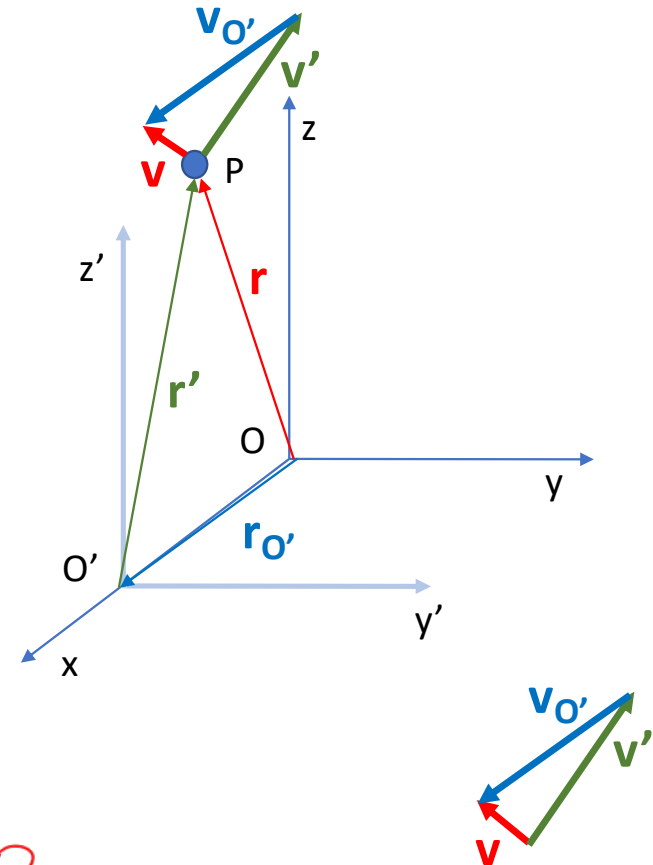
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'}$$

Data la velocità nel sistema fisso e la velocità di trascinamento, possiamo anche determinare la velocità relativa come

$$\Rightarrow \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{O'}$$

↑
costante

$$\vec{\omega} = 0$$
$$\vec{v}_{O'} = \text{costante}$$



Moto di trascinamento rettilineo uniforme

Analizziamo quindi come i due sistemi di riferimento vedono l'accelerazione dello stesso punto materiale. Abbiamo visto in precedenza che

$$a = a' + a_{O'} + \frac{d\omega}{dt} \times r' + \omega \times (\omega \times r') + 2\omega \times v'$$

In questo caso specifico abbiamo visto che risulta

$$\omega = 0$$

Quindi, necessariamente, risulta anche

$$\frac{d\omega}{dt} = 0$$

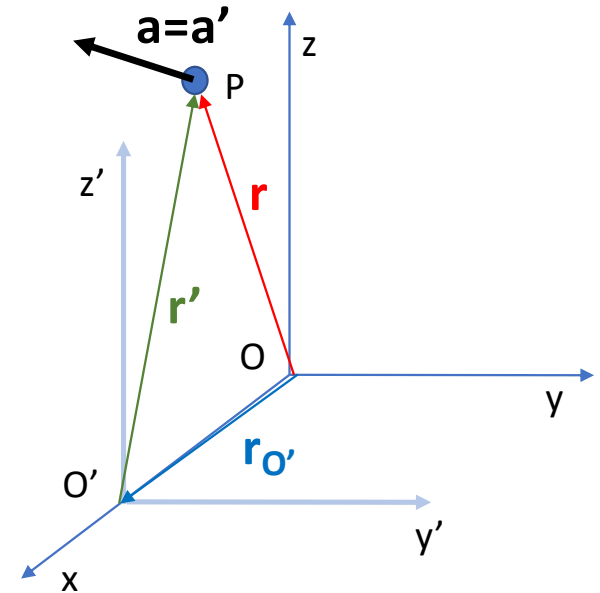
Inoltre, se il moto di trascinamento è rettilineo uniforme, risulta anche

$$v_{O'} = \text{costante} \rightarrow a_{O'} = 0$$

E quindi risulta, infine:

$$a = a'$$

uguale per entrambi i sistemi



I due sistemi di riferimento vedono il punto materiale muoversi con la stessa accelerazione.

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

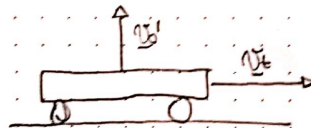
RELATIVO
IN MOTO DI TRASCINAM. UNIF. RETT

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0'$$

Esempio 1 - moto di trascinamento rettilineo uniforme

UN PUNTO VIENE LANCIATO VERTICAMENTE VERSO L'ALTO CON VELOCITA' $v' = 6 \text{ m/s}$ DA UN CARRELLO CHE SI MUOVE LUNGO UN ASSE x ORIZZONTALE ALLA VELOCITA' $v_t = 8 \text{ m/s}$. v_0'

DESCRIVERE IL MOTO DEL PUNTO VISTO DA UN OSSERVATORE SOLIDALE AL SUOLO
 • DESCRIVERE IL MOTO DEL PUNTO VISTO DA UN OSSERVATORE CHE SI MUOVE CONCORDEMENTE AL CARRELLO ALLA VELOCITA' $v_{tr} = 5 \text{ m/s}$



• L'OSSERVATORE SOLIDALE AL SUOLO VEDE UN MOTO DI CADUTA LIBERA CON VELOCITA' INIZIALE

$$v_0 = v' + v_{tr}$$

$\nearrow v_0'$

$\text{verso } z$

$$v' = v' k$$

$$v_{tr} = v_t i$$

$$v_{0x} = 8 \text{ m/s}$$

$$v_{0z} = 6 \text{ m/s}$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0z}^2} = 10 \text{ m/s}$$

$$\phi = \arctan \frac{6}{8} \quad (\phi = 36.9^\circ)$$

L'OSSERVATORE CHE SI MUOVE A VELOCITA' v_{tr} VEDRA' ANCORA UN MOTO DI CADUTA LIBERA, MA CON VELOCITA' INIZIALE

$$v'' = v - v_{tr} =$$

$$v_x'' = 3 \text{ m/s}$$

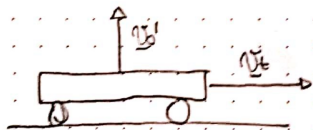
$$v_z'' = 6 \text{ m/s}$$

$$v_0'' = \sqrt{45} \text{ m/s} = 6.7 \text{ m/s}$$

$$\phi'' = \arctan \frac{6}{3} = 63.4^\circ$$

UN PUNTO VIENE LANCIATO VERTICAMENTE VERSO L'ALTO CON VELOCITA' $v' = 6 \text{ m/s}$ DA UN CARRELLO CHE SI MUOVE LUNGO UN ASSE x ORIZZONTALE ALLA VELOCITA' $v_t = 8 \text{ m/s}$.

DESCRIVERE IL MOTO DEL PUNTO VISTO DA UN OSSERVATORE SOLIDALE AL SUOLO
 & DESCRIVERE IL MOTO DEL PUNTO VISTO DA UN OSSERVATORE CHE SI MUOVE CONCORDEMENTE AL CARRELLO ALLA VELOCITA' $v_{tz} = 5 \text{ m/s}$



L'OSSERVATORE SOLIDALE AL SUOLO VEDE UN MOTO DI CADUTA LIBERA CON VELOCITA' INIZIALE

$$\underline{v}_0 = \underline{v}' + \underline{v}_{tr}$$

S.d.R. solubile alla
 per la cos i
 $v' = 0$

$$\underline{v}' = v' \underline{k}$$

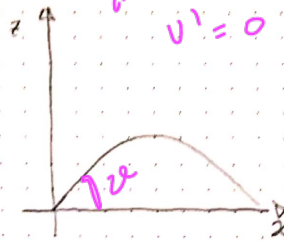
$$\underline{v}_{tr} = v_t \underline{i}$$

$$v_{0x} = 8 \text{ m/s}$$

$$v_{0z} = 6 \text{ m/s}$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0z}^2} = 10 \text{ m/s}$$

$$\phi = \arctan \frac{6}{8} \quad (\phi = 36.9^\circ)$$



L'OSSERVATORE CHE SI MUOVE A VELOCITA' v_{trz} VEDRA' ANCORA UN MOTO DI CADUTA LIBERA, MA CON VELOCITA' INIZIALE

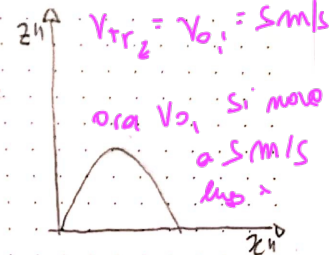
$$\underline{v}'' = \underline{v} - \underline{v}_{trz}$$

$$v_x'' = 3 \text{ m/s} \quad 8 - 5 \text{ m/s}$$

$$v_z'' = 6 \text{ m/s} \quad v_y = 6 \text{ m/s}$$

$$v_0'' = \sqrt{45} \text{ m/s} = 6.7 \text{ m/s}$$

$$\phi'' = \arctan \frac{6}{3} = 63.4^\circ$$

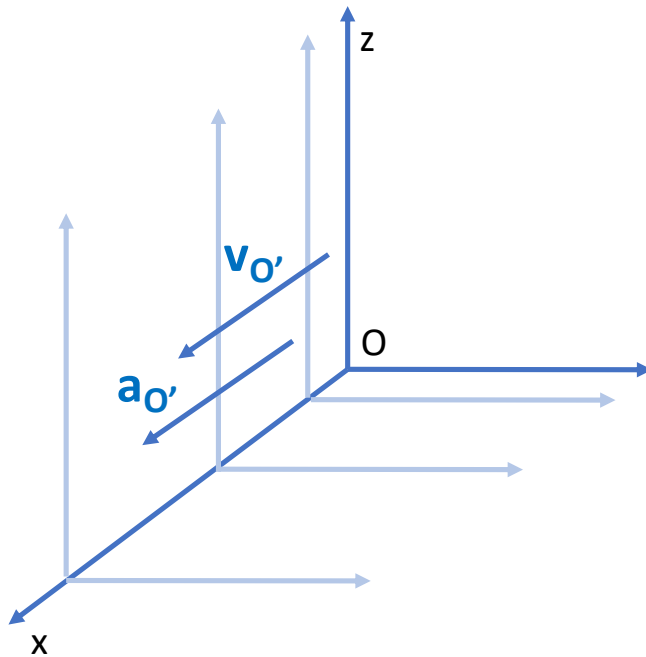


Caso 2 – moto di trascinamento rettilineo accelerato



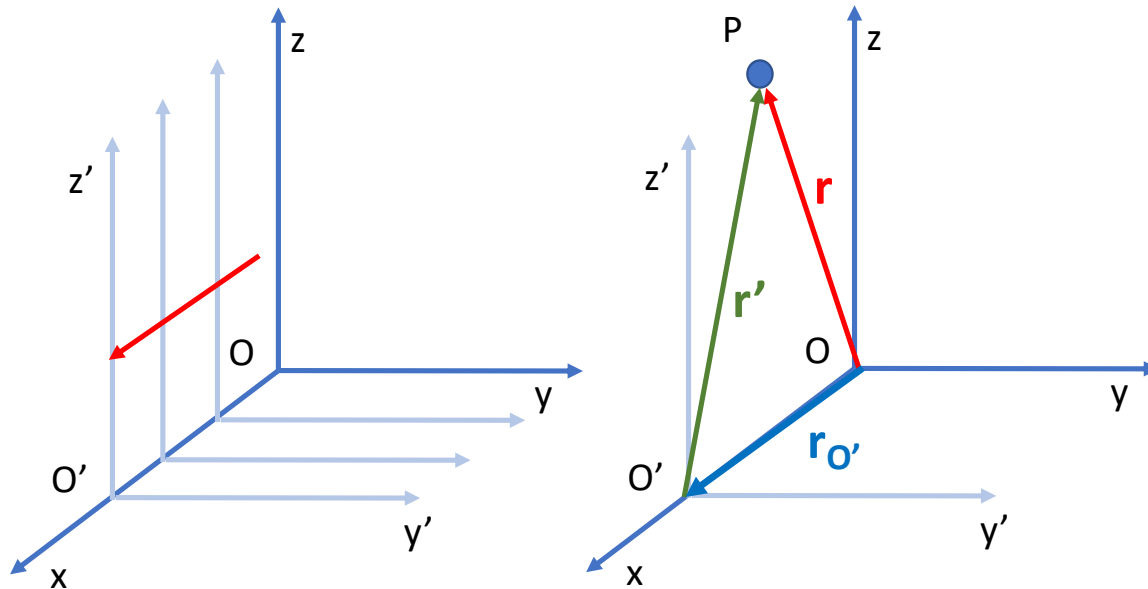
Moto di trascinamento rettilineo accelerato

$\vec{v}_{O'}$ moto verso l'infinito
 $\vec{a}_{O'}$ costante



- L'origine del sistema di riferimento mobile si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato con velocità iniziale $\underline{v_{O'0}}$ e accelerazione $\underline{a_{O'}}$ rispetto a quello fisso, gli assi rimangono paralleli a quelli dell'asse fisso, $\underline{v_{O'}}$ e $\underline{a_{O'}}$ sono tra loro paralleli.
- In generale, le direzioni di $\underline{v_{O'}}$ e $\underline{a_{O'}}$ possono essere parallela a uno dei tre assi oppure possono essere generiche. In questo caso prendiamo per semplicità un moto di trascinamento rettilineo uniformemente accelerato con $\underline{v_{O'}}$ e $\underline{a_{O'}}$ parallele all'asse x.

Moto di trascinamento rettilineo accelerato



Posizione: valgono le identiche considerazioni che abbiamo visto per il moto uniforme. I due sistemi di riferimento vedono uno stesso punto materiale rappresentato da due distinti vettori geometrici. Per il sistema di riferimento fisso si ha:

$$\mathbf{r} = x_P \mathbf{i} + y_P \mathbf{j} + z_P \mathbf{k}$$

Mentre per il sistema di riferimento mobile si ha:

$$\mathbf{r}' = x'_P \mathbf{i}' + y'_P \mathbf{j}' + z'_P \mathbf{k}'$$

L'origine del sistema di riferimento mobile rispetto a quello fisso è data da:

rispetto al f. fisso

$$\mathbf{r}_{O'} = x_{O'} \mathbf{i} + y_{O'} \mathbf{j} + z_{O'} \mathbf{k} = x_{O'} \mathbf{i}$$

Risulta quindi:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_{O'}$$

*il vettore
non varia
solo verso x*

Moto di trascinamento rettilineo accelerato

Anche per quanto riguarda la velocità, valgono le stesse considerazioni che abbiamo visto per il moto uniforme: dato che, anche in questo caso

$$\omega = 0$$

La velocità di trascinamento è data dalla velocità del sistema di riferimento mobile rispetto a quello fisso:

$$\mathbf{v}_{tr} = \mathbf{v}_{O'} + \omega \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}_{O'}$$

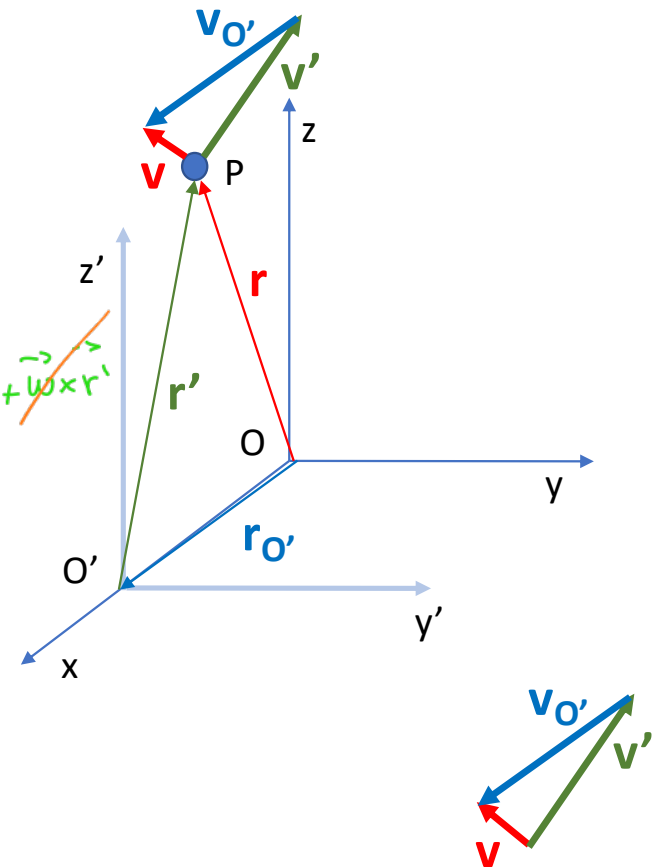
$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

E quindi possiamo esprimere la relazione tra la velocità del punto P vista da sistema di riferimento fisso e mobile come:

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'}}$$

Data la velocità nel sistema fisso e la velocità di trascinamento, possiamo anche determinare la velocità relativa come

$$\boxed{\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{O'}}$$



Moto di trascinamento rettilineo accelerato

Analizziamo infine come i due sistemi di riferimento vedono l'accelerazione dello stesso punto materiale. Abbiamo visto in precedenza che

$$\textcircled{\bullet} \quad \underline{a} = \underline{a'} + \underline{a_{O'}} + \underbrace{\frac{d\omega}{dt} \times \underline{r'}}_{\vec{a}_r} + \underbrace{\omega \times (\omega \times \underline{r'})}_{\vec{a}_c} + 2\omega \times \underline{v'}$$

Anche in questo caso specifico abbiamo visto che risulta

$$\bullet \quad \omega = 0$$

Quindi, necessariamente, risulta anche

$$\frac{d\omega}{dt} = 0$$

Però dato che il moto di trascinamento è accelerato, in questo caso risulta

$$\underline{a_{O'}} \neq 0$$

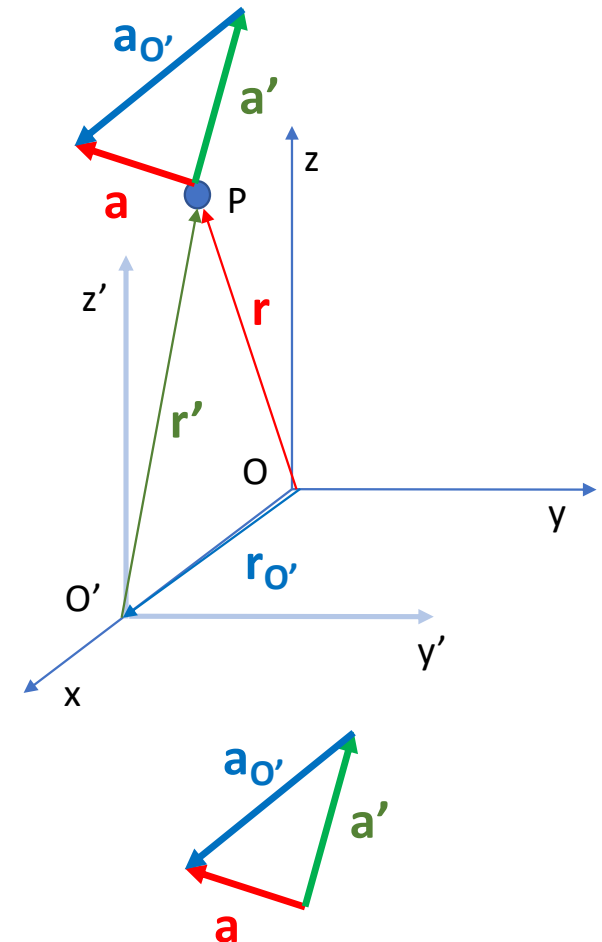
E quindi risulta, infine:

$$\underline{a} = \underline{a'} + \underline{a_{O'}}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r'} + \vec{r_{O'}} \\ \vec{v} &= \vec{v'} + \vec{v_{O'}} \end{aligned}$$

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a_{O'}}$$

accel. data dalla relativa
e acceler. del sistema inerziale



Esempio 2 – moto di trascinamento rettilineo accelerato, caso specifico

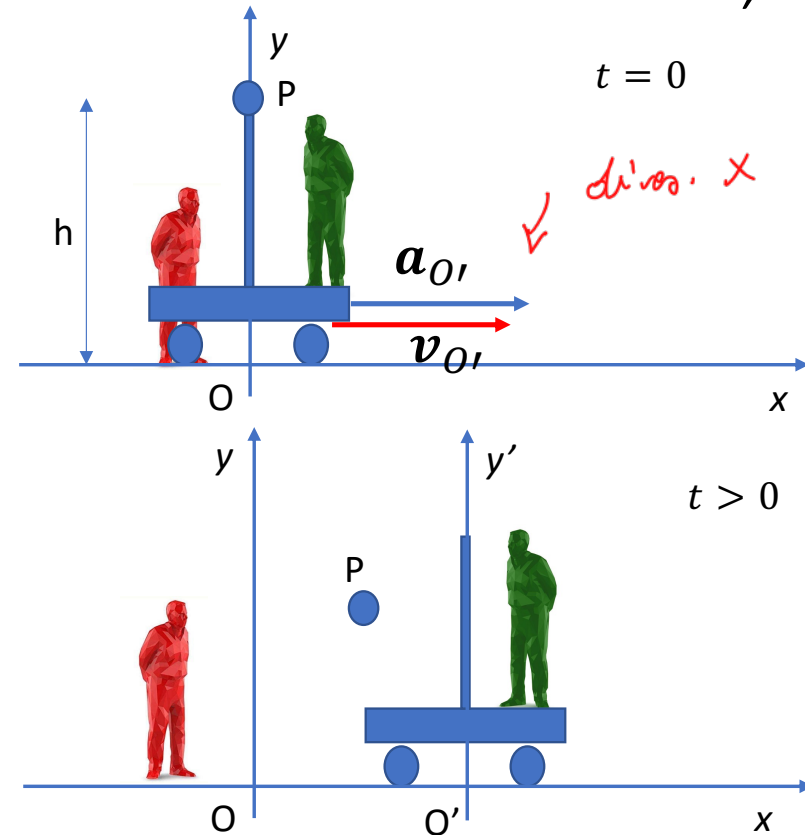
Un sistema $S_{O'}$ è solidale a un carrello che si muove con accelerazione $\underline{a_{O'}}$ e $\underline{v_{O'}}$ diretta come l'asse x .

- All'istante $t = 0$ i due sistemi di riferimento coincidono e un punto materiale P viene lasciato cadere da una piattaforma di altezza h solidale al carrello.

Descriviamo il moto di P visto da S_O e da $S_{O'}$

S_{AR} Mobile

S_{AR} Fisso



Esempio 2 – moto di trascinamento rettilineo accelerato, caso specifico

Cosa vede l'osservatore su S_0 : moto uniformemente accelerato con velocità iniziale $v_{Px}(0) = v_{O'}$ orizzontale e accelerazione di gravità (moto parabolico).

Condizioni iniziali, posizione:

$$x_P(0) = 0, z_P(0) = h$$

Condizioni iniziali, velocità:

$$v_{Px}(0) = v_{O'}, v_{Pz}(0) = 0$$

• Moto parabolico:

$$x_P(t) = v_{O'} t$$

$$y_P(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_P(x_P) = h - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_P}{v_{O'}} \right)^2$$

Traiettoria $y(x)$

$$t = \frac{x_P}{v_{O'}}$$

OSSERV.

FISSO VEEDE UN

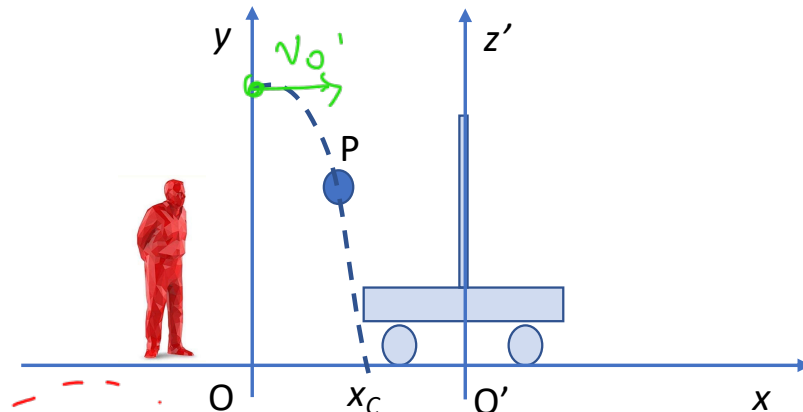
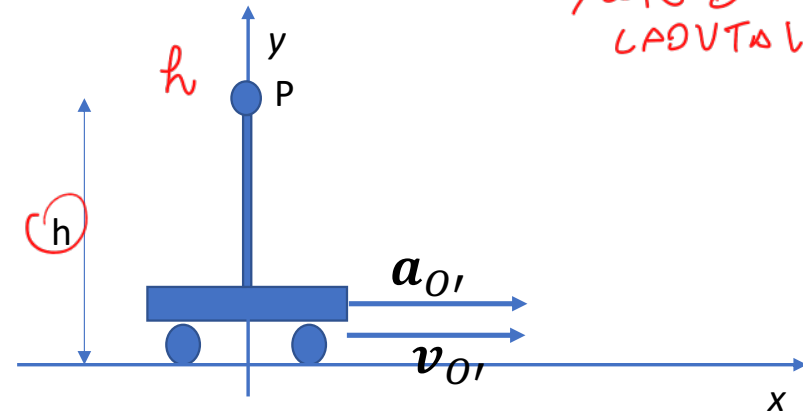
MOTO PARABOLICO

OSSERV. FISSO

vede un

MOTO DI

CADUTA LIBERA



Moto parabolico

$$v_x = v_{O'} \quad v_y = v_{O'} - g t \quad x = x_0 + v_{O'} t \quad y = y_0 - \frac{g t^2}{2}$$

Esempio 2 – moto di trascinamento rettilineo accelerato, caso specifico

Possiamo determinare a quale distanza dal punto di partenza cade il punto materiale, ponendo $y_P(t) = 0$:

$$0 = h - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_c}{v_{O'}} \right)^2$$

Si ricava la distanza:

$$y(x) = 0$$

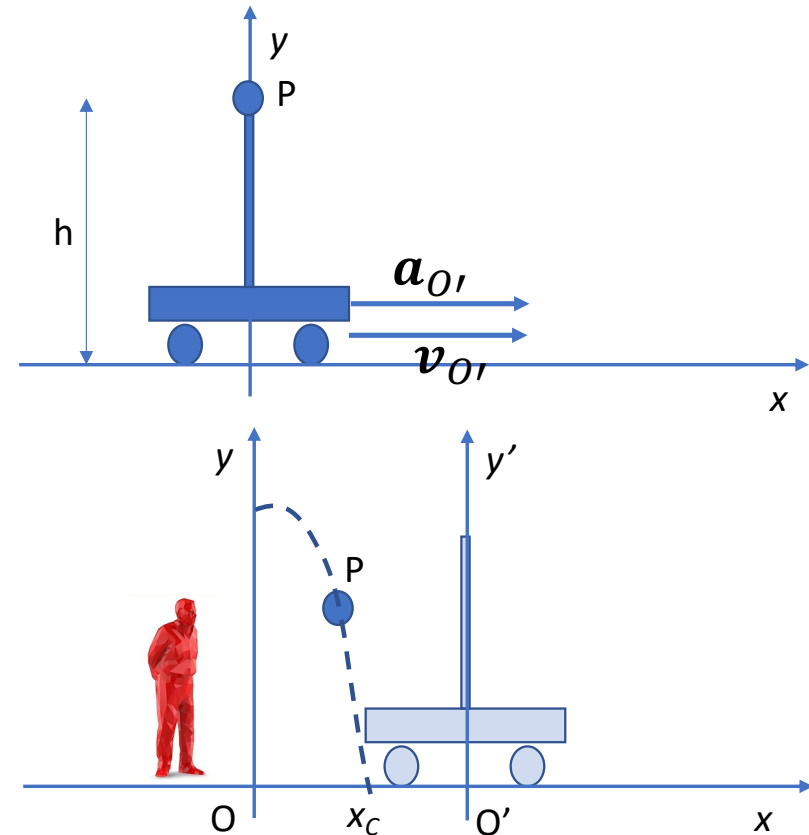
$$x_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} v_0^2$$

E il tempo di caduta

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$y(t) = 0$$

lo vede



moto caduta libera

osservatore sul carrello

Esempio 2 – moto di trascinamento rettilineo accelerato, caso specifico

Cosa vede l'osservatore su $S_{O'}$?

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Nel tempo di caduta t_c calcolato in precedenza, il carrello si è spostato di:

$$x_{O'}(t_c) = v_{O'} t_c + \frac{1}{2} a_{O'} t_c^2$$

Mentre il punto materiale si è spostato in direzione x di: *rispetto al punto fisso*

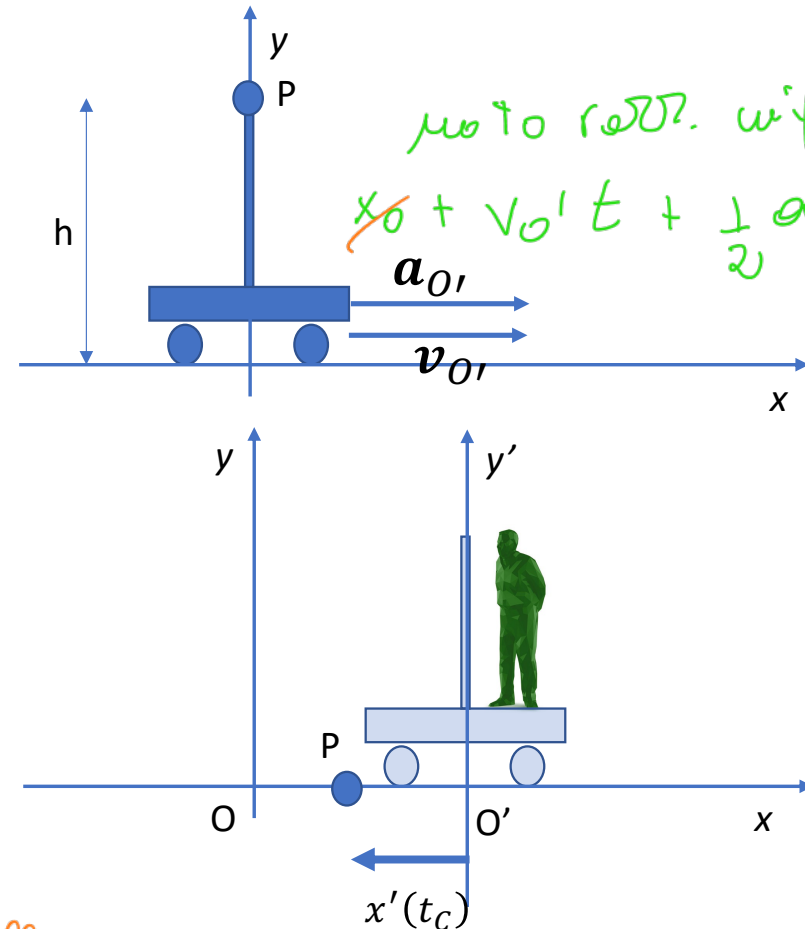
$$x_P(t_c) = v_{O'} t_c$$

Ricordiamo le relazioni che abbiamo visto per i moti relativi, in termini di posizione:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_{O'}$$

posiz. del punto rispetto al carrello

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{O'}$$



moto rett. w/ acc.

$$x_0 + v_{O'} t + \frac{1}{2} a' t^2$$

Esempio 2 – moto di trascinamento rettilineo accelerato, caso specifico

Possiamo ricavare la posizione vista da sistema di riferimento mobile come:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{O'}$$

Andando a esplicitare le coordinate *per componenti cartesiane* otteniamo:

$$\begin{cases} x'_P = x_P - x_{O'} \\ y'_P = y_P - y_{O'} \\ (z'_P = z_P - z_{O'}) \end{cases}$$

Posiz. relat. al conello

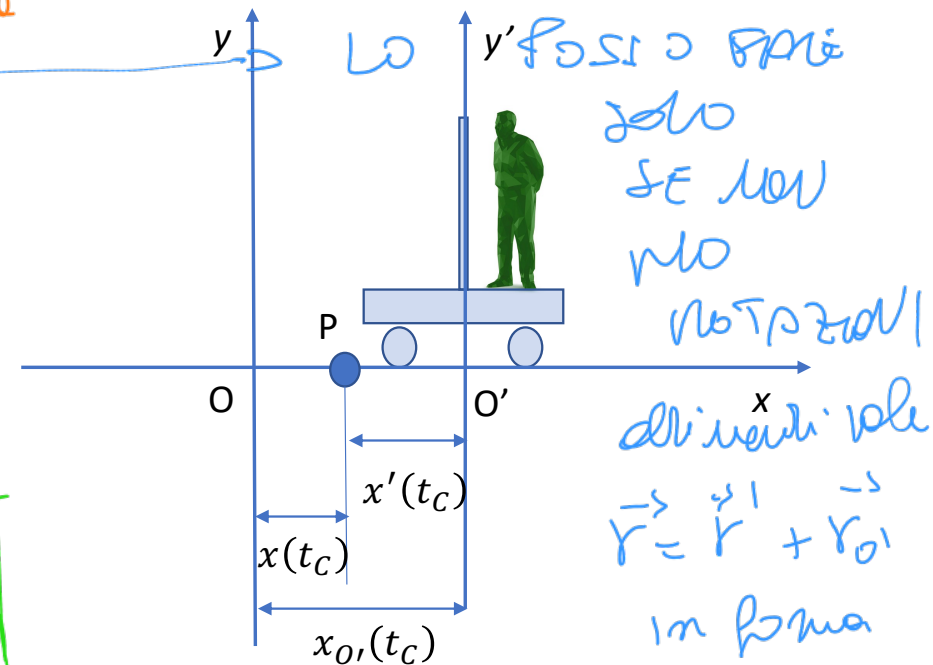
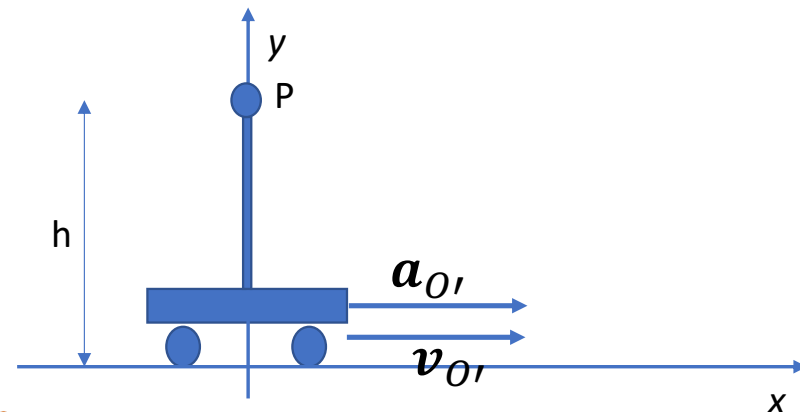
Sostituendo le espressioni trovate in precedenza si ottiene:

$$x'_P = x_P - x_{O'} = v_{O'} t_c - \left(v_{O'} t_c + \frac{1}{2} a_{O'} t_c^2 \right) = -\frac{1}{2} a_{O'} t_c^2$$

Vo' t moto x_P(t), una via pos. nullo

Come varia la posiz. del conello, moto UNIF. ACC

↳ moto relativo rispetto al sistema nullo



*LO POSSO FARE SOLO SE NON HO NOTIZIA dell'accelerazione
 $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{O'}$
 in forma vettoriale*

Esempio 2 – moto di trascinamento rettilineo accelerato, caso specifico

- In un istante generico durante la caduta abbiamo

$$x'_P(t) = x_P(t) - x_{O'}(t) = -\frac{1}{2} a_{O'} t^2$$

$$y'_P(t) = y_P(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

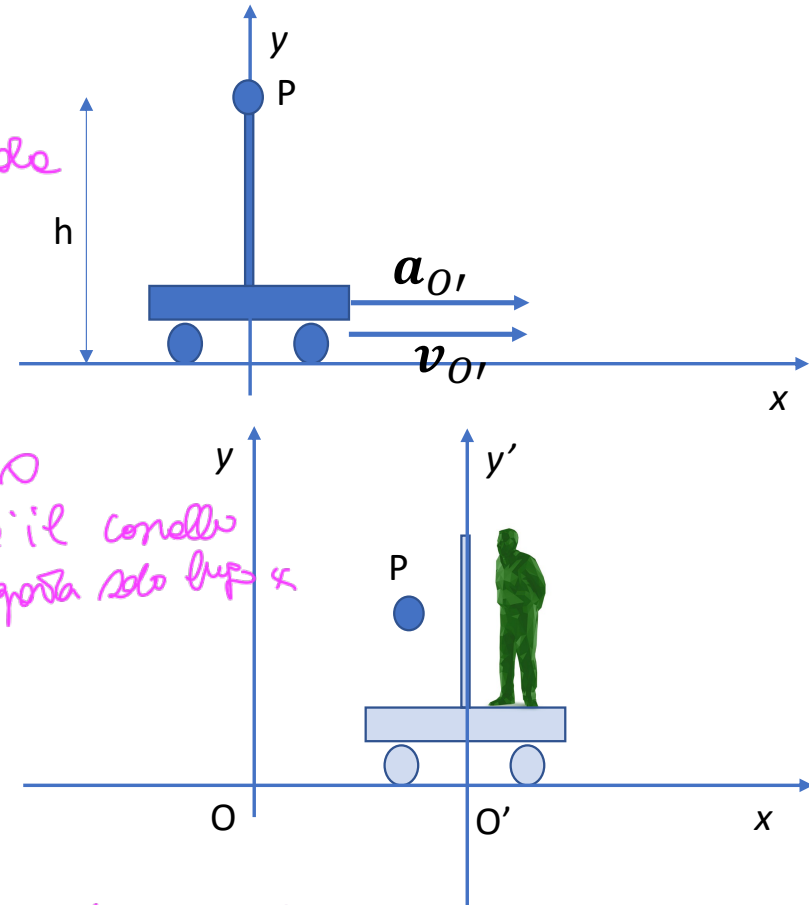
Cerchiamo di scrivere $y'_P(x'_P)$, in modo da avere la traiettoria del punto vista dal sistema di riferimento mobile, ricaviamo il tempo dall'espressione di $x'_P(t)$:

$$t^2 = -\frac{2x'_P}{a_{O'}}$$

$\forall t$ vale

$y'_{OP} = 0$
perché il corridoio si muove solo lungo x

~ Traiettoria relativa



Esempio 2 – moto di trascinamento rettilineo accelerato, caso specifico

Andiamo a sostituire nell'espressione di $y'_P(t)$:

trav. rel.

$$\left\{ \begin{aligned} y'_P(t) &= y_P(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \\ t^2 &= -\frac{2x'_P}{a_{O'}} \end{aligned} \right.$$

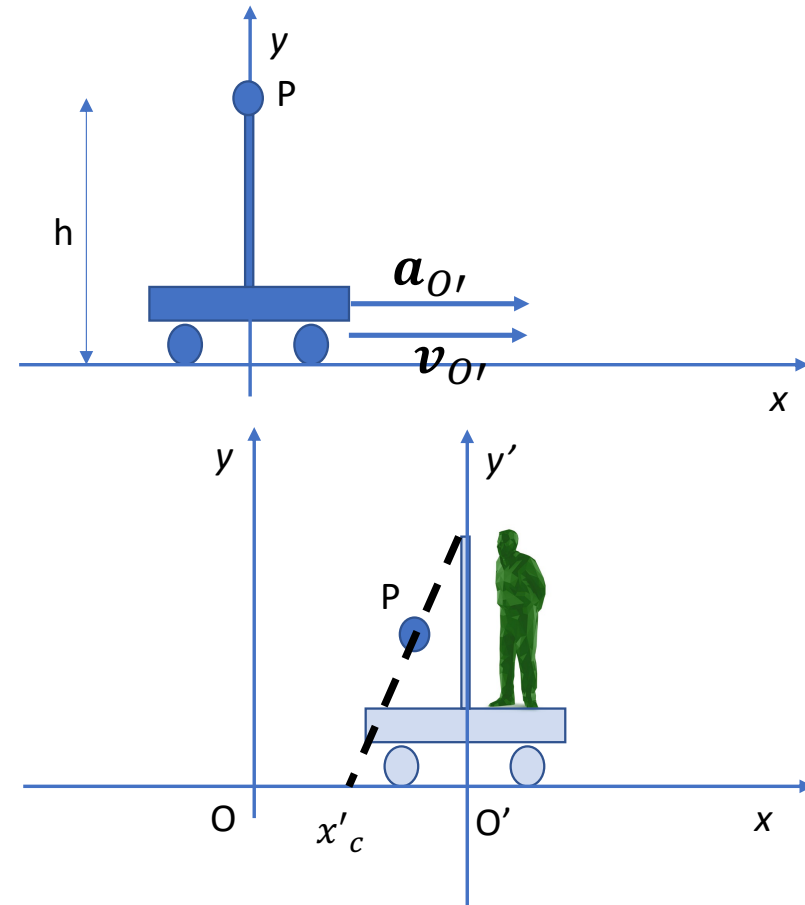
$$y'_P(x'_P) = h - \frac{1}{2} g \left(-\frac{2x'_P}{a_{O'}} \right)$$

$$\left[y'_P(x'_P) = h + \frac{g}{a_{O'}} x'_P \right]$$

La traiettoria del punto materiale vista dall'osservatore sul sistema di riferimento mobile è quindi una retta.

*equos. di una
retta! la vede come
una retta*

(x'p sarà negativo)



Esempio 3 – ascensore

- Un sistema di riferimento non inerziale *accelerato* con origine nel punto O' e asse y' verticale è solidale alla cabina di un ascensore. Indichiamo con O l'origine di un sistema di riferimento inerziale, con asse y verticale. Durante il moto, $y' \equiv y$. *no ruote*
L'ascensore durante la salita avrà accelerazione:

- Nella prima fase, alla partenza, l'accelerazione sarà positiva

$$\odot \quad \mathbf{a}_{O'} = a'_O \mathbf{j} \quad \text{lungo } y$$

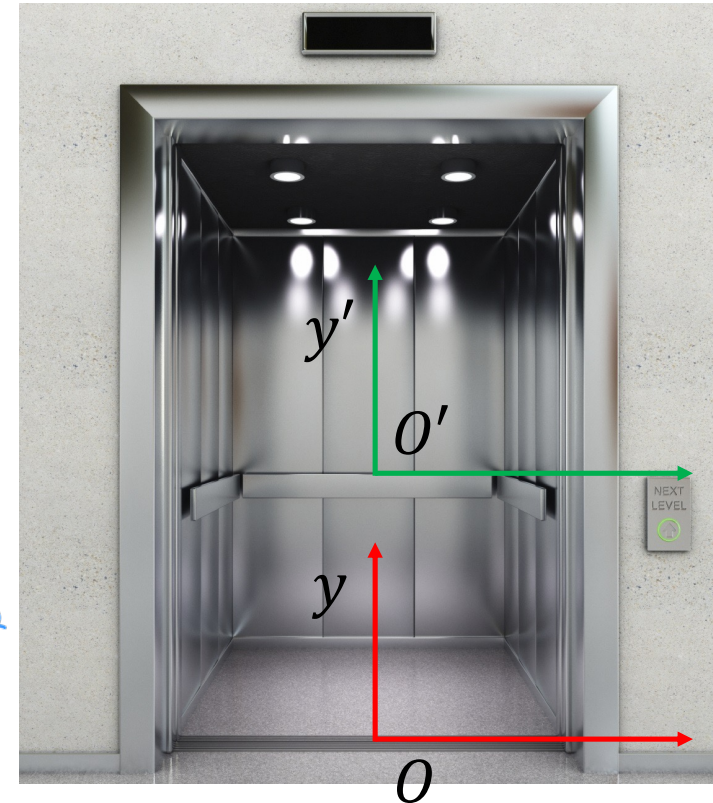
- Nel tratto centrale l'ascensore sale con velocità costante, quindi l'accelerazione sarà nulla.

$$\mathbf{a}_{O'} = 0$$

v_O costante, velocità costante

- Nel tratto finale, in prossimità del piano, l'ascensore avrà accelerazione negativa, dato che deve rallentare per fermarsi al piano. *rallenta*

$$\mathbf{a}_{O'} = -a'_O \mathbf{j}$$



Esempio 3 – ascensore

Supponiamo di fare degli esperimenti in cui lasciamo cadere degli oggetti nella cabina dell'ascensore. Che accelerazione vede l'osservatore all'interno della cabina?

- Ricordiamo che la relazione tra l'accelerazione vista dal sistema di riferimento fisso e quello mobile è

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{tr} + \mathbf{a}_c$$

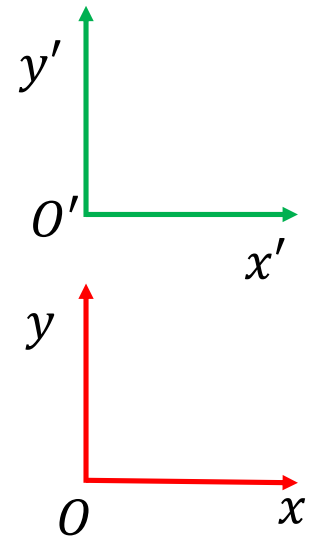
Dato che il moto di trascinamento è rettilineo, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ e quindi

$$\mathbf{a}_{tr} = \mathbf{a}_{O'}, \quad \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'}$$
$$\mathbf{a}_c = \mathbf{0}$$

Dato che inoltre stiamo facendo delle prove di caduta libera, l'accelerazione del punto materiale sarà pari all'accelerazione di gravità g :

$$\mathbf{a} = g$$

obl
→
punto materiale
vede il S.R. mobile



Esempio 3– ascensore

Ricordando che in questo caso:

$$\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{tr}}$$

Che l'accelerazione di trascinamento è:

$$\mathbf{a}_{tr} = \mathbf{a}_{O'}$$

E che l'accelerazione rispetto al sistema fisso è

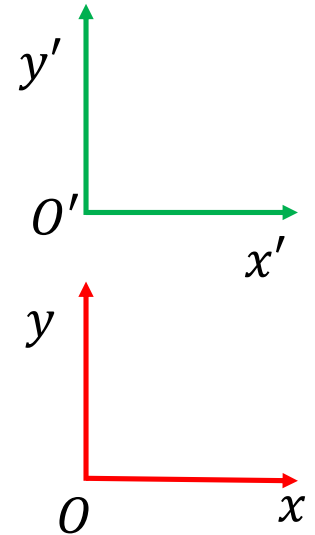
$$\mathbf{a} = \mathbf{g} = -g\mathbf{j}$$

Abbiamo che l'accelerazione vista dal sistema di riferimento mobile è:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{g} - \mathbf{a}_{tr}$$

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_{O'}$$

$$a = -g\hat{j}$$



Esempio 3– ascensore

$$\begin{aligned}\vec{a}' &= \vec{a} - \vec{a}_{0'} \\ &= \vec{g} - \vec{a}_{0'}\end{aligned}$$

Analizziamo quindi le tre fasi:

- Nel tratto finale, in prossimità del piano, l'ascensore avrà accelerazione negativa, dato che deve rallentare per fermarsi al piano.

$$\begin{aligned}a_{0'} &= -a'_0 \mathbf{j} \\ \left[a' = g - a_{tr} = -(g - a'_0) \mathbf{j} \right]\end{aligned}$$

- 6 L'osservatore nell'ascensore vede il punto materiale cadere con accelerazione in modulo minore dell'accelerazione di gravità, come se fosse più leggero.
-

- Se il sistema di riferimento mobile «cadesse» con accelerazione pari a quella di gravità,

$$a_{0'} = g = -g \mathbf{j} \quad \text{accelerazione come } g$$

$$a' = g - a_{tr} = -(g - g) \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

L'osservatore vedrebbe il punto materiale cadere con accelerazione nulla. Se lasciassi andare il punto materiale con velocità nulla, questo fluttuerebbe nella cabina senza cadere (in realtà entrambi stanno cadendo con accelerazione g).

Esempio 3– ascensore

• Analizziamo quindi le tre fasi:

- Nella prima fase, alla partenza, l'accelerazione sarà positiva

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{O'} &= a'_O \mathbf{j}, & \mathbf{a} &= \mathbf{g} = -g \mathbf{j} \\ \mathbf{a}' &= \mathbf{g} - \mathbf{a}_{tr} = -(g + a'_O) \mathbf{j} \end{aligned}$$

L'osservatore vede il punto materiale cadere con accelerazione in modulo più grande di g , come se fosse più pesante.

- Nel tratto centrale l'ascensore sale con velocità costante, quindi l'accelerazione sarà nulla.

$$\mathbf{a}_{O'} = 0, \mathbf{a}' = \mathbf{g}$$

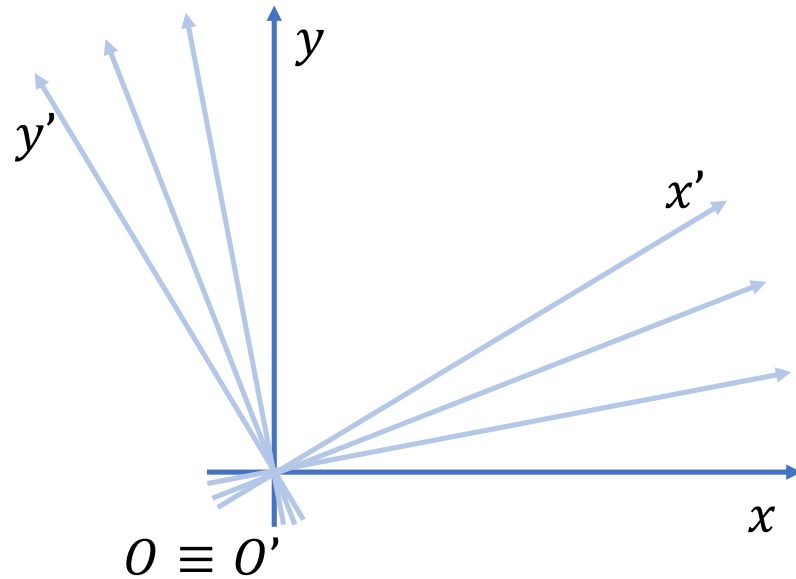
L'osservatore vede il punto materiale cadere con la stessa accelerazione che vede il sistema di riferimento fisso.

Caso 3 – moto di
trascinamento
rotatorio
uniforme



MOTO DI TRASCINAMENTO (SOLR RELATIVO MOBILE) IN MOTTO
 ROTATORIO UNIFORME. ruota ma con
 la stessa
 velocità angolare

Moto di trascinamento rotatorio uniforme



- I due sistemi di riferimento fisso e mobile hanno la stessa origine, $O \equiv O'$ e due assi coincidenti, $z \equiv z'$, gli assi x' e y' ruotano rispetto a x e y con velocità angolare ω costante.

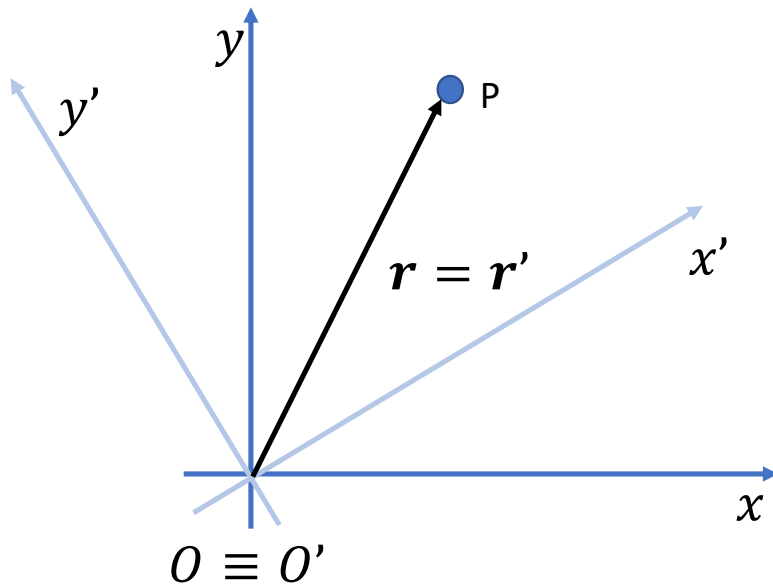
$\vec{\omega} =$
 COSTANTE

$\vec{a} = \vec{0}$

$r_{O'}, v_{O'}, a_{O'} = 0$ l'origine
 è fissa ma
 ruotano gli assi

Se punto fosse solidale alla rotazione, ruoterebbe
con $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z$, $\vec{v}'_P = 0$

Moto di trascinamento rotatorio uniforme



- Consideriamo quindi il moto di un generico punto materiale P , visto dai due sistemi di riferimento. In termini di posizione, abbiamo visto che la relazione tra i vettori posizione con cui i due sistemi di riferimento vedono il punto materiale è:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_{O'}$$

Dato che i due sistemi di riferimento hanno la stessa origine, $O \equiv O'$, $\mathbf{r}_{O'} = \mathbf{0}$, quindi

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_{O'} = \mathbf{r}'$$

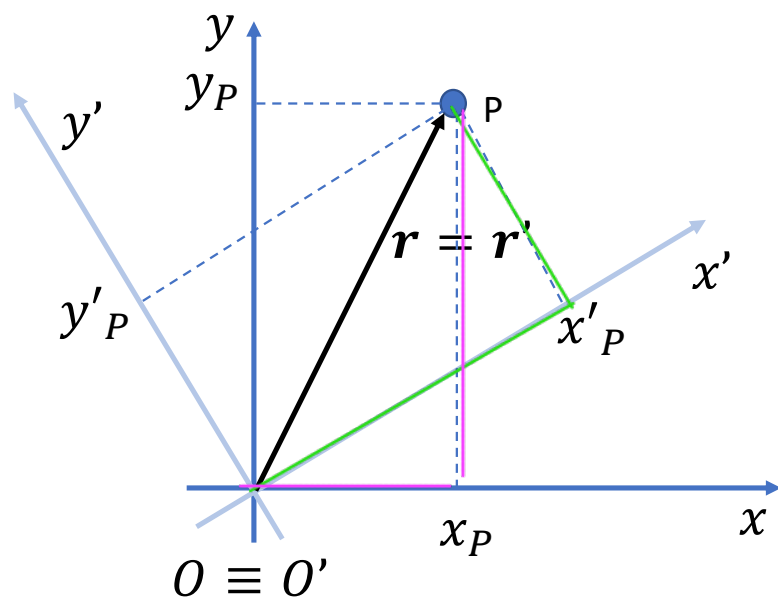
I due sistemi di riferimento vedono il punto materiale P sotto la stessa posizione.

$$\Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}'$$

Ma esempio
 $O' \neq O, \mathbf{r}_{O'} \neq \mathbf{0}$

riguardo
all'origine

Moto di trascinamento rotatorio uniforme



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_{O'} = \mathbf{r}'$$

I due sistemi di riferimento vedono il punto materiale P sotto la stessa posizione. *risultato di rotazione*

Nota: le rappresentazioni della posizione sono però diverse nei due sistemi di riferimento!

$$\mathbf{r} = x_P \mathbf{i} + y_P \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}' = x'_P \mathbf{i}' + y'_P \mathbf{j}'$$

MAIANO per le componenti coordinate diverse

valori vettoriali uguali

ma componenti coordinate diverse

Moto di trascinamento rotatorio uniforme

- Analizziamo quindi la velocità. Ricordiamo che le velocità dello stesso punto materiale viste dai due sistemi di riferimento sono legate dalla relazione:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \cancel{\mathbf{v}_{O'}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{tr}$$

$$\hookrightarrow \boldsymbol{\omega} \times \vec{r}$$

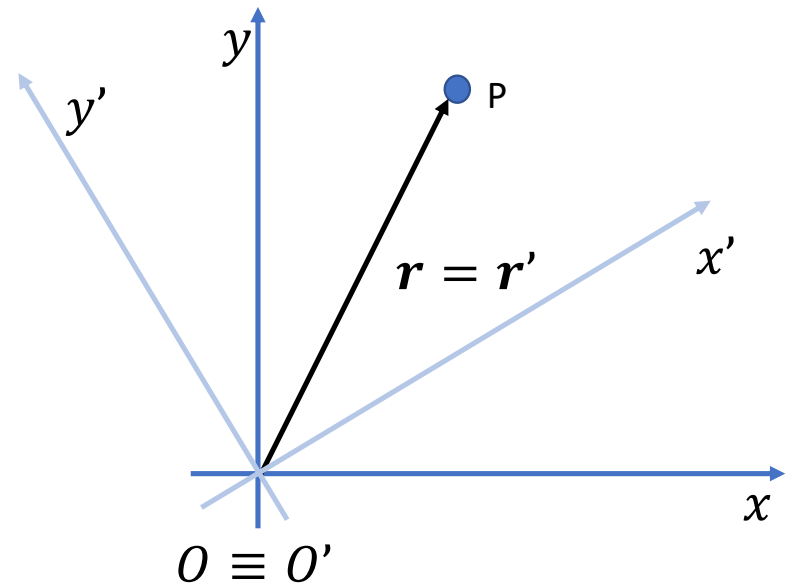
Cerchiamo di determinare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$. Ricordiamo che:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}' = \frac{d\mathbf{i}'}{dt}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}' = \frac{d\mathbf{j}'}{dt}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}' = \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = 0$$

one z è fisso, $\vec{\omega}$ è parallelo a $\vec{k}$



Moto di trascinamento rotatorio uniforme

In particolare, dato che

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}' = \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = 0$$

$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}' = 0 \rightarrow \boldsymbol{\omega}$ è parallelo a $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$

Possiamo scrivere quindi:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$$

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k}$$

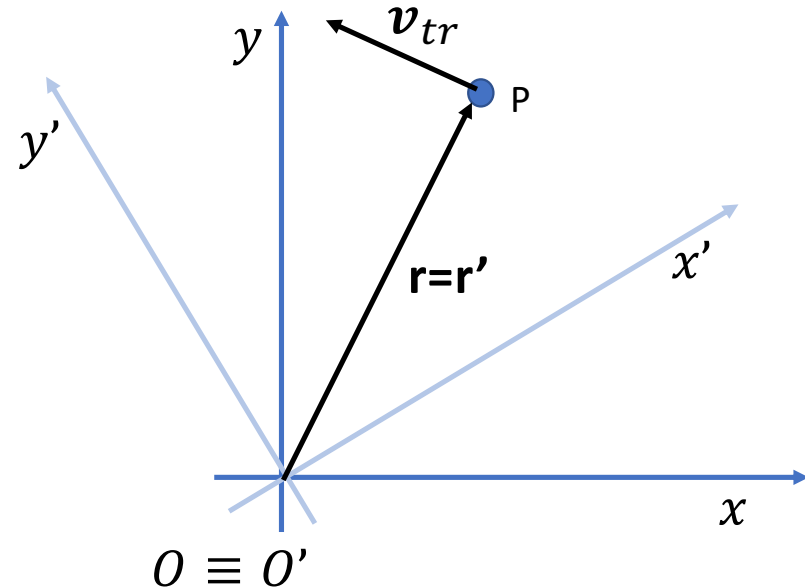
Dato che, inoltre:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}$$

e dato che i due sistemi di riferimento hanno origine in comune, $\mathbf{v}_{O'} = 0$, quindi risulta

$$\mathbf{v}_{tr} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

nel moto circolare
è la velocità
del punto lungo la
circonferenza di raggio R



$$\mathbf{v}_{tr} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$\mathbf{v}_{tr}$ è perpendicolare sia a $\boldsymbol{\omega}$ (che è parallelo all'asse z) che a $\mathbf{r}$, il suo modulo è

$$v_{tr} = \omega r$$

$$R\omega$$

Moto di trascinamento rotatorio uniforme

Abbiamo verificato che

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{tr} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

In particolare, se $\mathbf{v}' = 0$ (punto P solidale al sistema di riferimento mobile) *ruota con l'asse es. proprio*

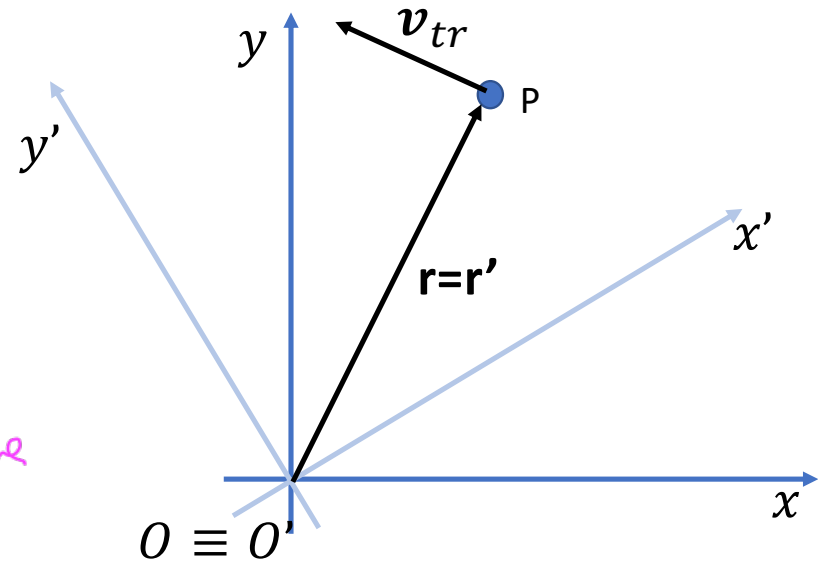
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{tr} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Il punto P si muove intorno ad O con velocità angolare costante (moto circolare uniforme).

Se solidale il punto P ruota

con moto circ. unif.

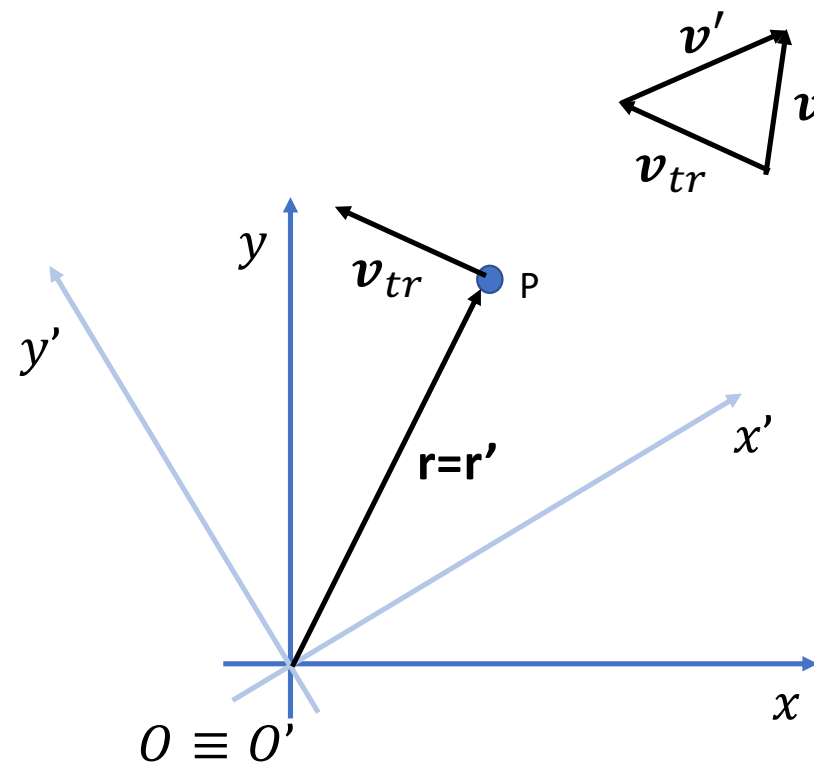
v_{tr} è costante in modulo, ωR



Moto di trascinamento rotatorio uniforme

- Se invece il punto materiale si muove rispetto al sistema di riferimento mobile con velocità relativa $\mathbf{v}'$, la sua velocità vista dal sistema di riferimento fisso è:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{tr} = \mathbf{v}' + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}_{\substack{\text{velocità di trascinamento} \\ \text{normale a } \vec{\omega} \text{ e } \vec{r}}}$$



Moto di trascinamento rotatorio uniforme

Esempio: i ragazzi al centro della giostra *che ruota* sembrano fermi ad un osservatore esterno, quindi

$$v = 0$$

La giostra sta ruotando con una certa velocità angolare ω , quindi

velocità con la s.d.r. cui non ruotano $v_0' = 0$

$$v_{tr} = \omega \times r$$

Per rimanere in equilibrio apparentemente fermi, i ragazzi si devono muovere sulla giostra con velocità

$$v' = v - v_{tr} = -\omega \times r$$

E infatti, anche se sono apparentemente fermi, stanno camminando (o correndo)!



$v = v' + \omega \times r$
 $v' = -\omega \times r$

se guardo fermi ($v=0$)

Significa che si stanno muovendo con $v' = -\omega \times r$

Moto di trascinamento rotatorio uniforme

- Analizziamo infine l'accelerazione. Abbiamo visto in precedenza che la relazione tra le accelerazioni del punto materiale viste dai due sistemi di riferimento sussiste la relazione:

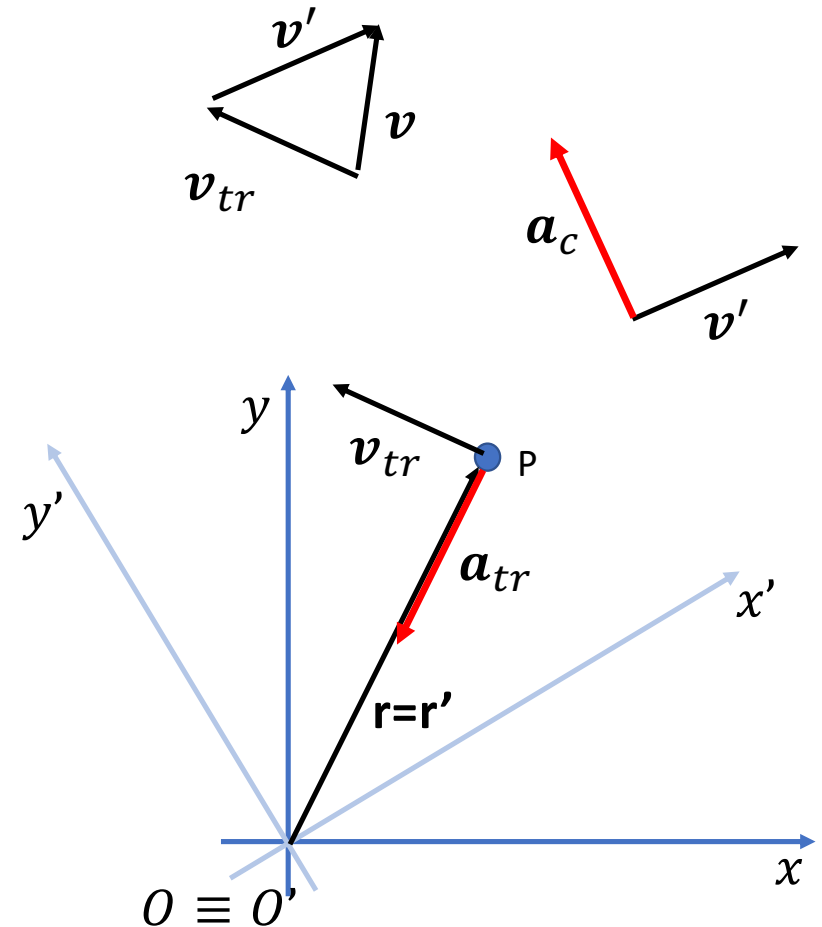
$$\left[\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{O'} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \right]$$

In questo caso l'espressione può essere semplificata come segue. Dato che i due sistemi di riferimento hanno origine comune:

- $\mathbf{a}_{O'} = 0$

Dato che il moto è rotatorio uniforme, la velocità angolare è costante e quindi

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = 0 \quad \text{in modulo}$$



Moto di trascinamento rotatorio uniforme

La relazione:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{O'} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

$\mathbf{r} = \mathbf{r}'$

Può essere semplificata in:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

In cui si evidenzia il termine di trascinamento:

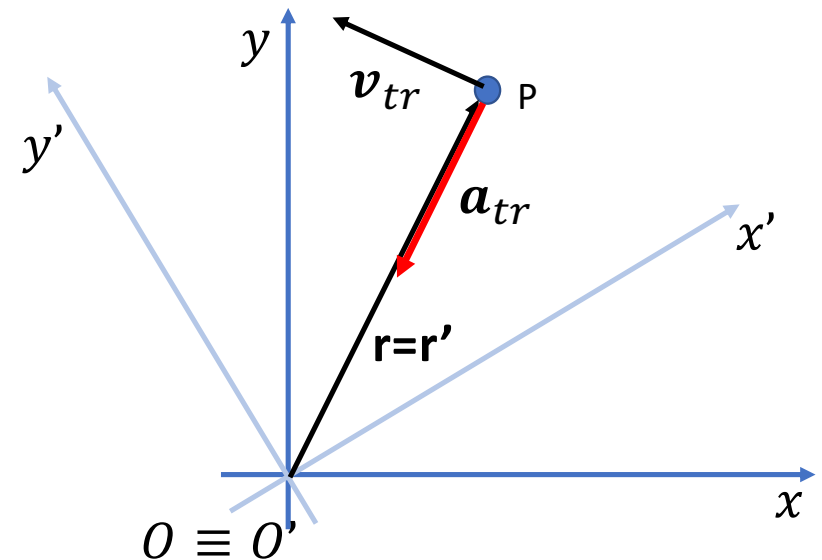
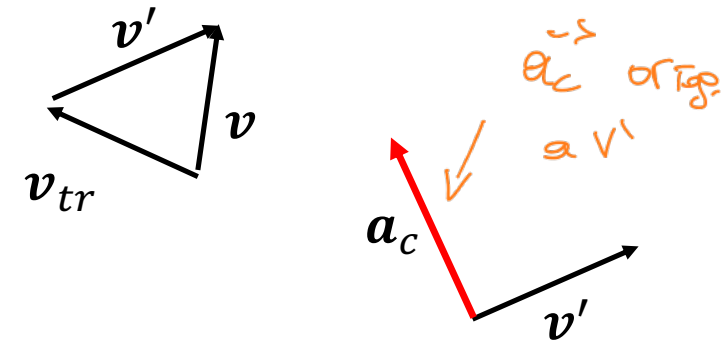
$$\mathbf{a}_{tr} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \boxed{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}$$

Che ha direzione centripeta, modulo proporzionale alla distanza e al quadrato della velocità angolare.

Abbiamo inoltre l'accelerazione di Coriolis

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

La cui direzione sarà perpendicolare a $\mathbf{v}'$



$\Rightarrow$
Moto Dopp.
ROT. UNIF.

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}_{\vec{a}_{tr}} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'}_{\vec{a}_c}}$$

DIREZ. NORMALE CENTRIPETA

come $\vec{a}_n = \omega^2 R \vec{u}_n$ nel moto circolare

Moto di trascinamento rotatorio uniforme

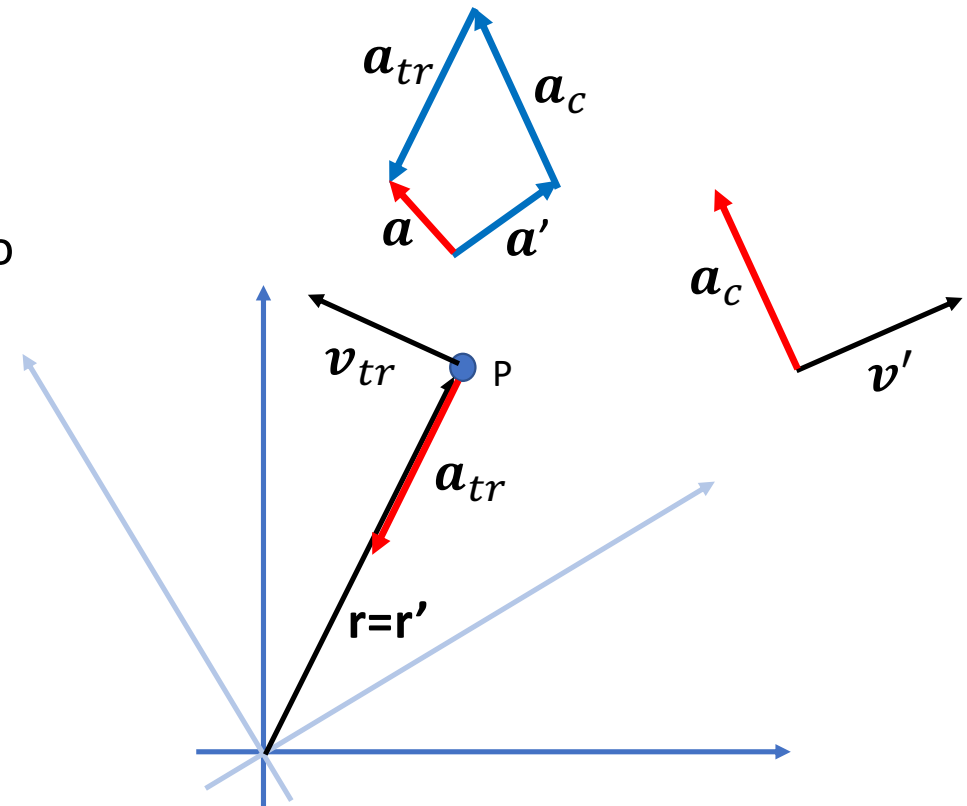
Riassumendo, se il moto di trascinamento è rotatorio uniforme, le accelerazioni di uno stesso punto materiale viste dai due sistemi di riferimento fisso e mobile sono legate dalle relazioni

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{a}_{tr} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_c$$



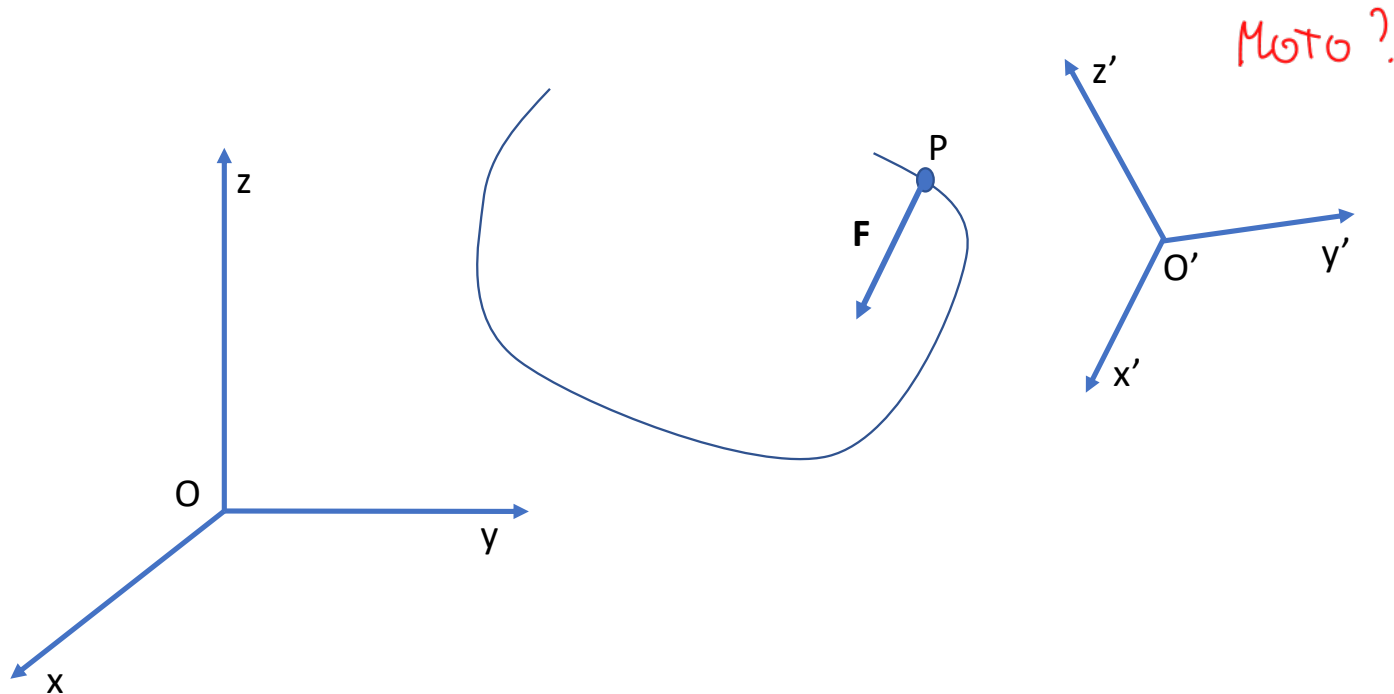
CINEMATICA dei MOTI RELATIVI

Moti relativi, dinamica



• Moti relativi: dinamica

- Supponiamo che sul punto materiale agisca una forza F , quale sarà il moto del punto materiale visto dai due sistemi di riferimento?



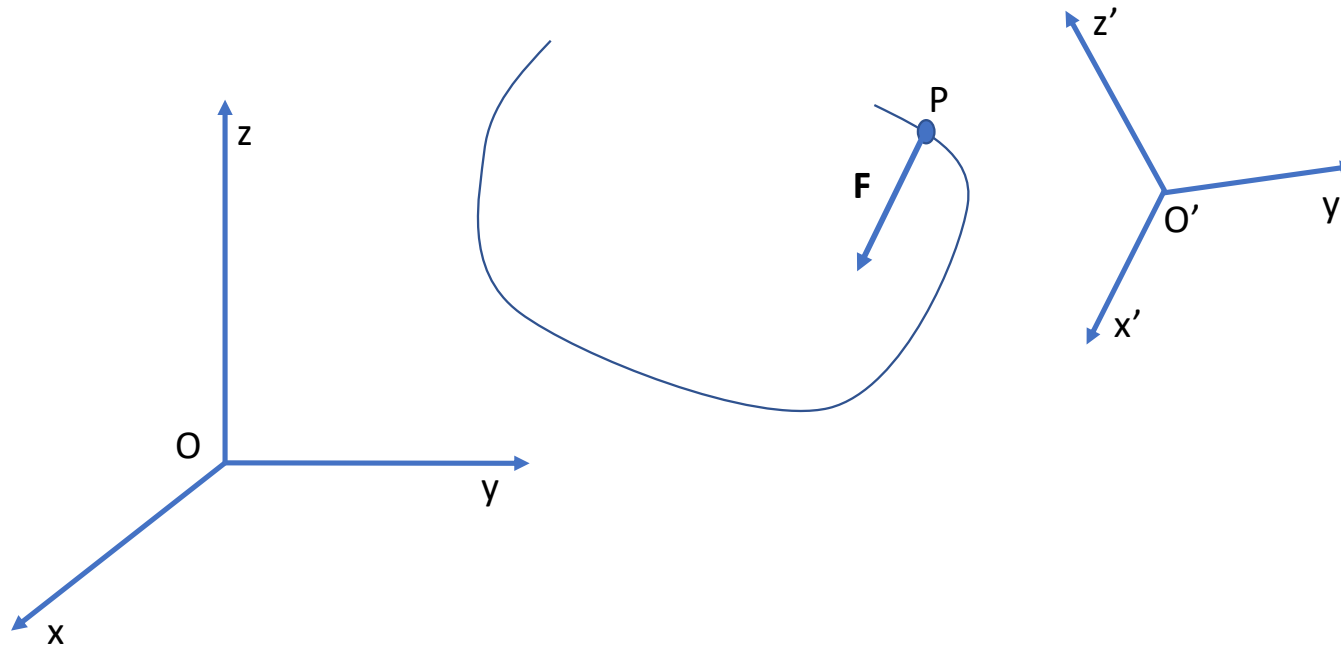
Moti relativi: dinamica

Possiamo applicare il secondo principio della dinamica

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}}$$

Ma abbiamo visto che in generale i due sistemi vedono il punto muoversi con accelerazioni diverse tra loro $\mathbf{a} \neq \mathbf{a}'$, quindi dobbiamo stare attenti a quale sistema di riferimento scegliamo per rappresentare il moto!

*af a' in generale
due che non sia
uniforme*



Moti relativi: dinamica

Si definisce **Sistema di riferimento inerziale** un sistema di riferimento per il quale vale il principio di inerzia.

1° principio vale se il S.R. è INERZIALE

- Se applico ad un punto materiale una forza $\mathbf{F}$, questo si muoverà rispetto al sistema di riferimento inerziale con un'accelerazione $\mathbf{a}$ tale che.

$$[\mathbf{F} = m\mathbf{a}]$$

*t.c. se prendo un punto materiale in
assenza di forze, questo mantiene la velocità costante. o è fermo
si muove con velocità costante (MOTO RETT. UNIF.)*

*quindi fissi o che alcuni problemi con moto rettilineo
unif.*

se $\mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}' = 0$

p. es. se moto unif. accel.

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$$

$$\text{Se } a = 0, \quad a' = -a_0' \neq 0$$

Moti relativi: dinamica, sistema inerziale

- Sia $S_0 = \{O, x, y, z\}$ un sistema inerziale, se scegliamo un secondo sistema di riferimento $S_{0'} = \{O', x', y', z'\}$ che si muove rispetto al primo con velocità costante $v_{0'}$ (moto uniforme) e $\omega = 0$. Abbiamo visto che in questo caso

$$a = a'$$

$S_{0'}$ è inerziale

I due sistemi vedono il punto P muoversi con la stessa accelerazione

Quindi se per S_0 vale

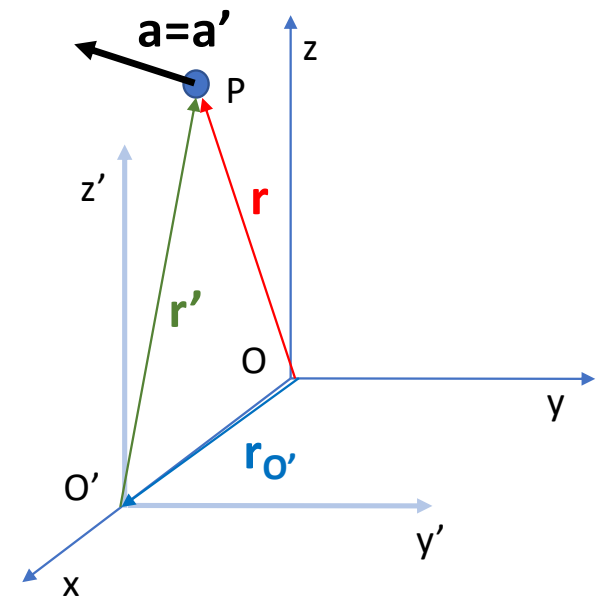
$$F = ma$$

Anche per $S_{0'}$ vale

$$F = ma = ma'$$

E quindi anche $S_{0'}$ è inerziale. Chi dei due possiamo considerare fisso e chi mobile? Non è possibile definirlo (principio di relatività galileiana).

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{0'}$$



Moti relativi: dinamica

Supponiamo di nuovo che $S_0 = \{O, x, y, z\}$ sia inerziale, ma questa volta supponiamo che per il secondo sistema $S_{0'} = \{O', x', y', z'\}$ almeno una di queste condizioni sia verificata:

$\omega \neq 0$, $\frac{d\omega}{dt} \neq 0$, $a_{O'} \neq 0$

*o $\omega \neq 0$ (rotazione)
o $\frac{d\omega}{dt} \neq 0$ (accelerazione angolare)
o $a_{O'} \neq 0$ (accelerazione del centro di massa)
Siccome S_0 è inerziale, allora $S_{0'}$ non lo è.*

Ricordiamo che

$$a = a' + a_{tr} + a_c$$
$$a_{tr} = a_{O'} + \frac{d\omega}{dt} \times r' + \omega \times (\omega \times r')$$
$$a_c = 2\omega \times v'$$

In questo caso abbiamo:

$$a \neq a'$$

$S_{0'}$ non è inerziale

Moti relativi: dinamica

Consideriamo quindi il moto di un punto materiale rappresentato secondo due sistemi di riferimento per i quali risulta:

$$a \neq a'$$

Rispetto al sistema fisso, che supponiamo essere un sistema inerziale abbiamo

$$\rightarrow F = ma \quad \text{SIST. INERZ.}$$

Abbiamo visto che tra le accelerazioni del punto rispetto ai due sistemi di riferimento risulta:

$$a = a' + a_{tr} + a_c$$

Quindi possiamo riscrivere l'espressione del secondo principio come:

$$F = m(a' + a_{tr} + a_c)$$

Moti relativi: dinamica

Sviluppiamo le espressioni

$$\mathbf{F} = m(\mathbf{a}' + \mathbf{a}_{tr} + \mathbf{a}_c)$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}' + m\mathbf{a}_{tr} + m\mathbf{a}_c$$

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a}_{tr} - m\mathbf{a}_c = m\mathbf{a}'$$

valida solo
se il SR non è inerziale

nel SR non inerziale
non posso applicare il
2° princip. dinamica se
non considero le forze
apparenti

$$\mathbf{F} - m(\mathbf{a}_{tr} + \mathbf{a}_c) = m\mathbf{a}'$$

L'accelerazione $\mathbf{a}'$ nel sistema di riferimento non inerziale dipende dalla forza $\mathbf{F}$ ma anche dai contributi $-m\mathbf{a}_{tr} - m\mathbf{a}_c$.

In altri termini, il sistema di riferimento non inerziale vede agire sul punto materiale la forza $\mathbf{F}$ ma anche i termini $-m\mathbf{a}_{tr} - m\mathbf{a}_c$. le $\mathbf{F}$ apparenti

Moti relativi: dinamica

- Quando studiamo il moto di un punto materiale in un sistema non inerziale oltre alla forza $\mathbf{F}$ dobbiamo tener conto delle cosiddette **forze di inerzia o forze apparenti**

$$\mathbf{F}_a = \underbrace{-m\mathbf{a}_{tr}}_{\mathbf{F}_{tr}} - \underbrace{m\mathbf{a}_c}_{\mathbf{F}_{coriolis}}$$

Che possiamo scrivere come somma di due contributi

Forza di trascinamento:

$$\mathbf{F}_{tr} = -m\mathbf{a}_{tr}$$

Forza di Coriolis:

$$\mathbf{F}_c = -m\mathbf{a}_c$$

Quindi in un sistema di riferimento non inerziale

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{tr} + \mathbf{F}_c = m\mathbf{a}'$$

Forze che
già si vedono
non sono solo in
sistemi inerziali

Esempio 1– moto di trascinamento rettilineo accelerato

Riprendiamo l'esempio del carrello che si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato visto in precedenza. Analizziamo il moto del punto P che cade dal carrello.

Abbiamo visto che il moto di P nel sistema inerziale ha accelerazione pari all'accelerazione di gravità, dato che su di esso agisce la sola forza peso:

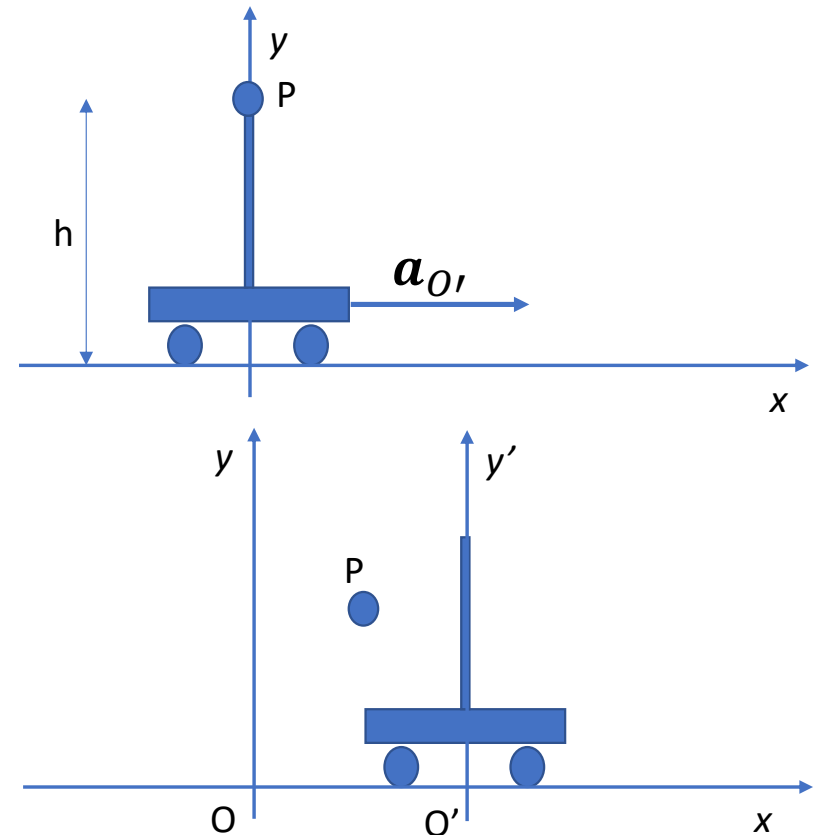
$$ma = mg$$

Con condizioni iniziali:

$$x_P(0) = 0, y_P(0) = h$$

$$v_{Px}(0) = v_{O'}, v_{Py}(0) = 0$$

Per s.d.r. inversa



Esempio 4– moto di trascinamento rettilineo accelerato

Il moto di P visto rispetto al sistema (non inerziale) solidale al carrello è caratterizzato da accelerazione $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{O'}$ e quindi la sua dinamica è descritta dall'equazione:

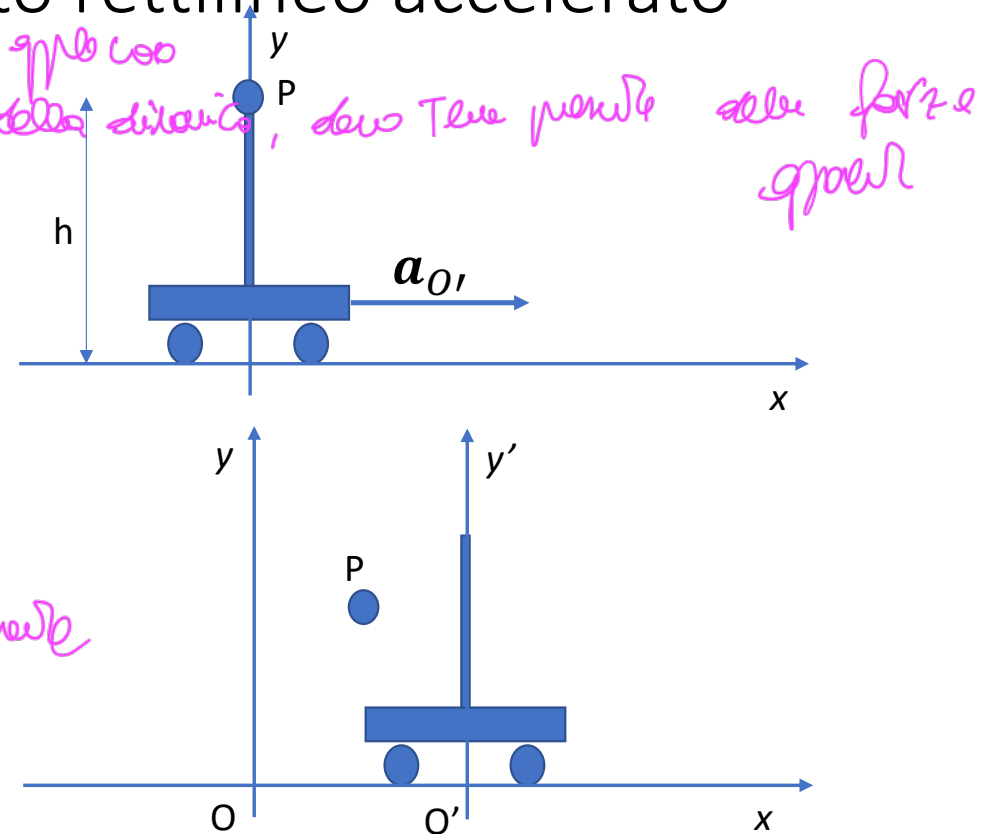
$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{g} - m\mathbf{a}_{O'}$$

Se analizziamo il moto dal punto di vista dell'osservatore sul carrello, dobbiamo considerare quindi che sul punto P oltre alla forza peso agisce anche una forza di inerzia. *apparente*

$$\mathbf{F}_{tr} = -m\mathbf{a}_{O'}$$

Per questo motivo all'osservatore sul carrello che sta accelerando, che osserva il punto cadere, appare che il punto materiale sia trascinato indietro.

*fenomeno
Sia spinto
di dietro*



Esempio 5– moto di trascinamento rotatorio uniforme

Riprendiamo l'esempio analizzato in precedenza, in cui il sistema di riferimento mobile ha rispetto a quello fisso un moto di rotazione intorno all'asse z con velocità angolare costante. Se sul punto materiale agisce una forza $\mathbf{F}$, il sistema inerziale vedrà il punto P muoversi con accelerazione $\mathbf{a}$ tale che

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Mentre il sistema non inerziale vedrà il punto muoversi con accelerazione $\mathbf{a}'$ tale che

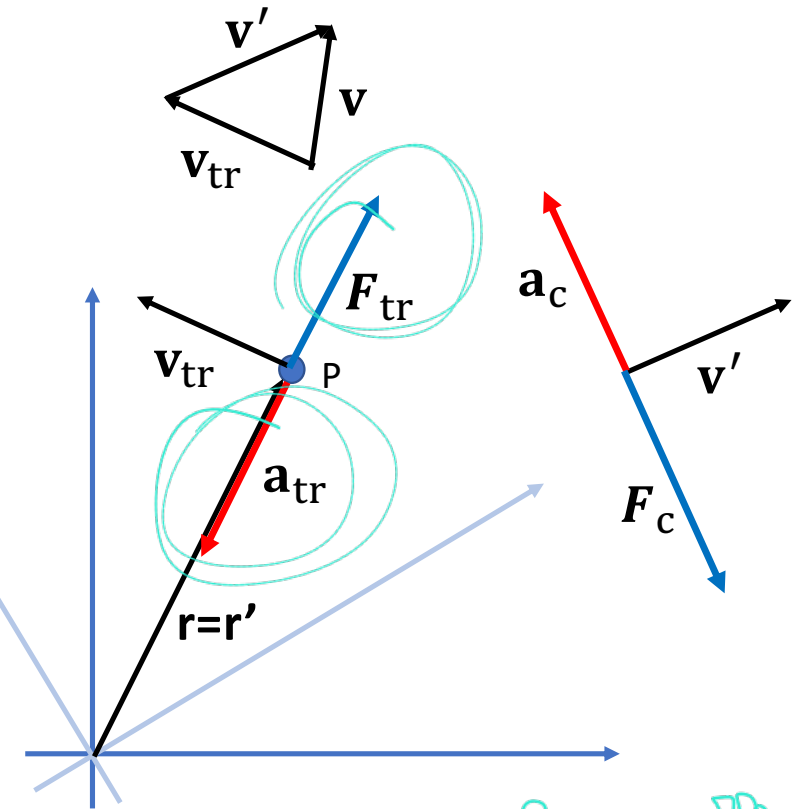
$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{tr} + \mathbf{F}_c$$

La forza di trascinamento è in questo caso:

$$\mathbf{F}_{tr} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \mathbf{F}_{centrif}$$

Mentre la forza di Coriolis vale:

$$\mathbf{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$



a cui P è soggetto

Forza apparente γ e' di tipo centrifugo,

e' una forza apparente che e' nel sol

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}$$

clo

Esempio 5– moto di trascinamento rotatorio uniforme

Supponiamo che il punto P sia fisso rispetto al sistema di riferimento non inerziale (ad esempio i ragazzi seduti intorno alla giostra). Dal punto di vista cinematico, la velocità relativa è nulla:

$$v' = 0$$

$$v = \omega \times r' = v_{tr}$$

E anche l'accelerazione relativa è nulla:

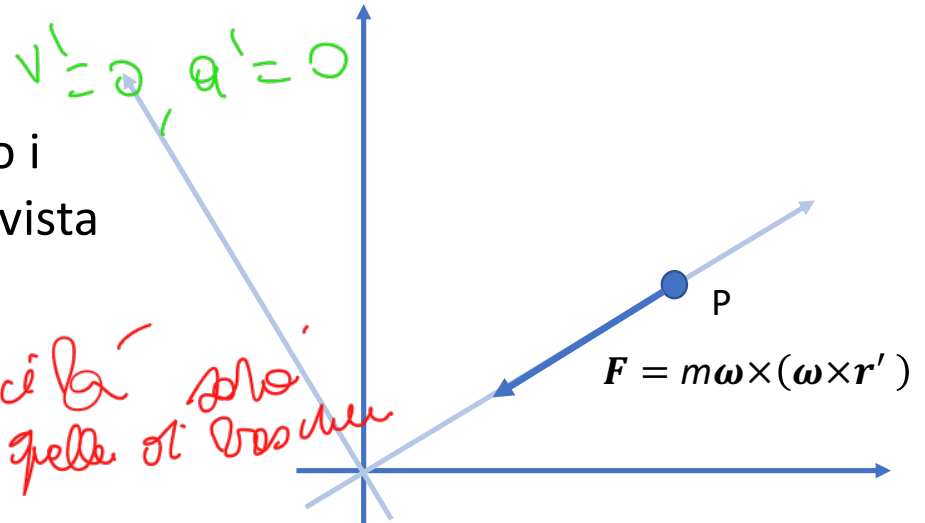
$$a' = 0$$

$$a = \omega \times (\omega \times r')$$

acc. centripeta

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}$$

in quarto
cor



Esempio 5– moto di trascinamento rotatorio uniforme

es. um FILO

Forza letto circolare UNIF, F_m

Analizziamo il sistema dal punto di vista dinamico:
Nel sistema di riferimento inerziale

$$ma = F$$

Devo applicare al punto materiale una forza (centripeta). Nell'esempio della giostra, è la forza che il bordo esterno del sedile applica sulla schiena dei ragazzi seduti.

$$F = m\omega \times (\omega \times r')$$

Rispetto al sistema di riferimento mobile (non inerziale), dato che $a' = 0$

$$0 = ma' = F + F_{tr}$$

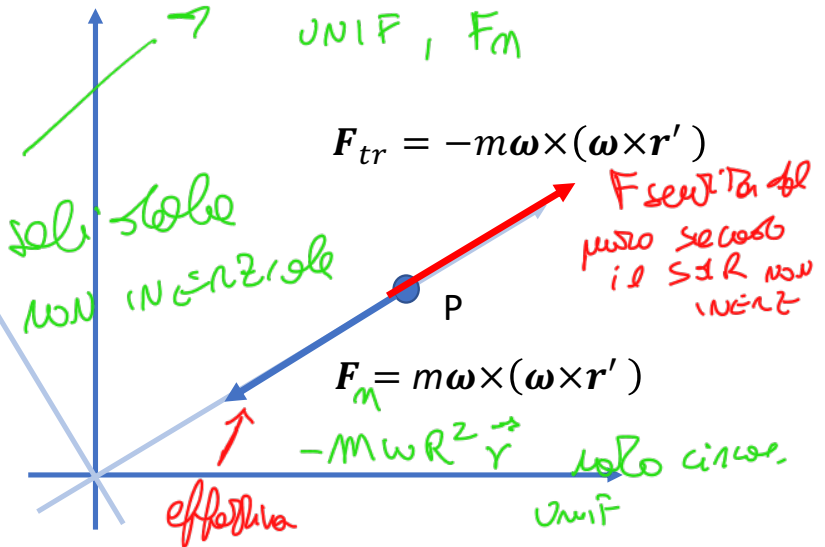
$$F + F_{tr} = 0 \Rightarrow F_{tr} = -F = -m\omega \times (\omega \times r')$$

I ragazzi seduti sentono una forza che tende a spingerli fuori dalla giostra (forza centrifuga).

SI TROVA

per il SR mobile lei vede apparire due forze che fanno in modo che $a' = 0$

Per far sì che il punto rimanga stabile sul SR non inerziale



p. centrifuga

• Esempio 5– moto di trascinamento rotatorio uniforme

- Se in un certo istante togliessi la forza centripeta, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ dal punto di vista dinamico osserverei:

→ Nel sistema di riferimento inerziale

$$m\mathbf{a} = 0$$

forte per la tangente

Il punto inizierebbe a muoversi con moto rettilineo uniforme con la velocità che aveva nell'istante in cui ho tolto la forza.

Rispetto al sistema di riferimento mobile (non inerziale), il sistema si muoverà con accelerazione $\mathbf{a}'$ tale che:

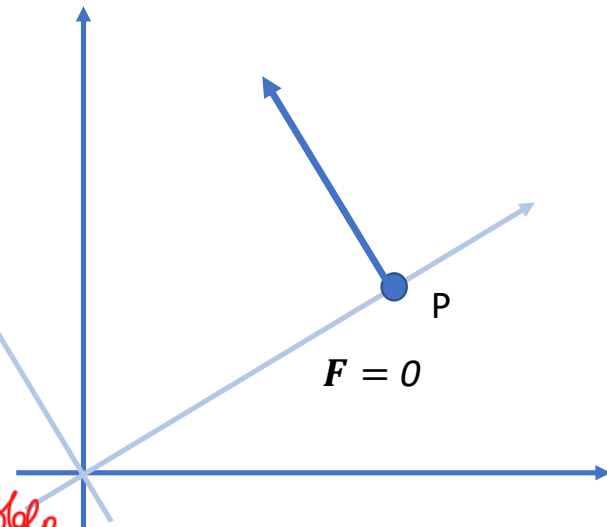
non sente più la forza

non ha $\mathbf{a}'$

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}_{tr}$$

$$\omega \times (\omega \times \mathbf{r}')$$

↑ solo $\mathbf{F}$ Coriolis



• Esempio 6– moto di trascinamento rotatorio } uniforme, punto fisso nel sistema inerziale

Supponiamo quindi P fisso rispetto al sistema di riferimento inerziale.

La sua velocità sarà quindi nulla:

$$\bullet \quad \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

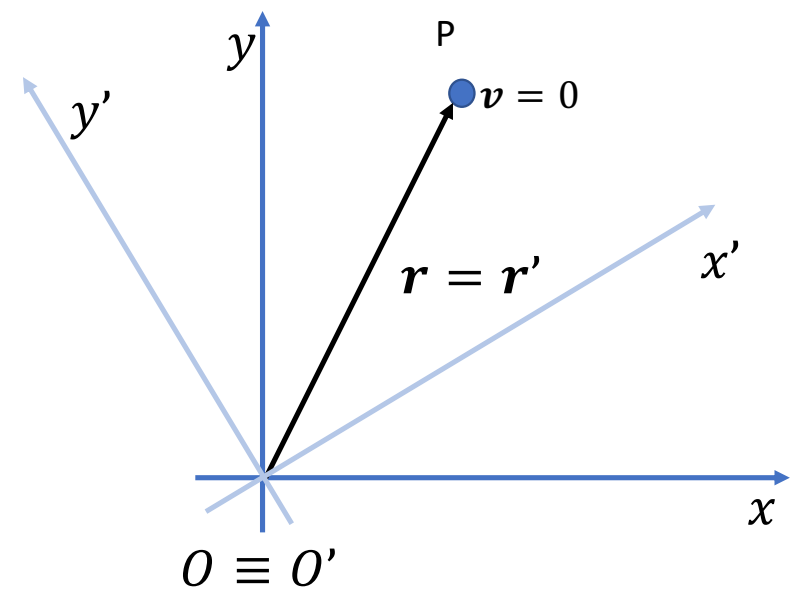
Mentre la velocità di trascinamento è sempre

$$\bullet \quad \mathbf{v}_{tr} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

Ne consegue che l'osservatore sul sistema di riferimento mobile vedrà il punto (che è fisso) muoversi con velocità:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{tr} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

oppo della velocità con cui si ruota il S.R.



Esempio 6– moto di trascinamento rotatorio uniforme

Supponiamo quindi P fisso rispetto al sistema di riferimento inerziale.

Anche la sua accelerazione sarà nulla

$$a = 0$$

Mentre l'accelerazione di trascinamento, per quanto abbiamo visto in precedenza, risulta:

$$a_{tr} = \omega \times (\omega \times r')$$

$$a_{tr} = \omega \times \omega \times r$$

La velocità relativa, calcolata in precedenza, vale

$$v' = -\omega \times r'$$

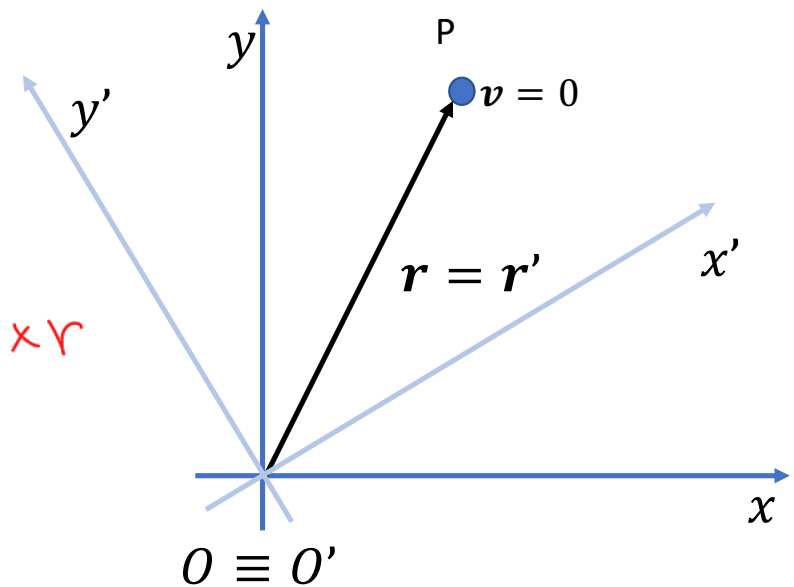
Quindi l'accelerazione di Coriolis può essere calcolata come:

$$a_c = 2\omega \times v' = -2\omega \times (\omega \times r')$$

Il sistema di riferimento mobile vede il punto materiale fisso con un'accelerazione pari a:

$$a' = a - a_{tr} - a_c = \omega \times (\omega \times r')$$

$$a' = -(\omega \times (\omega \times r'))$$



vede la sola componente centripeta dell'accelerazione
il SA R non iner.

Esempio 6– moto di trascinamento rotatorio uniforme

- Analizziamo infine la dinamica. Nel sistema di riferimento inerziale, dato che il punto è fisso, applicando la seconda legge di Newton si vede facilmente che:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{F} = 0$$

Rispetto al sistema di riferimento mobile (non inerziale), l'accelerazione risulta:

$$\mathbf{a}' = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

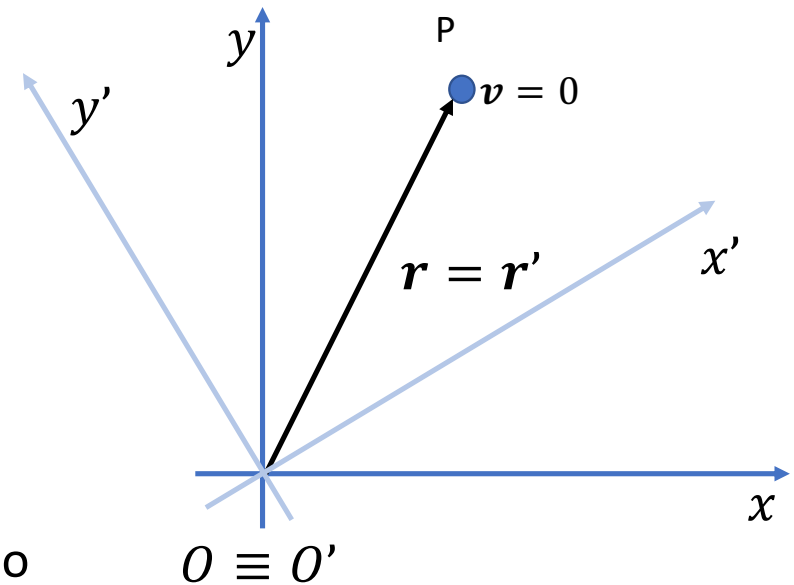
$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{tr} + \mathbf{F}_c$$

Dobbiamo tener conto delle forze di inerzia, in questo caso la forza di trascinamento centrifuga e la forza di Coriolis.

$$\mathbf{F} = 0,$$

$$\mathbf{F}_{tr} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'), \quad \mathbf{F}_c = 2m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

$$[\mathbf{a}' = \mathbf{a}_{tr} + \mathbf{a}_c]$$



$$= \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{tr}$$

$$m\mathbf{a}' = m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] + 2m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

$\mathbf{a}_{tr}$ e $\mathbf{a}_c$ sono le accelerazioni centrifuga e di Coriolis

Esempio 7 - Moto di trascinamento rotatorio uniforme con moto relativo

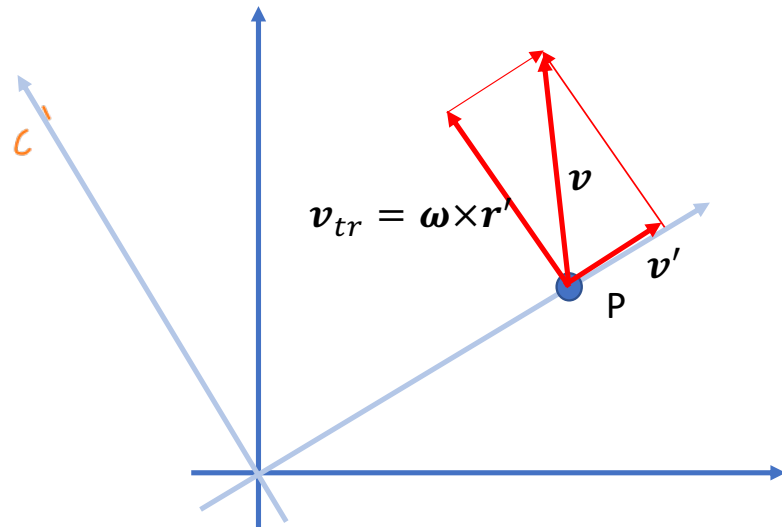
- Supponiamo che il punto P sia sull'asse x' del sistema di riferimento mobile muova rispetto ad esso con velocità $\mathbf{v}'$ costante, diretta come x' . La velocità relativa è quindi definita come:

$$\boxed{\mathbf{v}' = v' \mathbf{i}'} \quad \text{accelerazione ind. di } C'$$

La velocità nel sistema fisso sarà pari a:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{tr} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

$$\cancel{v_0' = 0}$$



v' costante in modulo, $a' = 0$

Esempio 7 - Moto di trascinamento rotatorio uniforme con moto relativo

Analizziamo quindi l'accelerazione. L'accelerazione relativa è nulla, dato che la velocità relativa v' è costante

$$a' = 0$$

L'accelerazione di trascinamento vale: ω cost.

$$a_{tr} = \omega \times (\omega \times r')$$

(la direzione di a_{tr} è centripeta)

L'accelerazione di Coriolis vale:

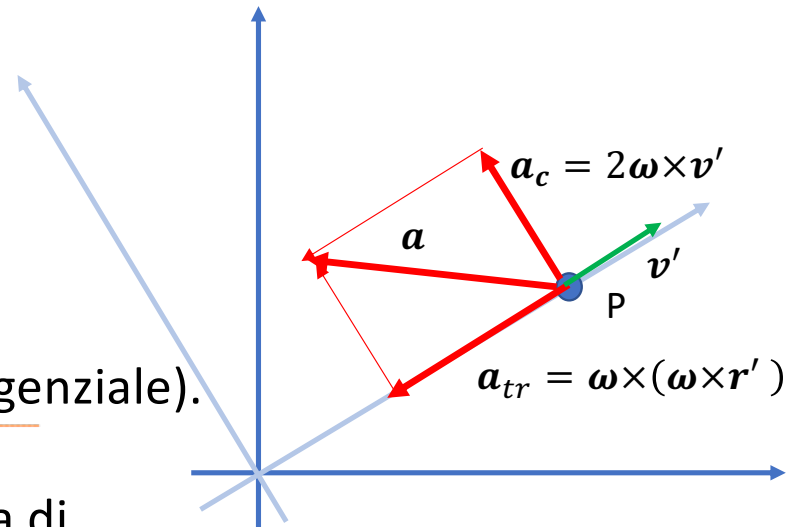
$$a_c = 2\omega \times v'$$

(la direzione di a_c è perpendicolare a v' , quindi tangenziale).

L'accelerazione del punto materiale vista dal sistema di riferimento fisso sarà quindi:

$$a = \omega \times (\omega \times r') + 2\omega \times v'$$

$$a' = 0$$



Esempio 7 - Moto di trascinamento rotatorio uniforme con moto relativo

Analizziamo infine la dinamica del sistema.

Nel sistema di riferimento inerziale, per poter muovere il punto materiale con accelerazione $\mathbf{a}$ devo applicare una forza $\mathbf{F}$ tale che

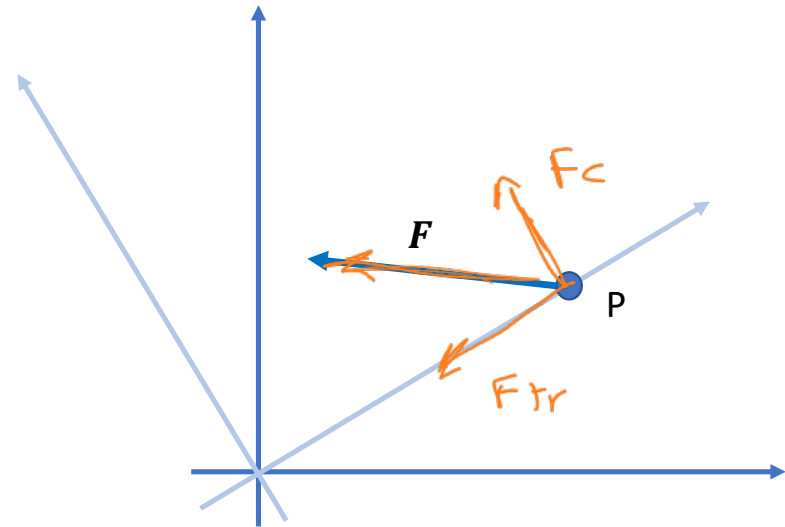
$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

Ricordando l'espressione dell'accelerazione trovata in precedenza,

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

La forza da applicare al punto sarà:

$$\mathbf{F} = m(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')$$



Esempio 7 - Moto di trascinamento rotatorio uniforme con moto relativo

Nel sistema di riferimento non inerziale

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{tr} + \mathbf{F}_c$$

Dove:

$$\mathbf{F} = m(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')$$

$$\mathbf{F}_{tr} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

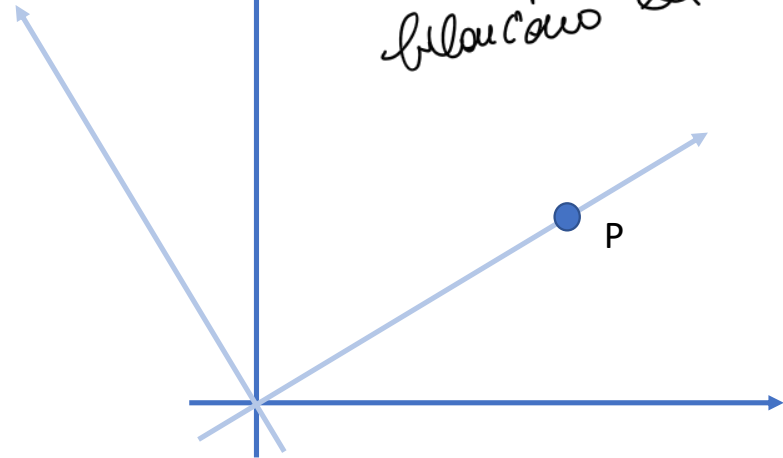
$$\mathbf{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

Risulta quindi:

$$m\mathbf{a}' = 0$$

E infatti la velocità relativa, come abbiamo visto, è costante.

vede il moto $a' = 0$ il SdR non inerz. superficie che vede delle forze apparenti che bilanciano per $F_{app} = 0$





Approfondimento: il sistema di riferimento terrestre



Approfondimento: il sistema di riferimento terrestre

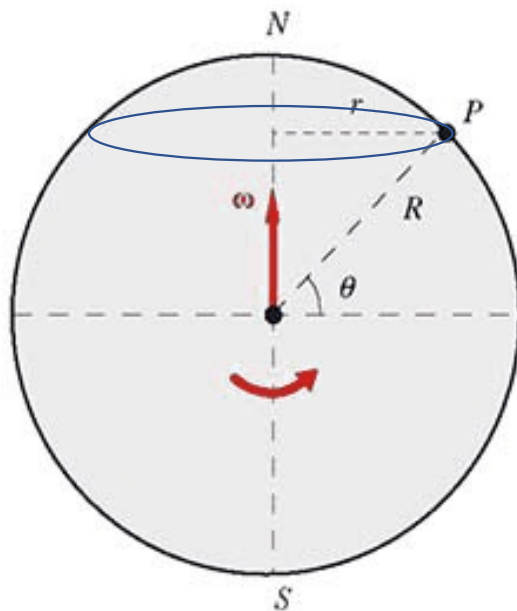


Figura 3.12

Quanto vale ω , velocità angolare della Terra?

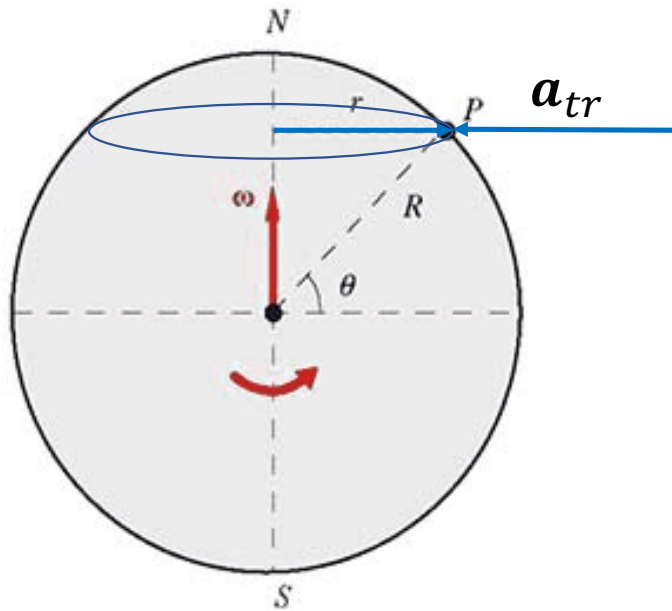
$$T = 86164 \text{ s (giorno sidereo)}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$R = 6371 \text{ km}$$

$$\mathbf{a}_{tr} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

Approfondimento: il sistema di riferimento terrestre



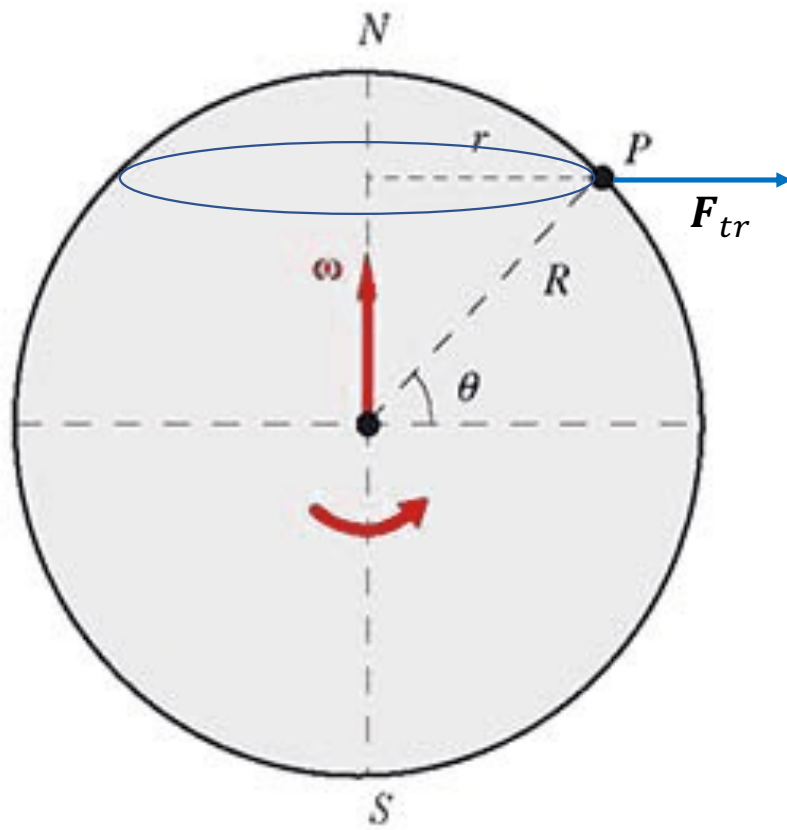
$$\mathbf{a}_{tr} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$r = R \cos \theta$$

$$a_{tr} = \omega^2 r$$

a_{tr} Accelerazione di trascinamento
- direzione centripeta (verso l'asse di rotazione)

Approfondimento: il sistema di riferimento terrestre

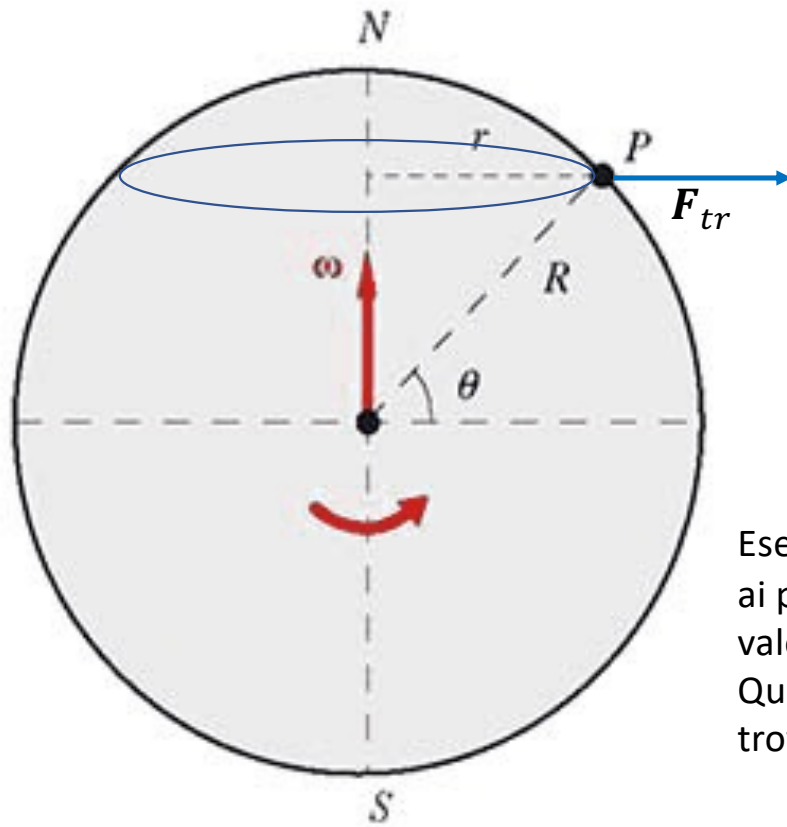


$$F_{tr} = m\omega^2 r$$

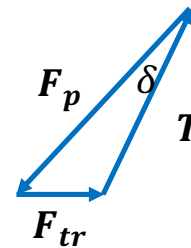
Forza di trascinamento – direzione centrifuga

Approfondimento: il sistema di riferimento terrestre

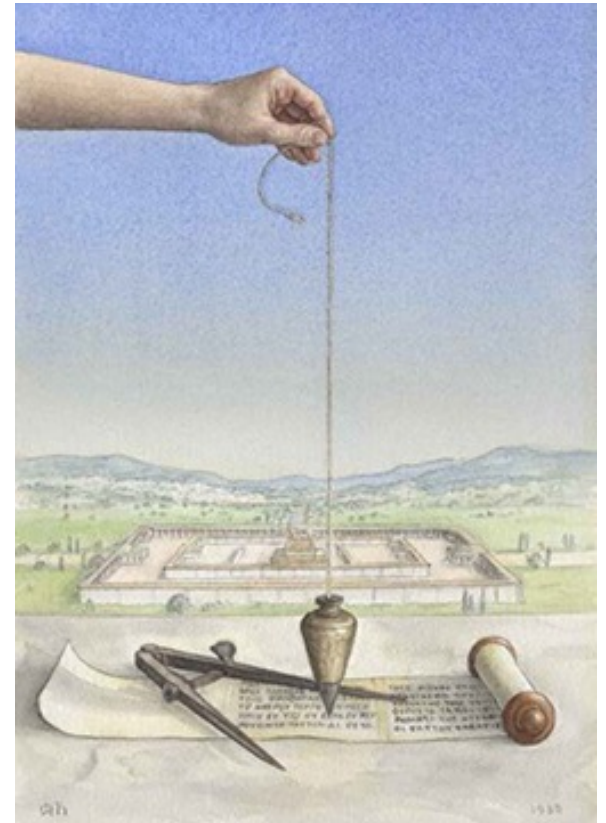
Deviazione della direzione del filo a piombo



$$\mathbf{T} + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_{tr} = 0$$



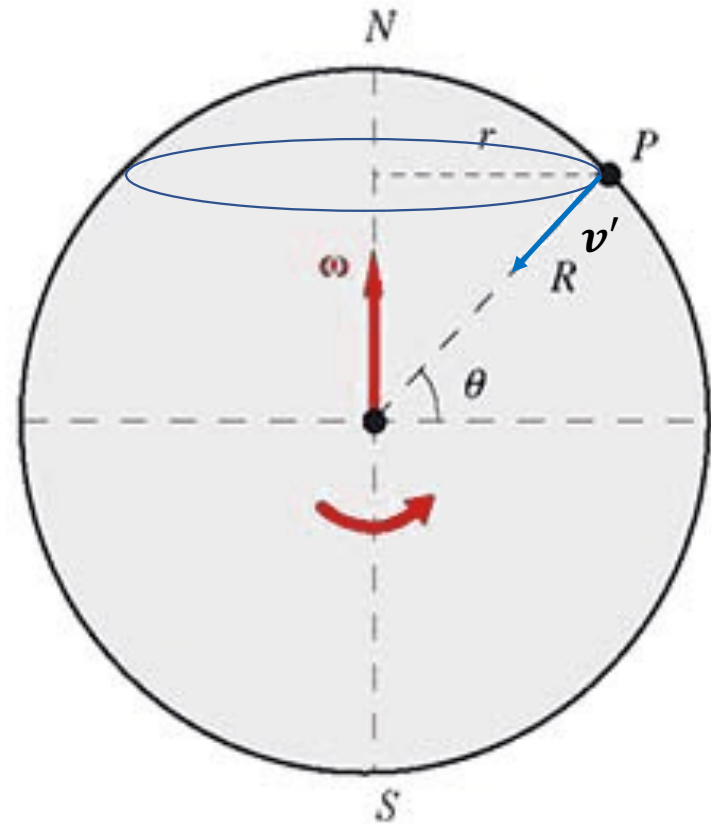
Esercizio: quanto vale la deviazione δ ai poli? E all'equatore? Qual è il suo valore massimo? Dove si verifica? Quanto vale nel luogo in cui vi trovate?



Approfondimento: il sistema di riferimento terrestre

Il moto di caduta libera, effetto dell'accelerazione di Coriolis

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$



Approfondimento: il sistema di riferimento terrestre

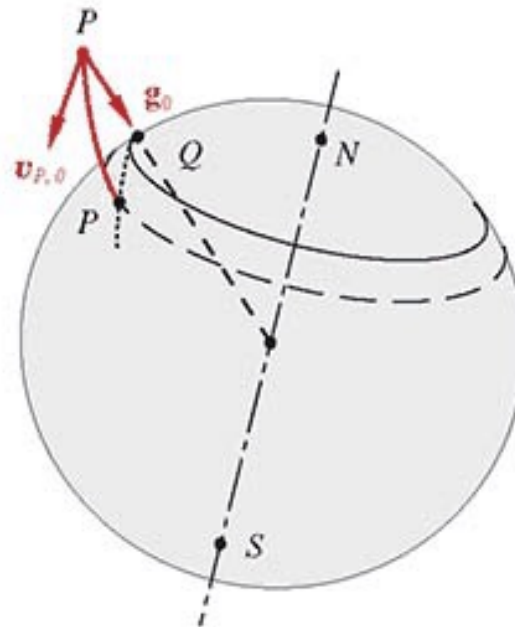


Figura 3.15

Approfondimento: il pendolo di Foucault

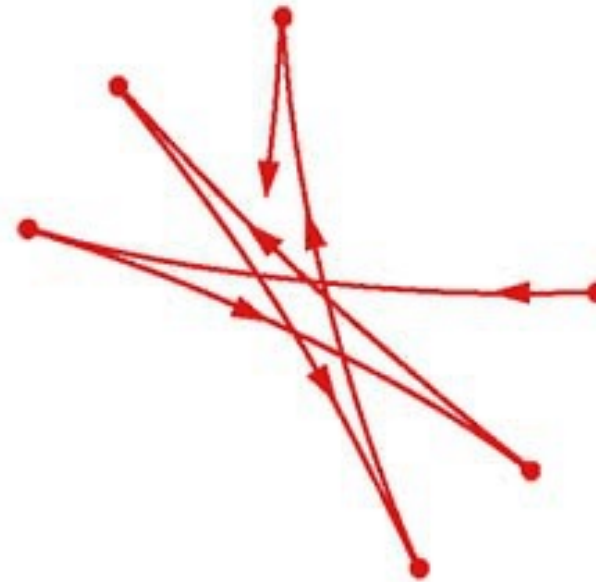
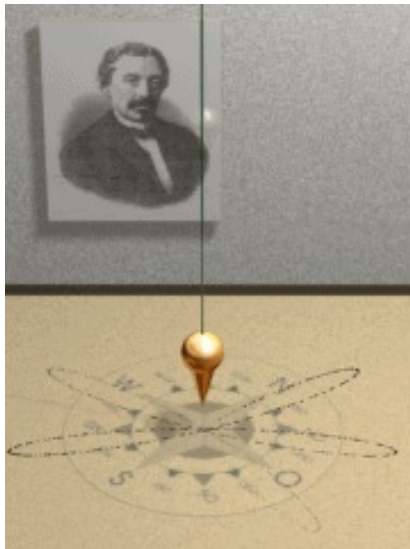


Figura 3.16



P. Mazzoldi - M. Nigro - C. Voci
Fisica Vol. I - Meccanica e termodinamica

EdiSES