

Corso di FISICA 1



Capitolo 10 – Meccanica dei fluidi

Monica Malvezzi, Università degli
Studi di Siena



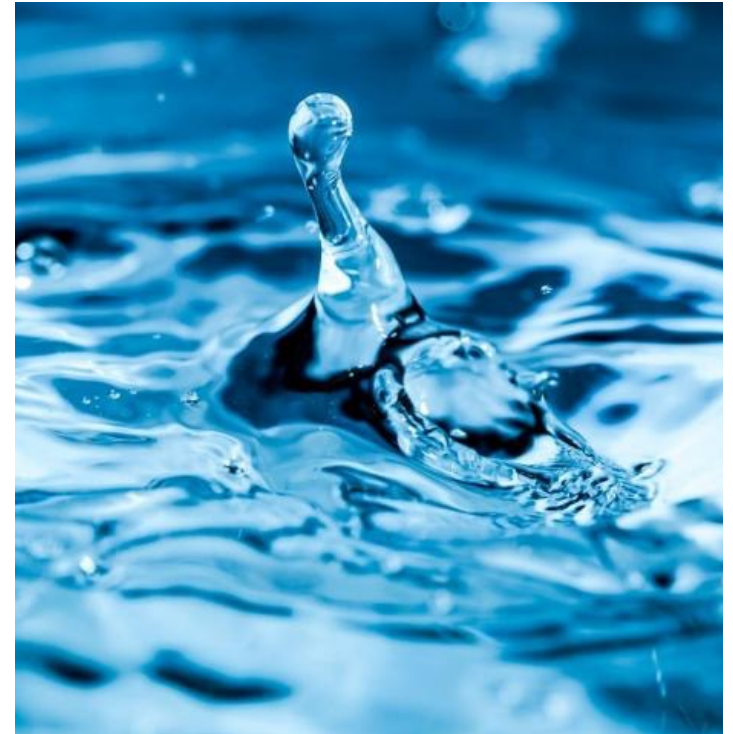
Stati della materia

- Solido
- Liquido
- Gas

Nello studio della fisica si utilizzano in prima approssimazione modelli matematici semplificati, ad esempio:

- Solido → possiamo approssimarlo come corpo rigido se le forze a cui è sottoposto sono limitate e le corrispondenti deformazioni trascurabili rispetto al moto del sistema
- Gas → gas perfetto (vedi parte di termodinamica)

In questo capitolo vedremo alcune relazioni fondamentali e alcuni risultati significativi per i liquidi.



Liquidi – ipotesi di base

- Incomprimibile: il volume occupato da una certa quantità di liquido non varia.
- Non viscoso: strati adiacenti di liquido non esercitano tra loro forze di tipo tangenziale.

Anche per i liquidi è possibile definire la densità di volume

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$



Forze

- Isoliamo un elemento di liquido di forma cubica e volume infinitesimo, dV . Per esso valgono le leggi della dinamica e in particolare il secondo principio:

$$dm \mathbf{a} = d\mathbf{F}$$

Con la definizione di densità di volume possiamo scrivere la massa come $dm = \rho dV$

$$\rho dV \mathbf{a} = d\mathbf{F}$$



Forze

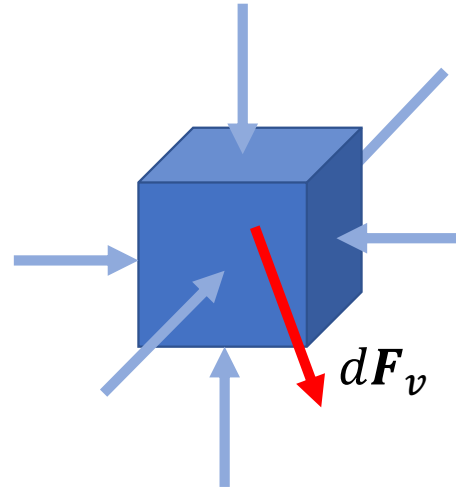
Sull'elemento agiscono due tipi di forze:

- Forze di volume: sono proporzionali al volume dell'elemento e in genere alla densità

$$d\mathbf{F}_v = \rho \mathbf{f}_v dV$$

$\mathbf{f}_v$ è una quantità vettoriale che esprime la forza per unità di massa agente sull'elemento infinitesimo

- Forze di superficie $d\mathbf{F}_s$: in condizioni stazionarie sono perpendicolari alla superficie, in condizioni dinamiche possono essere normali e tangenziali, quelle tangenziali dipendono dalla viscosità del fluido.



Pressione

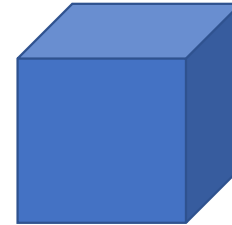
Si definisce ***pressione del fluido*** lo scalare p tale che

$$dF_s = p dS$$

$$p = \frac{dF}{dS}$$

Unità di misura più utilizzata

- Pascal $1 Pa = 1 N/m^2$
- Bar $1 Bar = 10^5 Pa$
- atmosfera $1 atm = 101325 Pa = 1.01325 Bar$



Un semplice esempio di manometro

Un manometro è uno strumento per misurare la pressione in un fluido. Un semplice manometro può essere costituito da un disco di superficie S che scorre entro un cilindro, tra la superficie del corpo e il cilindro supponiamo che l'attrito sia trascurabile. Nel cilindro è inserita una molla con costante elastica k .

Il cilindro e il disco sono immersi nel fluido. Per effetto della pressione sulla faccia del cilindro agisce una forza che in modulo è pari a

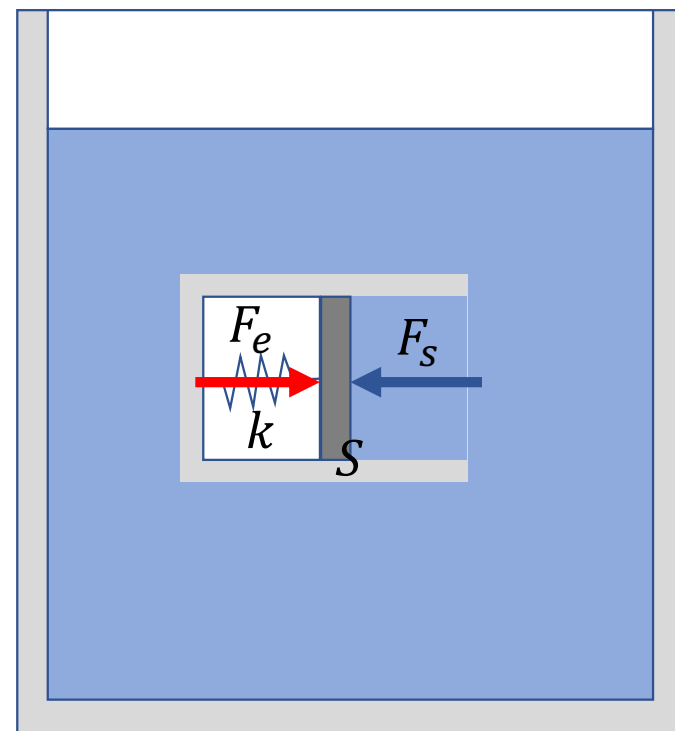
$$F_s = pS$$

Che in condizioni di equilibrio è bilanciata dalla forza elastica della molla

$$F_e = kx$$

Misurando la deformazione x della molla con un sensore di posizione, possiamo stimare la pressione nel fluido come:

$$p = \frac{k}{S} x$$



Pressione: scalare o vettore?

Analizziamo un elemento infinitesimo di forma cilindrica, con una faccia perpendicolare all'asse x individuato dal versore $\mathbf{i}$ (a sinistra) e una inclinata (a destra), indichiamo con $\mathbf{n}$ il versore ad essa perpendicolare. Il versore $\mathbf{n}$ forma un angolo α con l'asse x .

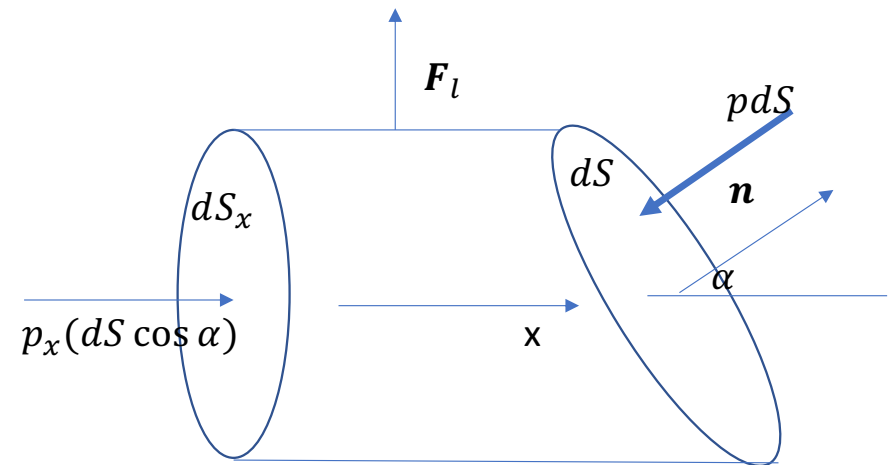
Indicando con dS l'area della superficie a destra, l'area della sezione a sinistra sarà pari a

$$dS_x = dS \cos \alpha$$

Sull'elemento agiranno le forze di superficie:

- $\mathbf{i}p_x dS_x$ sulla superficie di sinistra
- $-\mathbf{n}pdS$ sulla superficie di destra
- $\mathbf{F}_l$ sulla superficie laterale

Sull'elemento agisce anche la forza di volume $\rho \mathbf{f}_v dV$.



Pressione: scalare o vettore?

In condizioni statiche, la risultante delle forze agenti sull'elemento sarà nulla:

$$-n p dS + i p_x (dS \cos \alpha) + \mathbf{F}_l + \rho \mathbf{f}_v dV = 0$$

Proiettando in direzione x

$$-p dS \cos \alpha + p_x dS \cos \alpha + \rho f_{vx} dV = 0$$

Il volume dV può essere approssimato come:

$$dV \cong dx dS$$

Semplificando, si ottiene

$$-p + p_x + \rho f_{vx} / \cos \alpha dx = 0$$

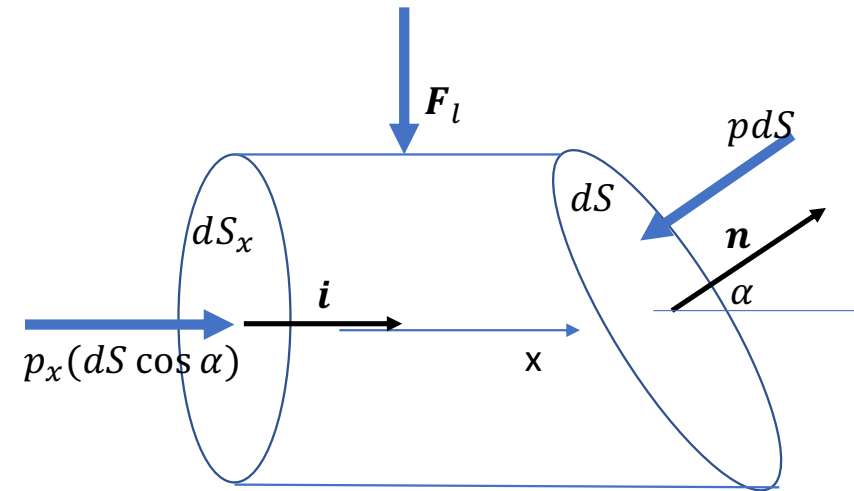
Se $dx \rightarrow 0$, il termine $\rho f_{vx} / \cos \alpha dx$ diventa trascurabile rispetto agli altri due, quindi possiamo semplificare ancora:

$$-p + p_x = 0$$

Ottenendo infine:

$$p = p_x$$

La pressione non dipende quindi dall'inclinazione della superficie, per cui possiamo rappresentarla come uno scalare.



Statica dei fluidi

Consideriamo un cilindro di dimensioni infinitesime con asse parallelo all'asse x , con superficie di base dS e lunghezza dx . Per il secondo principio della dinamica risulta

$$\rho dV \mathbf{a} = d\mathbf{F}$$

$d\mathbf{F}$ è la risultante delle forze agenti sull'elemento. Analizziamo le condizioni statiche, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e prendiamo le componenti delle forze nella direzione x :

$$p(x, y, z)dS - p(x + dx, y, z)dS + \rho f_x dV = 0$$

Sviluppando i calcoli otteniamo

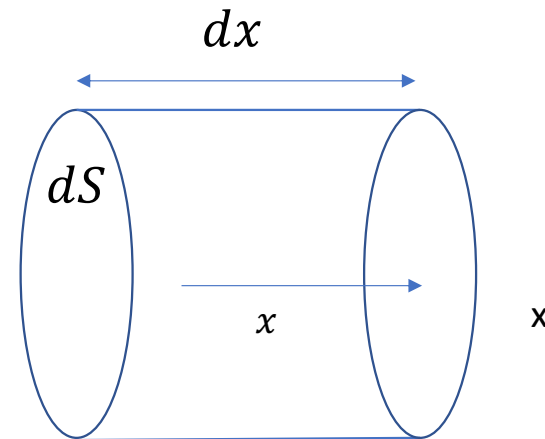
$$p(x + dx, y, z) - p(x, y, z) = \rho f_x dx$$

$$\begin{aligned} p(x + dx, y, z) - p(x, y, z) &= dp \\ dp &= \rho f_x dx \end{aligned}$$

Che possiamo scrivere, infine, come:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x$$

$$\begin{aligned} \rho dV \mathbf{a} &= d\mathbf{F} \\ \mathbf{a} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$



Statica dei fluidi

Applicando la seconda legge di Newton, in condizioni statiche, a un elemento di fluido infinitesimo cilindrico orientato come l'asse x abbiamo ottenuto:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x$$

In modo analogo, se consideriamo un elemento orientato lungo l'asse y, otterremo

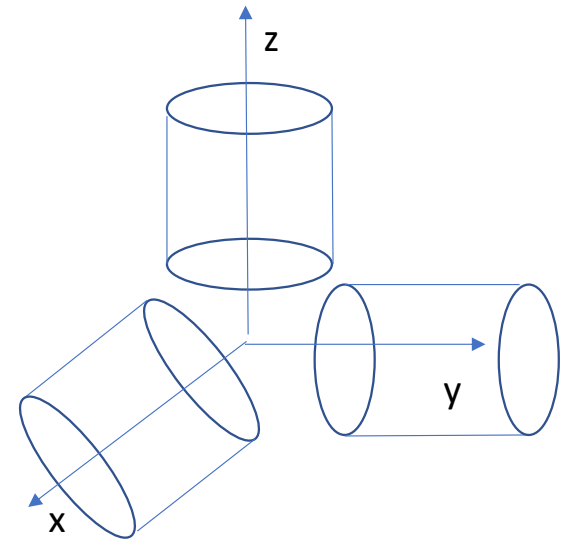
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y$$

E infine, lungo l'asse z, otterremo

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z$$

Possiamo scrivere le tre equazioni precedenti in modo più sintetico, come:

$$\text{grad}(p) = \rho \mathbf{f}_V$$



Richiami sulle forze conservative e sulla definizione di energia potenziale

Abbiamo visto che se una forza è conservativa è possibile definire una funzione energia potenziale, che dipende dalla posizione x, y, z

$$E_P(x, y, z)$$

Tale che è possibile scrivere il lavoro della forza nel percorso dal punto A al punto B come:

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -(E_P(x_B, y_B, z_B) - E_P(x_A, y_A, z_A))$$

Se consideriamo uno spostamento infinitesimo in direzione x , dx , il lavoro infinitesimo è:

$$dW_x = \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} dx = -(E_P(x + dx, y, z) - E_P(x, y, z))$$

Da cui possiamo scrivere:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{i} = F_x = -\frac{E_P(x + dx, y, z) - E_P(x, y, z)}{dx} = -\frac{\partial E_P}{\partial x}$$

Richiami sulle forze conservative e sulla definizione di energia potenziale

Data la funzione energia potenziale

$$E_P(x, y, z)$$

In ogni punto possiamo calcolare le componenti della forza tramite le sue derivate nelle rispettive direzioni:

$$F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial E_P}{\partial z}$$

Richiami sulle forze conservative e sulla definizione di energia potenziale

Ad esempio, per la forza peso, supponendo di prendere un sistema di riferimento con asse z verticale, abbiamo visto che:

$$E_P(x, y, z) = mgz$$

Le componenti cartesiane della forza sono quindi:

$$F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x} = 0$$

$$F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y} = 0$$

$$F_z = -\frac{\partial E_P}{\partial z} = -mg$$

Richiami sulle forze conservative e sulla definizione di energia potenziale

Ad esempio, per la forza elastica, supponendo che la molla sia diretta come l'asse x:

$$E_P(x, y, z) = \frac{1}{2} kx^2$$

Le componenti cartesiane della forza sono quindi:

$$F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x} = -kx$$

$$F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y} = 0$$

$$F_z = -\frac{\partial E_P}{\partial z} = 0$$

Torniamo alla statica dei fluidi

Abbiamo verificato in precedenza che la variazione della pressione nel fluido è data da:

$$\text{grad}(p) = \rho \mathbf{f}_V$$

Se la forza di volume è conservativa, possiamo definire una funzione energia potenziale

$$E_P(x, y, z)$$

Tale che:

$$\rho f_{vx} = -\frac{\partial E_P}{\partial x}$$

$$\rho f_{vy} = -\frac{\partial E_P}{\partial y}$$

$$\rho f_{vz} = -\frac{\partial E_P}{\partial z}$$

Sostituendo nell'espressione trovata in precedenza, otteniamo:

$$\text{grad}(p) = -\text{grad}(E_P)$$

Che possiamo scrivere, in componenti cartesiane, come:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial E_P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial E_P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial E_P}{\partial z}$$

$$dp = -dE_P$$

Legge di Pascal

Si definisce una superficie equipotenziale una superficie per la quale l'energia potenziale risulta costante, quindi:

$$dE_p = 0$$

Sulle superfici equipotenziale risulta:

$$dE_p = 0 \rightarrow dp = 0$$

Per un fluido in equilibrio la pressione è costante su ogni superficie equipotenziale (legge di Pascal).

Se il fluido è soggetto alla forza peso, sappiamo che $E_p = E_p(z)$ quindi le superfici equipotenziale sono definite come $z = z_{cost}$ e di conseguenza $p = p(z)$

Legge di Pascal

Se il fluido è soggetto alla forza peso, assumendo un sistema di riferimento con asse z verticale, sappiamo che

$$E_p = E_p(z)$$

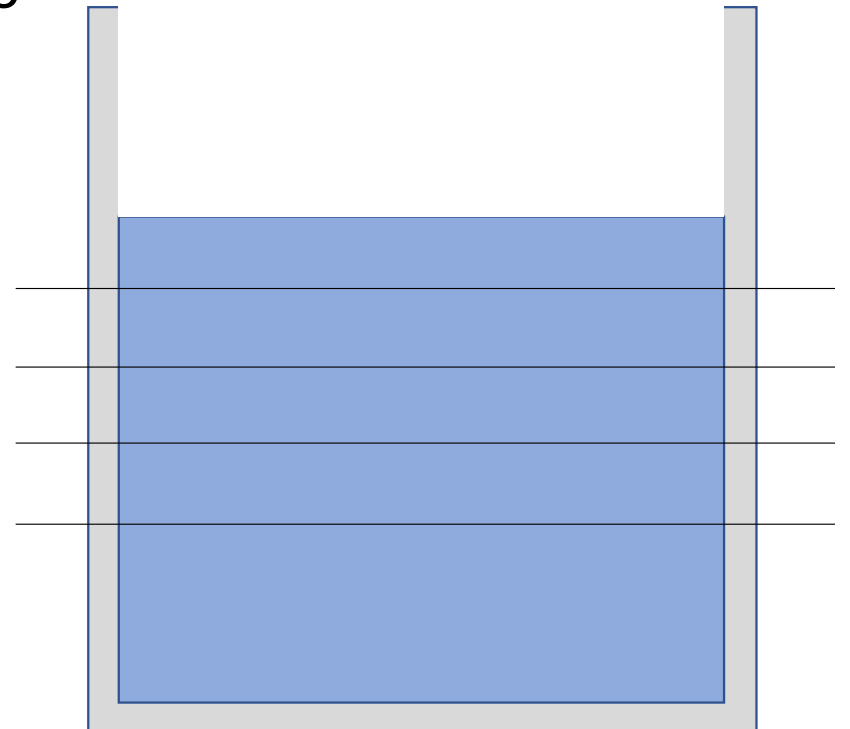
quindi le superfici equipotenziale sono definite come

$$z = z_{cost}$$

e di conseguenza

$$p = p(z)$$

La pressione in un liquido in condizioni statiche dipende solo dalla coordinata z .



Consideriamo ancora la forza peso

Come possiamo definire l'energia potenziale e la forza di volume della forza peso in un liquido? Abbiamo definito in precedenza, per un elemento infinitesimo, la forza di volume come:

$$d\mathbf{F}_v = \rho \mathbf{f}_v dV$$

Con questa definizione, risulta

$$\rho \mathbf{f}_v = \rho \mathbf{g}$$

Possiamo definire l'energia potenziale come:

$$E_p = \rho g z$$

Da cui ritroviamo, infatti:

$$0 = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$

$$0 = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$$

$$-\rho g = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

Consideriamo la forza peso

In questo caso risulta

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

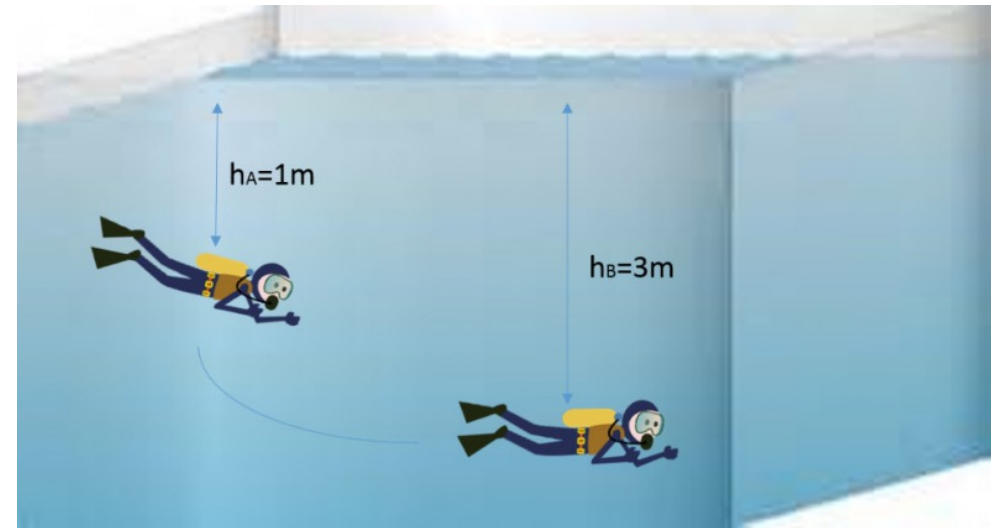
Che possiamo riscrivere come:

$$dp = -\rho g dz$$

Questo risultato è noto come legge di Stevino.

Se supponiamo che la densità del fluido sia costante:

$$\Delta p = -\rho g \Delta z$$

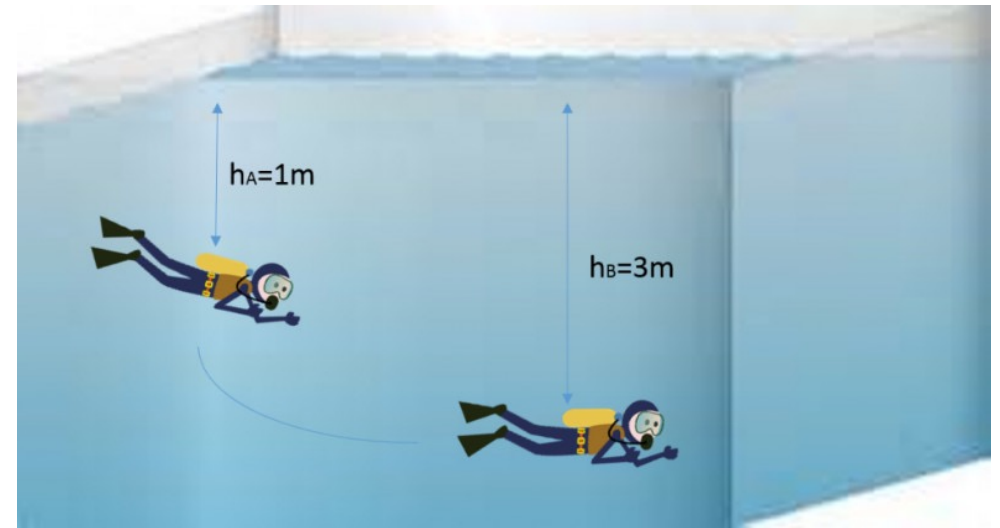


Consideriamo la forza peso

Come varia la pressione in acqua all'aumentare della profondità?

Indicando con p_0 la pressione atmosferica e con h la profondità la relazione può essere riscritta come

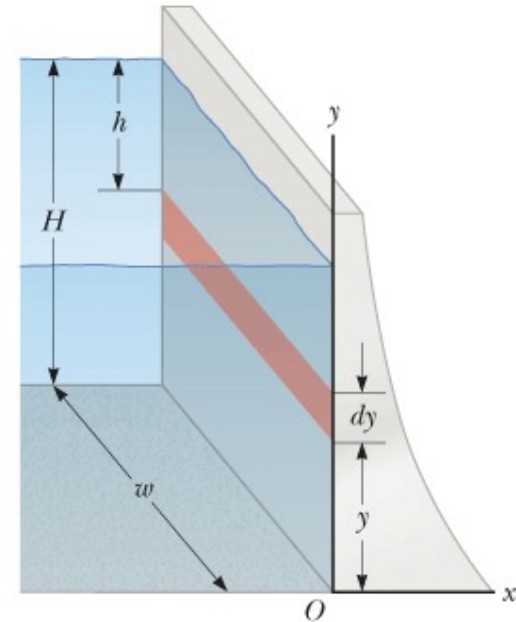
$$p = p_0 + \rho gh$$



Consideriamo la forza peso

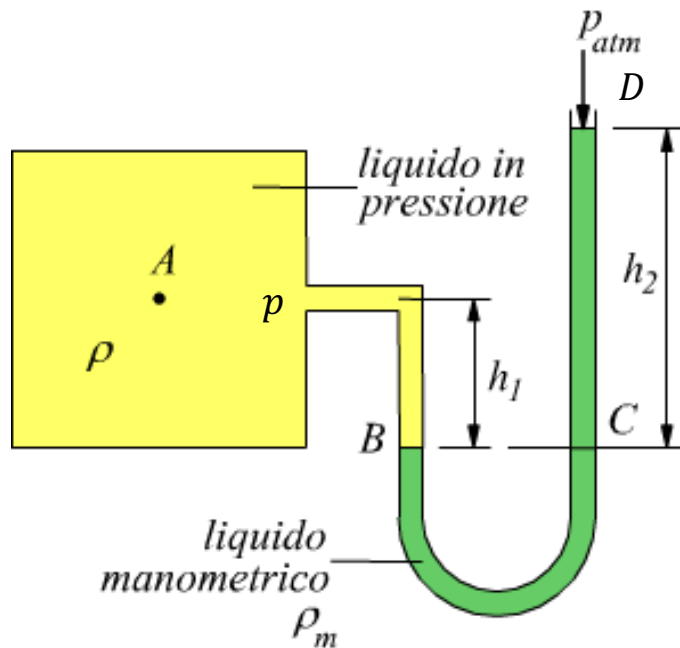
Indicando con p_0 la pressione atmosferica e con h la profondità la relazione può essere riscritta come

$$p = p_0 + \rho gh$$



Esempio: Manometro a U

Un manometro a U è uno strumento per la misura della pressione in un fluido. È costituito da un tubo a forma di U riempito di un liquido (liquido manometrico) con densità ρ_m . Uno dei due lati del tubo è aperto in aria, l'altro è collegato al sistema di cui vogliamo misurare la pressione.



Il liquido manometrico ha quota B sul lato in comunicazione con il serbatoio e quota D nel lato libero.

Osservando la figura, dato che B e C sono alla stessa quota, risulta:

$$p_B = p_C$$

Per la legge di Stevino, risulta:

$$p_B = p + \rho g h_1$$

$$p_C = p_{atm} + \rho_m g h_2$$

Sostituendo otteniamo:

$$p + \rho g h_1 = p_{atm} + \rho_m g h_2$$

Da cui otteniamo:

$$p - p_{atm} = \rho_m g h_2 - \rho g h_1$$

Misurando le altezze h_2 e h_1 del liquido manometrico e conoscendo la densità del fluido possiamo determinare la pressione nel serbatoio p .

Esempio: Barometro a mercurio

Consideriamo il sistema riportato in figura, costituito da un recipiente riempito di mercurio e da un tubo chiuso ad una estremità. Il tubo chiuso viene riempito di mercurio e quindi rovesciato nel recipiente, il mercurio scende fino a raggiungere l'altezza h .

Possiamo supporre che nella parte svuotata del tubo non sia presente aria e che la pressione sia nulla. Applicando la legge di Stevino tra il livello del recipiente e quello del tubo otteniamo:

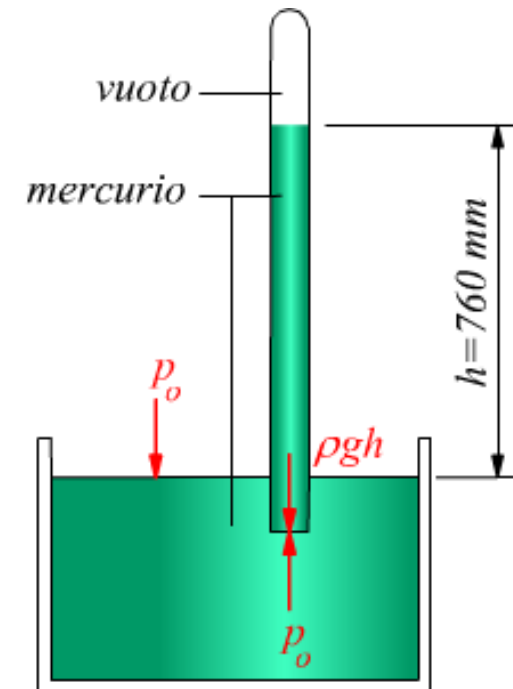
$$p_{atm} - p_0 = \rho_m g h$$

Assumendo:

$$\begin{aligned} p_0 &\approx 0 \\ \rho_m &= 13600 \text{ kg/m}^3 \\ h &= 760 \text{ mm} = 0.76 \text{ m} \\ g &= 9.81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Otteniamo:

$$p_{atm} = 1.014 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

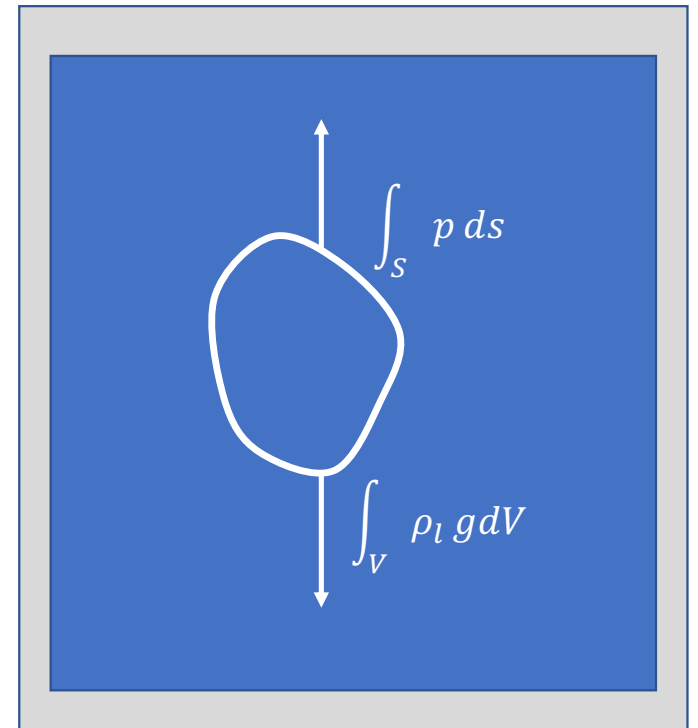


Legge di Archimede

Consideriamo una porzione di volume V e superficie S arbitrari all'interno di un liquido in condizioni statiche.

In queste condizioni, le forze di superficie e di volume devono equilibrarsi

$$\int_S p \, ds + \int_V \rho_l g \, dV = 0$$

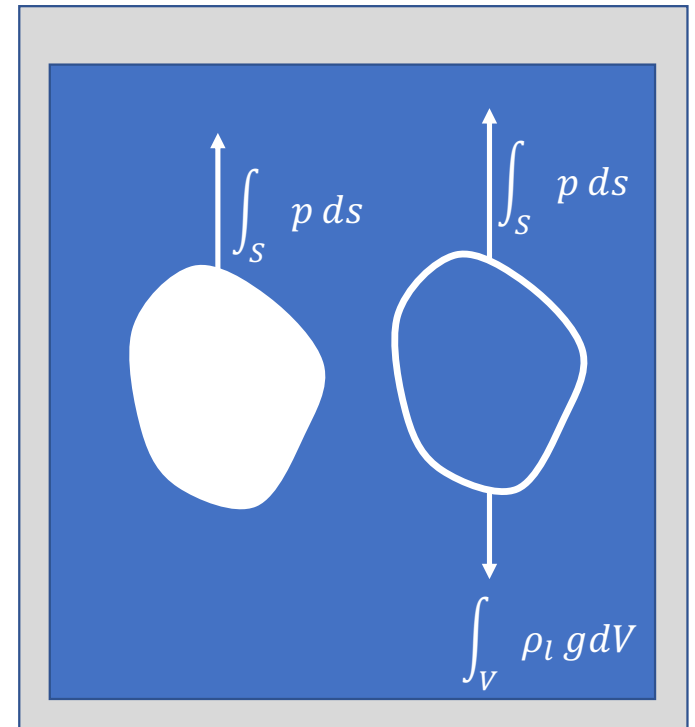


Legge di Archimede

Se elimino la forza di volume, ad esempio svuotando la superficie, sul volume rimangono comunque le forze di superficie, che per la legge di Stevino dipendono solo dalla quota.

$$\int_S p \, ds = - \int_V \rho_l g dV$$

Il corpo non è più in equilibrio e riceve una spinta verso l'alto pari alla forza peso della quantità di liquido che è stato eliminato.



Legge di Archimede

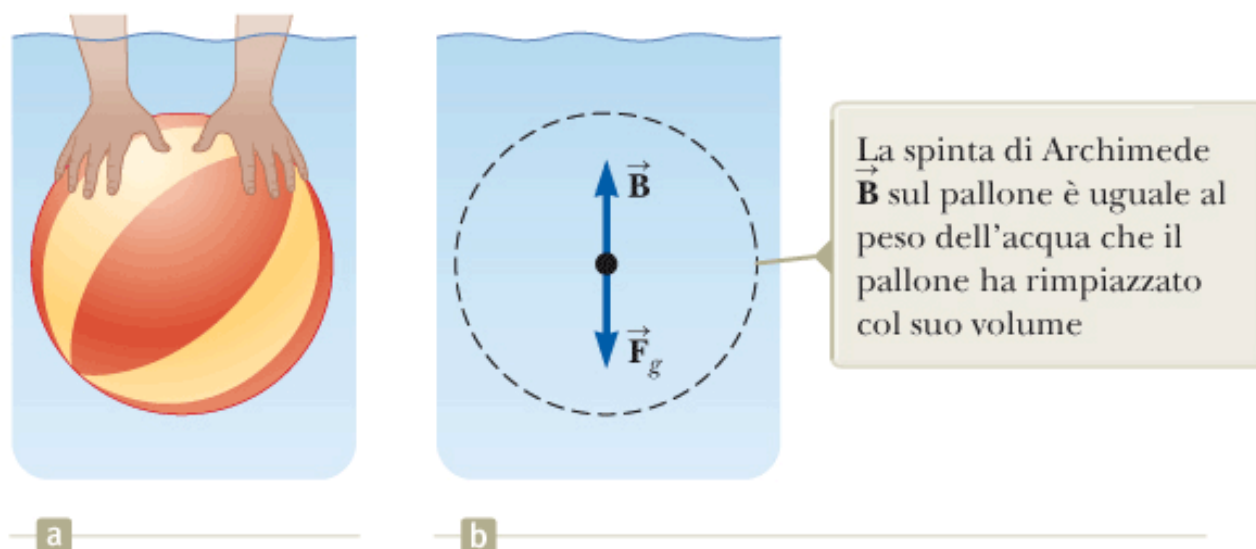
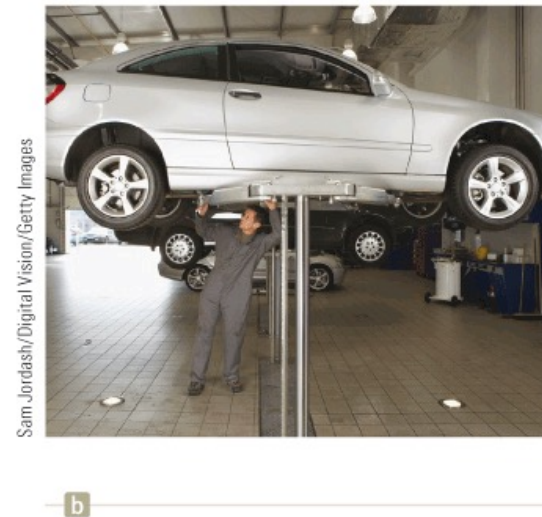
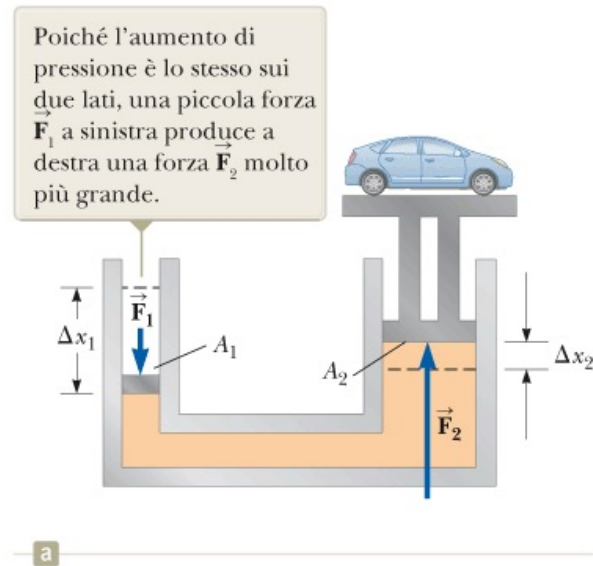


Figura 14.7 (a) Un nuotatore spinge un pallone da spiaggia sotto l'acqua. (b) Le forze sul volume di acqua pari a quello occupato dal pallone da spiaggia.

Pressa idraulica

Figura 14.4 (a) Schema di una pressa idraulica. (b) Un veicolo in riparazione in una officina meccanica sostenuto da un elevatore idraulico.



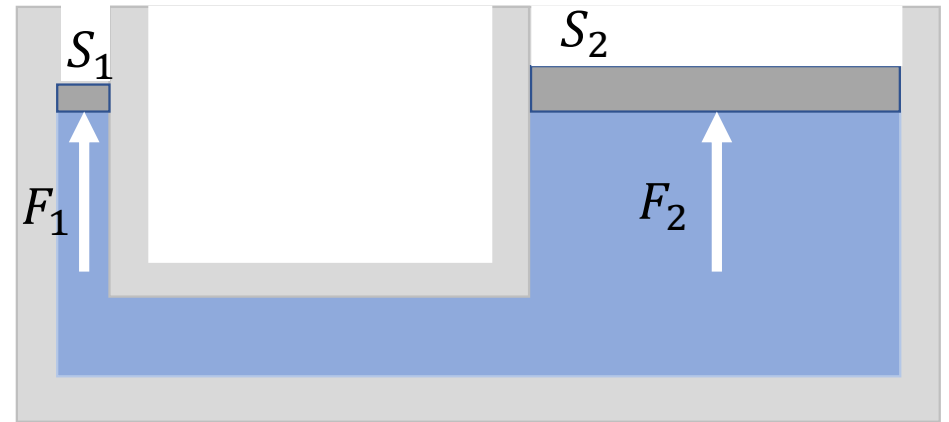
Pressa idraulica

$$F_1 = p_1 S_1$$

$$F_2 = p_2 S_2$$

$$p_2 - p_1 = \rho g(h_2 - h_1) \approx 0$$

$$p_1 \approx p_2 = p$$



Paradosso idrostatico

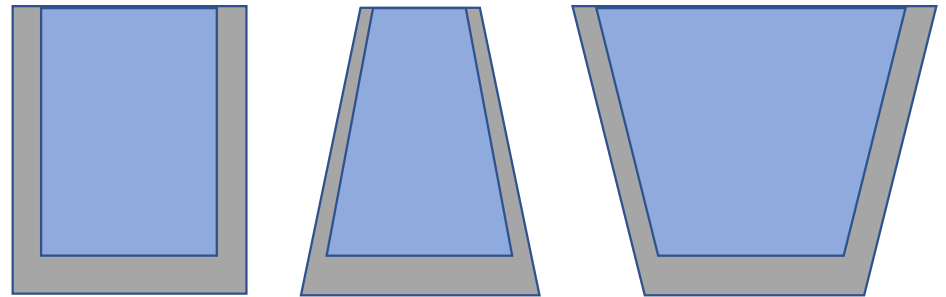
Consideriamo tre recipient con forme diverse ma la stessa superficie di base e lo stesso livello di liquido. Quanto vale, nei tre casi, la forza che agisce sul fondo del recipiente?

Per la legge di Stevino risulta:

- $p = p_0 + \rho g h$

Per cui in tutti e tre i casi risulta:

- $F = \rho g h$



Paradosso idrostatico

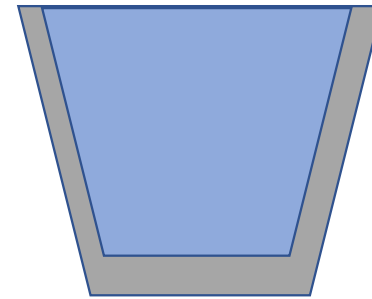
- Ma la forza peso totale è diversa, dato che i volumi dei recipienti sono diversi! Come può il sistema rimanere in equilibrio?

Sulle superfici laterali la pressione ha una componente in direzione verticale

$$dF_l = \frac{\rho g z l dz}{\cos \alpha}$$

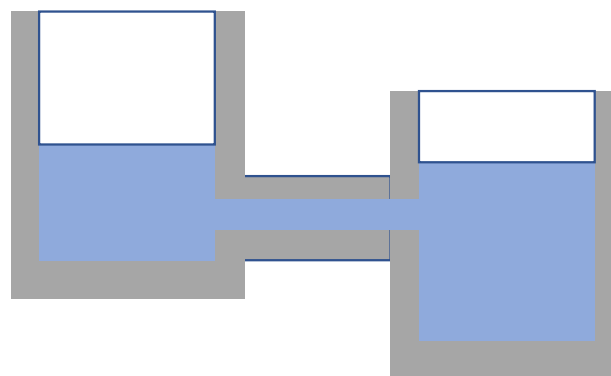
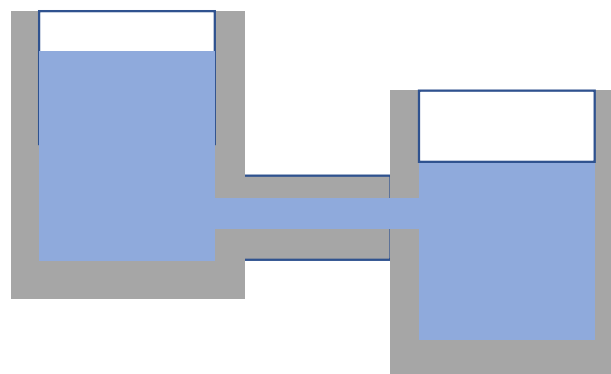
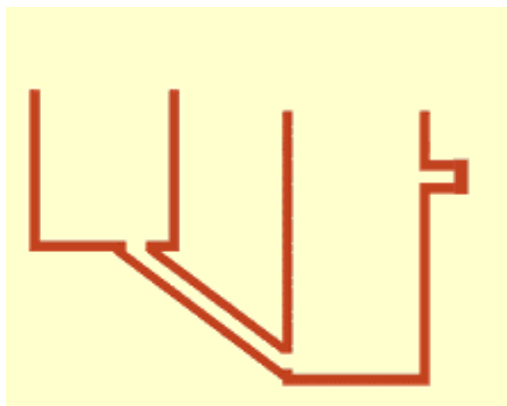
$$dF_z = dF_l \sin \alpha$$

$$F_z = \int_0^h \rho g z l \tan \alpha dz = \rho g l h^2 \tan \alpha$$



Vasi comunicanti

Il principio dei vasi comunicanti (conseguenza della legge di Stevino) è il principio fisico secondo il quale un liquido contenuto in due o più contenitori comunicanti tra loro, in presenza di gravità, raggiunge lo stesso livello originando un'unica superficie equipotenziale.



Vasi comunicanti-liquidi con diversa densita`

Consideriamo due vasi comunicanti riempiti con liquidi con densità diverse. Per la legge di Stevino, al livello di p_1 risulta:

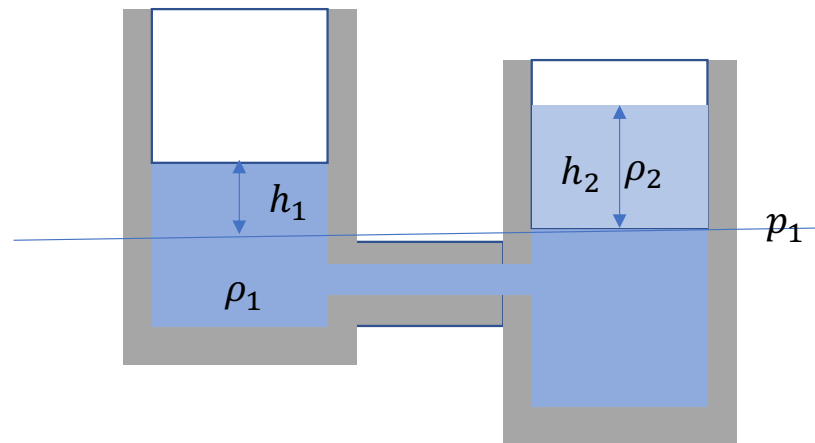
$$p_1 = p_0 + \rho_1 g h_1$$

$$p_1 = p_0 + \rho_2 g h_2$$

Da cui possiamo ottenere:

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}$$



Cilindro immerso in due fluidi con diversa densità

In condizioni di equilibrio, la forza peso del corpo è bilanciata dalla spinta di Archimede dei due fluidi:

$$F_p = Sh\rho g$$

$$F_{A1} = Sh_1\rho_1 g$$

$$F_{A2} = Sh_2\rho_2 g$$

Otteniamo quindi

$$Sh_1\rho_1 g + Sh_2\rho_2 g = Sh\rho g$$

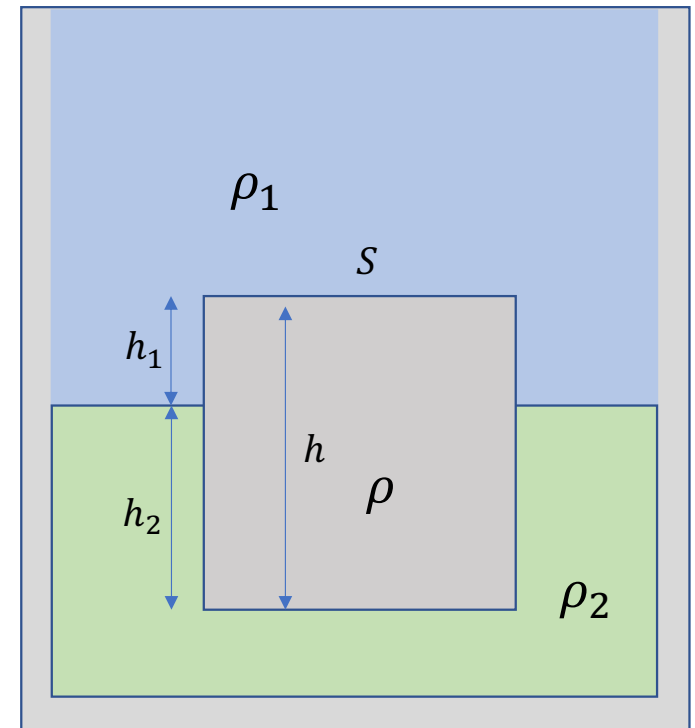
Sviluppiamo i calcoli

$$\frac{\rho_1 h_1}{h} + \frac{\rho_2 h_2}{h} = \rho$$

$$\frac{\rho_1(h - h_2)}{h} + \frac{\rho_2 h_2}{h} = \rho$$

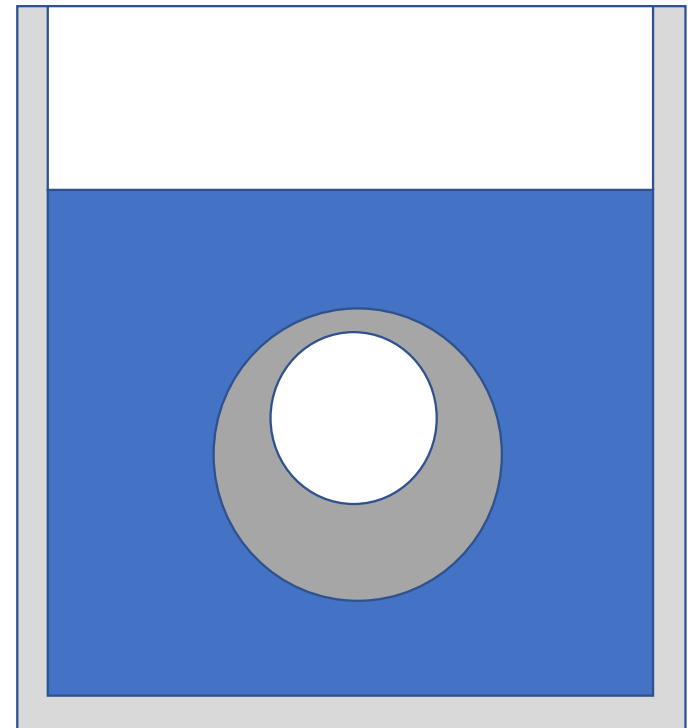
Il livello dell'oggetto nel fluido è tale da soddisfare la relazione:

$$\frac{h_2}{h} = \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1 - \rho_2}$$



Sfera cava immersa in un fluido

Noto densità del materiale ρ_m e del liquido ρ_l e il raggio esterno R della sfera, vogliamo trovare il raggio della cavità e la posizione del centro affinché il sistema rimanga in equilibrio all'interno del fluido



Sfera cava immersa in un fluido

All'equilibrio, la forza peso è bilanciata dalla forza di Archimede. Considerando le componenti in direzione verticale si ottiene:

$$F_p = -\frac{4}{3}\rho_m(R^3 - r^3)g\pi$$

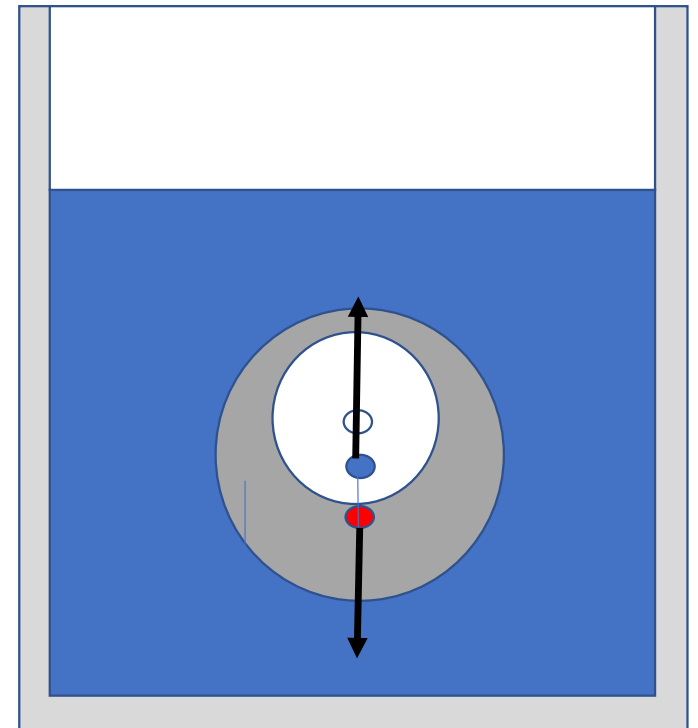
$$F_a = \frac{4}{3}\rho_l R^3 g\pi$$

$$-\frac{4}{3}\rho_m(R^3 - r^3)g\pi + \frac{4}{3}\rho_l R^3 g\pi = 0$$

$$\rho_m(R^3 - r^3) = \rho_l R^3$$

$$(\rho_m - \rho_l)R^3 = \rho_m r^3$$

+



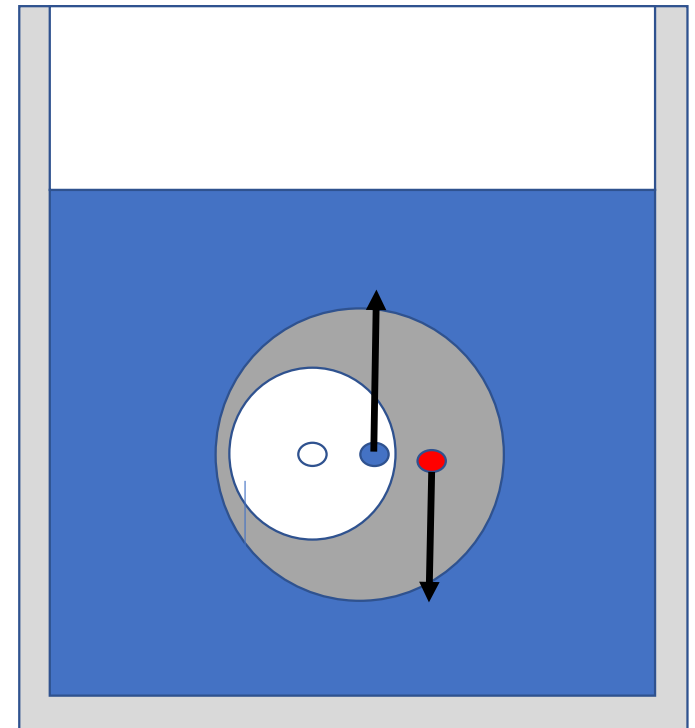
Sfera cava immersa in un fluido

Quale sarà la posizione del centro della cavità affinché il sistema rimanga in equilibrio?

La spinta di Archimede è applicata nel centro di massa del liquido spostato, quindi nel centro della sfera di raggio R .

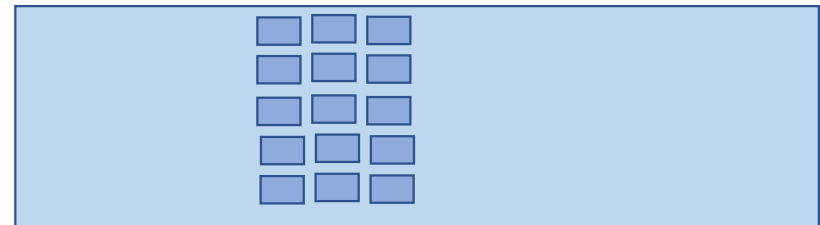
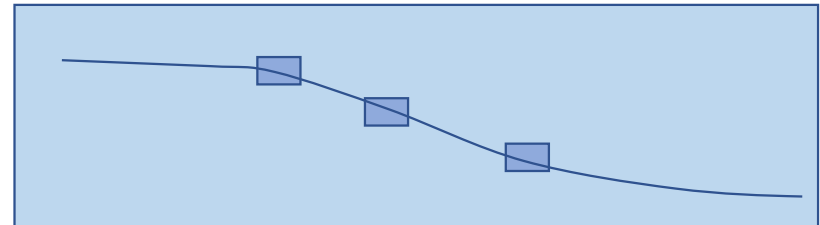
La forza peso è applicata nel centro di massa della sfera cava.

Affinché le due forze abbiano momento nullo, il centro della sfera e il centro di massa devono essere allineati lungo la direzione verticale.



Fluidi in movimento (fluidodinamica)

- Fenomeno molto complesso, ipotesi semplificative
- Metodo lagrangiano
- Metodo euleriano

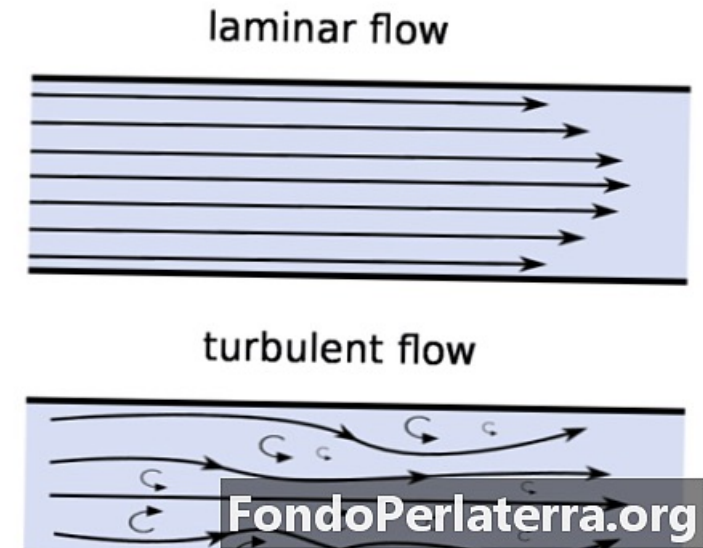


Fluidi in movimento (fluidodinamica)

Fenomeno molto complesso, ipotesi
semplificative

1 Moto laminare: il moto del fluido avviene con scorrimento di strati infinitesimi gli uni sugli altri senza alcun tipo di rimescolamento di fluido, neanche su scala microscopica. La velocità del fluido in ogni punto non cambia nel tempo.

- Si contrappone al moto turbolento



Fluidi in movimento (fluidodinamica)



Andy Sacks/Stone/Getty Images

Figura 14.13 Flusso laminare che avvolge un'automobile durante una prova nella galleria del vento.



© Cengage Learning/Charles D. Winters

Figura 14.14 I gas caldi di una sigaretta resi visibili dalle particelle di fumo. Il fumo prima segue un flusso laminare e poi entra in regime di turbolenza.

Fluidi in movimento (fluidodinamica)

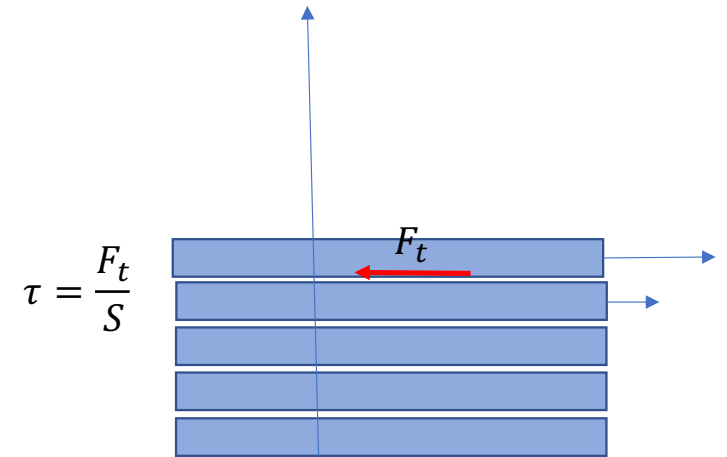
- 2 Fluido incompressibile
- Densità approssimativamente costante, il volume di una quantità definita di liquido è costante
- Tutti i fluidi reali, anche i liquidi, soggetti a certi valori di pressione sono comprimibili.

Fluidi in movimento (fluidodinamica)

- 3 flusso non viscoso

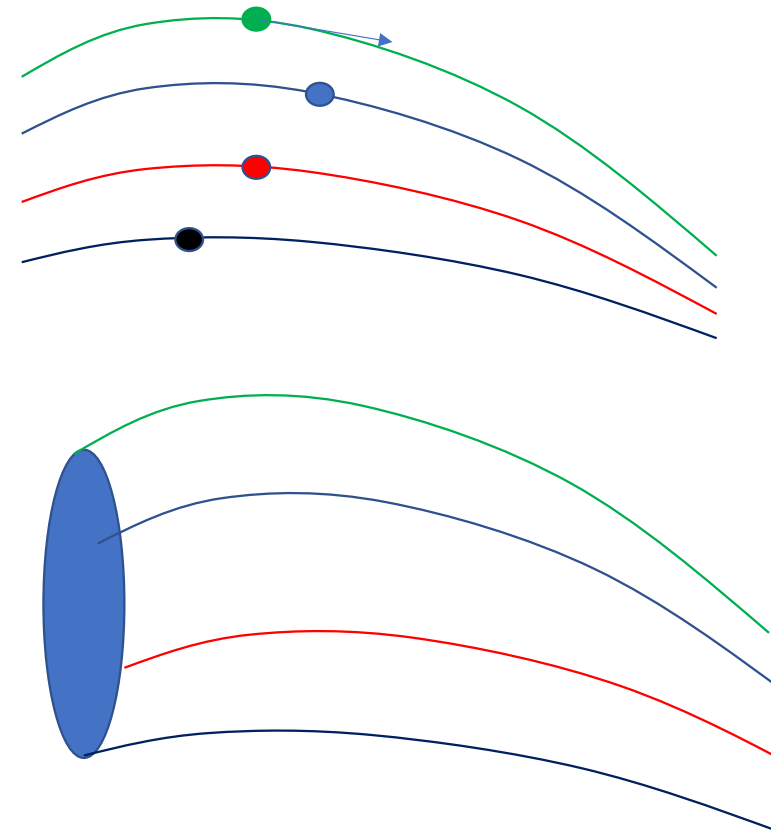
La viscosità è la capacità di un fluido di opporsi allo scorrimento lungo una superficie

$$\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial y}$$



Fluidi in movimento (fluidodinamica)

- La traiettoria di una generica particella di fluido prende il nome di linea di flusso.
- Istante per istante la velocità di ogni particella è tangente alla linea di flusso
- Le linee di flusso non si intersecano tra loro
- Posso definire un **tubo di flusso**



Fluidi in movimento (fluidodinamica)

$$\Delta x = v\Delta t$$

Se tutte le particelle si muovono alla stessa velocità v

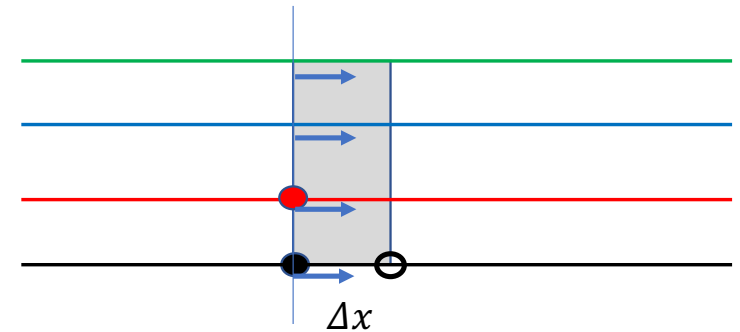
$$\Delta V = A\Delta x = Av\Delta t$$

$$Av = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = Q$$

Q è la portata volumetrica

$$\Delta V = Av_m\Delta t$$

$$Q = v_mA$$



Fluidi in movimento (fluidodinamica)

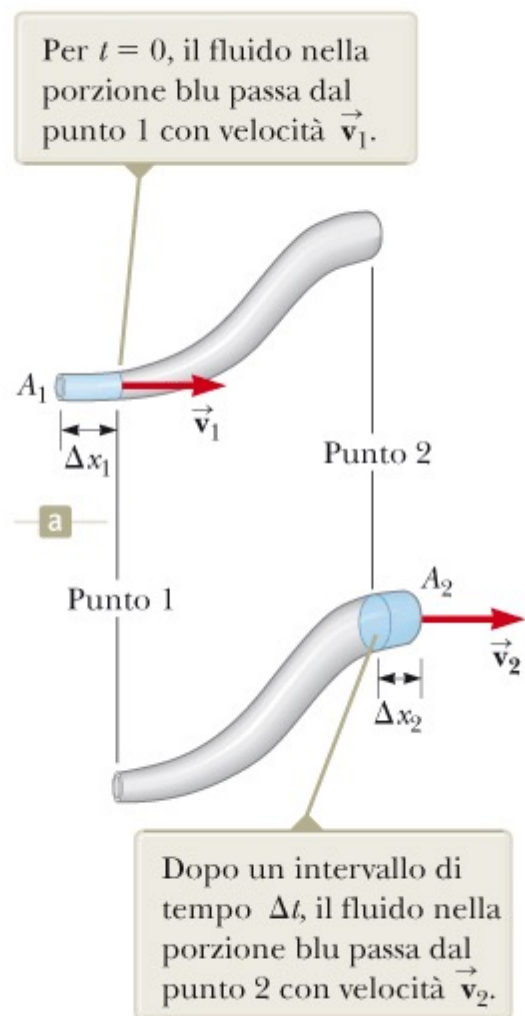


Figura 14.16 Un fluido in regime stazionario fluisce attraverso un tubo a sezione variabile. (a) Per $t = 0$, la piccola porzione di fluido in blu attraversa la sezione A_1 . (b) Dopo un intervallo di tempo Δt , la porzione di fluido in blu attraversa la sezione A_2 dopo essersi spostato.

Fluidi in movimento (fluidodinamica)

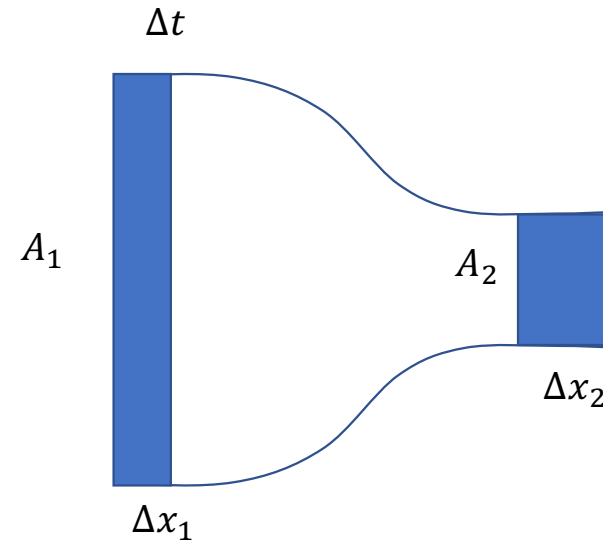
$$A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2 = \Delta V$$

$$A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$$

$A_1 v_1 = A_2 v_2$ equazione di continuita`

$Av = Q = \text{costante}$ portata
volumetrica

- Unita` di misura m^3/s



Fluidi in movimento (fluidodinamica)

Se la densita` del liquido e` costante

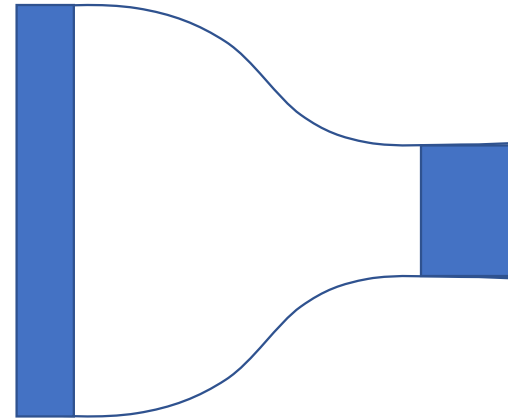
$$\rho = \frac{dm}{dV} = \text{costante}$$

Anche

$\rho A v = Q_m = \text{costante}$ portata di massa

$$Q_m = \rho Q$$

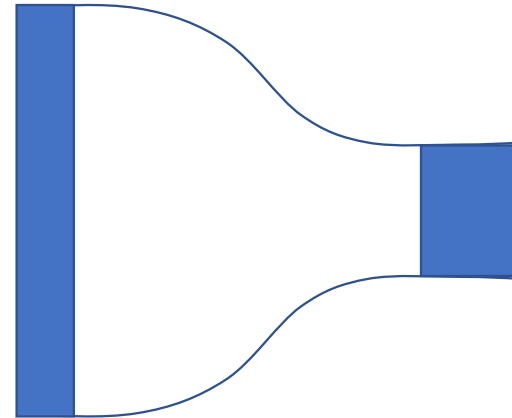
Unita` di misura kg/s



Fluidi in movimento (fluidodinamica)



Figura 14.17 La velocità dell'acqua che esce da un tubo aumenta quando, con il pollice, si riduce l'apertura di uscita.



Esempio

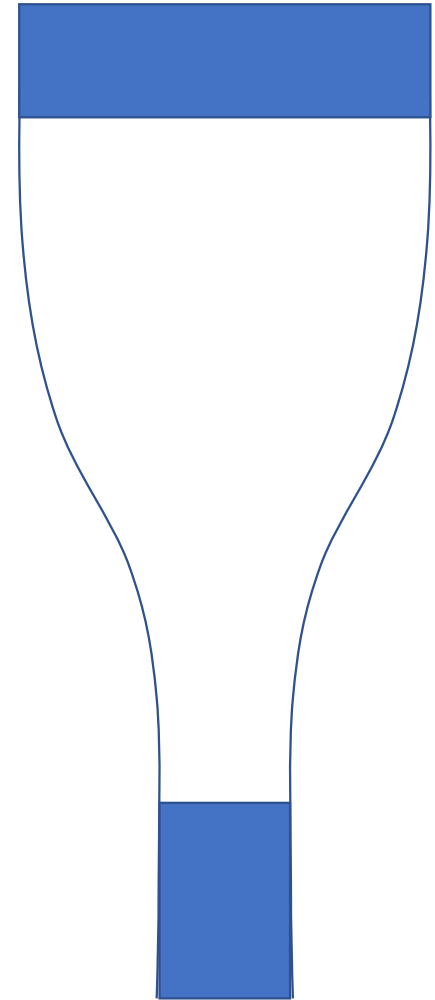
Il flusso in uscita da un rubinetto si restringe dalla sezione iniziale $A_0 = 1.2 \text{ cm}^2$ alla sezione $A_1 = 0.35 \text{ cm}^2$ in un'altezza $h = 45 \text{ mm}$. Qual è la portata di acqua che esce dal rubinetto?

Per l'equazione di continuità

$$A_0 v_0 = A_1 v_1$$

L'acqua che esce dal rubinetto è soggetta alla sola forza peso, quindi

$$v_1^2 = v_0^2 + 2gh$$



Esempio

Sostituisco e risolvo

$$v_1^2 = v_0^2 + 2gh$$

$$\begin{aligned} A_0^2 v_0^2 &= A_1^2 (v_0^2 + 2gh) \\ (A_0^2 - A_1^2) v_0^2 &= 2A_1^2 gh \end{aligned}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2A_1^2}{(A_0^2 - A_1^2)} gh}$$

Calcolato v_0 posso calcolare facilmente la portata $Q = v_0 A_0$

Equazione di Bernoulli

In condizioni di quiete abbiamo visto che

$$dp = -\rho g dz$$

(legge di Stevino)

Se supponiamo che la densità sia costante

$$\Delta p + \rho g \Delta z = 0$$

$$(p_2 - p_1) + \rho g(z_2 - z_1) = 0$$

$$p_2 + \rho g z_2 = p_1 + \rho g z_1 = \textit{costante}$$

Equazione di Bernoulli

In condizioni di moto dobbiamo tener conto anche dell'energia cinetica.

Il risultato che otteniamo e' noto come equazione di Bernoulli

$$p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2$$
$$L = \Delta E_k$$

In condizioni di quiete

$$p_2 + \rho g z_2 = p_1 + \rho g z_1 = \text{costante}$$

Definizioni

Condizioni di quiete $\rightarrow v = 0$

Condizioni stazionarie $\rightarrow v \neq 0$, ma l'energia cinetica non varia nel tempo

Esempio: tubo di venturi

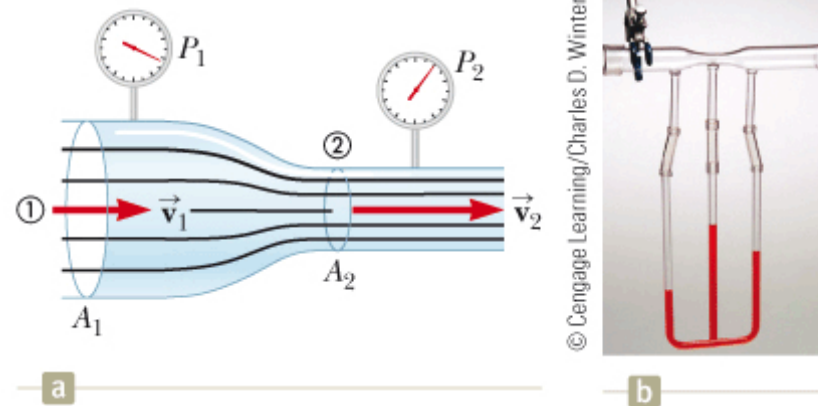


Figura 14.19 (Esempio 14.8) (a) La pressione P_1 è maggiore della pressione P_2 poiché $v_1 < v_2$. Questo strumento può essere usato per misurare la velocità del flusso di fluido. (b) In alto in figura si osserva un tubo di Venturi. Si nota che il livello del fluido nella colonna di mezzo è più elevato; ciò dimostra che, in cima alla colonna, dove il tubo Venturi è più stretto, la pressione è minore.

Teorema di Torricelli

Equazione di Bernoulli

$$p_0 + \rho g z_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 = p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

Equazione di continuità del moto

$$v_0 S_0 = v_1 S_1$$

Ipotesi

$$S_0 \gg S_1$$

$$v_0 \cong 0$$

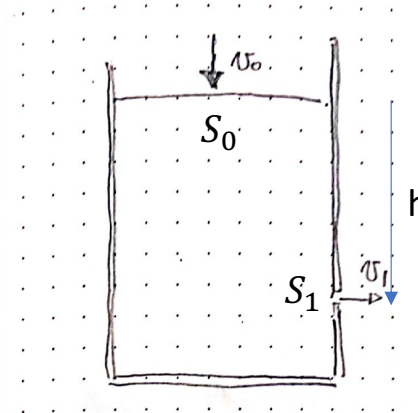
$$p_1 = p_0 = p_{atm}$$

Sostituendo si ottiene

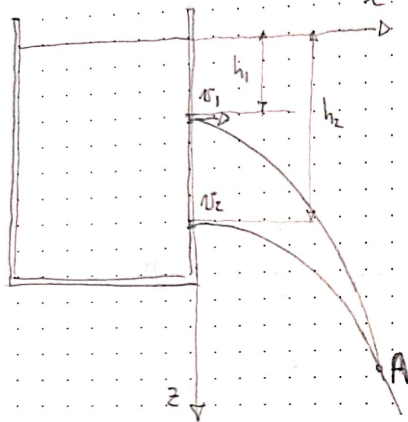
$$\rho g z_0 = \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

Da cui è possibile ricavare

$$v_1 = \sqrt{2g(z_0 - z_1)} = \sqrt{2gh}$$



Esempio di applicazione del teorema di Torricelli



$$v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

$$v_2 = \sqrt{2gh_2}$$

$$z = \frac{g}{2v_1^2} x^2 + h_1$$

$$z = \frac{g}{2v_2^2} x^2 + h_2$$

1)

$$\begin{cases} z = \frac{g}{2v_1^2} x^2 + h_1 \\ z = \frac{g}{2v_2^2} x^2 + h_2 \end{cases}$$

$$\frac{g}{2} \left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2} \right) x^2 = h_1 - h_2$$

$$\frac{g}{2} \left(\frac{1}{2gh_1} - \frac{1}{2gh_2} \right) x^2 = h_1 - h_2$$

$$\frac{h_1 - h_2}{4h_1h_2} x^2 = h_1 - h_2$$

$$x^2 = 4h_1h_2 \quad x_A = 2\sqrt{h_1h_2}$$

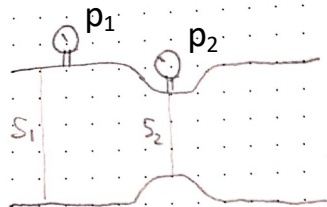
$$z_A = \frac{g}{2v_1^2} \cdot 4h_1h_2 + h_1 =$$

$$= \frac{g}{4gh_1} \cdot 4h_1h_2 + h_1 = h_1h_2$$

+

Tubo di Venturi

ESEMPIO - TUBO DI VENTURI



$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = Q$$

$$v_1 = \frac{Q}{S_1} \quad v_2 = \frac{Q}{S_2}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

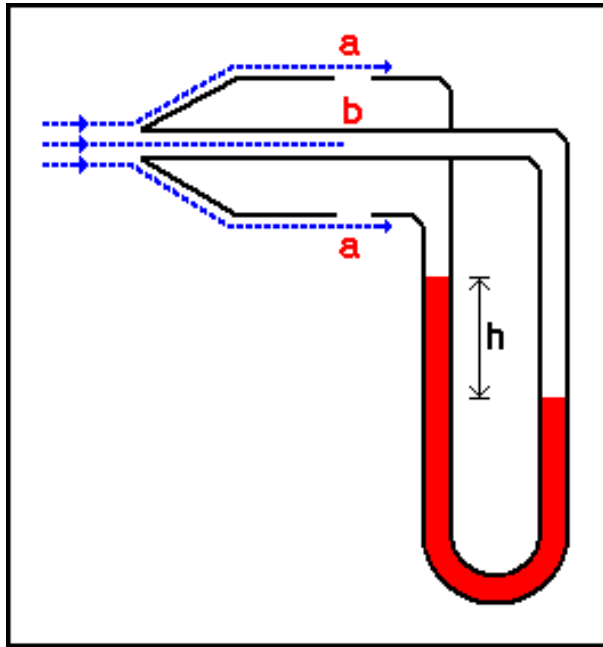
$$= \frac{1}{2} \rho Q^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \rho Q^2 \left(\frac{S_1^2 - S_2^2}{S_1^2 S_2^2} \right)$$

MISURANDO $\Delta p = p_2 - p_1$ POSSO CALCOLARE LA PORTATA COME

$$Q = \sqrt{\frac{2 S_1^2 S_2^2}{\rho (S_1^2 - S_2^2)} (p_1 - p_2)}$$

Tubo di Pitot



$$p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2$$

$$v_A = v = \sqrt{\frac{2(p_B - p_A)}{\rho}}$$

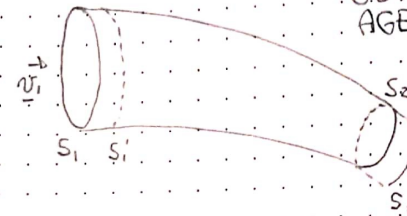
Se utilizzo un manometro a U per misurare la differenza di pressione...

$$p_B - p_A = \rho_l g h$$

$$v = \sqrt{2gh\rho_l/\rho}$$

Quantita' di moto

QUANTITA' DI
MOTO



QUAL È LA RISULTANTE
DELLE FORZE (DI VOLUME
E DI SUPERFICIE)
AGENTI SU UNA PORZIONE
(TUBO DI
FLUSSO) GENERICA?

$$\frac{dP}{dt} = R^{(e)}$$

QUANTITA' DI MOTO VARIANZA IN UN TEMPO dt

$$P_{in} = \int dm \underline{v}_1 = \rho S_1 v_1 dt \underline{v}_1 \quad \text{DEL FLUIDO CHE ENTRA NEL TUBO}$$

$$P_{out} = \int \rho dV \underline{v}_2 = \rho S_2 v_2 dt \underline{v}_2 \quad \text{DEL FLUIDO CHE ESCE DAL TUBO}$$

IN UN TEMPO dt

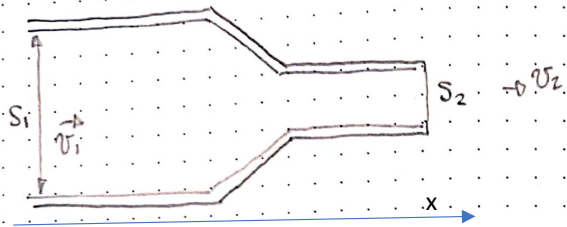
$$\Delta P = P_{out} - P_{in} = \rho Q dt (\underline{v}_2 - \underline{v}_1)$$

$$\frac{dP}{dt} = \rho Q (\underline{v}_2 - \underline{v}_1)$$

$$\frac{dP}{dt} = R^{(e)}$$

$$R^{(e)} = \rho Q (\underline{v}_2 - \underline{v}_1)$$

Esempio



$$R^{(e)} = \rho Q (v_2 - v_1)$$

↑
RISULTANTE DELLE FORZE AGENTI
SUL FLUIDO

$$R_x^{(e)} = \rho Q (v_2 - v_1)$$

$$R_x^{(e)} = p_1 S_1 - p_2 S_2 - F_x$$

F_x FORZA CHE IL FLUIDO ESERCA
SUL TUBO

$-F_x$ FORZA CHE IL TUBO ESERCA
SUL FLUIDO

$$F_x = p_1 S_1 - p_2 S_2 - \rho Q (v_2 - v_1)$$

$$= p_1 S_1 - p_2 S_2 - \rho Q^2 \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1} \right)$$

MI RICORDO (TUBO DI VENTURI) CHE

$$Q^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1} \right)}$$

SOSTITUENDO POSSO VERIFICARE

CHE

$$F_x = (p_1 S_1 + p_2 S_2) \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2}$$