

Corso di FISICA 1



Capitolo 2 – Vettori

Monica Malvezzi, Università degli
Studi di Siena

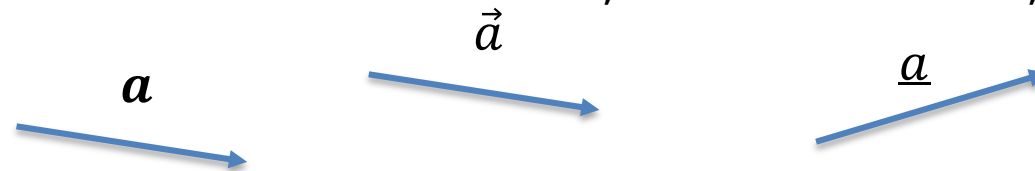


Grandezze scalari e vettoriali

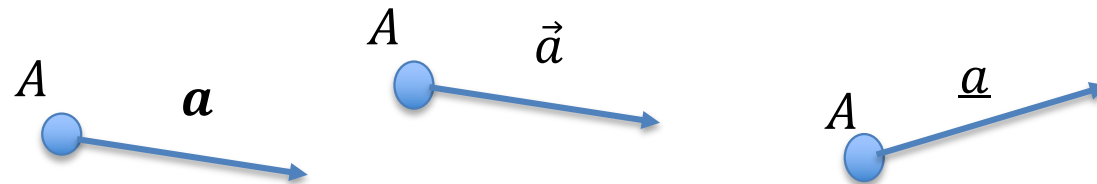
- Esistono grandezze (massa, energia, temperatura, ecc.) che risultano completamente definite mediante un numero (il valore che ne rappresenta la misura in certe unità prefissate) e che perciò prendono il nome di grandezze scalari.
- Esistono grandezze fisiche (velocità, accelerazione, forza, ecc.) per la cui definizione si ha bisogno di associare al valore anche altre informazioni come, per esempio, una direzione e un verso. In questo caso si ha a che fare con **grandezze vettoriali** ed l'algebra vettoriale torna assai utile, appunto, sia per la loro rappresentazione sia per il calcolo.

Grandezze vettoriali - notazioni

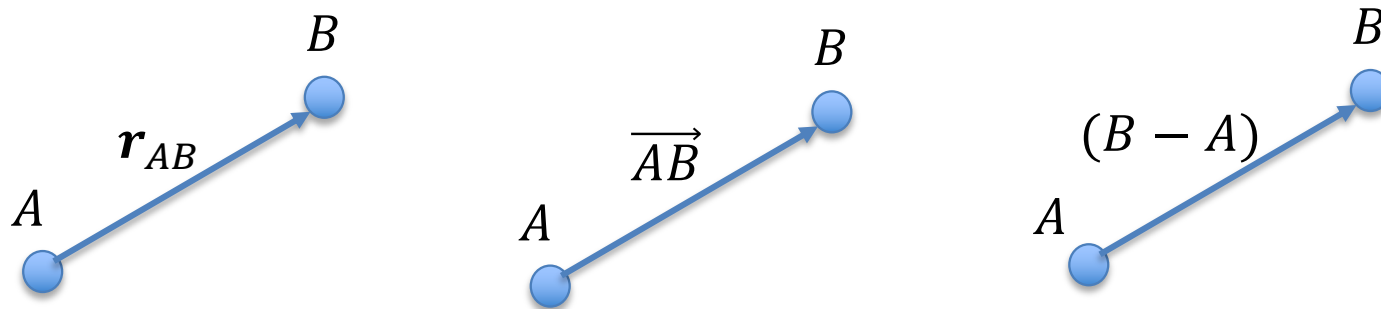
vettori liberi: caratterizzati da modulo, direzione e verso;



vettori applicati: caratterizzati da modulo, direzione, verso, e punto di applicazione;



Vettori geometrici: sono vettori applicati che connettono due punti nello spazio;



Modulo di un vettore

Indichiamo con μ la misura della grandezza rispetto ad una unità dimensionale u . È possibile esprimere l'intensità o la misura del vettore, detta anche **modulo** come μu .

Ad esempio, per una forza modulo pari a 20 N , in questo caso la misura vale $\mu = 20$ ed è espressa nell'unità $u = \text{N}$.

Il modulo di un vettore è indicato come oppure $a = |\mathbf{a}| = |\vec{a}|$.

Graficamente, il modulo è rappresentato dalla lunghezza del vettore: nell'esempio che segue, il modulo di $\vec{b}$ è circa il doppio del modulo di $\vec{a}$



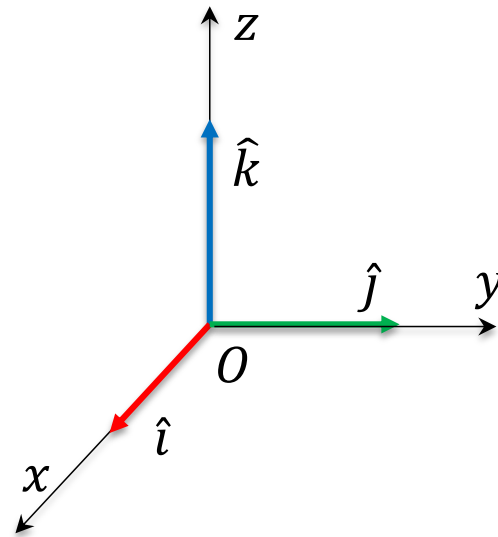
Versori

I vettori aventi modulo unitario $\mu = 1$ e privi di unità di misura sono chiamati **versori**.

I versori sono utilizzati per indicare una direzione orientata.

I versori si possono indicare come i vettori, $\vec{a}$, $\mathbf{a}$, oppure con il segno $\hat{a}$.

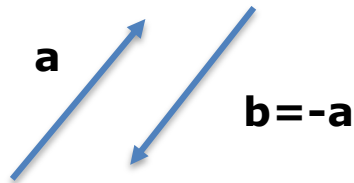
I versori associati alle direzioni degli assi di un sistema di riferimento x , y e z sono spesso utilizzati, e sono indicati come $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, rispettivamente, oppure come $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$.



Uguaglianza tra vettori, vettori opposti

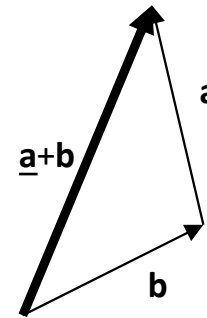
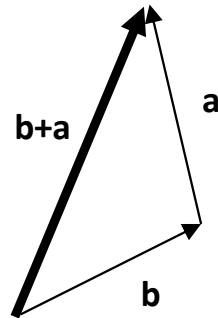
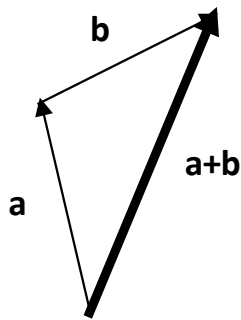
Uguaglianza tra due vettori: due vettori sono uguali ($\mathbf{a} = \mathbf{b}$) se hanno:
stessa direzione,
Stesso verso,
Stesso modulo.

Vettori opposti: due vettori sono opposti ($\mathbf{a} = -\mathbf{b}$) se hanno stessa direzione e modulo ma verso opposto.



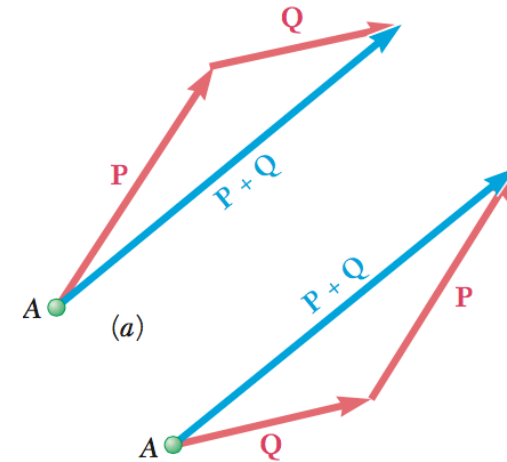
Somma tra vettori

Somma tra vettori: il vettore somma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ si costruisce mediante la regola del parallelogramma (**vettore risultante**).



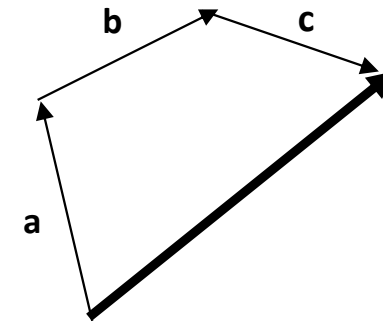
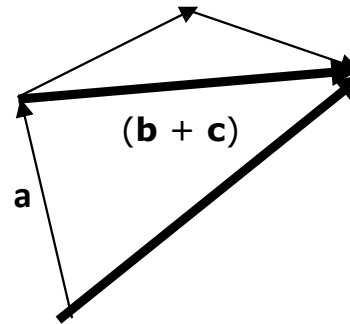
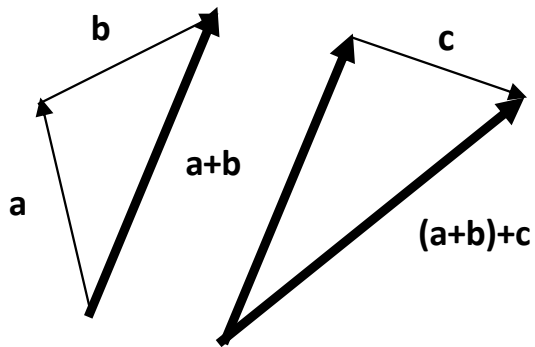
Proprietà dell'operazione somma

Proprietà commutativa della somma: $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P}$

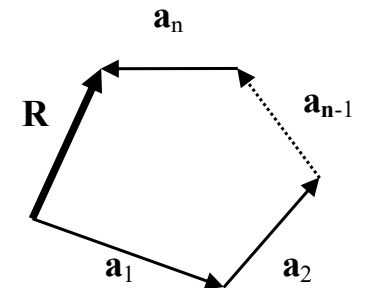


Somma tra vettori

Proprietà associativa della somma: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$



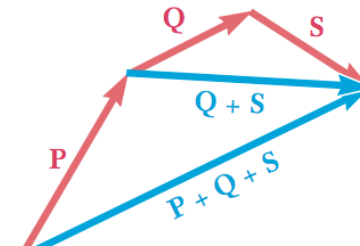
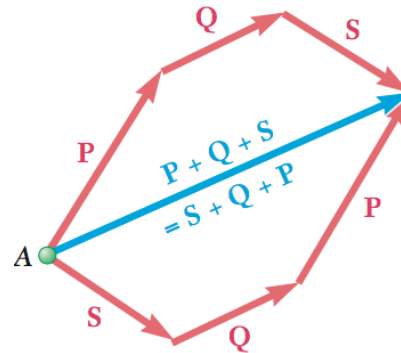
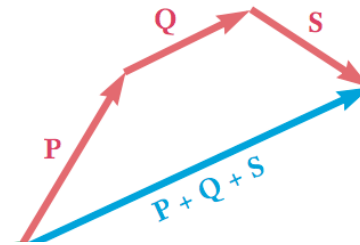
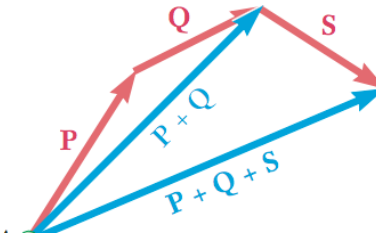
Somma multipla: la somma di n vettori $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ da come risultante ($\mathbf{R}$) il vettore di chiusura della spezzata geometrica costruita.



Somma tra vettori

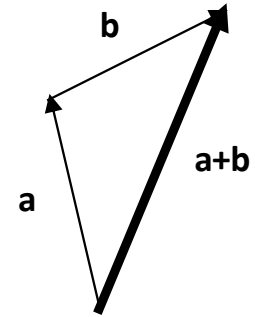
Proprietà associativa della somma:

$$\begin{aligned} (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} &= \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = \mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{S}) = \\ &= \mathbf{S} + \mathbf{Q} + \mathbf{P} \end{aligned}$$

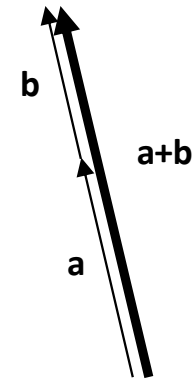


Somma tra vettori

Disuguaglianza triangolare: $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$



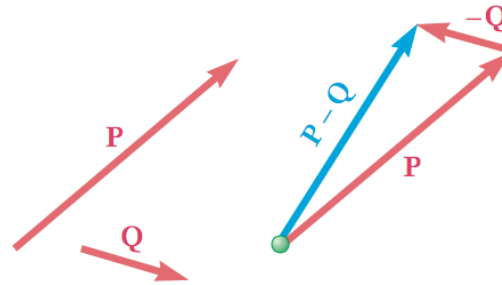
In particolare, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ se i vettori hanno la stessa direzione e verso concorde



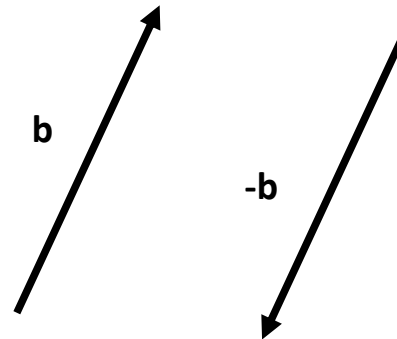
Differenza tra vettori

Differenza di vettori: la differenza tra due vettori è uguale alla somma di uno e dell'opposto dell'altro

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$



Il vettore $-\mathbf{b}$ opposto di $\mathbf{b}$ è un vettore avente lo stesso modulo, la stessa direzione, ma verso opposto a $\mathbf{b}$.



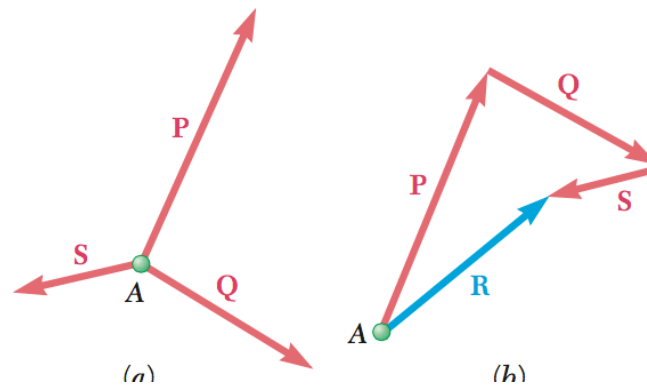
Risultante dei vettori applicati ad un punto materiale

Consideriamo un punto materiale A su cui sono applicati tre vettori tra loro complanari **P**, **Q** ed **S**.

È possibile sostituire il sistema di vettori con un unico vettore **R**, data dalla somma vettoriale dei vettori che costituiscono il sistema.

La **risultante R** dei vettori applicati al punto A è data dalla somma vettoriale dei tre vettori:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S}$$

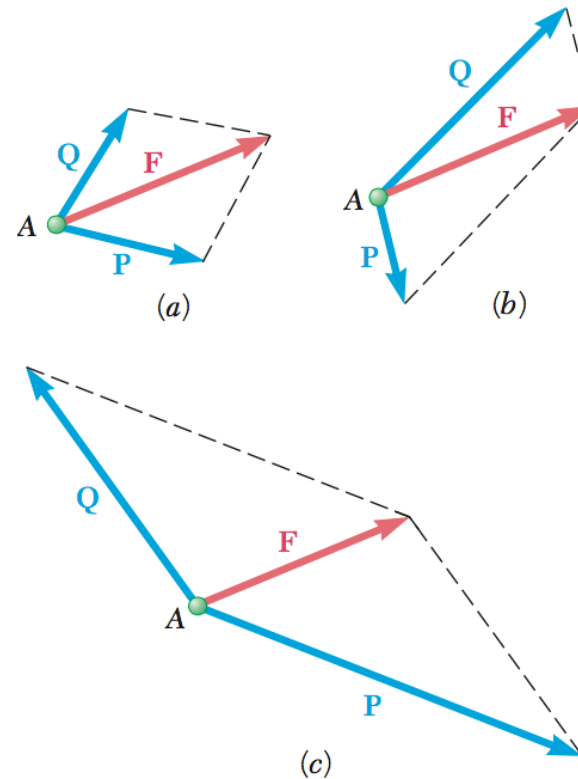


Applicazione: scomposizione di un vettore lungo due direzioni

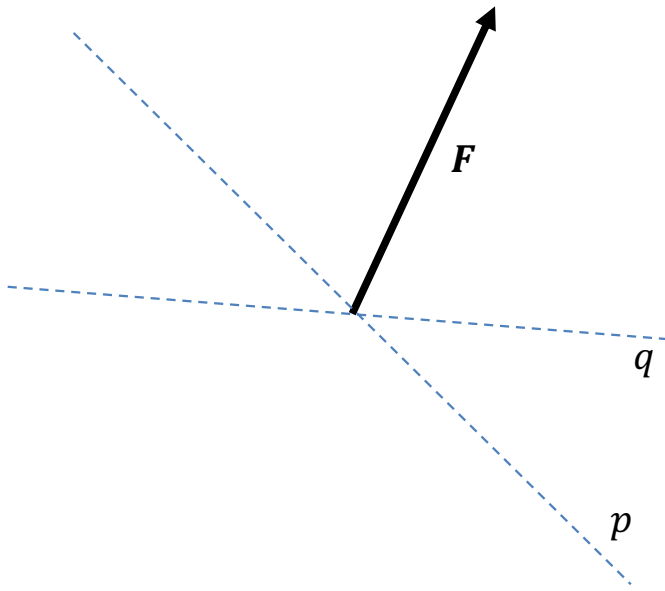
Abbiamo visto che un sistema di vettori agenti su un punto può essere sostituito dal vettore risultante, dato dalla somma vettoriale dei vettori che costituiscono il sistema.

Analogamente, è possibile sostituire un vettore **F** con un sistema costituito da due o più vettori, ad esempio **P** e **Q**, tali che la relativa somma sia **F**

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$$



Applicazione: scomposizione di un vettore lungo due direzioni

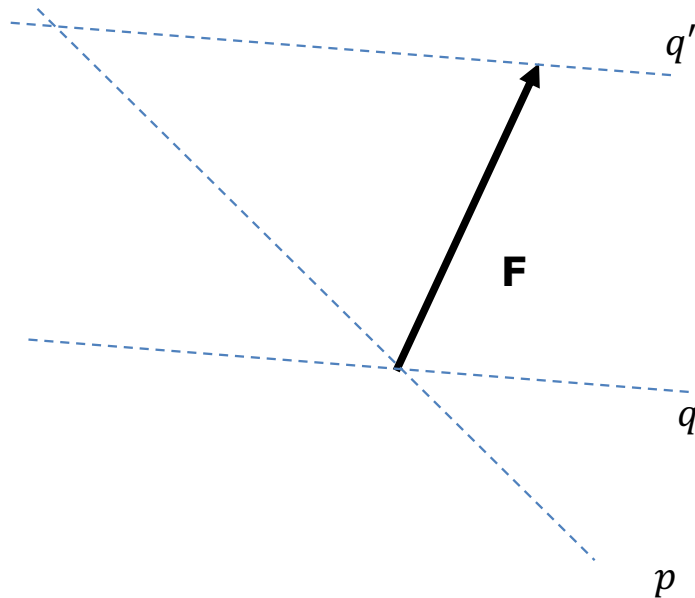


Vogliamo scomporre il vettore F lungo le due direzioni identificate dalle rette p e q , in altre parole vogliamo determinare due vettori P e Q , diretti come p e q rispettivamente, tali che

$$F = P + Q$$

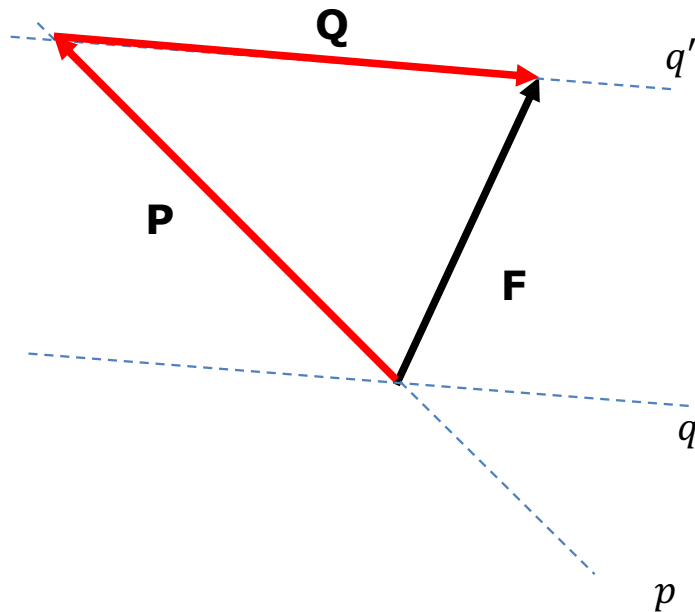
Vediamo la soluzione grafica.

Applicazione: scomposizione di un vettore lungo due direzioni



Tracciamo dall'altro estremo di $\mathbf{F}$ la retta q' parallela a q , notiamo che le rette p , q' e il vettore $\mathbf{F}$ costituiscono un triangolo, di cui un lato è noto (il vettore $\mathbf{F}$ è noto in modulo, direzione e verso), mentre gli altri due sono incogniti.

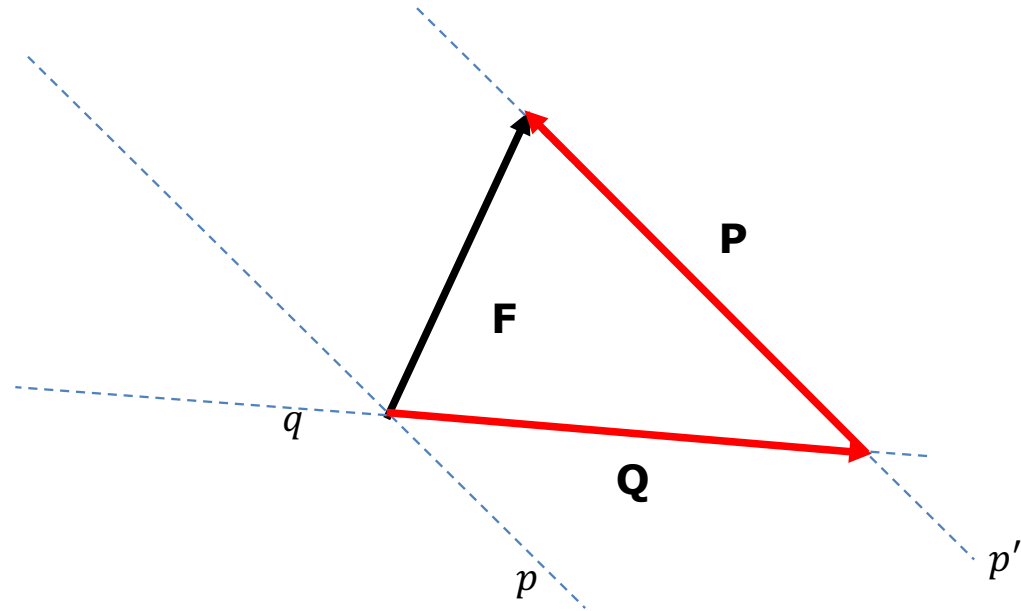
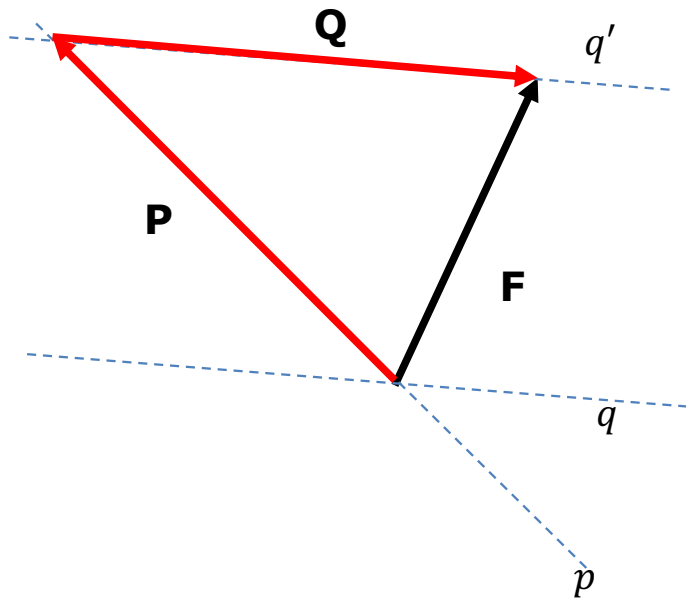
Applicazione: scomposizione di un vettore lungo due direzioni



I due lati incogniti costituiscono proprio i vettori **P** e **Q**,

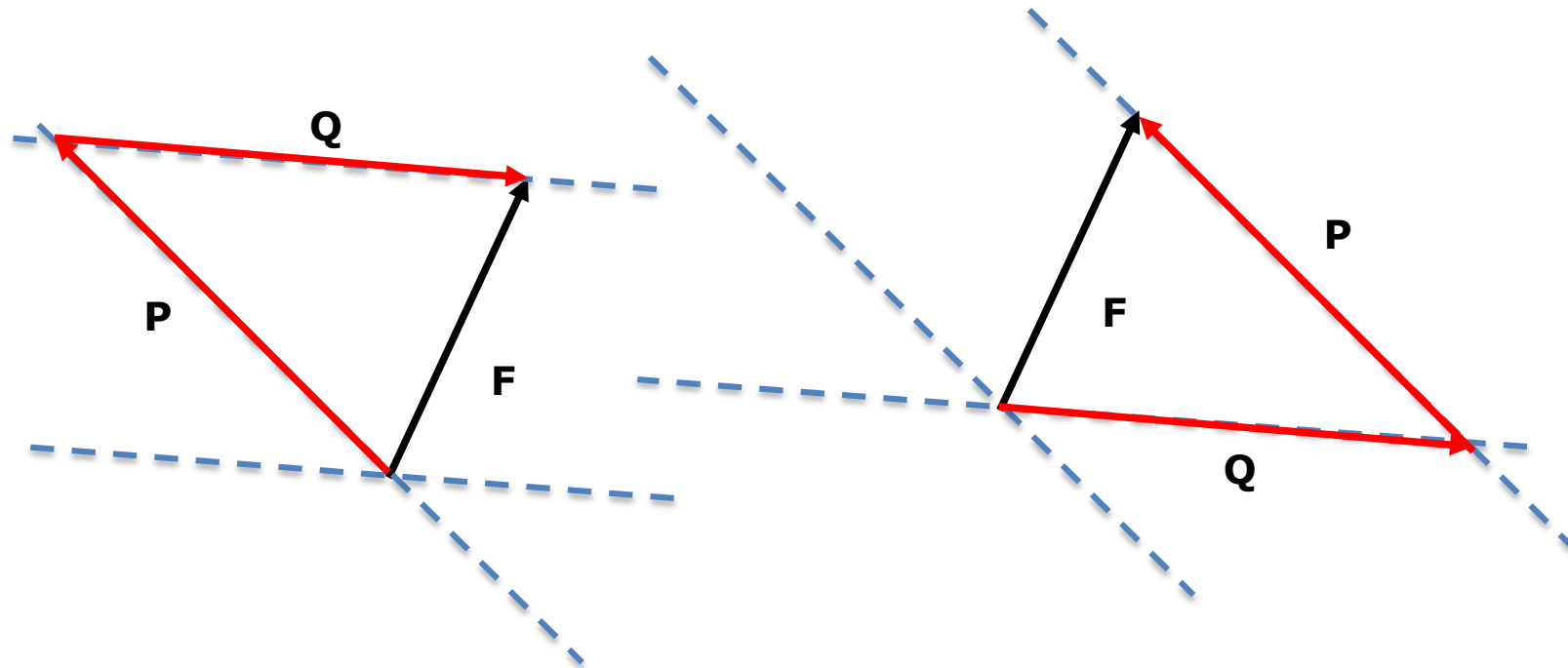
$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$$

Applicazione: scomposizione di un vettore lungo due direzioni



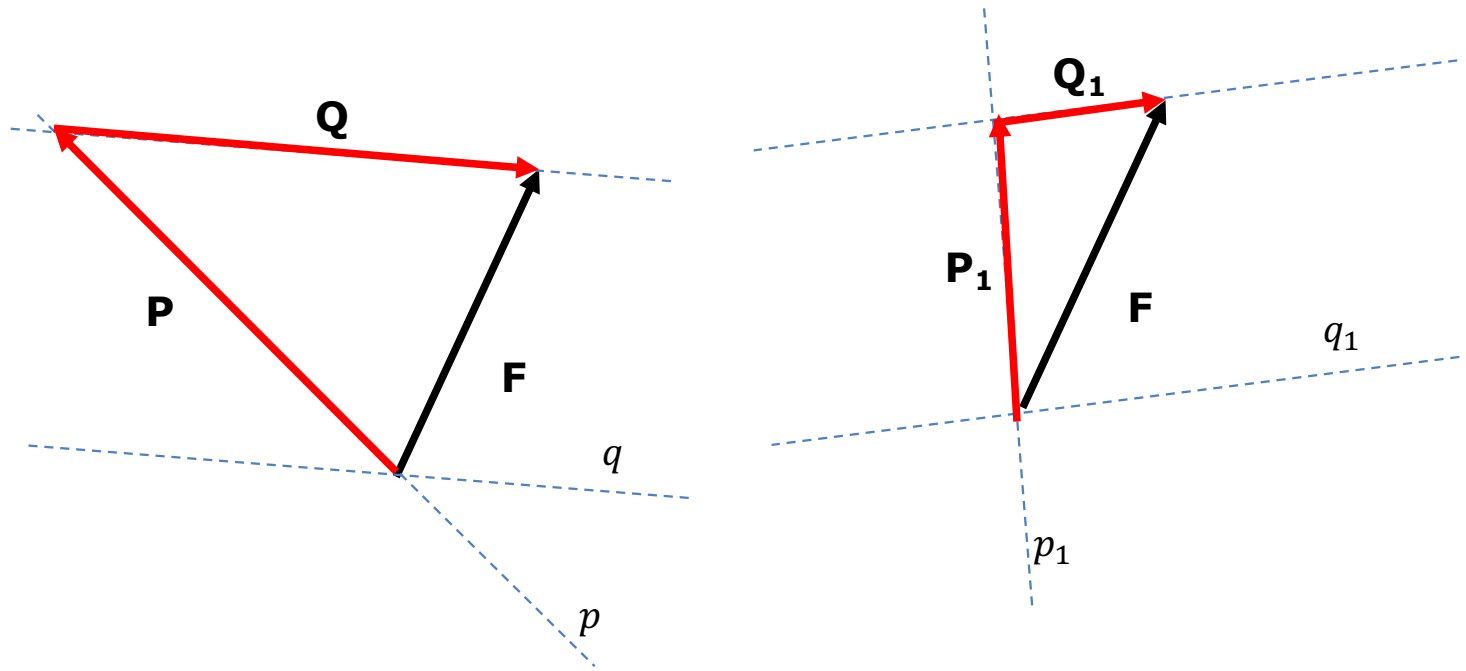
Avremmo trovato la stessa soluzione se avessimo tracciato all'altra estremità del vettore F la retta p' parallela a p ,

Applicazione: scomposizione di un vettore lungo due direzioni



$$F = P + Q$$

Applicazione: scomposizione di un vettore lungo due direzioni

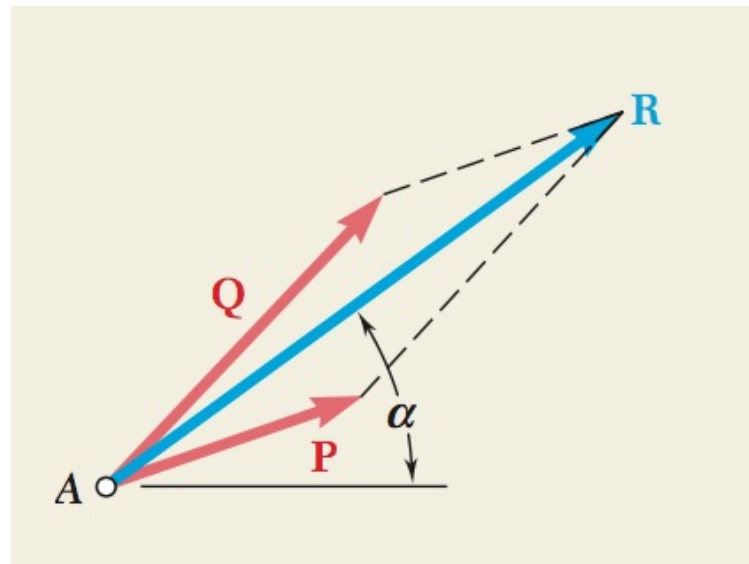
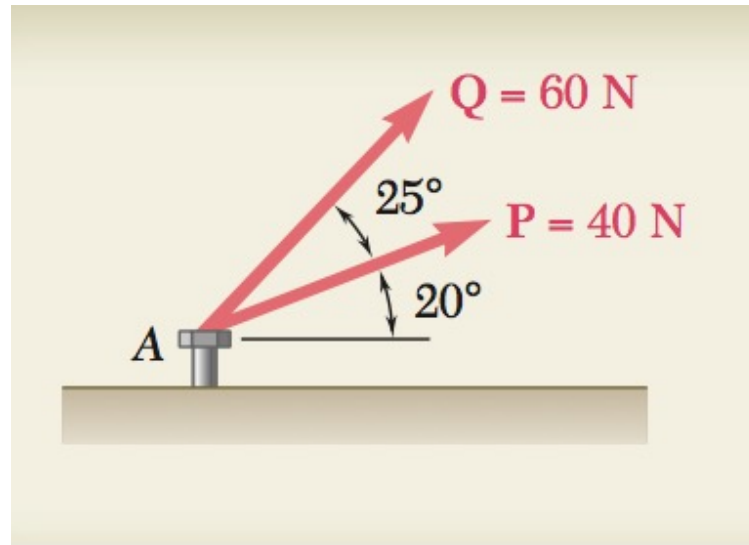


Il risultato della scomposizione dipende dalla direzione delle rette p e q

Esempio

Determinare la risultante $\mathbf{R}$ delle forze $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ applicate al bullone fissato nel punto A

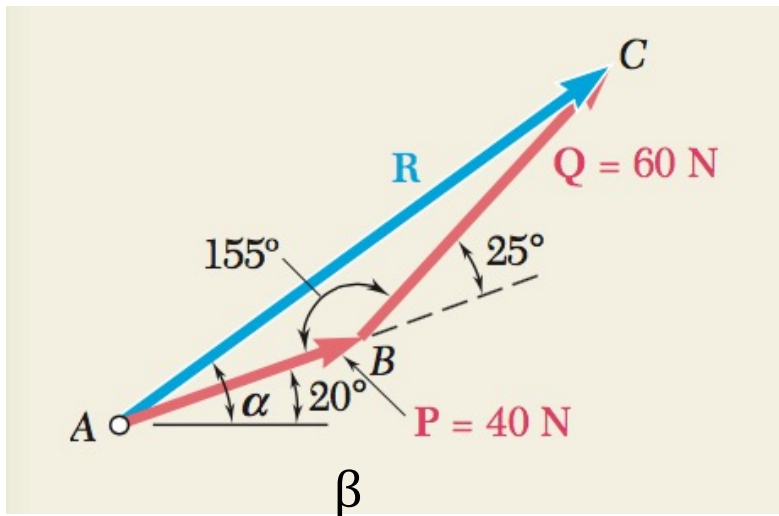
Soluzione grafica



Esempio

Determinare la risultante **R** delle forze **P** e **Q** applicate al bullone fissato nel punto **A**

Soluzione analitica



Soluzione 1

Possiamo trovare il modulo di **R** applicando il teorema dei coseni (di Carnot)

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos(155^\circ)$$

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ\cos(155^\circ)}$$

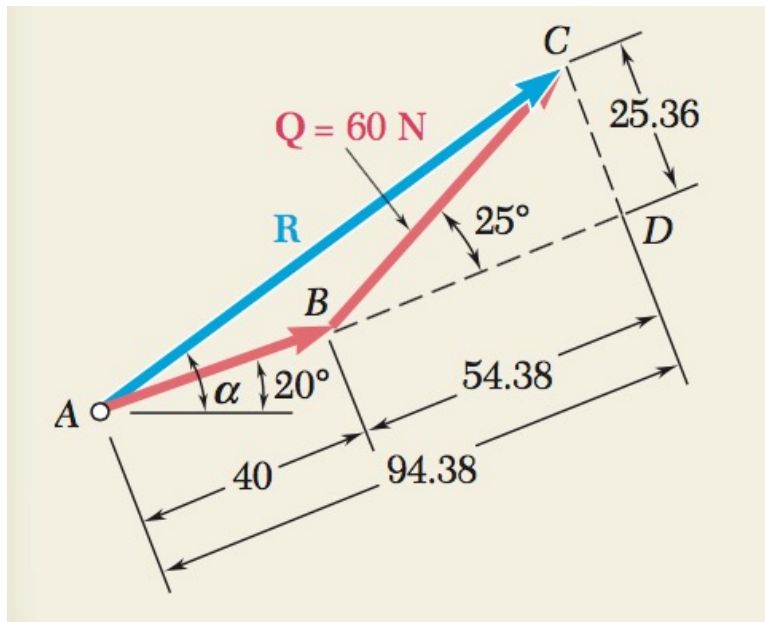
Per determinare la direzione, possiamo determinare l'angolo tra i vettori **R** e **P** applicando il teorema dei seni:

$$\frac{Q}{\sin(\beta)} = \frac{R}{\sin(155^\circ)} \rightarrow \sin(\beta) = \frac{Q}{R}\sin(155^\circ)$$

Possiamo quindi determinare

$$\alpha = \beta + 20^\circ$$

Esempio



Soluzione 2

Osserviamo che possiamo scrivere R come applicando il teorema dei coseni (di Carnot)

$$R^2 = (P + Q\sin(25^\circ))^2 + (Q\cos(25^\circ))^2$$

$$R = \sqrt{(P + Q\sin(25^\circ))^2 + (Q\cos(25^\circ))^2}$$

Per determinare la direzione, possiamo determinare l'angolo tra i vettori R e P come:

$$\tan(\beta) = \frac{Q\cos(25^\circ)}{P + Q\sin(25^\circ)}$$

Possiamo quindi determinare

$$\alpha = \beta + 20^\circ$$

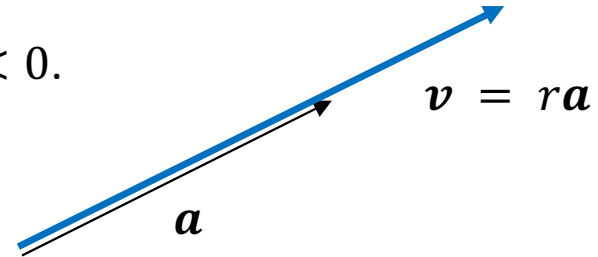
Moltiplicazione scalare-vettore

Moltiplicazione per uno scalare: se $\mathbf{a}$ è un vettore ed r un numero reale, il risultato dell'operazione di moltiplicazione scalare-vettore

$$\mathbf{v} = r\mathbf{a}$$

È un vettore $\mathbf{v}$ che ha

- Modulo: $|\mathbf{v}| = |r||\mathbf{a}|$, Attenzione alle unità di misura! L'unità di misura del prodotto sarà il prodotto delle unità di misura dello scalare e del vettore.
- Direzione: la stessa di $\mathbf{a}$
- Verso: lo stesso di $\mathbf{a}$ se $r > 0$, verso opposto ad $\mathbf{a}$ se $r < 0$.



Esempio: se moltiplichiamo lo scalare m massa per il vettore $\mathbf{a}$ accelerazione, otteniamo un vettore $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Dimensionalmente, il modulo di $\mathbf{F}$ si esprime come una massa per un'accelerazione (forza).

Moltiplicazione scalare-vettore

Alcune proprietà utili:

$$(r_1 + r_2 + \cdots r_n)\mathbf{a} = r_1\mathbf{a} + r_2\mathbf{a} + \cdots r_n\mathbf{a}$$

$$r(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots \mathbf{a}_n) = r\mathbf{a}_1 + r\mathbf{a}_2 + \cdots r\mathbf{a}_n$$

Ancora sui versori: se $\mathbf{a}$ è un vettore non nullo ($|\mathbf{a}| \neq \mathbf{0}$) il versore di $\mathbf{a}$ indicato con $\mathbf{n}$ è

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$$

Si osserva infatti che $\mathbf{n}$ ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\mathbf{a}$, e modulo unitario e privo di unità di misura. $\mathbf{n}$ è quindi un versore che identifica la direzione del vettore $\mathbf{a}$.

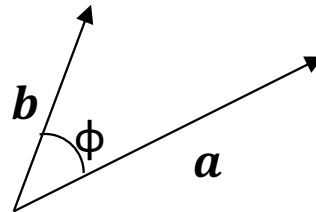
Prodotto scalare

Prodotto scalare: il risultato del prodotto scalare (o prodotto interno) tra due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ non nulli

$$s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

è uno scalare pari al prodotto dei moduli dei due vettori moltiplicati per il coseno dell'angolo ϕ da questi formato:

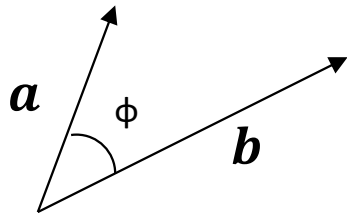
$$s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \phi$$



Prodotto scalare

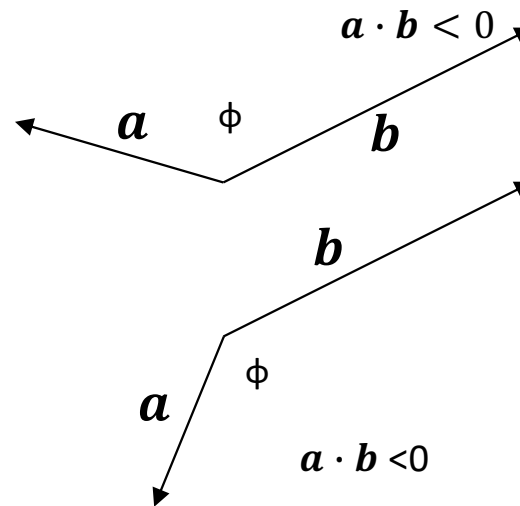
Si osserva che l'angolo compreso tra due vettori varia tra 0 (vettori con stessa direzione e verso) e π . Ricordando le proprietà del coseno di un angolo, si osserva che

- se $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, $\cos \phi > 0$, $s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \phi > 0$
- se $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$, $\cos \phi < 0$, $s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$$

- se $\phi = 0$, $\cos \phi = 1$, $s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$
- se $\phi = \pi$, $\cos \phi = -1$, $s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$
- se $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\cos \phi = 0$, $s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$



Prodotto scalare

Proprietà utili del prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \cdots \mathbf{b}_n) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_2 + \cdots \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_n \end{aligned}$$

Riguardo al prodotto scalare-vettore, si verifica che

$$r\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = r(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

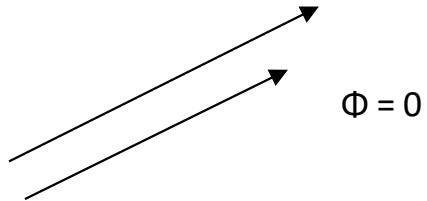
Si osserva inoltre che $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ se si verifica almeno una delle seguenti condizioni:

- $|\mathbf{a}| = 0$
- $|\mathbf{b}| = 0$
- $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono tra loro perpendicolari.

È inoltre possibile verificare facilmente che

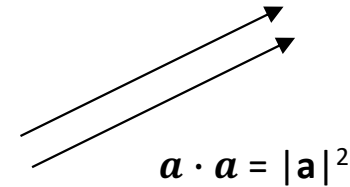
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 = a^2$ (quadrato di un vettore)
- $(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})^2 = a^2 + b^2 \pm 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = a^2 - b^2$

Prodotto scalare



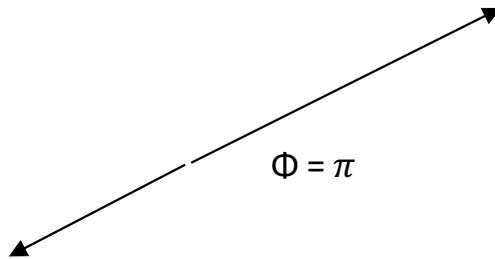
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

Vettori paralleli, stesso verso



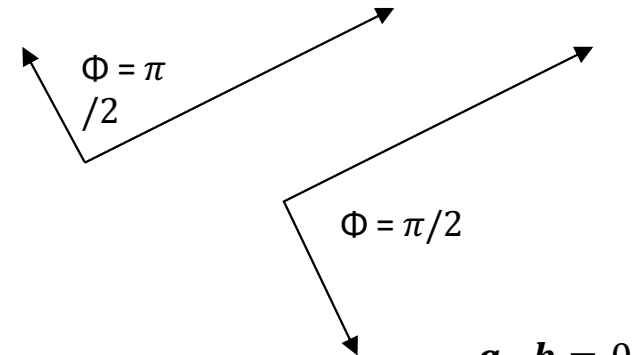
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

Prodotto scalare di un vettore per se stesso (quadrato di un vettore)



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

Vettori paralleli, verso opposto



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

Vettori perpendicolari

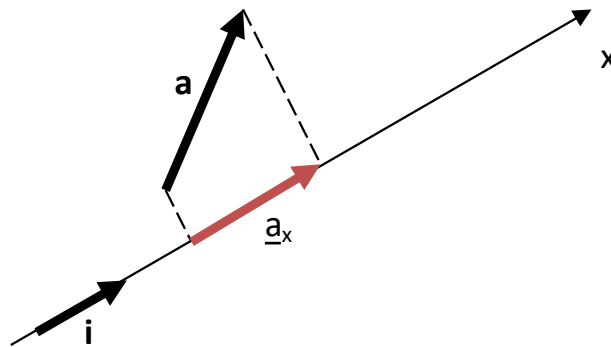
Componente di un vettore lungo una direzione - definizione

Componente di un vettore: si consideri la retta orientata (asse) x avente versore $\mathbf{i}$. Si definisce *componente scalare* di un generico vettore $\mathbf{a}$ su x lo scalare:

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}$$

Componente vettoriale: si consideri la retta orientata (asse) x avente versore $\mathbf{i}$. Si definisce *componente vettoriale* di un generico vettore $\mathbf{a}$ su x il vettore

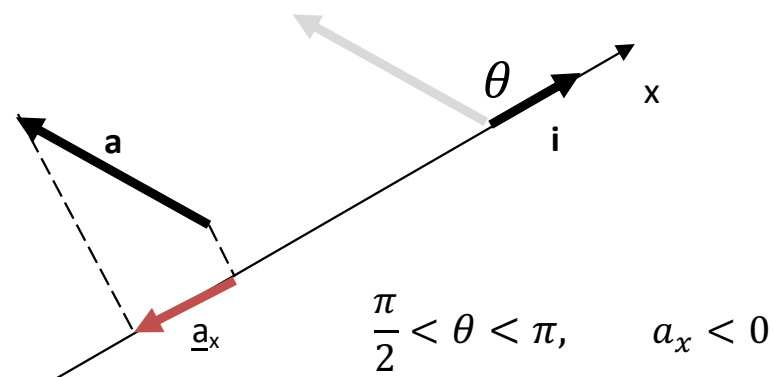
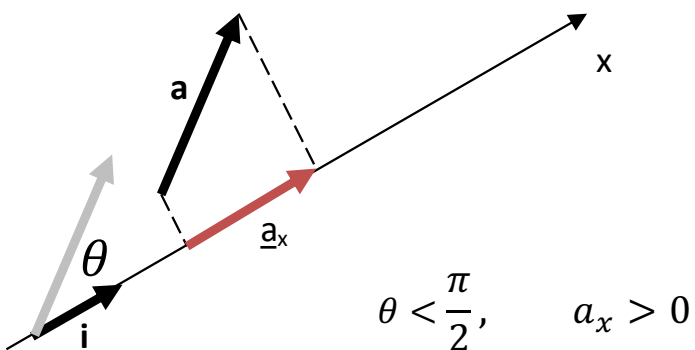
$$\mathbf{a}_x = a_x \mathbf{i}$$



Componente di un vettore lungo una direzione - segno

Ricordiamo le proprietà del prodotto scalare

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = a \cos \theta$$



Componenti cartesiane di un vettore

Supponiamo di fissare un sistema di riferimento cartesiano con origine nel punto O e assi x , y e z . Essendo gli assi del sistema di riferimento delle rette orientate, è possibile definire tre versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, corrispondenti agli assi.

Dato un generico vettore $\mathbf{a}$, è pertanto possibile definire le componenti scalari del vettore rispetto agli assi del sistema di riferimento

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}$$

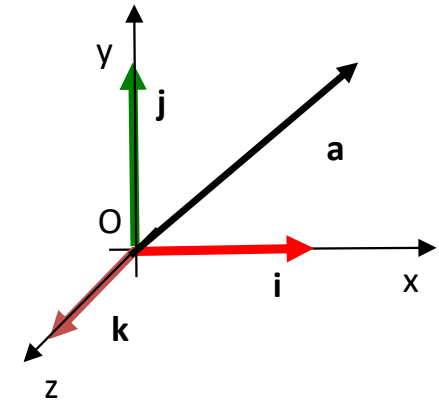
$$a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}$$

$$a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}$$

Risulta chiaramente

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

La terna $[a_x, a_y, a_z]$ definisce le **componenti cartesiane** del vettore $\mathbf{a}$.



Esiste una corrispondenza biunivoca tra lo spazio dei vettori liberi e lo spazio $\mathbb{R}^3$.

Possiamo pertanto utilizzare le componenti scalari di un vettore rispetto agli assi di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (**componenti cartesiane**) per rappresentare il vettore stesso.

Operazioni tra vettori, componenti cartesiane

Possiamo utilizzare i risultati dell'algebra per calcolare le componenti cartesiane dei vettori risultati di operazioni vettoriali. Ad esempio, se consideriamo la somma/differenza tra vettori in componenti cartesiane, abbiamo:

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{bmatrix}$$

Nel caso di più vettori, la risultante risulta

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{xi} \\ \sum_{i=1}^n a_{yi} \\ \sum_{i=1}^n a_{zi} \end{bmatrix}$$

Il modulo di un vettore $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$ espresso tramite le sue componenti cartesiane risulta

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Operazioni tra vettori, componenti cartesiane

Per quanto riguarda il prodotto scalare – vettore risulta

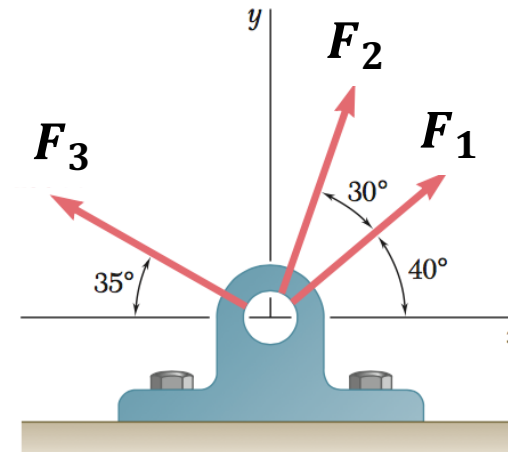
$$\mathbf{v} = r\mathbf{a} = r \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_x \\ ra_y \\ ra_z \end{bmatrix}$$

Mentre il prodotto scalare tra due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ risulta

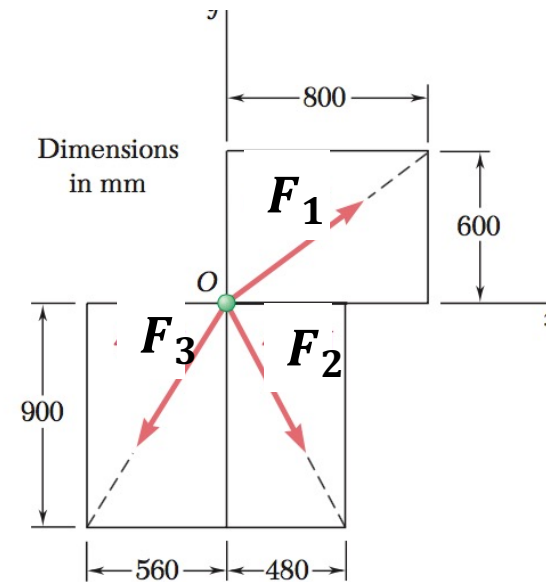
$$s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Esempi

Determinare le componenti cartesiane dei seguenti vettori (forze) e della risultante



$$\begin{aligned}F_1 &= 80 \text{ N} \\F_2 &= 120 \text{ N} \\F_3 &= 150 \text{ N}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}F_1 &= 800 \text{ N} \\F_2 &= 408 \text{ N} \\F_3 &= 424 \text{ N}\end{aligned}$$

Esempi

Determinare le componenti cartesiane dei seguenti vettori (forze) e della risultante

$$F_{1x} = 80 \cos(40^\circ) \text{ N}$$

$$F_{1y} = 80 \sin(40^\circ) \text{ N}$$

$$F_{1z} = 0$$

$$F_{2x} = 120 \cos(30^\circ + 40^\circ) \text{ N}$$

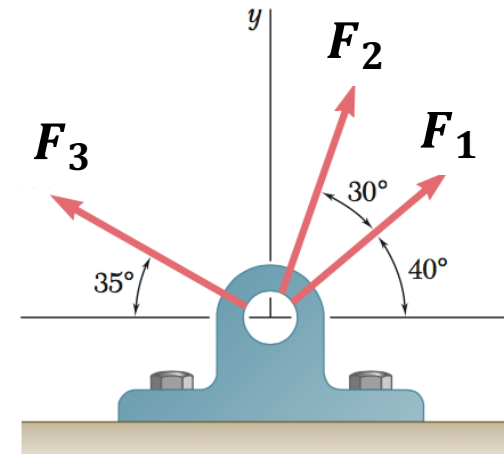
$$F_{2y} = 120 \sin(30^\circ + 40^\circ) \text{ N}$$

$$F_{2z} = 0$$

$$F_{3x} = -150 \cos(35^\circ) \text{ N}$$

$$F_{3y} = 150 \sin(35^\circ) \text{ N}$$

$$F_{3z} = 0$$



$$\begin{aligned} F_1 &= 80 \text{ N} \\ F_2 &= 120 \text{ N} \\ F_3 &= 150 \text{ N} \end{aligned}$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

Esempi

Determinare le componenti cartesiane dei seguenti vettori (forze) e della risultante

$$F_{1x} = 80 \cos(40^\circ) \text{ N}$$

$$F_{1y} = 80 \sin(40^\circ) \text{ N}$$

$$F_{1z} = 0$$

$$F_{2x} = 120 \cos(30^\circ + 40^\circ) \text{ N}$$

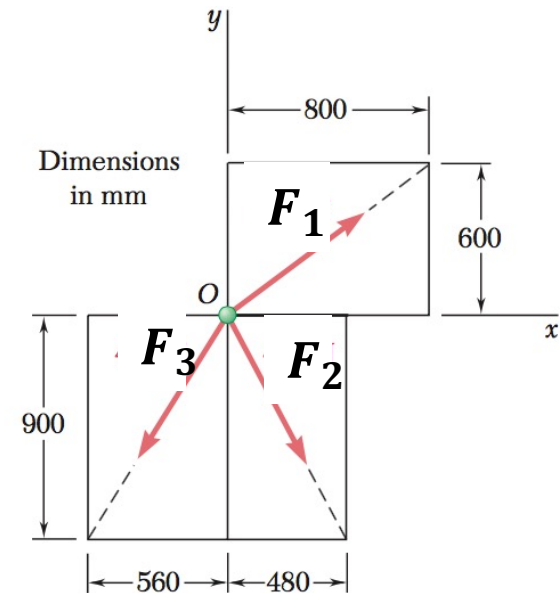
$$F_{2y} = 120 \sin(30^\circ + 40^\circ) \text{ N}$$

$$F_{2z} = 0$$

$$F_{3x} = -150 \cos(35^\circ) \text{ N}$$

$$F_{3y} = 150 \sin(35^\circ) \text{ N}$$

$$F_{3z} = 0$$



$$F_1 = 800 \text{ N}$$

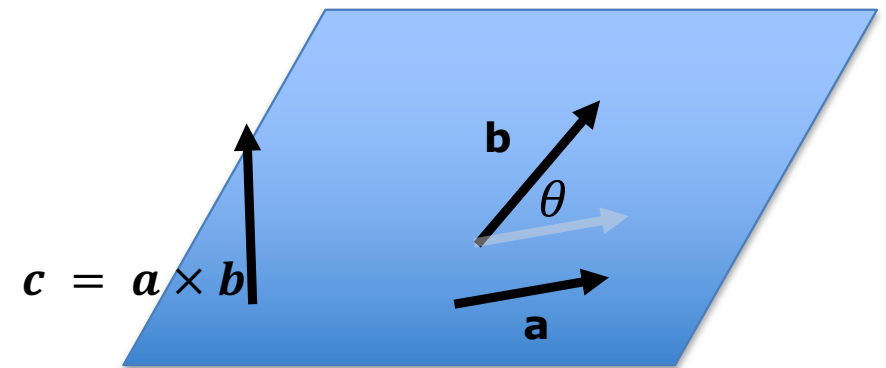
$$F_2 = 408 \text{ N}$$

$$F_3 = 424 \text{ N}$$

Prodotto vettoriale

Prodotto vettoriale: prodotto vettoriale di due vettori non nulli $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ è pari ad un vettore $\mathbf{c}$ ($\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$), tale che:

- la direzione di $\mathbf{c}$ è normale ad $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$
- il verso è dato dalla regola della mano destra (se pollice e indice sono disposti nel verso dei vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ rispettivamente, il medio indica il verso di $\mathbf{c}$)
- il modulo $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$ dove l'angolo θ è quello formato dai due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$



Prodotto vettoriale

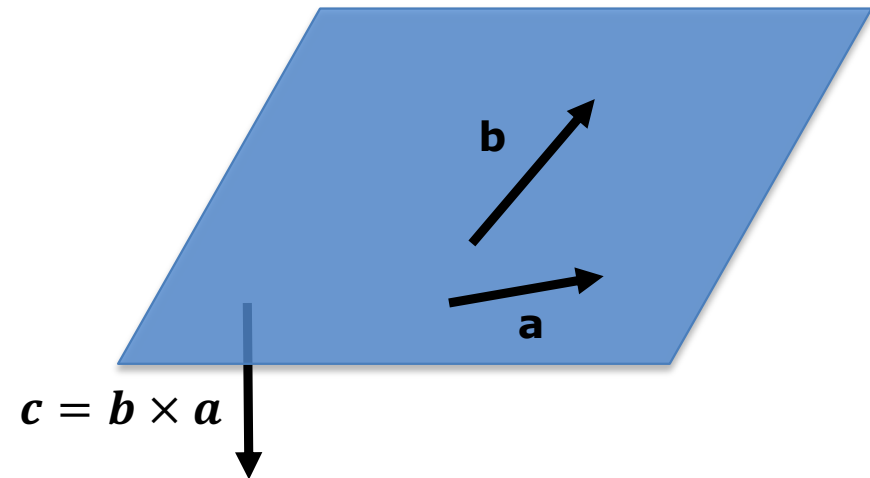
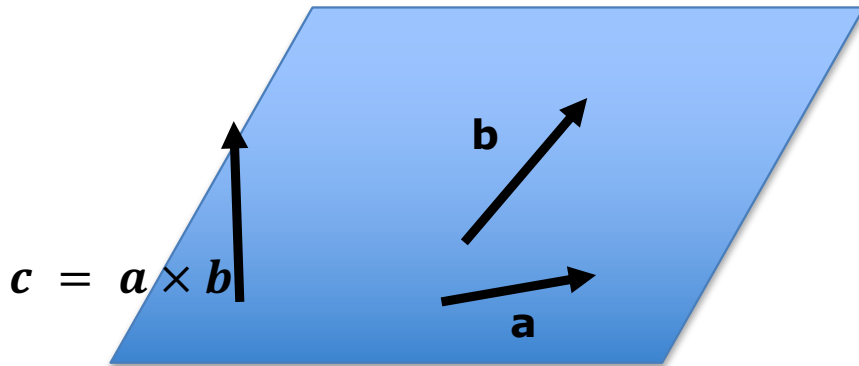
Proprietà:

$$\mathbf{a} \times \sum \mathbf{b}_i = \sum (\mathbf{a} \times \mathbf{b}_i)$$

$$(r\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (r\mathbf{b}) = r(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 \text{ se } \mathbf{a} \text{ o } \mathbf{b} \text{ nullo o se } \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{b} \text{ sono paralleli}$$



Prodotto vettoriale

Prodotto vettoriale tra i versori di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

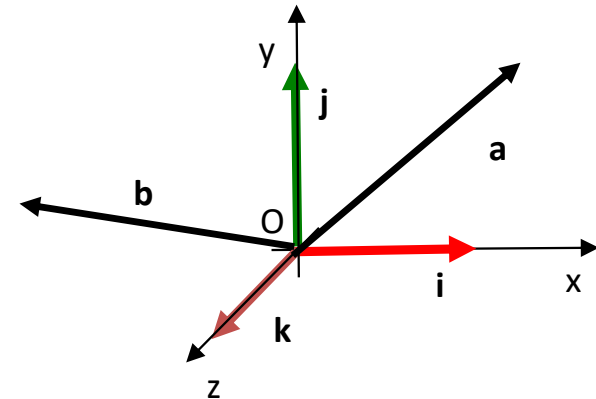
$$\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$

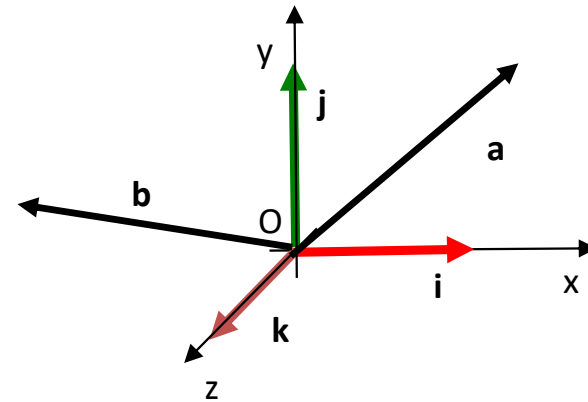


Prodotto vettoriale

Calcoliamo il prodotto vettoriale $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, una volta note le componenti dei vettori nel sistema di riferimento cartesiano:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = a_x b_x \mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_x b_z \mathbf{i} \times \mathbf{k} \\ &\quad + a_y b_x \mathbf{j} \times \mathbf{i} + a_y b_y \mathbf{j} \times \mathbf{j} + a_y b_z \mathbf{j} \times \mathbf{k} \\ &\quad + a_z b_x \mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_z b_y \mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_z b_z \mathbf{k} \times \mathbf{k} =\end{aligned}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} + (-a_x b_z + a_z b_x) \mathbf{j} + (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i}$$

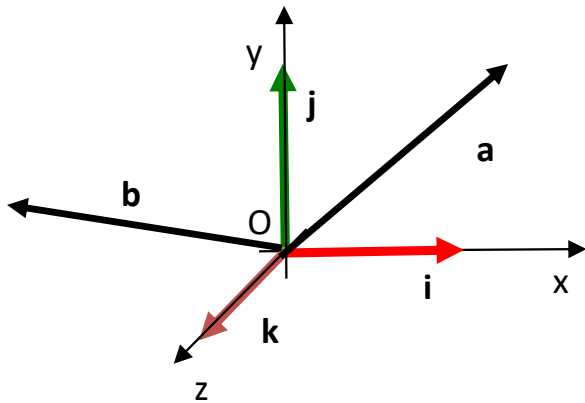


Prodotto vettoriale

Prodotto vettoriale: componenti cartesiane

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

Sfruttando le proprietà del prodotto matrice-vettore



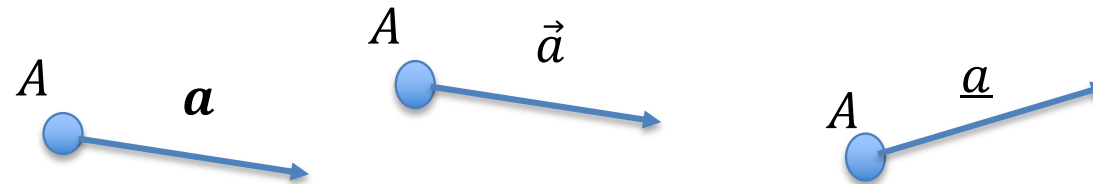
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = S(\mathbf{a})\mathbf{b}$$

$$S(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

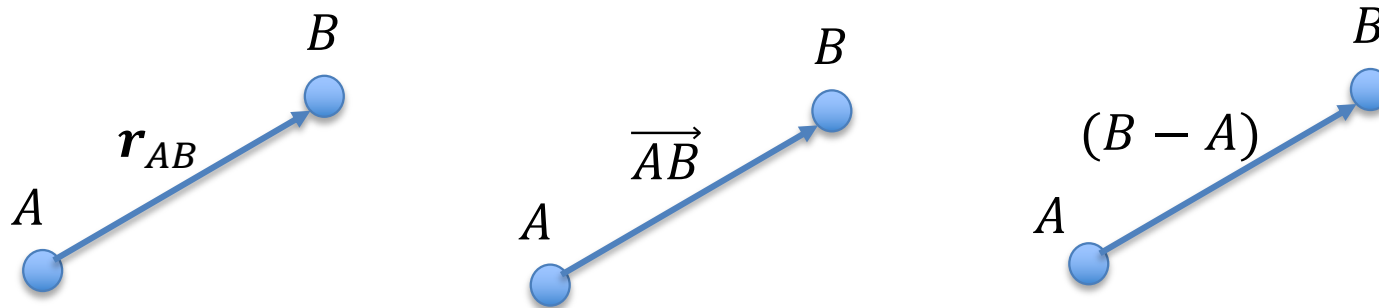
Esercizio: verificare che $S(\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Vettori applicati e geometrici

vettori applicati: caratterizzati da modulo, direzione, verso, e punto di applicazione;



Vettori geometrici: sono vettori applicati che connettono due punti nello spazio;



Momento polare

Il concetto di momento riguarda esclusivamente i vettori applicati.

Momento polare: si definisce momento di un vettore applicato $\mathbf{a}$ con punto di applicazione A ($A, \mathbf{a}$), rispetto ad un punto generico O , il vettore $\mathbf{M}(O)$ così definito:

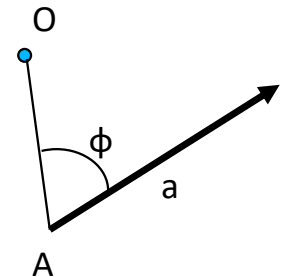
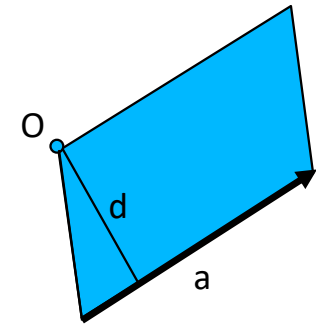
$$\mathbf{M}(O) = (\mathbf{A} - \mathbf{O}) \times \mathbf{a}$$

$$\mathbf{M}(O) = \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{a}$$

avente modulo: $|\mathbf{M}(O)| = |\mathbf{r}_{OA}| |\mathbf{a}| \sin \varphi$ dove φ è l'angolo formato dai vettori $\mathbf{a}$ e $(\mathbf{A} - \mathbf{O})$, direzione ortogonale al piano definito da $(\mathbf{A} - \mathbf{O})$ ed $\mathbf{a}$ e verso definito secondo la regola della mano destra.

Il modulo del momento $\mathbf{M}(O)$ indicato con $|\mathbf{M}(O)|$ è pari all'area del parallelogramma individuato dai vettori $\mathbf{a}$ e $(\mathbf{A} - \mathbf{O})$, che può essere espressa come $|\mathbf{a}|d$

$d = |(\mathbf{A} - \mathbf{O})| \sin \varphi$ indica il **braccio** o distanza di O dalla retta d'azione di $\mathbf{a}$.



Momento polare, proprietà

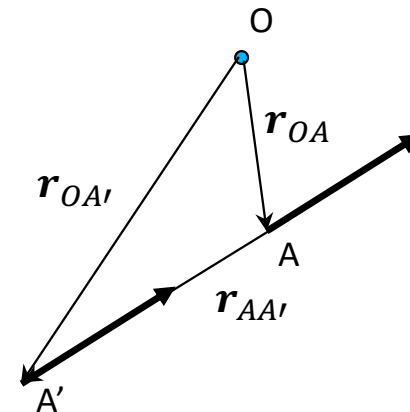
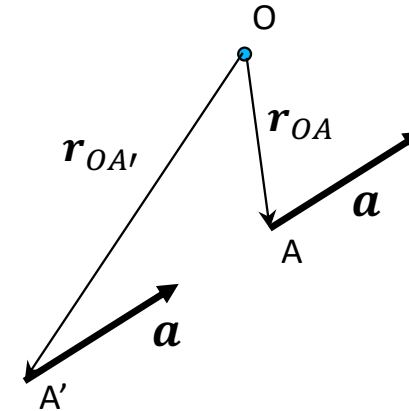
Analizziamo come varia il momento polare di un vettore rispetto ad O se il punto di applicazione A del vettore viene spostato in A' lungo la sua retta d'azione:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'(O) &= (\mathbf{A}' - \mathbf{O}) \times \mathbf{a} = [(\mathbf{A}' - \mathbf{A}) + (\mathbf{A} - \mathbf{O})] \times \mathbf{a} = \\ &= (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{A} - \mathbf{O}) \times \mathbf{a} = \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{O}) \times \mathbf{a} = \mathbf{M}(O) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'(O) &= \mathbf{r}_{OA'} \times \mathbf{a} = [\mathbf{r}_{OA} + \mathbf{r}_{AA'}] \times \mathbf{a} = \\ &= \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{a} + \mathbf{r}_{AA'} \times \mathbf{a} = \\ &= \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{a} = \mathbf{M}(O) \end{aligned}$$

Abbiamo verificato che:

- Il momento polare di un vettore rispetto ad O non varia se viene spostato il punto di applicazione A in A' lungo la sua retta d'azione:



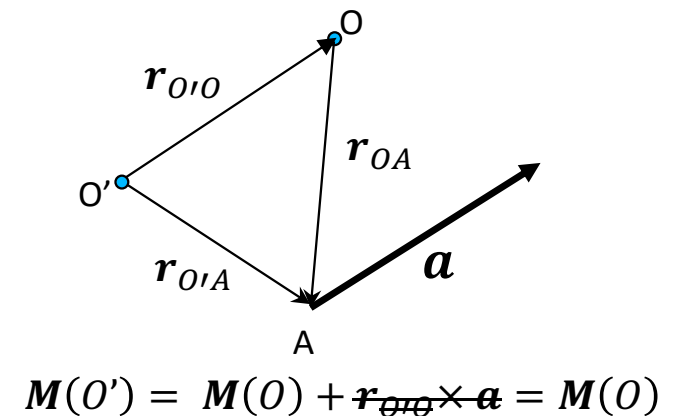
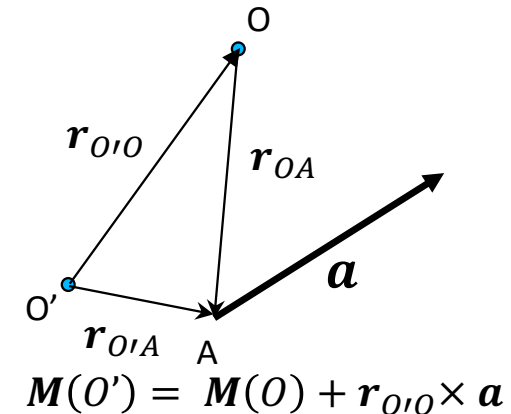
Momento polare, proprietà

Analizziamo come varia il momento polare di un vettore $\mathbf{a}$ applicato nel punto A quando il polo varia da O a O' :

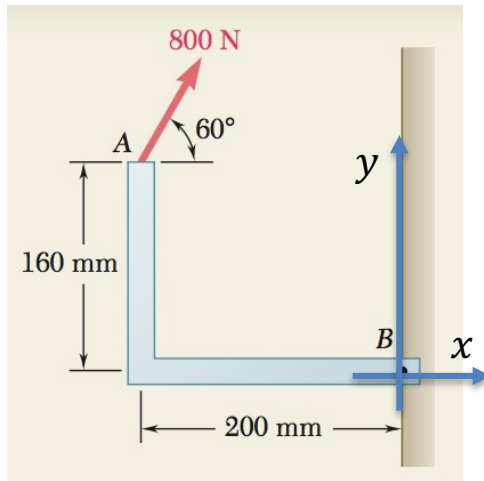
$$\begin{aligned} \mathbf{M}(O') &= (\mathbf{A} - \mathbf{O}') \times \mathbf{a} = [(\mathbf{A} - \mathbf{O}) + (\mathbf{O} - \mathbf{O}')] \times \mathbf{a} = \\ &= \mathbf{M}(O) + (\mathbf{O} - \mathbf{O}') \times \mathbf{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(O') &= \mathbf{r}_{O'A} \times \mathbf{a} = [\mathbf{r}_{OA} + \mathbf{r}_{O'O}] \times \mathbf{a} = \\ &= \mathbf{M}(O) + \mathbf{r}_{O'O} \times \mathbf{a} \end{aligned}$$

Quindi il momento polare di un vettore rispetto non varia al variare se il polo varia da O a O' lungo la retta parallela ad $\mathbf{a}$ passante per O .



Esempio



Il momento $\mathbf{M}(B)$ della forza $\mathbf{F}$ rispetto al polo B è dato dal prodotto vettoriale

$$\mathbf{M}(B) = \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}$$

Dove $\mathbf{r}_{BA}$ è il vettore geometrico che va da B ad A , vale a dire $\mathbf{r}_{BA} = (B - A)$. Scegliamo un sistema di riferimento con origine nel punto B e assi orientati come mostrato nella figura.

Le componenti cartesiane dei vettori $\mathbf{r}_{BA}$ ed $\mathbf{F}$: risultano:

$$\mathbf{r}_{BA} = -(0.2 \text{ m}) \mathbf{i} + (0.16 \text{ m}) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} = (800 \text{ N}) \cos 60^\circ \mathbf{i} + (800 \text{ N}) \sin 60^\circ \mathbf{j} = (400 \text{ N}) \mathbf{i} + (693 \text{ N}) \mathbf{j}$$

Svolgendo il prodotto vettoriale otteniamo

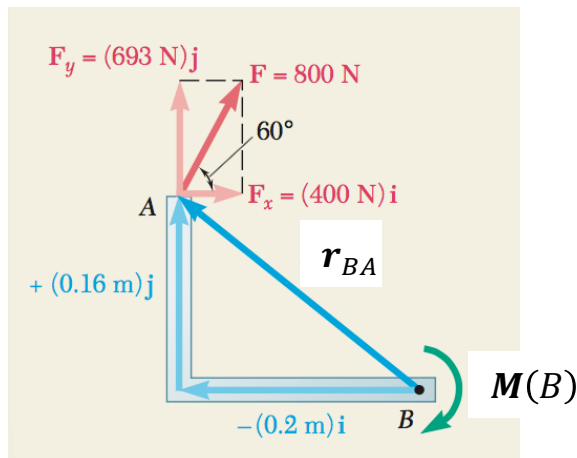
$$\mathbf{M}(B) = \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F} = [-(0.2 \text{ m}) \mathbf{i} + (0.16 \text{ m}) \mathbf{j}] \times [(400 \text{ N}) \mathbf{i} + (693 \text{ N}) \mathbf{j}]$$

$$= -(138.6 \text{ N} \cdot \text{m}) \mathbf{k} - (64.0 \text{ N} \cdot \text{m}) \mathbf{k}$$

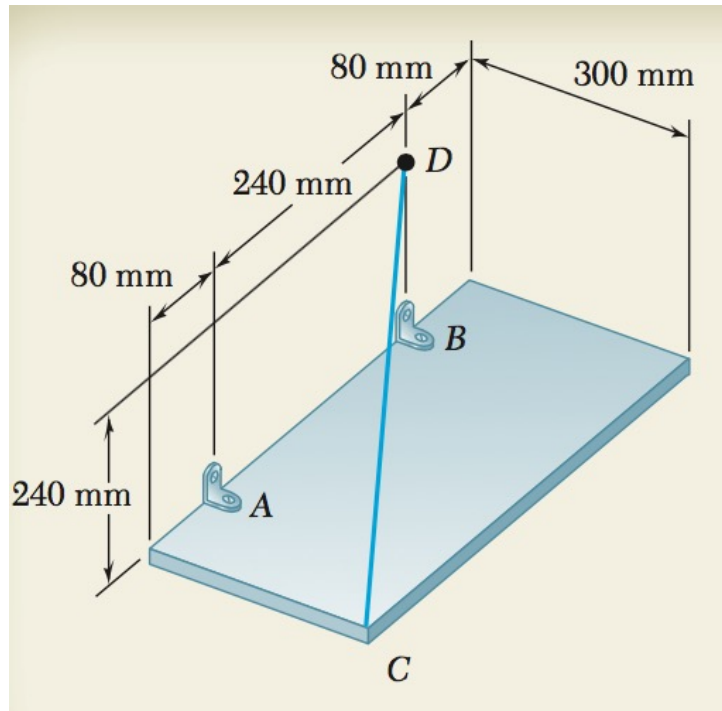
$$= -(202.6 \text{ N} \cdot \text{m}) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_B = 203 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$$

Il momento $\mathbf{M}(B)$ è ortogonale al piano xy e direzione opposta all'asse z , quindi *entrante* nel piano.

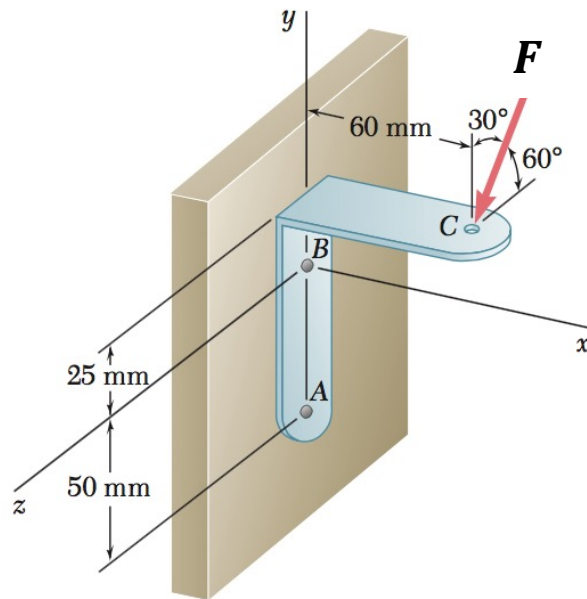


Esercizio proposto #1



Una piastra rettangolare è supportata nei punti A e B e per mezzo di un cavo CD . Sapendo che la tensione nel cavo ha modulo pari a $F = 200\text{ N}$, determinare il momento rispetto ad A e a B della tensione applicata dal cavo alla piastra, applicata nel punto C .

Esercizio proposto #2



Determinare il momento della forza F (modulo pari a 200 N , direzione come in figura) applicata alla staffa nel punto C , diretta come mostrato in figura, rispetto ai punti A e B .

Sistemi di vettori applicati

Si definisce un *sistema di vettori applicati* un insieme di n vettori applicati $(A_i, \mathbf{a}_i)$.

Per i sistemi di vettori applicati è possibile definire:

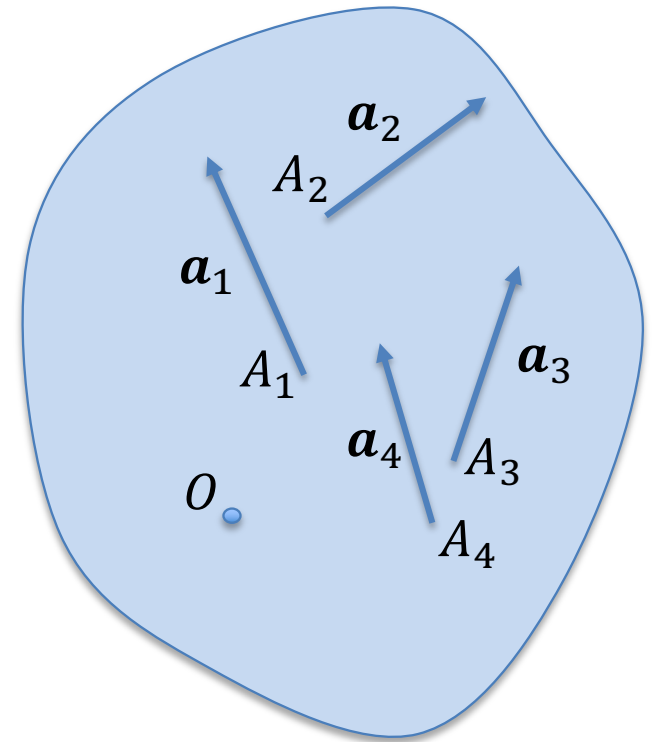
- la *risultante*
- Il *momento risultante* rispetto ad un generico punto O .

La **risultante** di un sistema di vettori applicati ($\mathbf{R}$) è un vettore pari alla somma vettoriale degli n vettori del sistema:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i$$

Il **momento risultante** rispetto ad un generico punto O è pari alla somma dei momenti polari dei singoli vettori, $\mathbf{M}_i(O)$, rispetto al punto O :

$$\mathbf{M}(O) = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{OA_i} \times \mathbf{a}_i$$



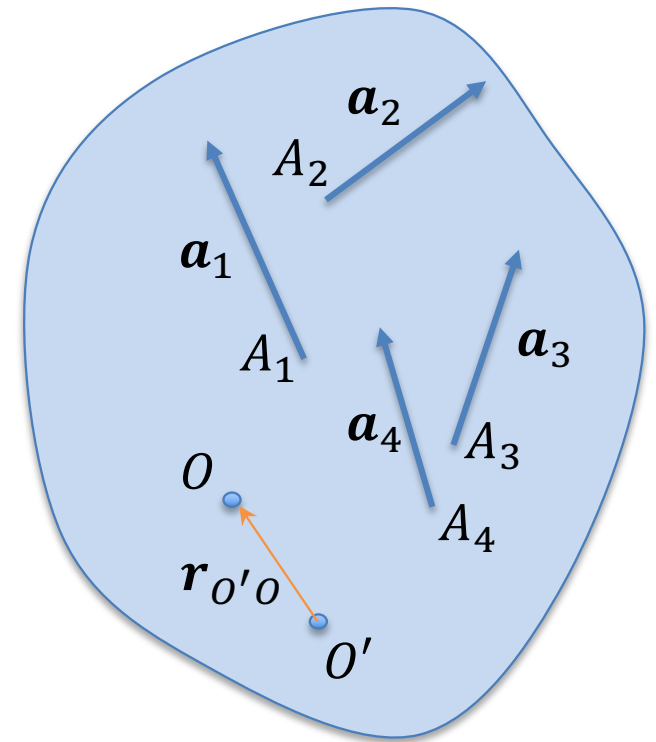
Sistemi di vettori applicati

Considerando un secondo polo O' per il calcolo del momento risultante del sistema di vettori applicati $(A_i, \mathbf{a}_i)$ è possibile verificare che:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(O') &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{O'A_i} \times \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_{O'O} + \mathbf{r}_{OA_i}) \times \mathbf{a}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{O'O} \times \mathbf{a}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{OA_i} \times \mathbf{a}_i \\ &= \mathbf{r}_{O'O} \times \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i + \mathbf{M}(O) = \mathbf{r}_{O'O} \times \mathbf{R} + \mathbf{M}(O) \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}(O') = \mathbf{r}_{O'O} \times \mathbf{R} + \mathbf{M}(O)$$

Questa relazione è detta anche **formula di trasposizione dei momenti**.



Sistemi di vettori applicati

Dalla **formula di trasposizione dei momenti**

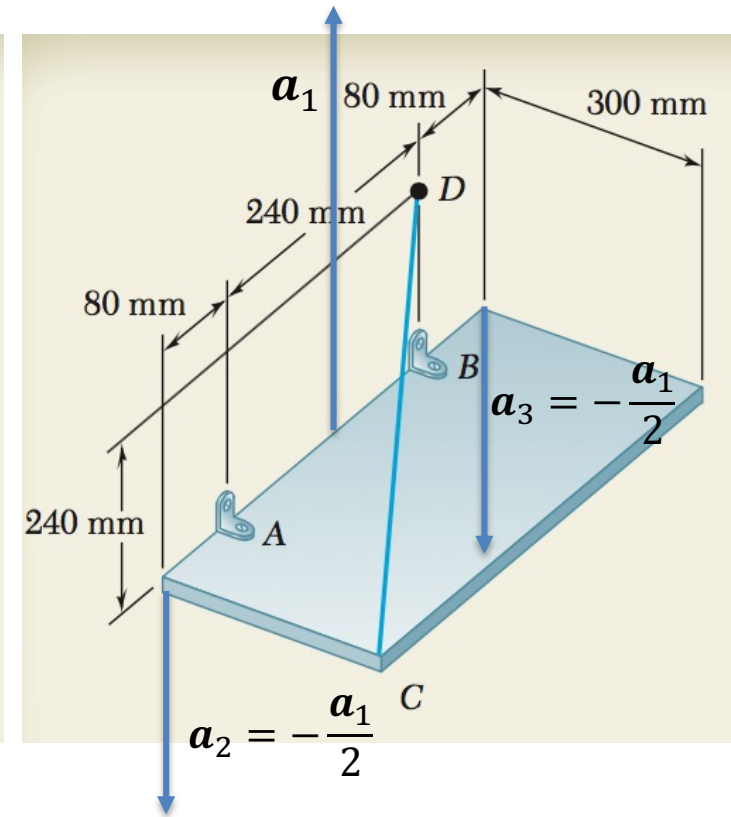
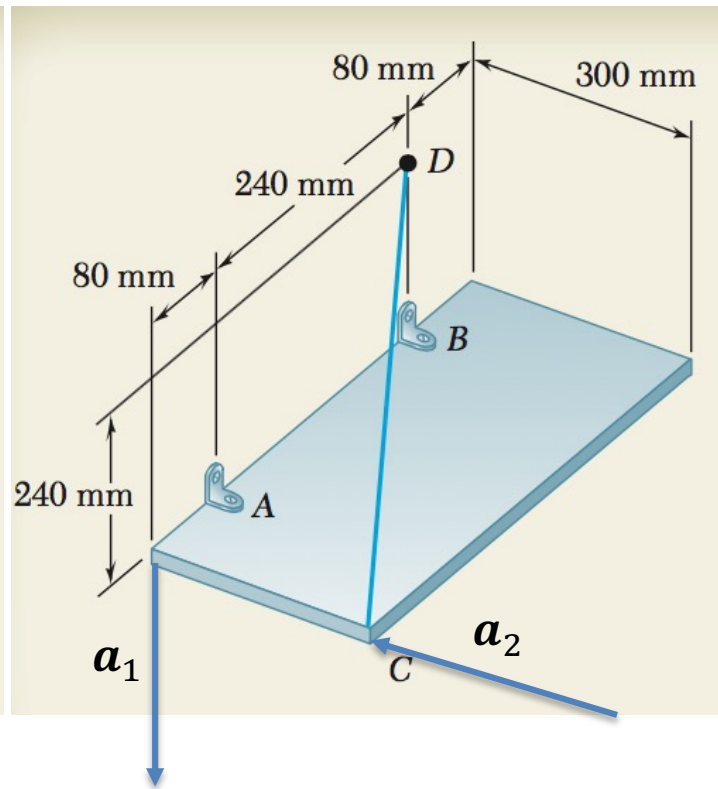
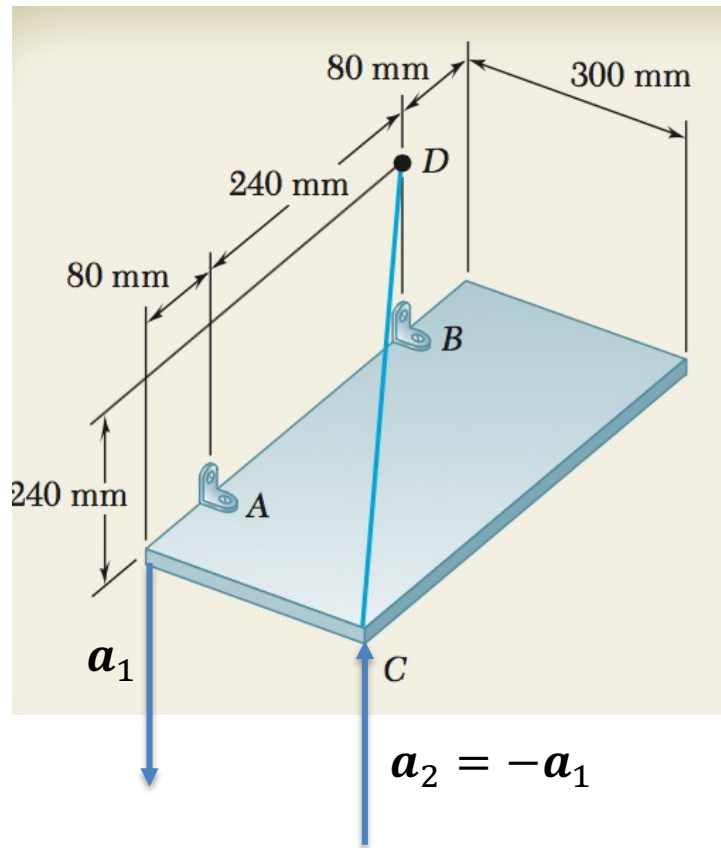
$$\mathbf{M}(O') = \mathbf{r}_{O'O} \times \mathbf{R} + \mathbf{M}(O)$$

derivano i seguenti risultati:

- il momento risultante è indipendente da O se la risultante è nulla: si annulla infatti il termine $\mathbf{r}_{O'O} \times \mathbf{R}$;
- il momento risultante non varia se si sposta il punto O lungo una retta parallela a $\mathbf{R}$ (in questo caso risulta infatti $\mathbf{r}_{O'O} \times \mathbf{R} = 0$)

Definizione: Un sistema di vettori applicati si dice **sistema equilibrato** se risulta $\mathbf{M}(O) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{0}$.

Sistemi di vettori applicati - Esempi



Quale dei tre sistemi di vettori applicati risulta **equilibrato**?

Sistemi di vettori applicati equivalenti

Definizione: sono dati due sistemi di vettori applicati S e S' per i quali risulta:

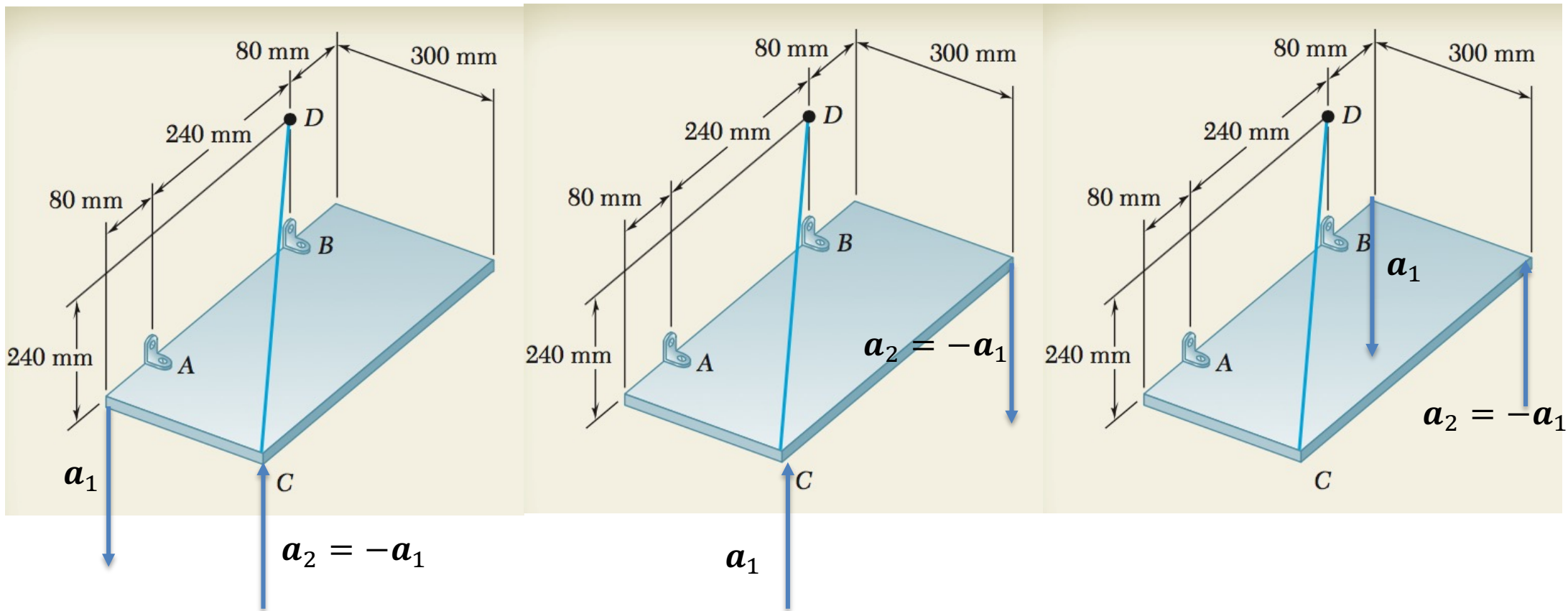
- $S \rightarrow$ risultante $\mathbf{R}$ momento risultante rispetto a O $\mathbf{M}(O)$;
- $S' \rightarrow$ risultante $\mathbf{R}'$ momento risultante rispetto a O $\mathbf{M}'(O)$;

I due sistemi si dicono ***equivalenti*** se valgono le seguenti condizioni :

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{R}' \\ \mathbf{M}(O) &= \mathbf{M}'(O)\end{aligned}$$

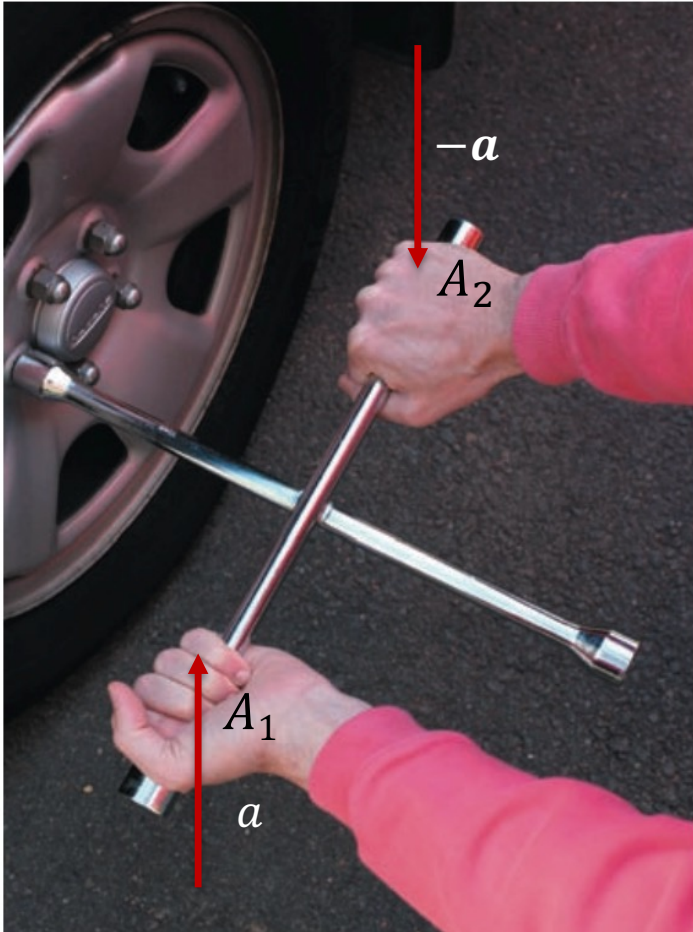
Quindi, sono equivalenti se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante.

Sistemi di vettori applicati equivalenti - esempio



Quali di questi tre sistemi di vettori applicati sono tra loro equivalenti?.

Coppia di vettori applicati



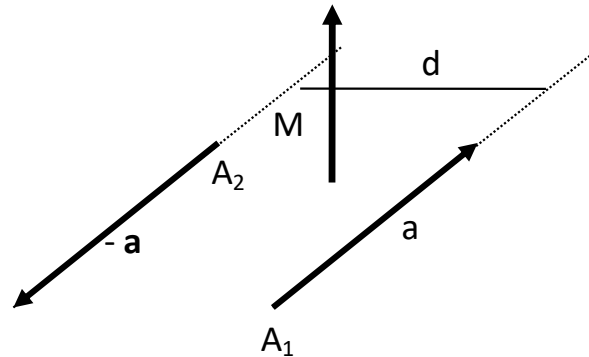
Definizione: Si definisce come **coppia di vettori applicati**, un sistema di vettori applicati costituito da due vettori opposti $(A_1, \mathbf{a})$ e $(A_2, -\mathbf{a})$.

Coppia di vettori applicati

Essendo la risultante di tale sistema nullo, il momento risultante (**momento della coppia**) è invariante rispetto al punto O scelto come polo per il calcolo del momento risultante.

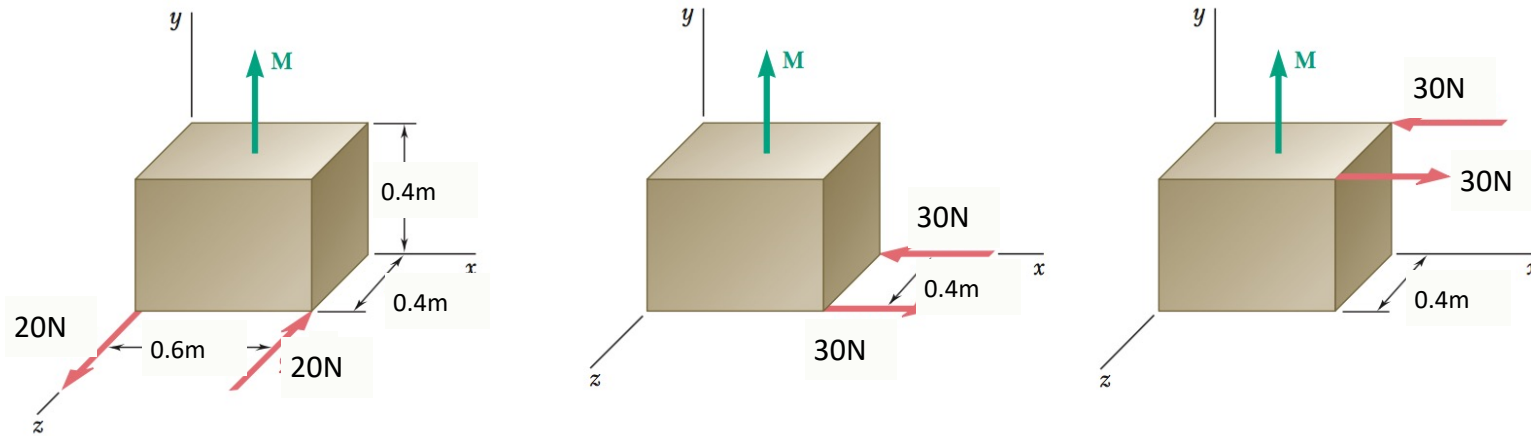
Si definisce quindi momento della coppia ($\mathbf{M}$) un vettore avente:

- modulo uguale al prodotto del modulo di uno dei due vettori, $|\mathbf{a}|$, per la distanza tra le rette d'azione dei due vettori d (braccio) $|\mathbf{M}| = |\mathbf{a}|d$
- direzione ortogonale al piano di appartenenza dei due vettori (piano della coppia)
- verso determinato in modo tale che il vettore $(A_1 - A_2)$, $\mathbf{a}$ ed $\mathbf{M}$ formino una terna destrorsa.



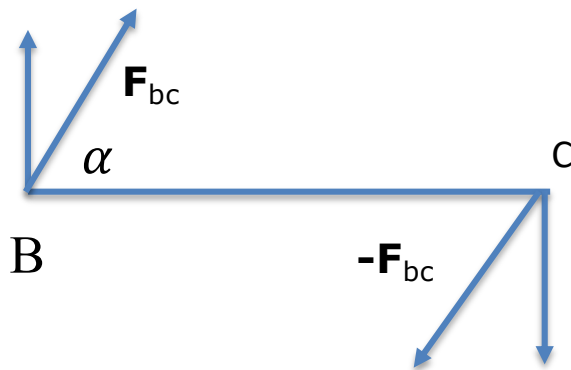
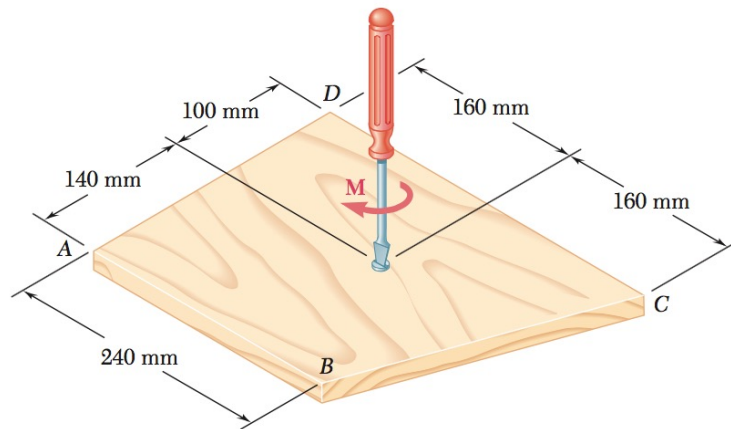
Coppia di vettori applicati

Le tre coppie riportate in figura, applicate allo stesso corpo rigido, hanno lo stesso momento **M**.



Coppie equivalenti: due coppie aventi lo stesso momento sono tra loro equivalenti.

Esercizio



Una coppia di momento **M** con modulo pari a 18 N m è applicato al cacciavite per avvitare la vite sulla piastra di legno come mostrato in figura. Determinare il modulo minimo di due forze opposte costituenti una coppia di momento pari a **M** applicate

- (a) nei punti A e D,
- (b) nei punti B e C,
- (c) in due punti qualsiasi della piastra.

$$F_{AD} = M/d_{AD} = 18 \text{ Nm}/0.24 \text{ m} = 75 \text{ N}$$

$$d_{BC} = \sqrt{d_{AD}^2 - (d_{CD} - d_{AB})^2} = \dots$$

$$F_{BC} = M/d_{BC} = \dots$$

Direzione di F_{bc} ?

$$d_{BC}\alpha = d_{BC}\sin(\alpha)$$

Quando $\alpha = 90 \text{ deg}$, $d_{BC}\alpha$ è massimo e quindi a parità di momento F_{BC} è minimo