

# Corso di FISICA 1



## Capitolo 3 – cinematica del punto materiale in moto rettilineo

Monica Malvezzi, Università degli  
Studi di Siena



Cinematica: parte della meccanica che si occupa di descrivere quantitativamente il moto dei corpi, ricorrendo esclusivamente alle nozioni di spazio e di tempo, indipendentemente dalle cause (forze) del moto stesso

Punto materiale: si definisce punto materiale, in fisica, un corpo le cui dimensioni siano trascurabili rispetto al fenomeno in studio.

Moto rettilineo: moto che si svolge lungo una retta.

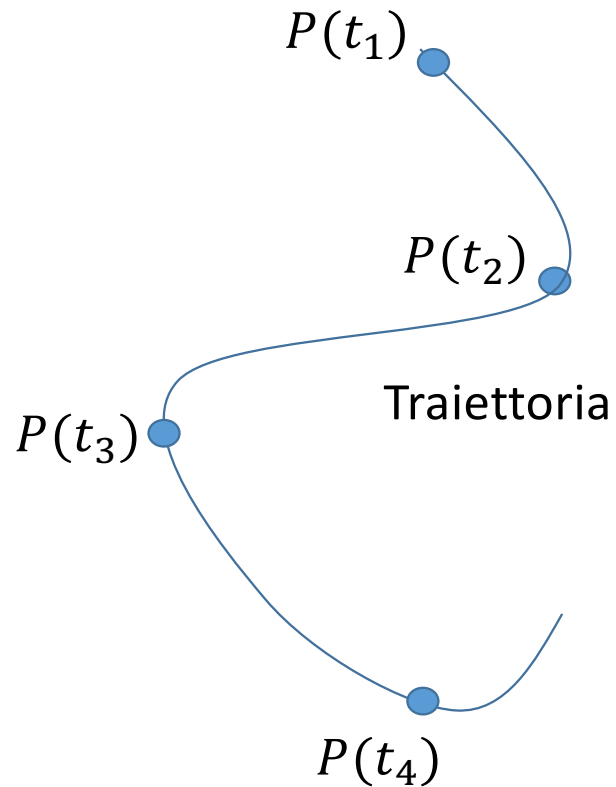
# Grandezze fondamentali per la cinematica

Lunghezza

Massa

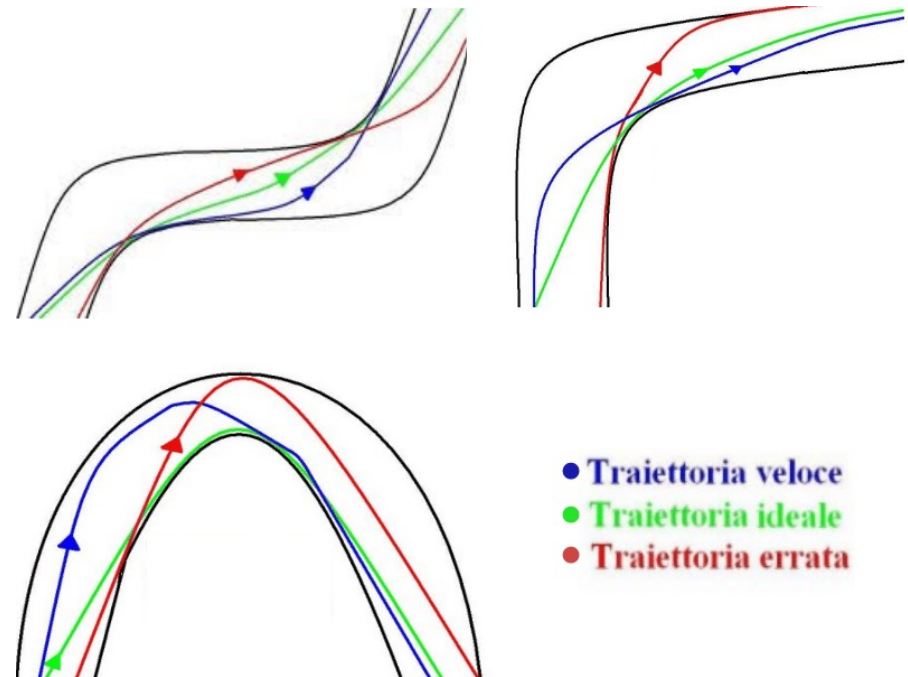
Tempo

# Cinematica del punto - traiettoria

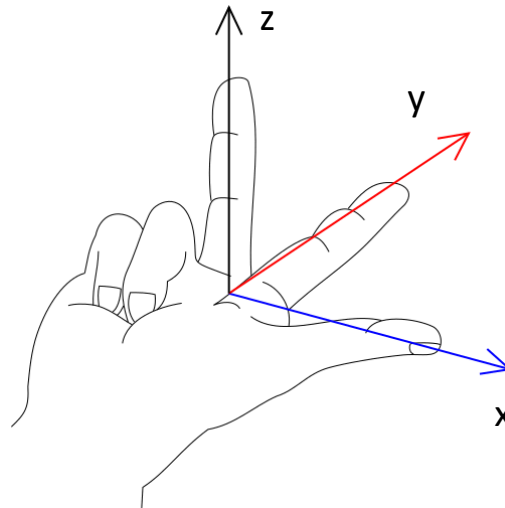
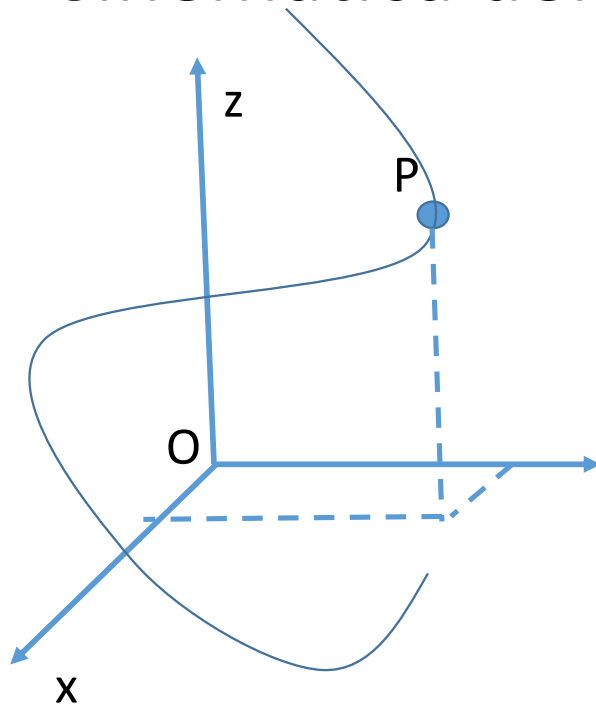


Il punto materiale occupa diverse posizioni nello spazio durante il moto.

La traiettoria è il luogo geometrico (curva) delle posizioni assunte dal punto materiale durante il moto.



# Cinematica del punto



Per rappresentare la posizione e la traiettoria di un punto nello spazio, è utile fissare un sistema di riferimento, di solito cartesiano ortogonale. Indichiamo con  $O$  la sua origine e con  $x$ ,  $y$ ,  $z$  i tre assi.

Per convenzione, i tre assi sono orientati secondo la regola della mano destra.

La posizione del punto  $P$  è individuata dalle sue coordinate rispetto al sistema di riferimento. Dato che il punto si muove, le coordinate variano in funzione del tempo:

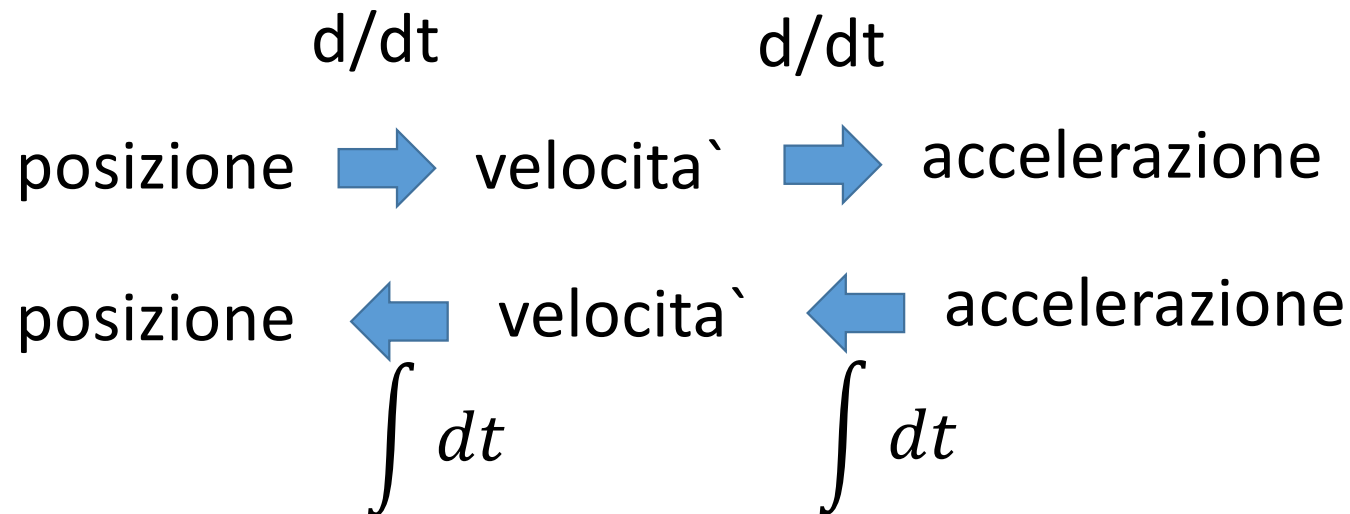
$$\begin{aligned} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{aligned}$$

# Altre grandezze derivate utili per la cinematica

Altre grandezze derivate utili per lo studio del moto del punto materiale:

- velocità
- Accelerazione

Vedremo che tra posizione, velocità e accelerazione sussistono le seguenti relazioni



# Moto rettilineo

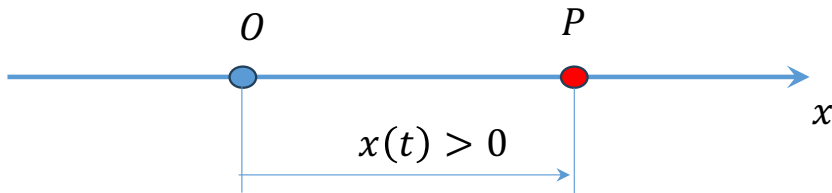
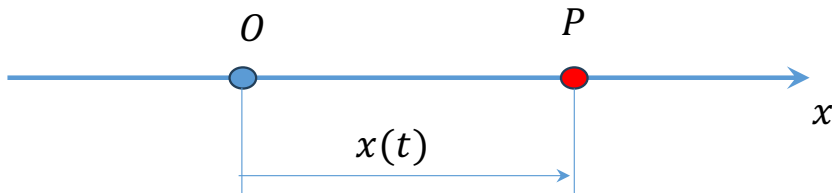
Consideriamo un punto materiale  $P$  che si muove lungo una traiettoria rettilinea.

Indichiamo con  $x$  un asse orientato che coincide con la retta.

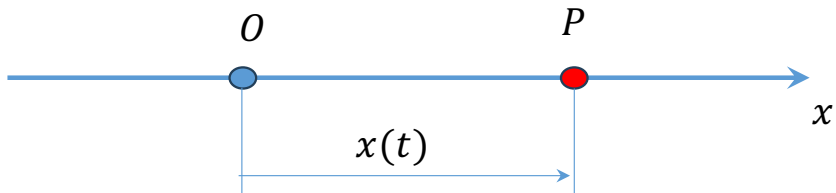
Per poter rappresentare la posizione del punto durante il moto, dobbiamo fissare anche un punto rispetto al quale riferire tale posizione. Indichiamo con  $O$  tale punto. Il punto  $O$  e la direzione dell'asse definiscono anche il segno della coordinata  $x$ .

La posizione del punto  $P$  è quindi individuata dalla sua coordinata  $x$ , che può essere positiva, negativa o nulla a seconda di dove si trova il punto rispetto all'origine e al verso dell'asse.

Dato che la posizione del punto  $P$  varia nel tempo, anche la sua coordinata  $x$  sarà una funzione del tempo, quindi  $x(t)$ .



# Moto rettilineo



Si definisce legge oraria la relazione che descrive  $x$  in funzione di  $t$

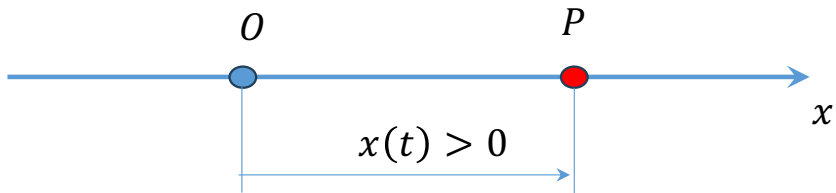
Esempi di leggi orarie che vedremo:

$$x(t) = ct + b$$

$$x(t) = a + bt + ct^2$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

$$x(t) = A e^{-\xi \omega t} \sin(\omega t + \phi)$$



ecc.

# Moto rettilineo

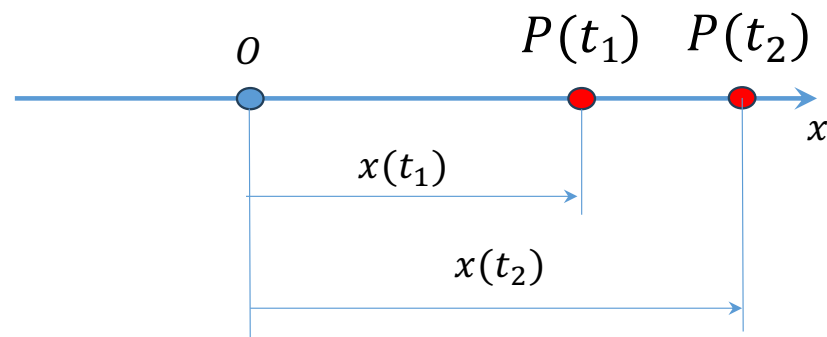
Osserviamo quindi il moto di un punto materiale lungo una retta e prendiamo nota della posizione che assume in diversi intervalli di tempo  $t_1$ ,  $t_2$ , ecc.

All'istante  $t_1$  il punto ha coordinata  $x(t_1)$ , all'istante  $t_2$  il punto ha coordinata  $x(t_2)$ , ecc.

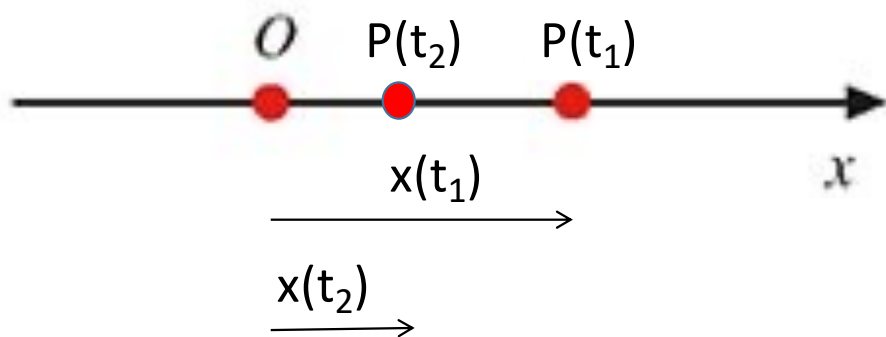
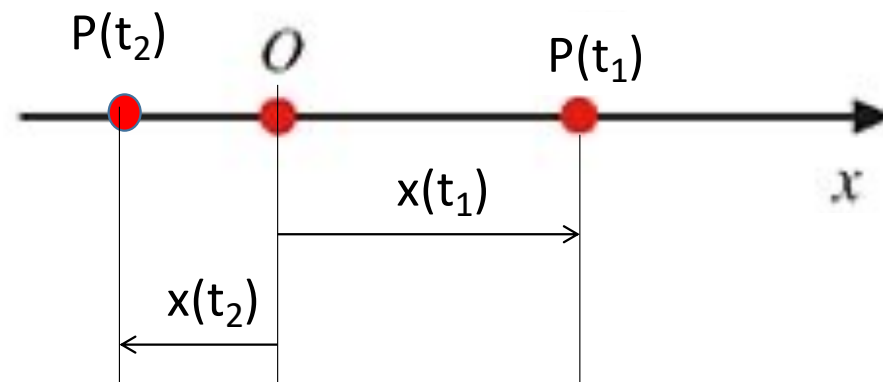
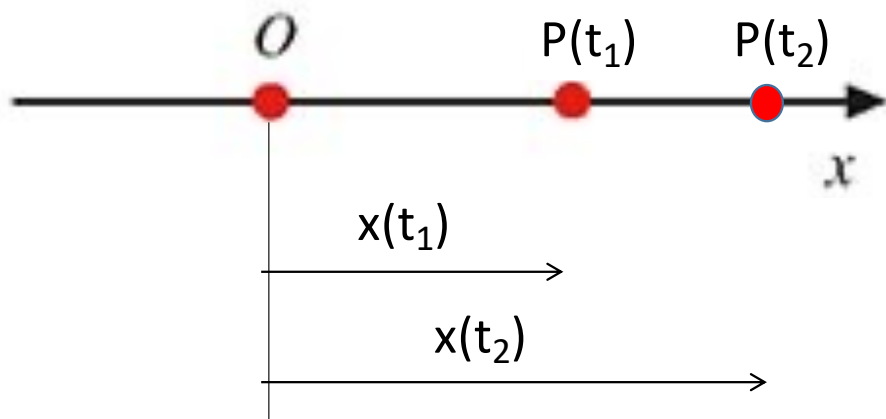
Possiamo annotare i valori del tempo e i corrispondenti valori delle coordinate in una tabella.

| $t$   | $x$      |
|-------|----------|
| $t_1$ | $x(t_1)$ |
| $t_2$ | $x(t_2)$ |

Suggerimento: quando si riportano i valori numerici nella tabella, dobbiamo ricordarci di annotare anche l'unità di misura utilizzata per rappresentare il tempo e la coordinata!



# Moto rettilineo



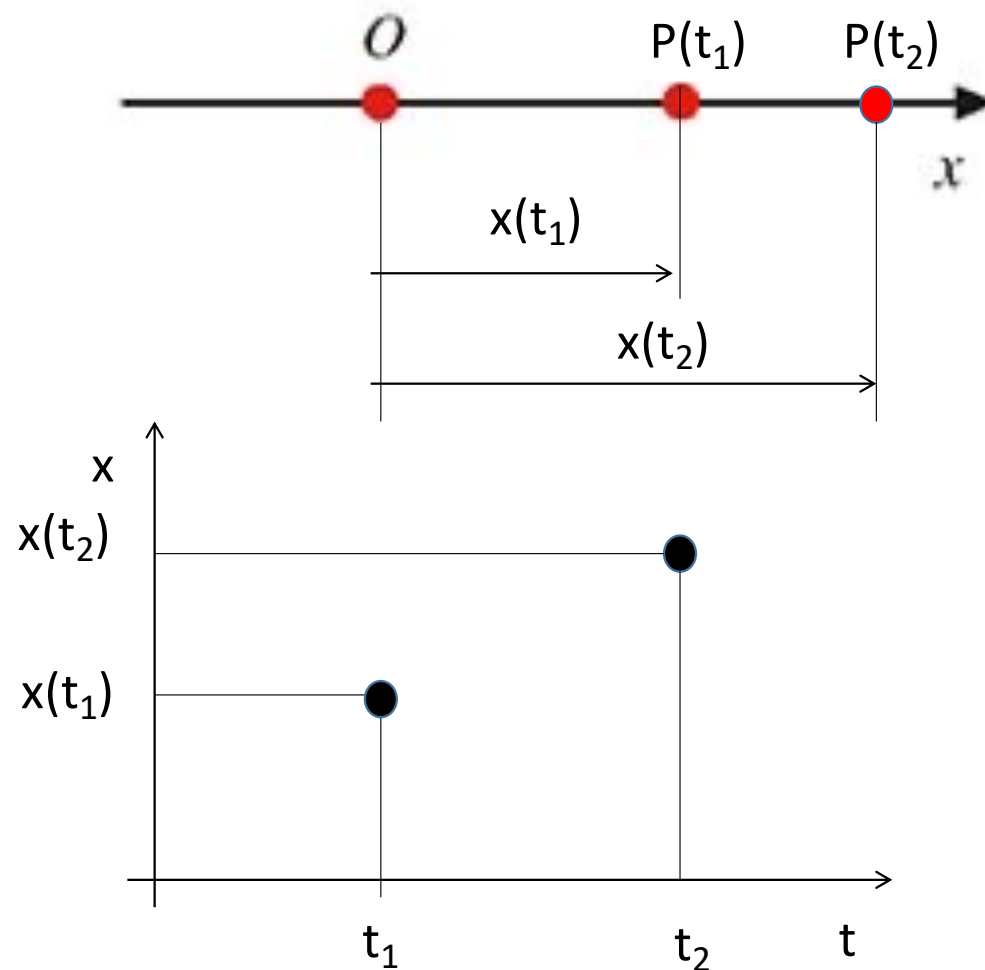
# Moto rettilineo

Oltre alla tabella, è spesso utile riportare i valori dello spostamento in funzione del tempo in un grafico.

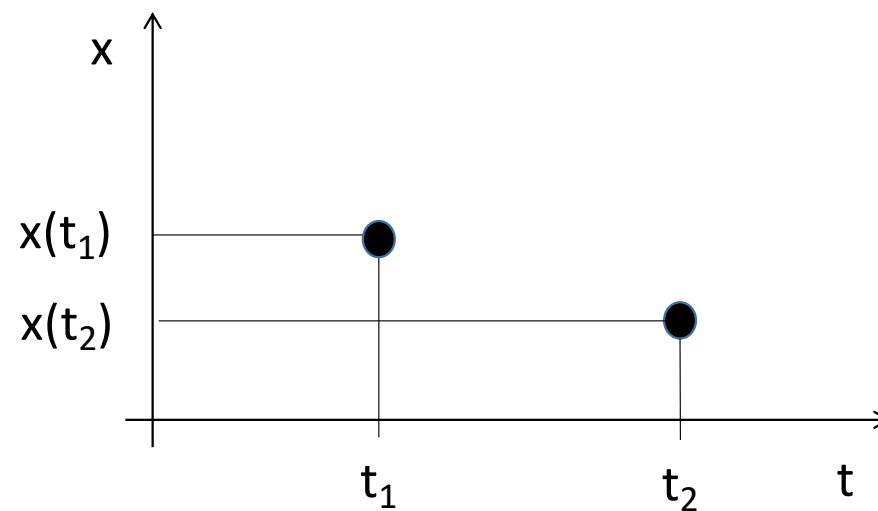
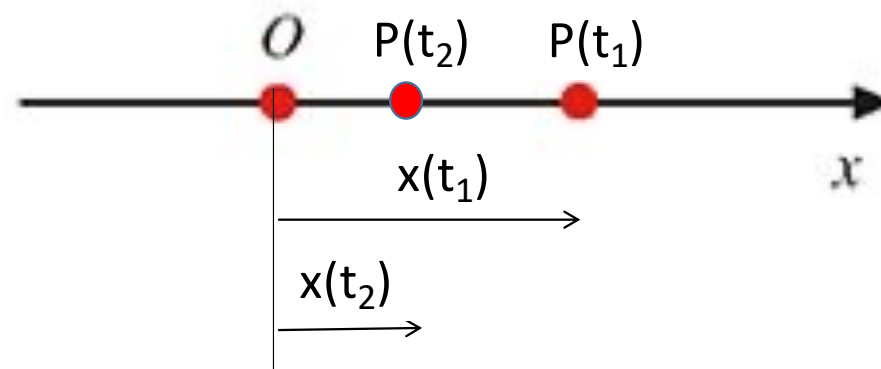
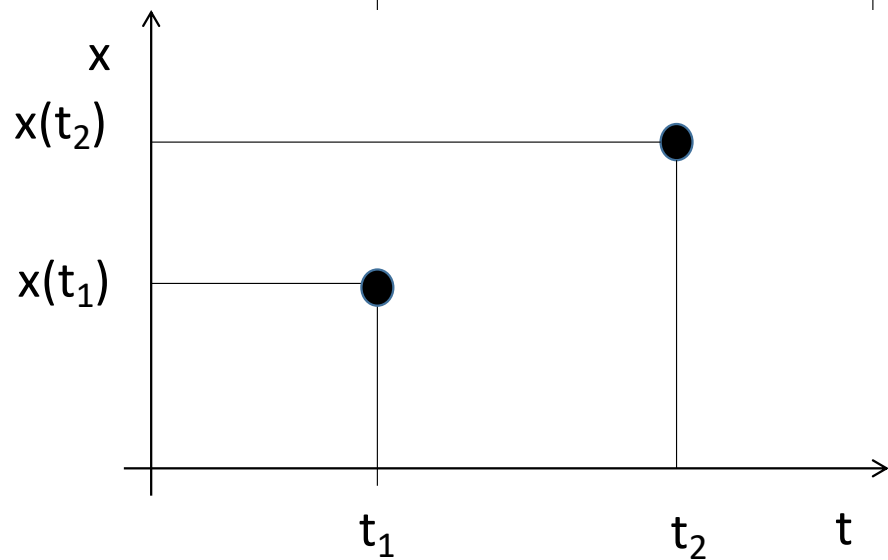
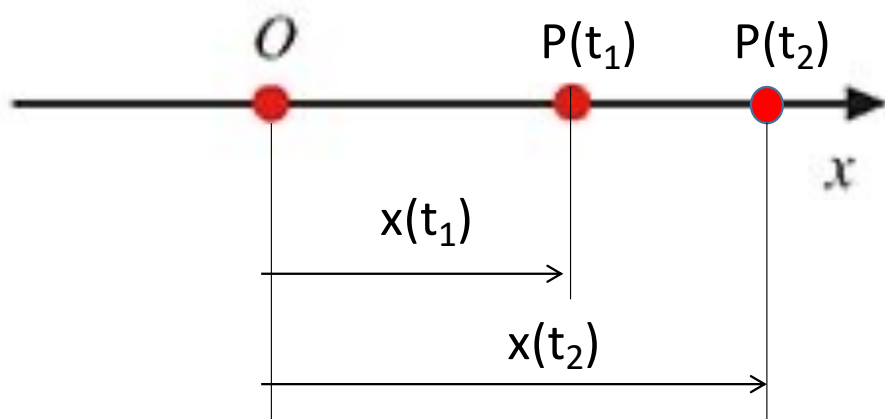
Riportiamo nell'asse delle ascisse il tempo e nell'asse delle ordinate lo spostamento.

Ogni coppia tempo-posizione si rappresenta come un punto nel piano.

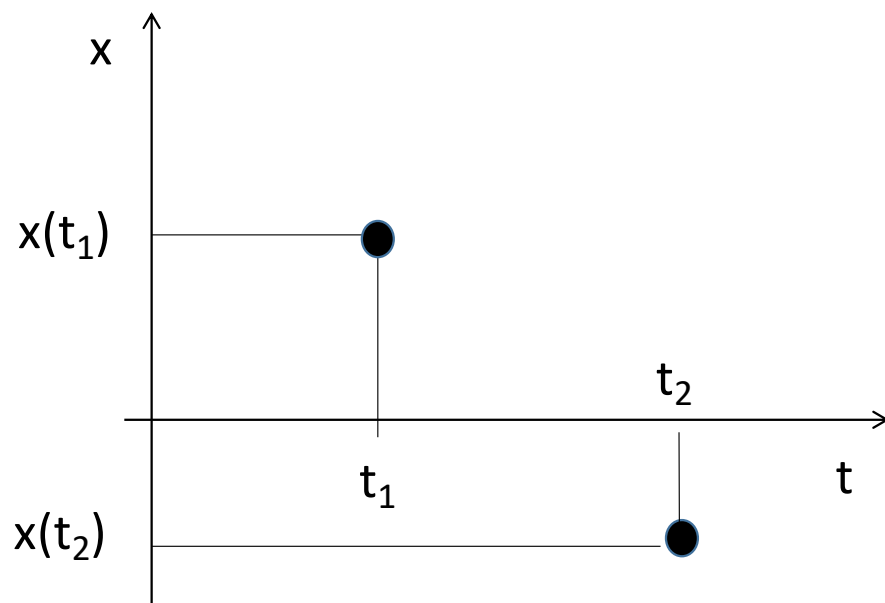
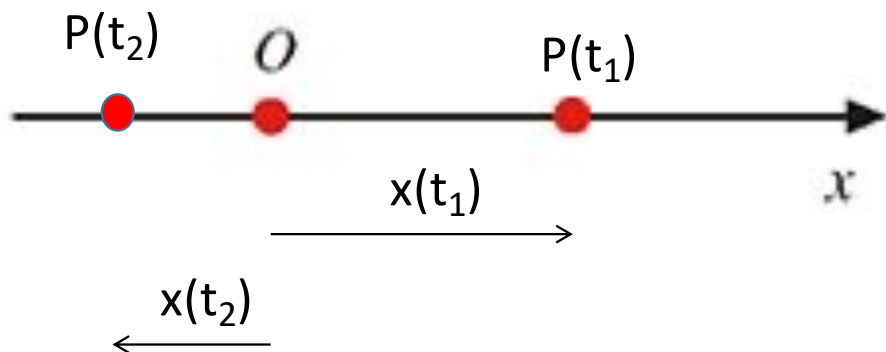
Suggerimento: quando si riportano i valori numerici nella grafico, dobbiamo ricordarci di riportare sugli assi anche le unità di misura utilizzate per rappresentare il tempo e la posizione!



# Esempi

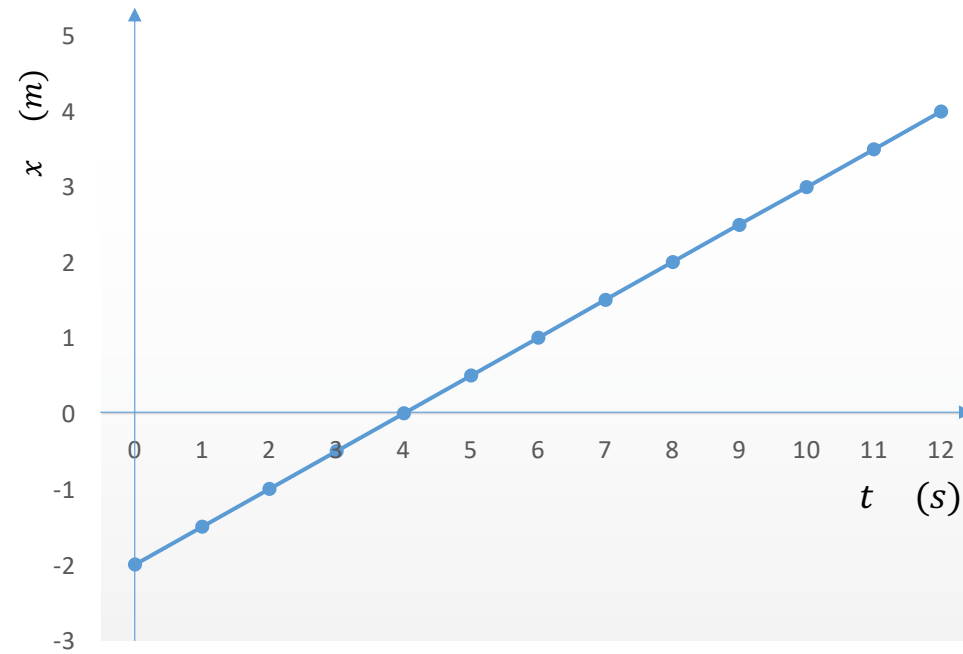


# Esempi



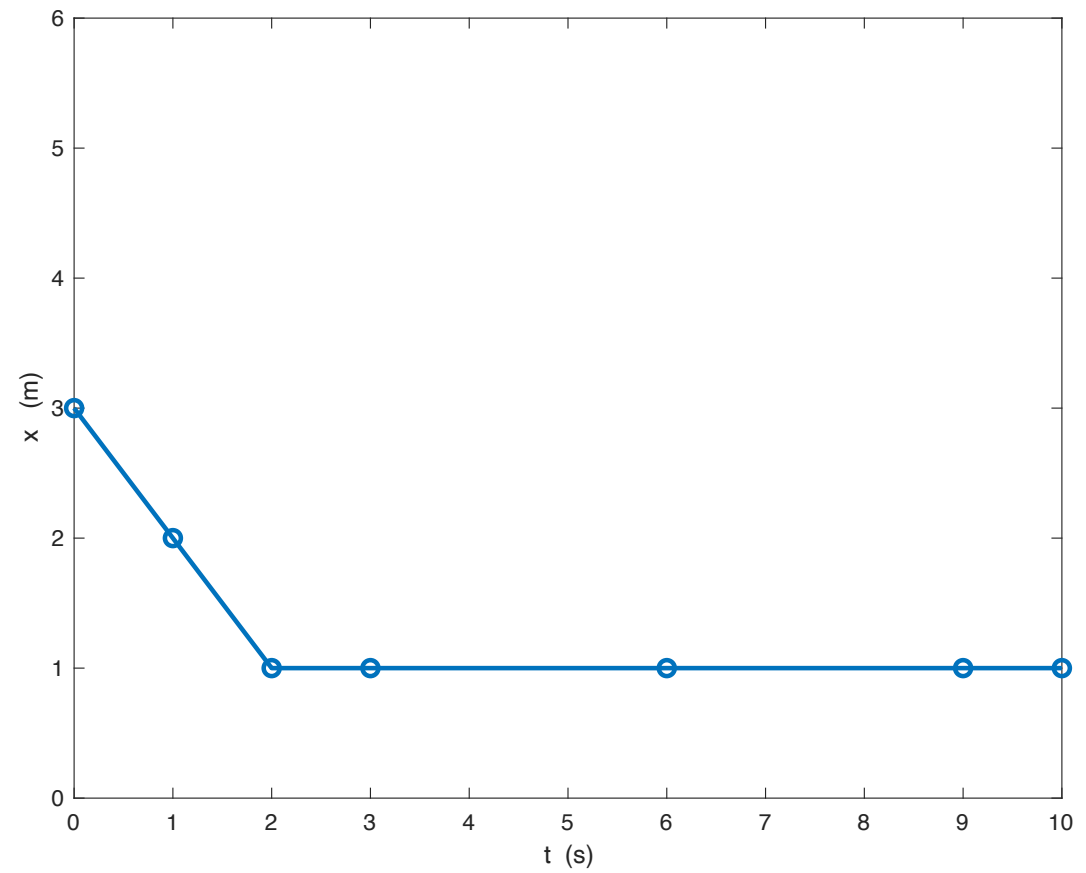
# Esempi

| Tempo (s) | Posizione (m) |
|-----------|---------------|
| 0         | -2            |
| 1         | -1,5          |
| 2         | -1            |
| 3         | -0,5          |
| 4         | 0             |
| 5         | 0,5           |
| 6         | 1             |
| 7         | 1,5           |
| 8         | 2             |
| 9         | 2,5           |
| 10        | 3             |
| 11        | 3,5           |
| 12        | 4             |

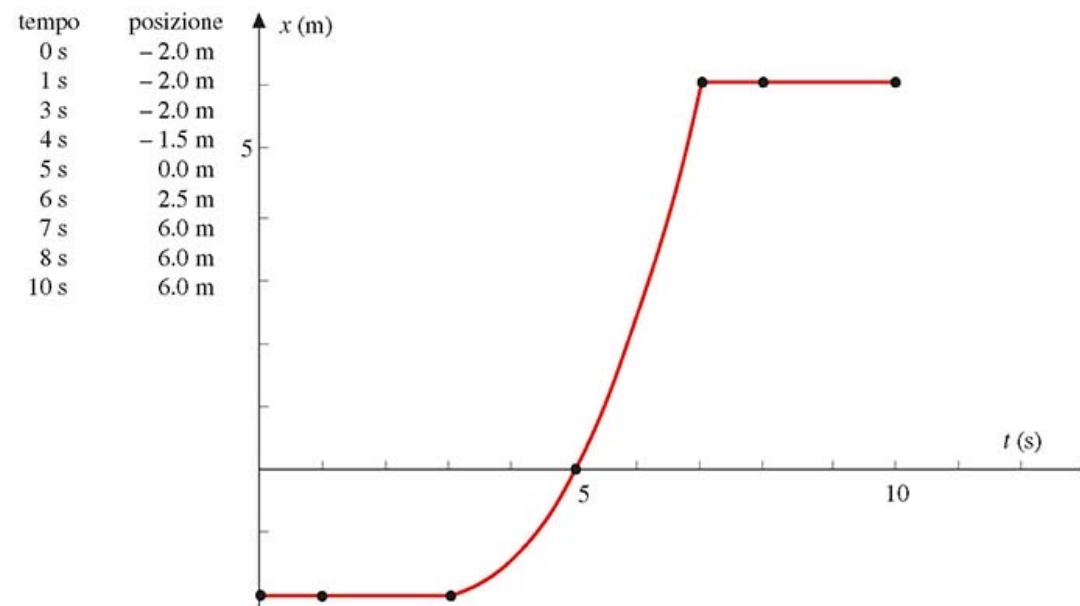


# Esempi

| Tempo (s) | Posizione (m) |
|-----------|---------------|
| 0         | 4             |
| 1         | 3             |
| 2         | 2             |
| 3         | 1             |
| 6         | 1             |
| 9         | 1             |
| 10        | 1             |



# Esempi



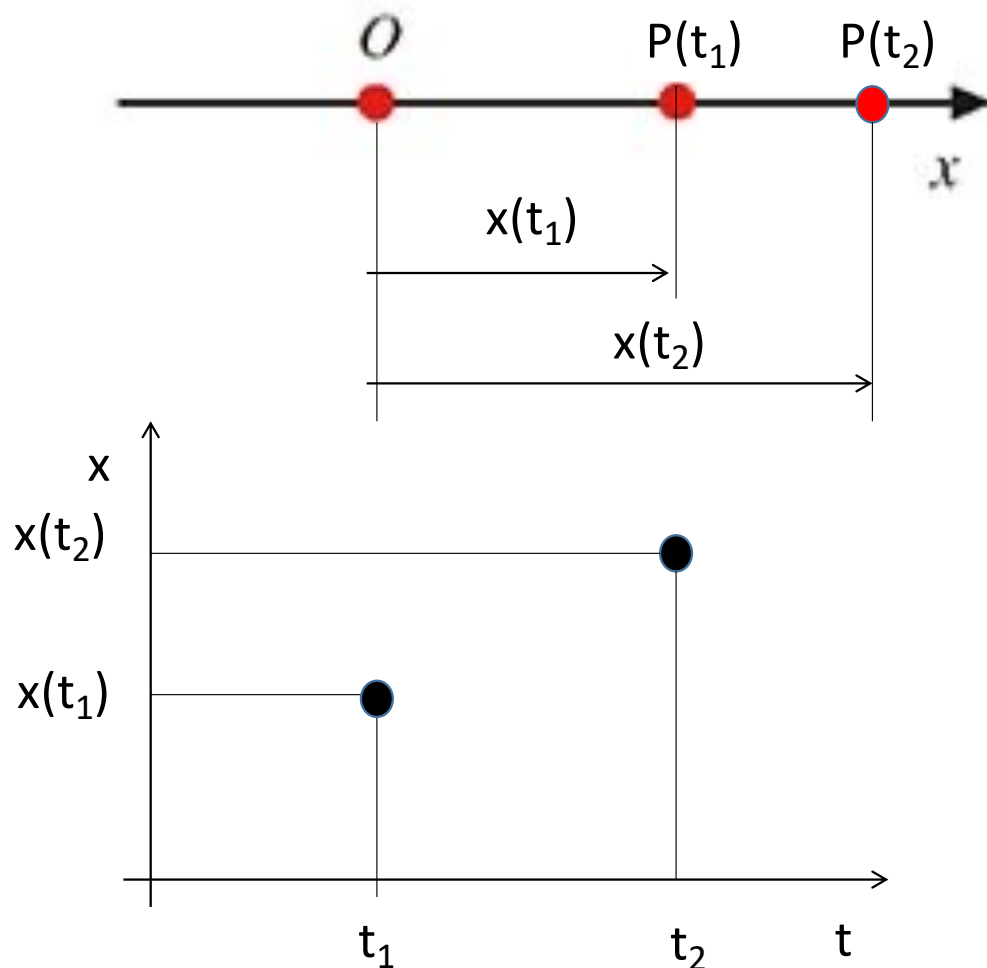
Nell'intervallo di tempo tra  $t = 0$  e  $t = 3$  s il punto rimane fermo nella posizione  $x = -2$  m, successivamente si muove secondo il verso positivo della retta con una relazione quadratica tra  $x$  e  $t$  del tipo  $x = a + b(t - t_0)^2$ , in cui  $a = -2$  m,  $b = 0.5 \text{ ms}^{-2}$ ,  $t_0 = 3$  s. Nella posizione  $x = 6$  m il punto si ferma.

**Figura 1.4**

A long-exposure photograph of a highway at night, showing vibrant, curved light trails from cars in red, yellow, and white. The trails curve from the bottom left towards the top right, creating a sense of motion and speed. The background is dark, and the light trails are the primary source of illumination.

Velocità

# Velocità media



Consideriamo un punto materiale che si muove di moto rettilineo.

All'istante  $t_1$  esso occupa la posizione di ascissa  $x(t_1)$ , mentre ad un istante successivo  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ), esso occupa la posizione  $x(t_2)$ .

Si definisce la velocità media nell'intervallo  $[t_1, t_2]$ ,  $v_{m1,2}$  la seguente quantità:

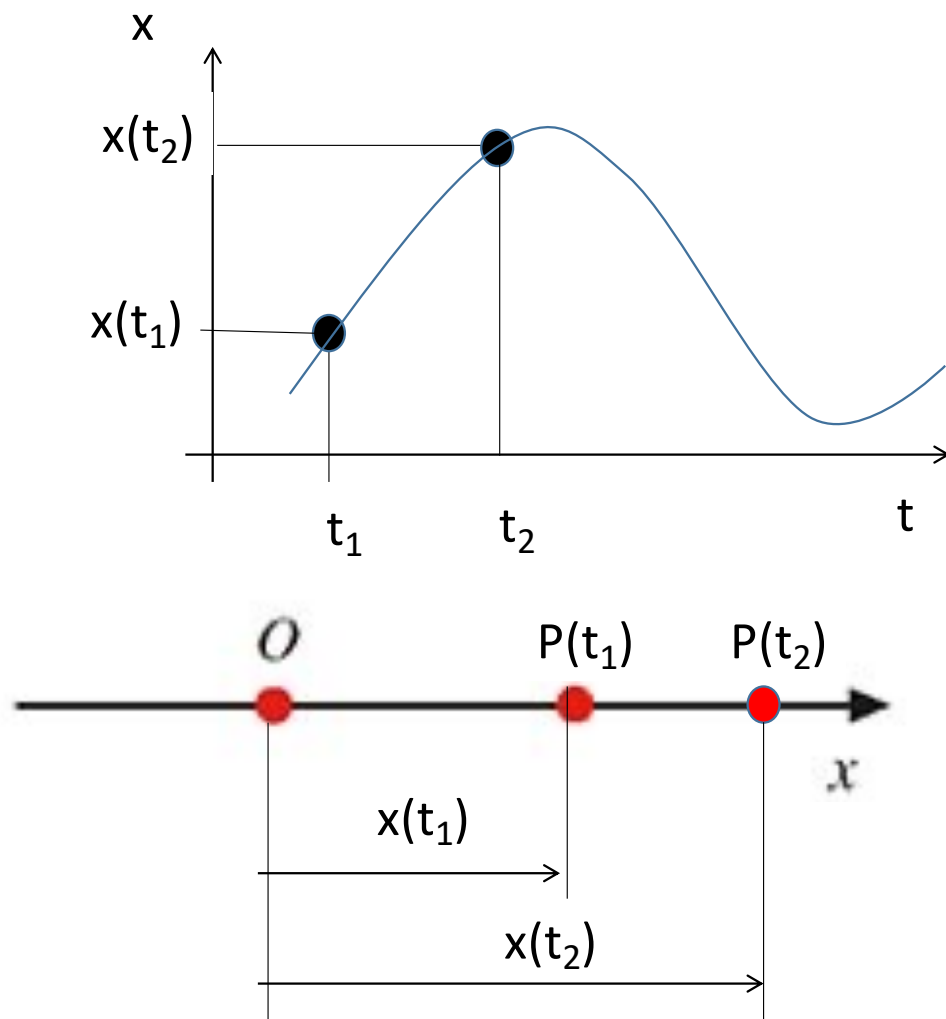
$$v_{m1,2} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x_{1,2}}{\Delta t_{1,2}}$$

Analisi dimensionale: la velocità media è data dal rapporto tra una differenza di lunghezze e una differenza di tempi, quindi dimensionalmente si esprime come una lunghezza/tempo.

$$[v_{m1,2}] = L/T$$

Utilizzando le unità del SI, ad esempio, la velocità si esprime in m/s (metri al secondo).

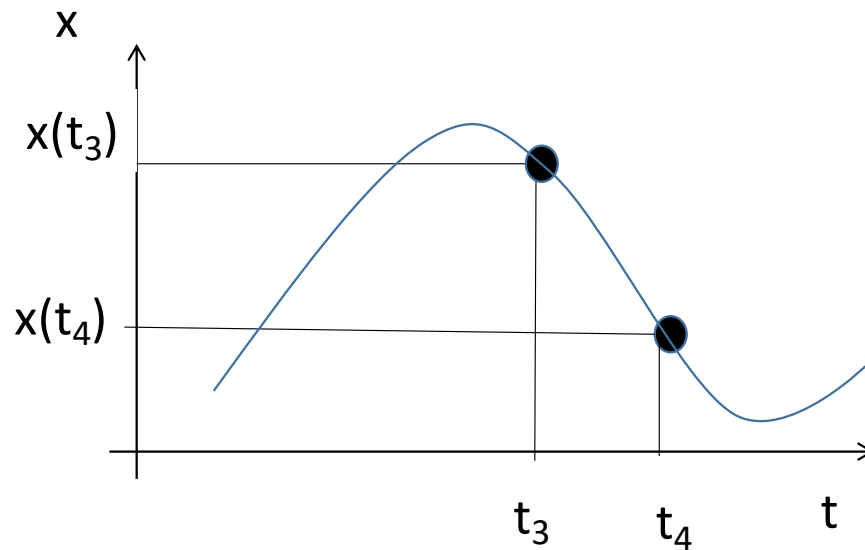
# Velocità media – alcuni esempi



Supponiamo che la posizione  $x$  vari nel tempo secondo una legge come quella rappresentata nel grafico. Prendiamo due istanti di tempo nel tratto iniziale del grafico. In questo tratto risulta  $x(t_2) > x(t_1)$ . La velocità media risulta:

$$v_{m1,2} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x_{1,2}}{\Delta t_{1,2}} > 0$$

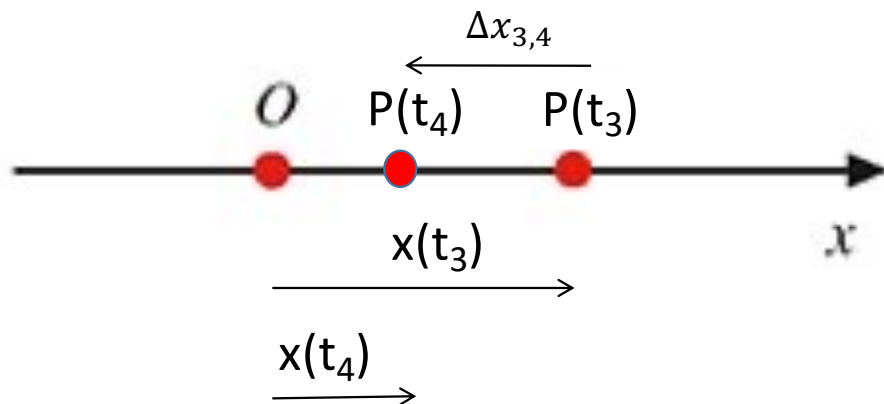
# Velocità media – alcuni esempi



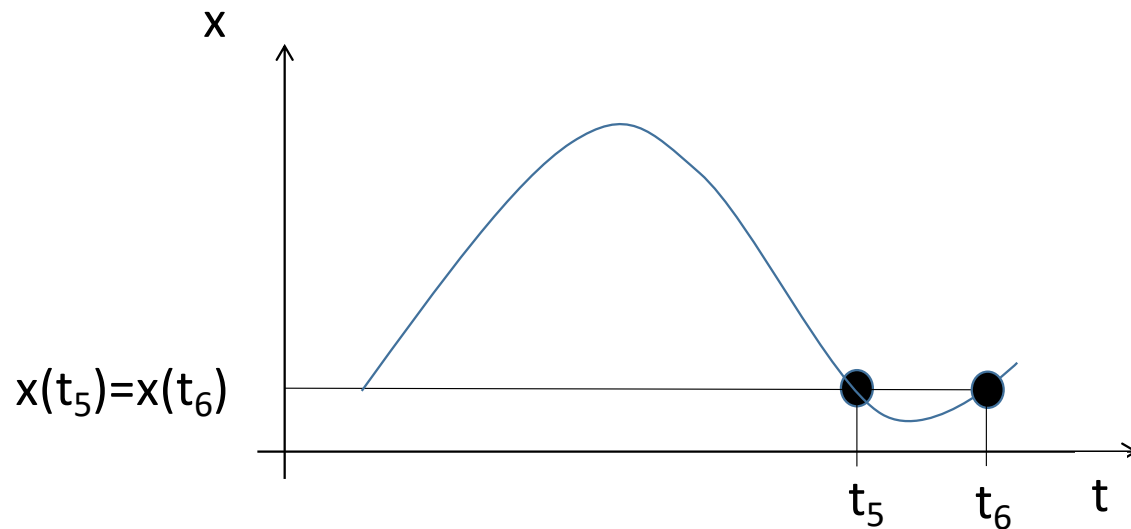
Prendiamo quindi altri due istanti di tempo  $t_3$  e  $t_4$  nel tratto successivo del grafico.

In questo tratto risulta  $x(t_4) < x(t_3)$  (il punto sta «tornando indietro»). La velocità media in questo caso risulta

$$v_{m3,4} = \frac{x(t_4) - x(t_3)}{t_4 - t_3} = \frac{\Delta x_{3,4}}{\Delta t_{3,4}} < 0$$



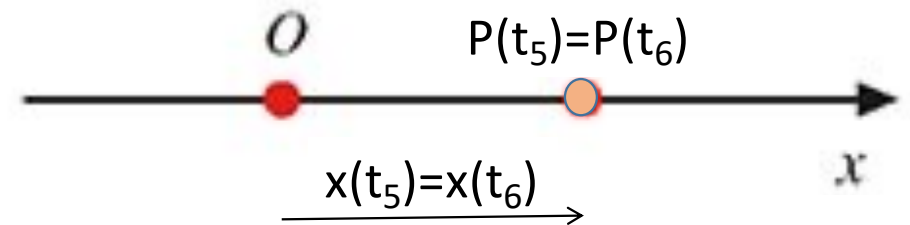
# Velocità media – alcuni esempi



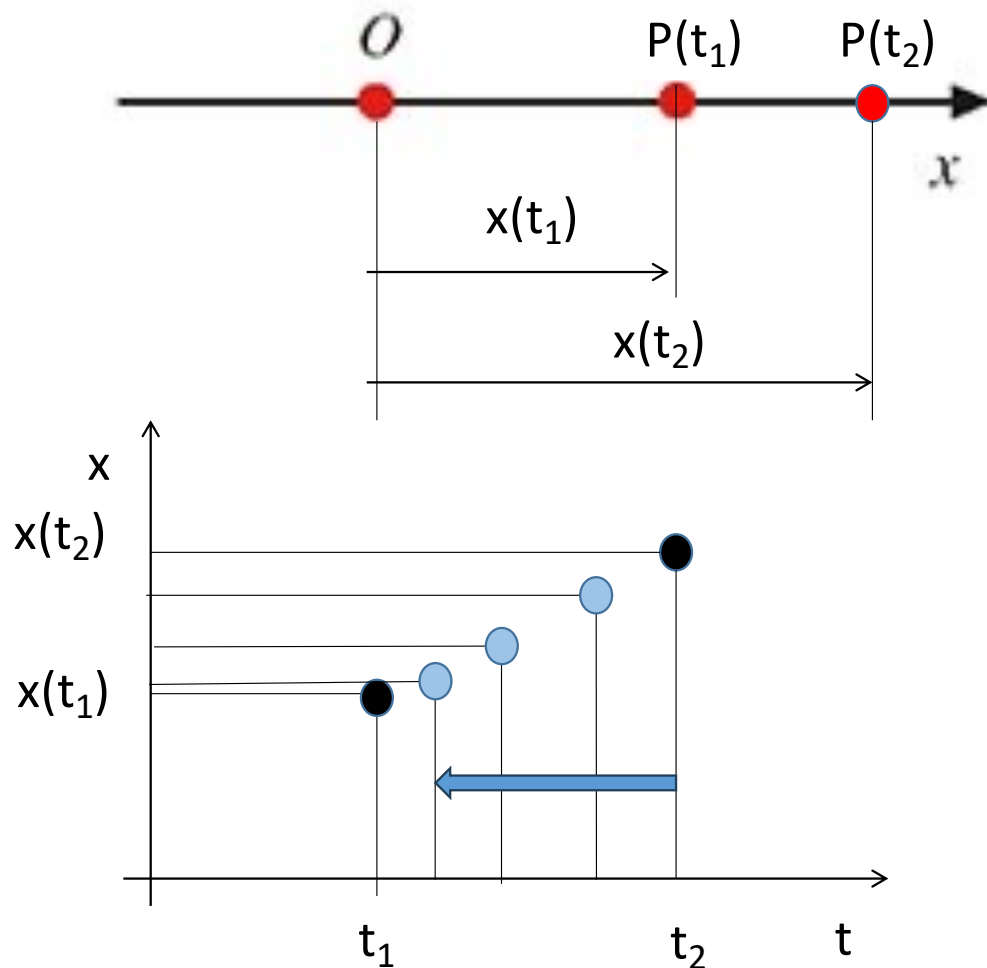
Prendiamo infine altri due istanti di tempo  $t_5$  e  $t_6$  nel tratto finale del grafico.

In questo tratto risulta  $x(t_5) = x(t_6)$ . La velocità media in questo caso vale

$$v_{m5,6} = \frac{x(t_6) - x(t_5)}{t_6 - t_5} = \frac{\Delta x_{5,6}}{\Delta t_{5,6}} = 0$$



# Velocità istantanea

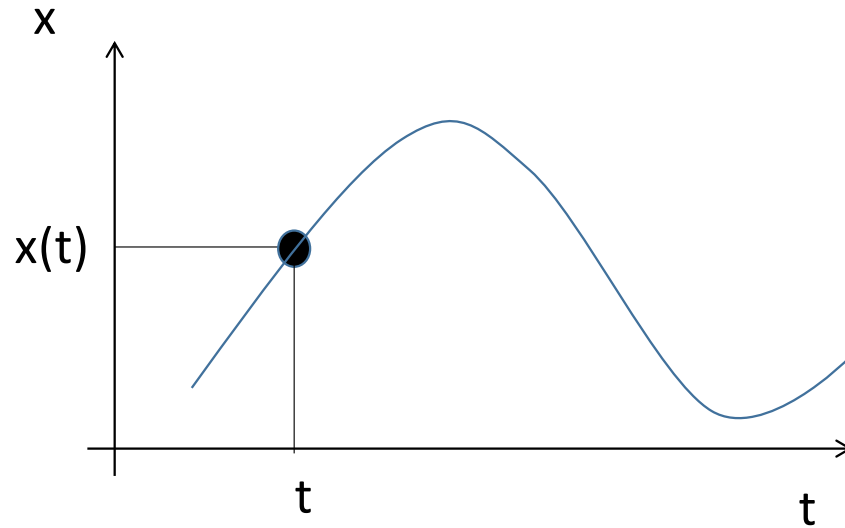


Abbiamo definito la velocità media nell'intervallo  $[t_1, t_2]$ ,  $v_{m1,2}$  la seguente quantità:

$$v_{m1,2} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x_{1,2}}{\Delta t_{1,2}}$$

Cosa succede se prendiamo intervalli di tempo  $[t_1, t_2]$  sempre più piccoli, tali cioè che  $\Delta t_{1,2} \rightarrow 0$ ?

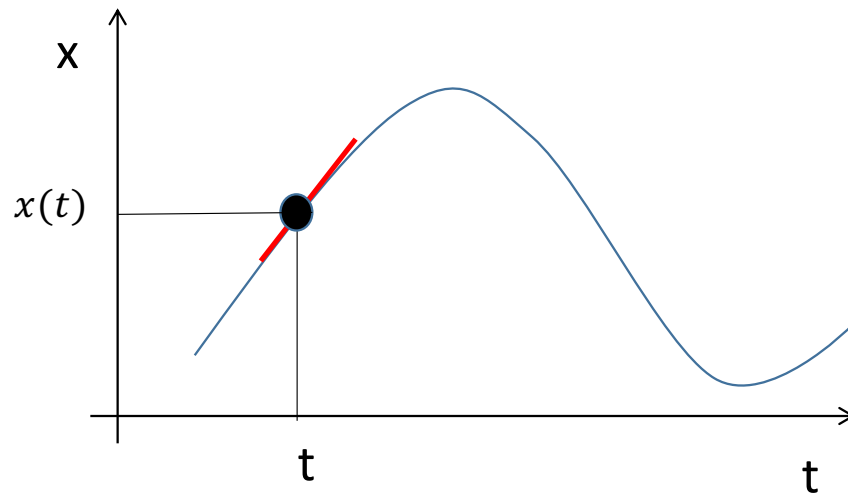
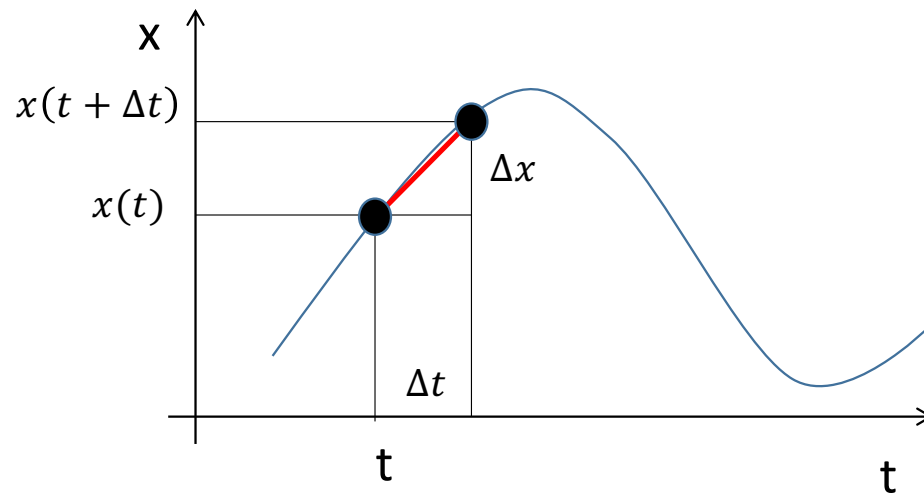
# Velocità istantanea



Si definisce *velocità istantanea*  $v$  del punto all'istante  $t$  il risultato della seguente espressione

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right) = \frac{dx}{dt}$$

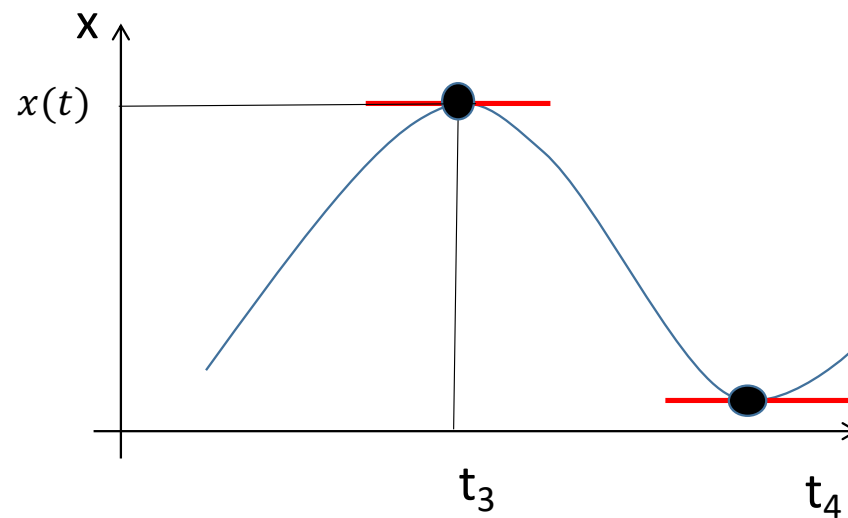
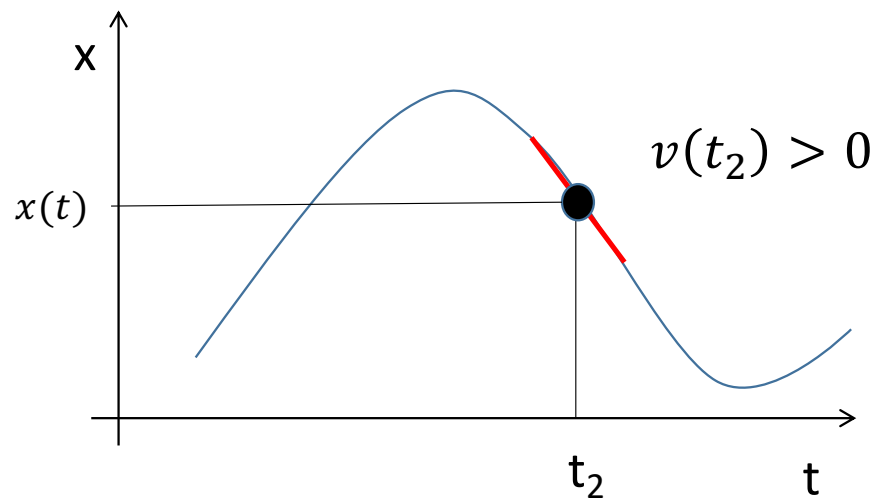
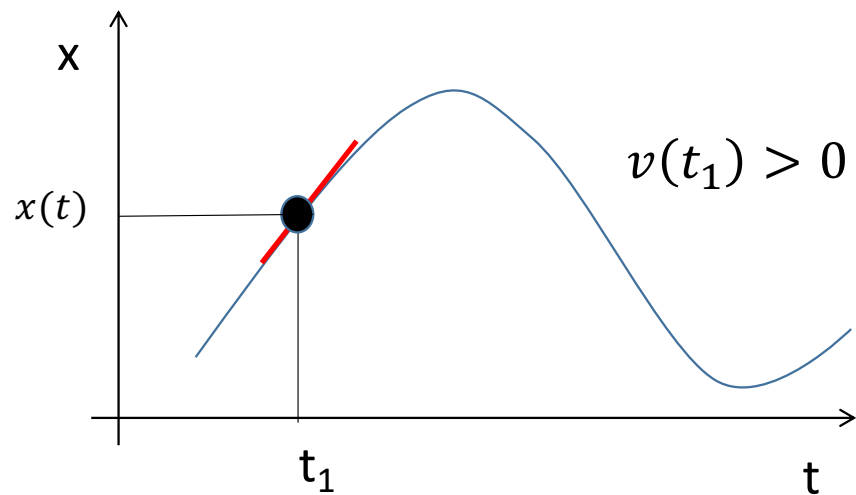
# Velocità istantanea



$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right) = \frac{dx}{dt}$$

Sul grafico tempo/spostamento, la velocità in un determinato istante rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico in quell'istante.

# Velocità istantanea



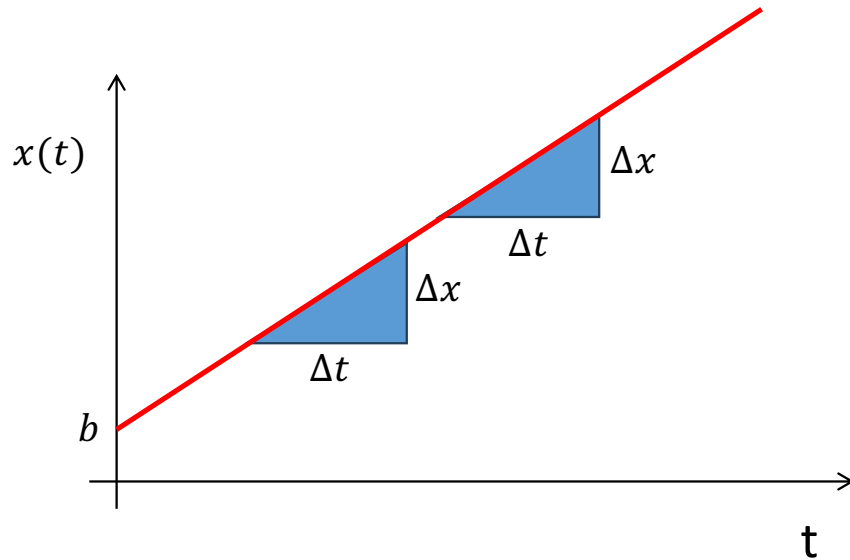
$$v(t_3) = v(t_4) = 0$$

Moto rettilineo  
uniforme

---



# Moto rettilineo uniforme



Un corpo si muove di moto rettilineo uniforme quando la sua legge oraria è una funzione lineare (polinomio di primo grado)

$$x(t) = ct + b$$

In questo tipo di moto, in intervalli di tempo uguali  $\Delta t$  il punto materiale compie spostamenti uguali  $\Delta x$ .

La velocità in un moto rettilineo uniforme vale

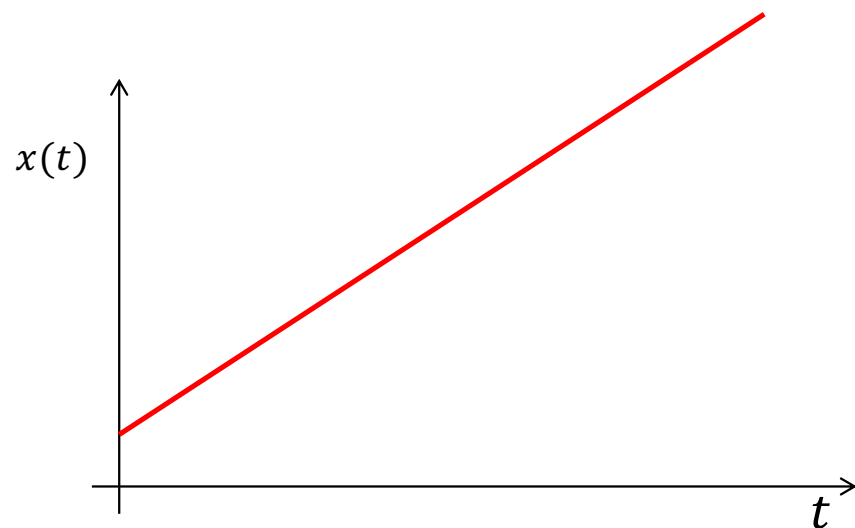
$$v = \frac{dx}{dt} = c$$

ed è **costante**.

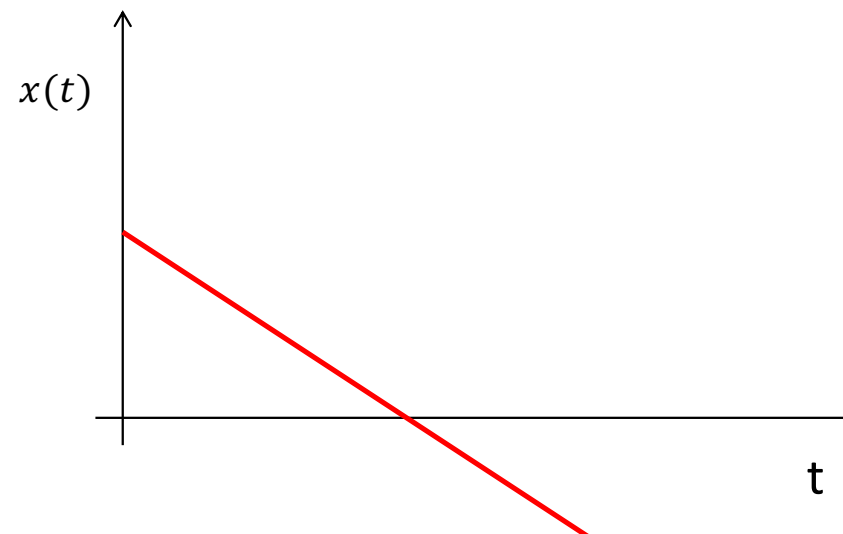
La costante  $b$  nella legge di moto rappresenta la posizione iniziale del punto, cioè la posizione che esso occupa per  $t = 0$ :

$$x(0) = b$$

# Moto rettilineo uniforme – alcuni esempi

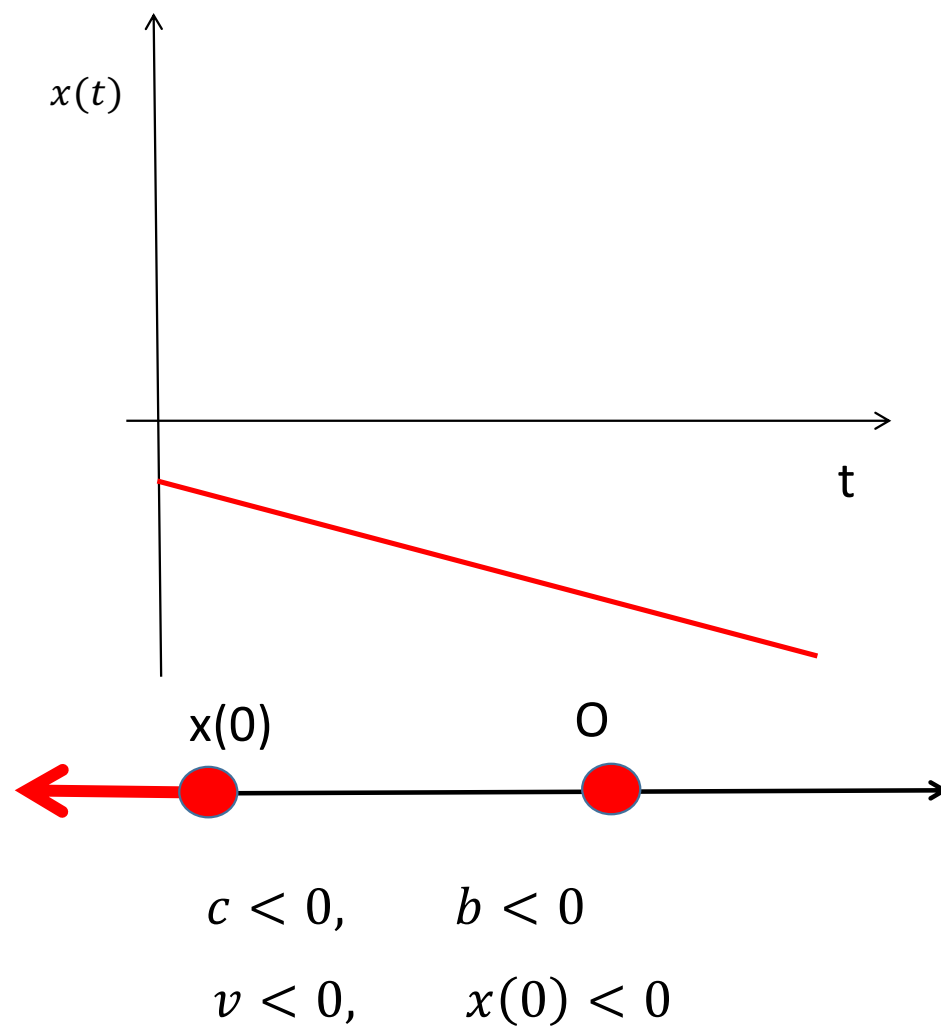
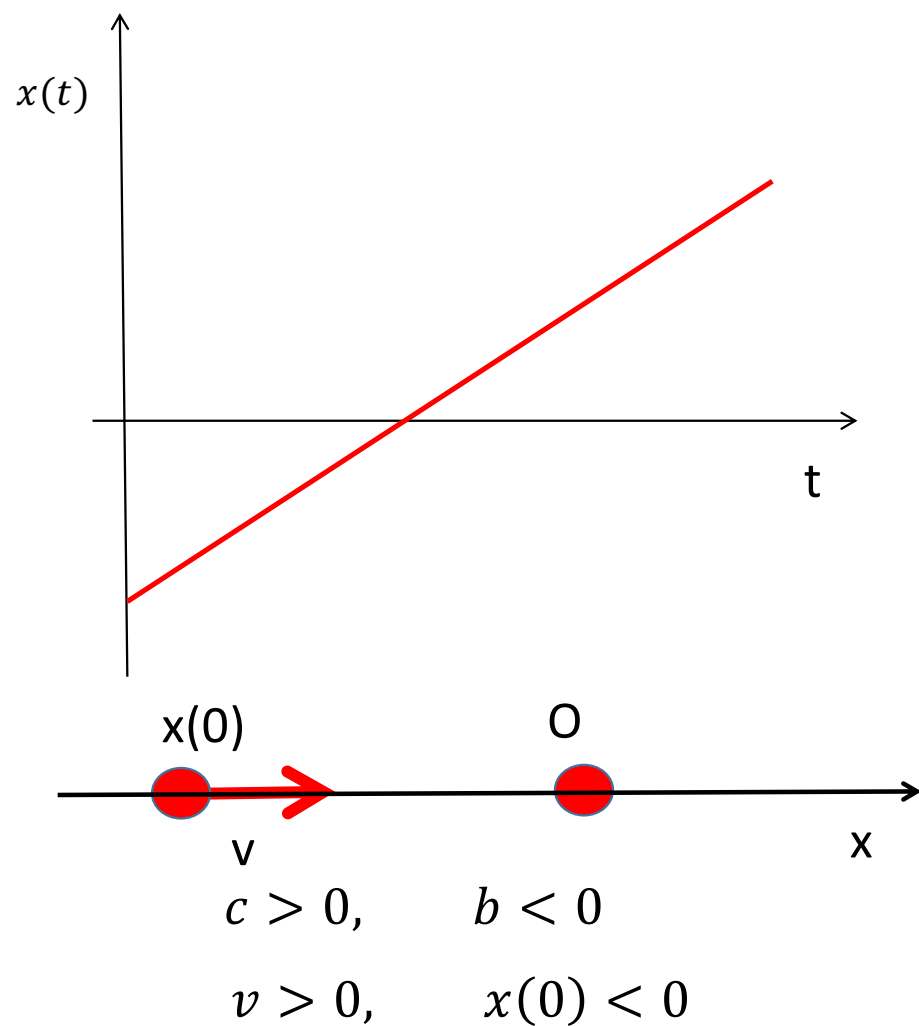


$$\begin{aligned} c &> 0, & b &> 0 \\ v &> 0, & x(0) &> 0 \end{aligned}$$

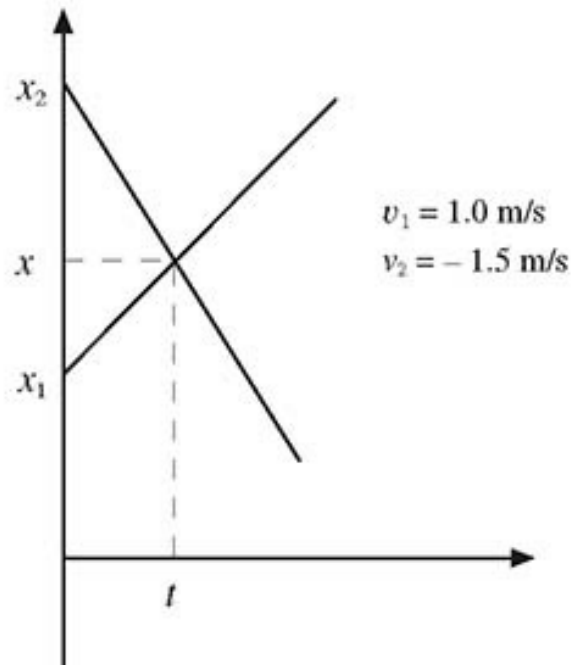


$$\begin{aligned} c &< 0, & b &> 0 \\ v &< 0, & x(0) &> 0 \end{aligned}$$

# Moto rettilineo uniforme – alcuni esempi



## Esempio: due punti materiali si muovono sulla stessa retta con velocità diverse



Due punti materiali si muovono sulla stessa retta con le seguenti leggi orarie

$$x = v_1 t + x_1$$

$$x = v_2 t + x_2$$

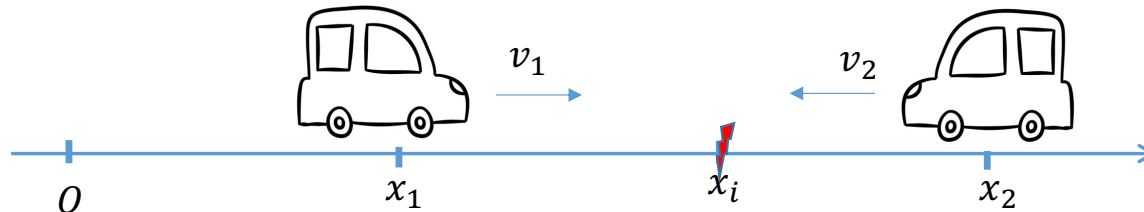
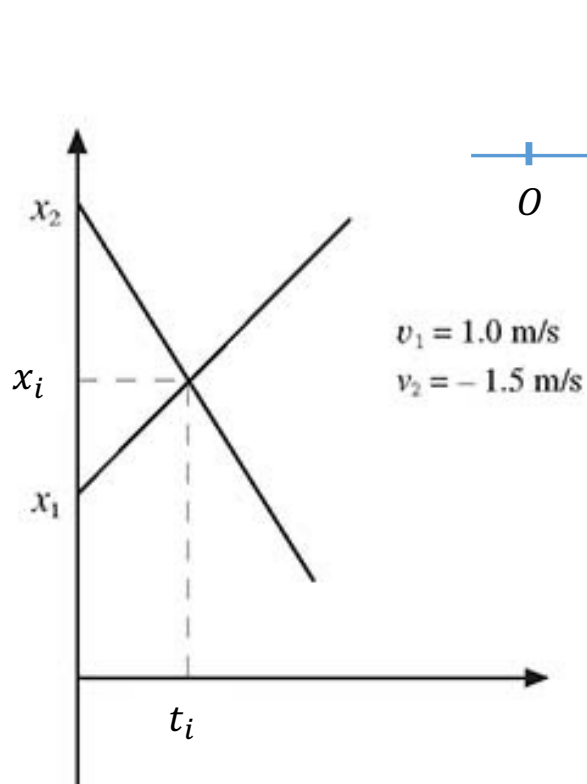
Supponiamo che il primo punto sia più indietro del secondo

$$x_1 < x_2$$

e che il primo punto proceda in avanti, mentre il secondo stia tornando indietro, cioè:

$$v_1 > 0, v_2 < 0$$

# Esempio



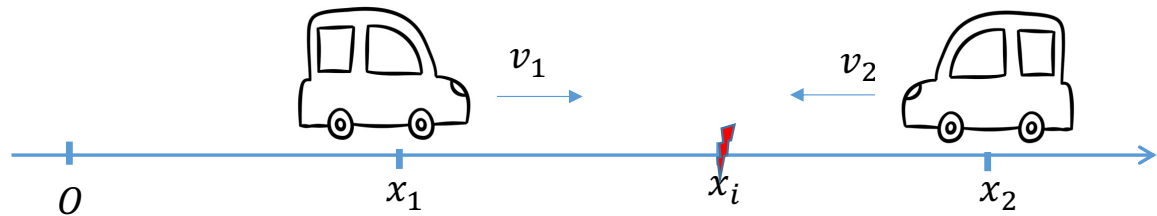
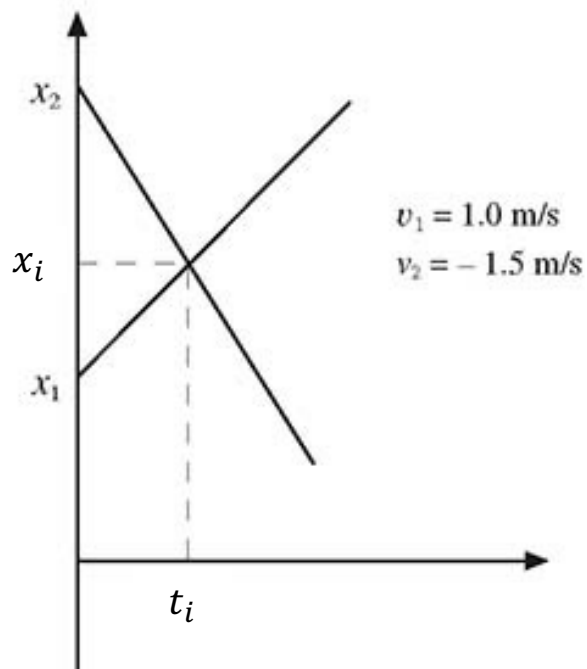
Vogliamo calcolare dopo quanto tempo e in che punto i due punti si incontrano.

Nell'istante dell'incontro tra i due punti, i due punti devono occupare la stessa posizione allo stesso istante di tempo, quindi devono essere verificate entrambe le leggi orarie.

Devo quindi mettere a sistema le due leggi orarie e risolvere il sistema per calcolare le incognite  $x$  (posizione dell'incontro) e  $t$  (istante dell'incontro)

$$\begin{cases} x = v_1 t + x_1 \\ x = v_2 t + x_2 \end{cases}$$

# Esempio



Risolviamo quindi il sistema:

$$\begin{cases} x = v_1 t + x_1 \\ x = v_2 t + x_2 \end{cases}$$

$$v_1 t + x_1 = v_2 t + x_2$$

$$(v_1 - v_2)t = x_2 - x_1$$

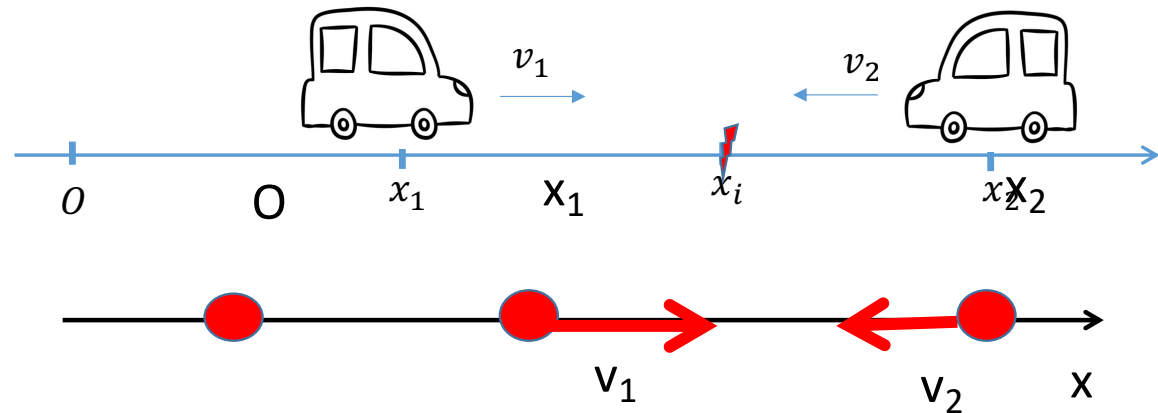
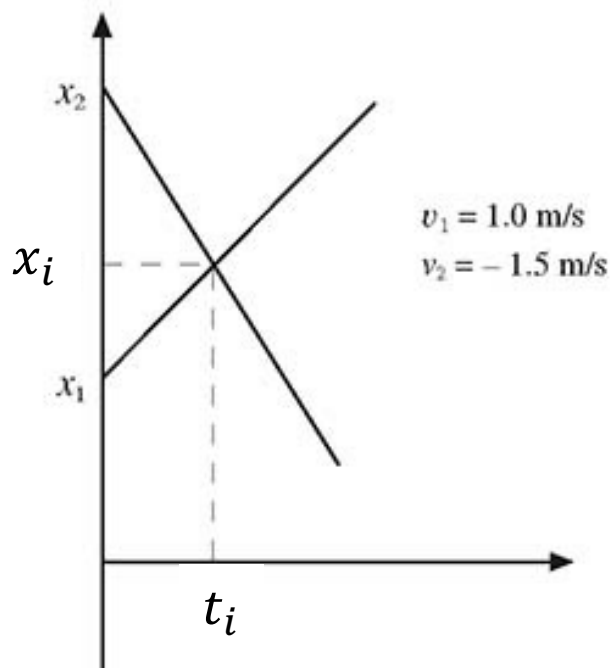
L'istante di tempo in cui si incontrano i due punti è quindi:

$$t_i = \frac{x_2 - x_1}{(v_1 - v_2)}$$

E la posizione in cui si incontrano è

$$x_i = v_1 t_i + x_1 = v_1 \frac{x_2 - x_1}{(v_1 - v_2)} + x_1$$

# Esempio



Analizziamo meglio le soluzioni. Abbiamo appena visto che l'istante di tempo in cui i due punti si incontrano è:

$$t_i = \frac{x_2 - x_1}{(v_1 - v_2)}$$

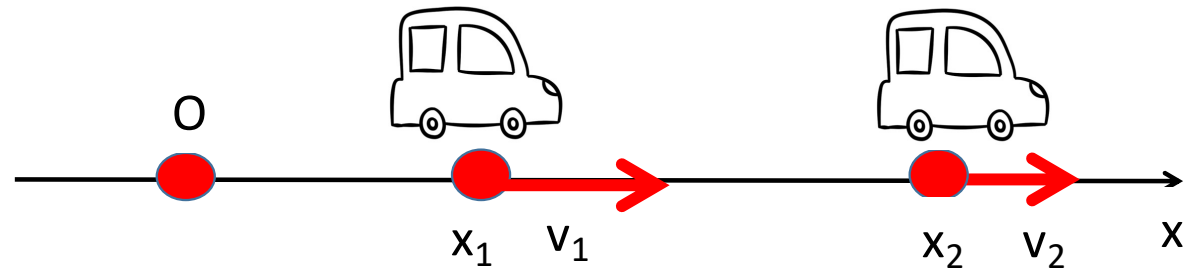
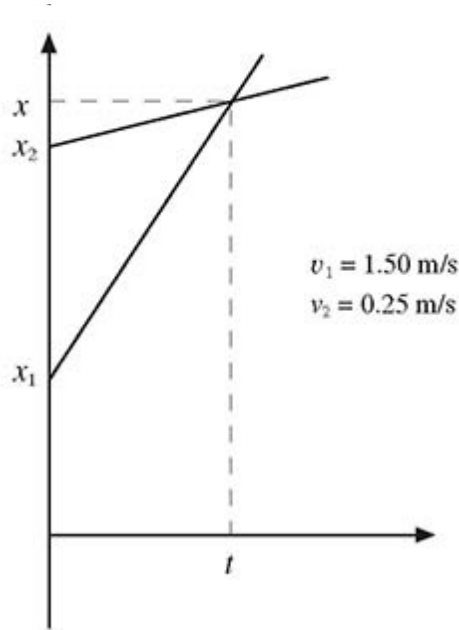
E la posizione in cui si incontrano è

$$x_i = v_1 t_i + x_1 = v_1 \frac{x_2 - x_1}{(v_1 - v_2)} + x_1$$

In questo specifico caso abbiamo visto che  $x_1 < x_2$  e  $v_1 > 0, v_2 < 0$ .

Analizzando la soluzione vediamo che in questo caso  $x_i > 0$  e  $t_i > 0$ . I due punti quindi si incontrano effettivamente dopo un tempo  $t_i$  dall'inizio dell'osservazione del fenomeno, nella posizione  $x_i$ .

# Esempio



Ancora sulle possibili soluzioni del problema. Supponiamo adesso che entrambi i punti stiano procedendo con velocità positiva, abbiamo ancora che  $x_1 < x_2$  ma questa volta  $v_1 > 0$ ,  $v_2 > 0$ , con  $v_1 > v_2$  (i due punti procedono nella stessa direzione). Ricordiamo che l'istante di tempo in cui i due punti si incontrano è:

$$t_i = \frac{x_2 - x_1}{(v_1 - v_2)}$$

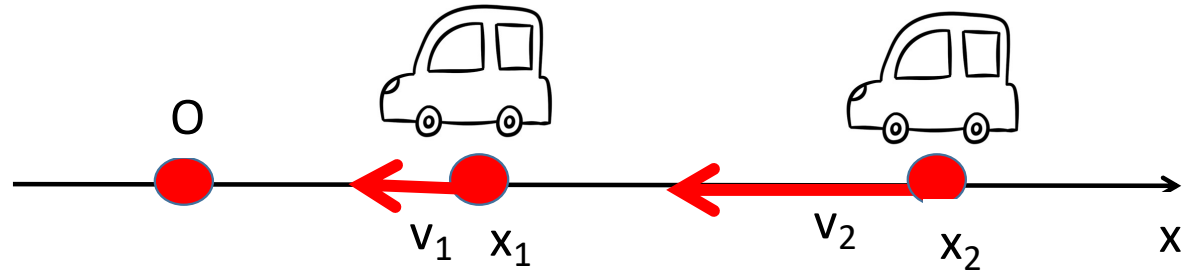
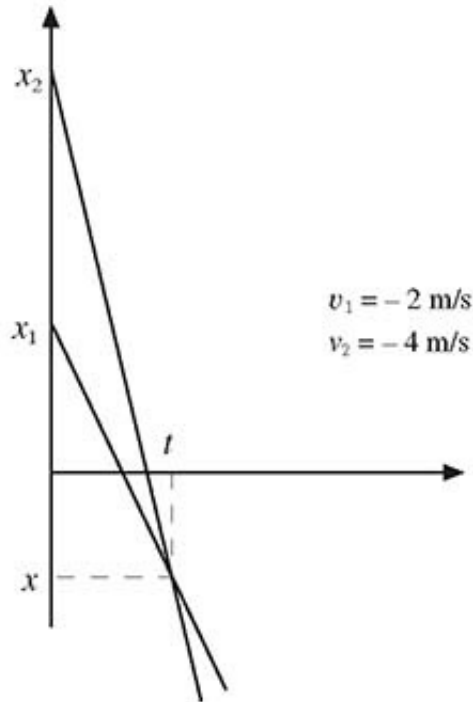
E la posizione in cui si incontrano è

$$x_i = v_1 t_i + x_1 = v_1 \frac{x_2 - x_1}{(v_1 - v_2)} + x_1$$

Analizzando la soluzione vediamo che anche in questo caso  $x_i > 0$  e  $t_i > 0$ . I due punti quindi si incontrano effettivamente dopo un tempo  $t_i$  dall'inizio dell'osservazione del fenomeno, nella posizione  $x_i$ .

È intuitivo! Se il primo punto viaggia con velocità maggiore del secondo, lo raggiungerà!

# Esempio



Supponiamo adesso che entrambi i punti stiano procedendo con velocità negativa (verso sinistra), abbiamo ancora che  $x_1 < x_2$ , questa volta  $v_1 < 0, v_2 < 0$ , con  $|v_1| > |v_2|$  quindi il primo punto procede più lentamente che il secondo. L'istante di tempo in cui i due punti si incontrano è:

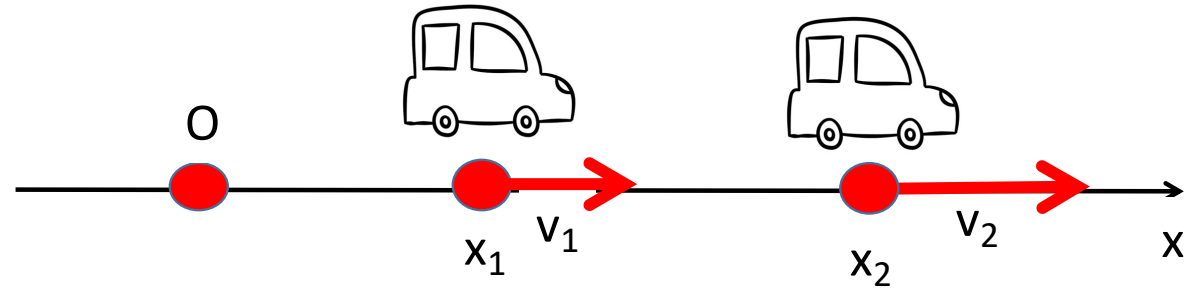
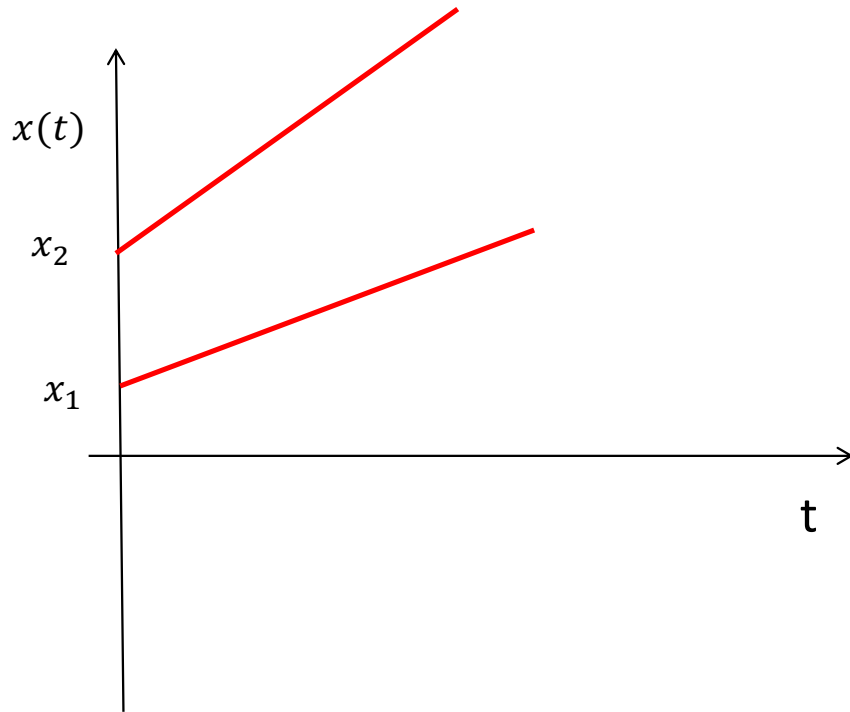
$$t_i = \frac{x_2 - x_1}{(v_1 - v_2)} > 0$$

E la posizione in cui si incontrano è

$$x_i = v_1 t_i + x_1 = v_1 \frac{x_2 - x_1}{(v_1 - v_2)} + x_1 < x_1$$

Analizzando la soluzione vediamo che anche in questo caso  $t_i > 0$ . I due punti quindi si incontrano effettivamente dopo un tempo  $t_i$  dall'inizio dell'osservazione del fenomeno, nella posizione  $x_i$ , che può essere prima o dopo  $O$ .

# Esempio



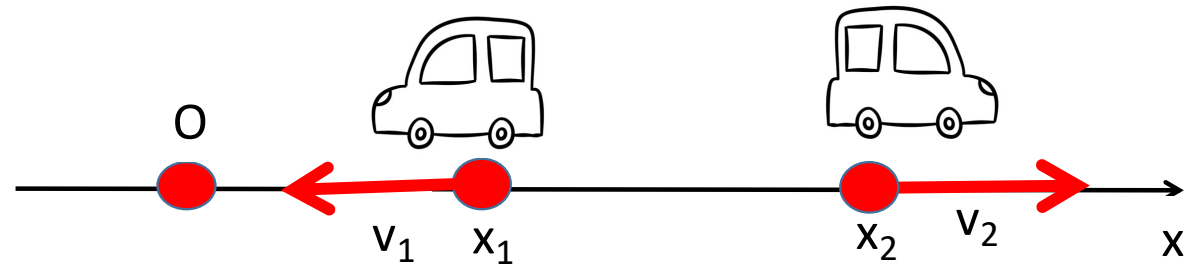
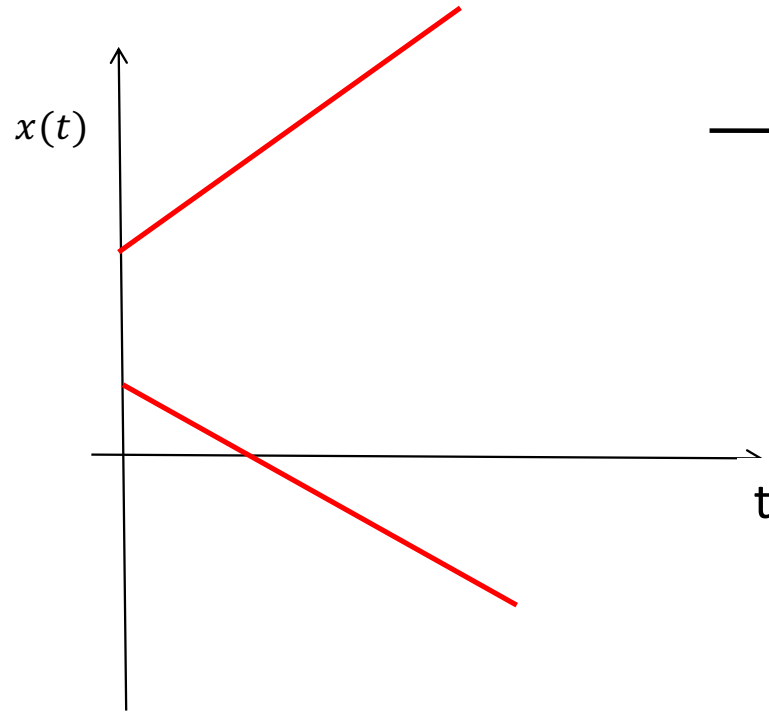
Supponiamo di nuovo che entrambi i punti stiano procedendo con velocità positiva, abbiamo ancora che  $x_1 < x_2$ ,  $v_1 > 0$ ,  $v_2 > 0$ , con  $v_1 < v_2$  (i due punti procedono nella stessa direzione, il primo è più lento del secondo). L'istante di tempo in cui i due punti si incontrano è:

$$t_i = \frac{x_2 - x_1}{(v_1 - v_2)} < 0$$

Dato che abbiamo trovato un valore  $t_i < 0$ , i due punti quindi non si incontrano mai dopo inizio dell'osservazione del fenomeno.

È intuitivo! Se il primo punto viaggia con velocità minore del secondo, non potrà raggiungerlo!

# Esempio



Supponiamo infine che i punti stiano procedendo con velocità opposte, abbiamo ancora che  $x_1 < x_2$ ,  $v_1 < 0$ ,  $v_2 > 0$ . L'istante di tempo in cui i due punti si incontrano è:

$$t_i = \frac{x_2 - x_1}{(v_1 - v_2)} < 0$$

Dato che abbiamo trovato un valore  $t_i < 0$ , anche in questo caso i due punti non si incontrano mai dopo inizio dell'osservazione del fenomeno.

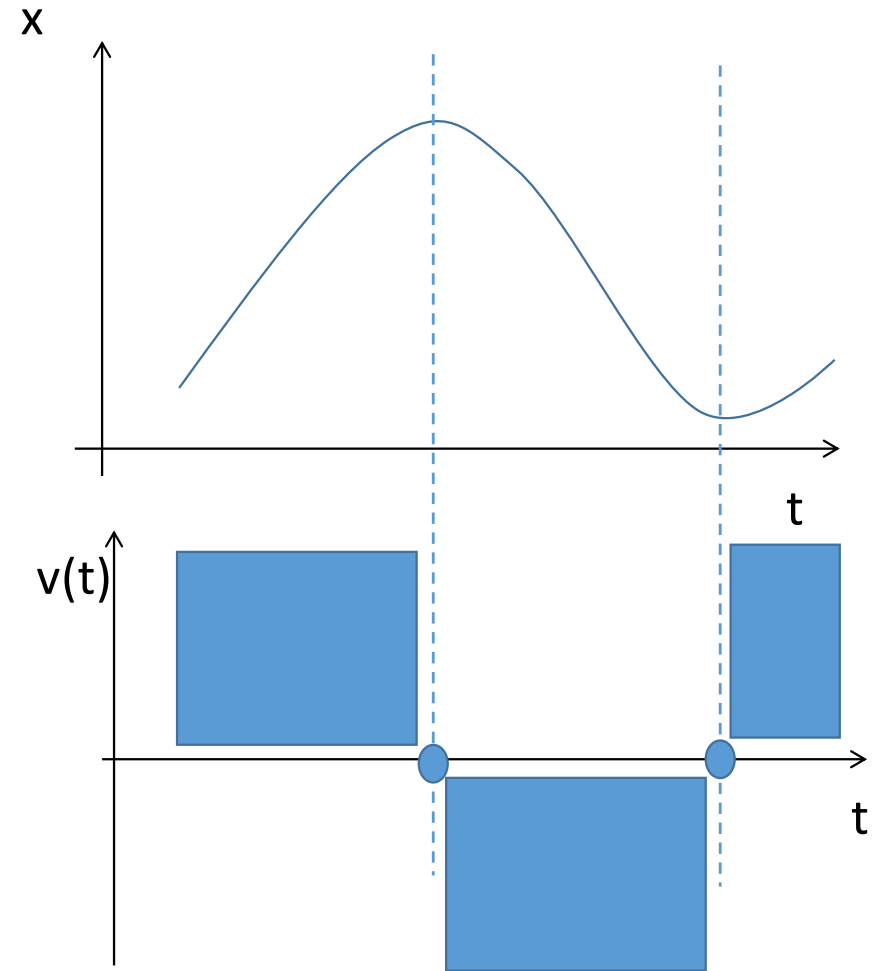
# Dalla posizione alla velocità e viceversa

Abbiamo definito la velocità di un punto materiale che si muove di moto rettilineo come la derivata rispetto al tempo della posizione:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

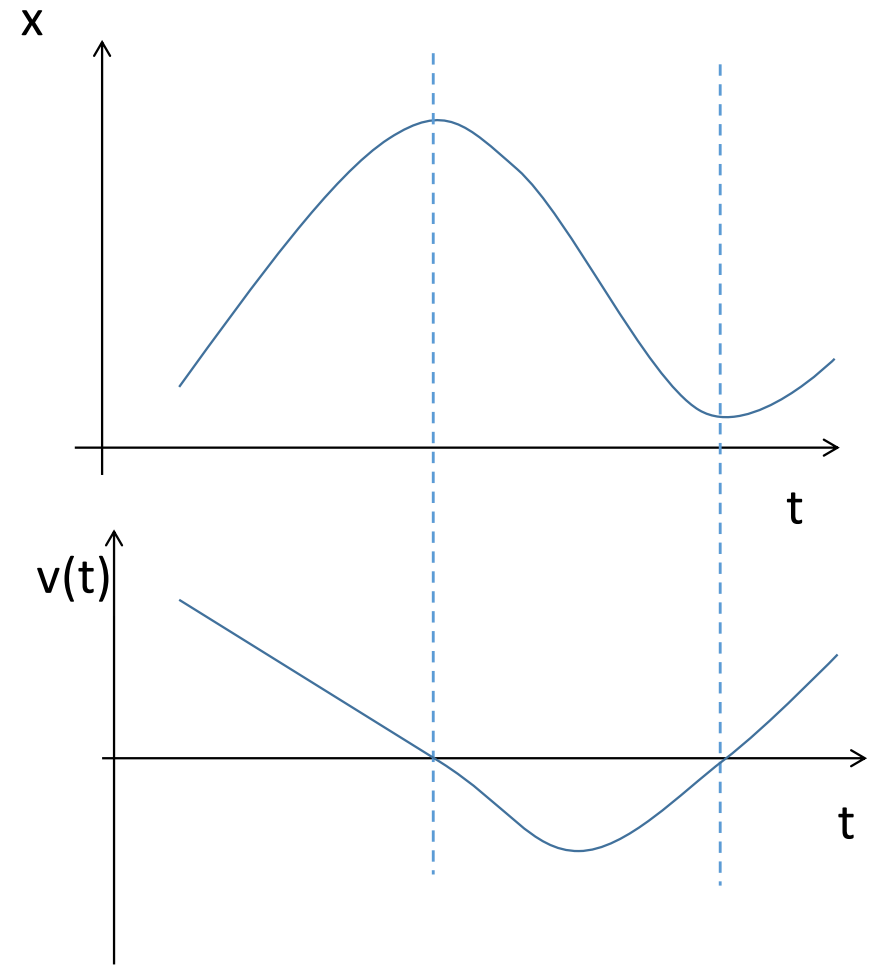
Quindi, data la legge oraria  $x(t)$  posso calcolare la velocità  $v$  tramite un'operazione di derivazione rispetto al tempo.

Osservando il grafico di  $x$  in funzione di  $t$ , nei tratti in cui  $x$  aumenta,  $v$  sarà positiva, mentre nei punti in cui  $x$  diminuisce,  $v$  sarà negativa. Nei punti in cui il grafico ha un massimo o un minimo locale, la velocità si annulla.



# Dalla posizione alla velocità e viceversa

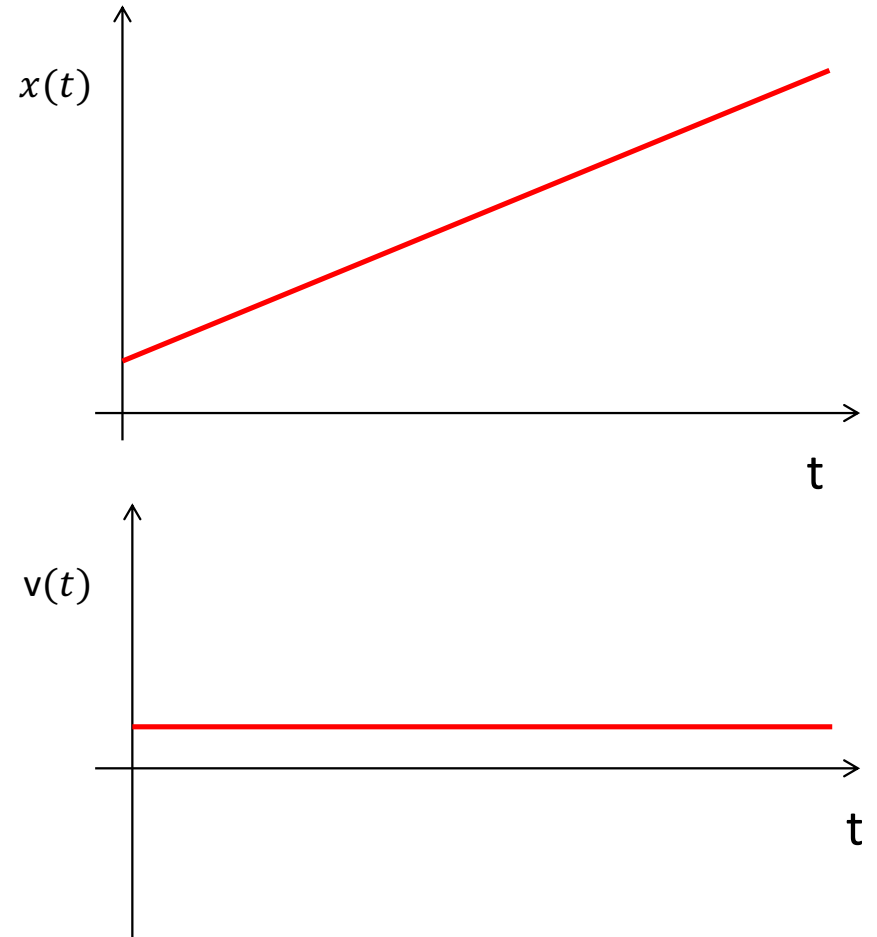
Possiamo riportare su un grafico anche la velocità in funzione del tempo.



# Dalla posizione alla velocità e viceversa

Ad esempio, nel moto rettilineo uniforme  $v$  è costante.

In generale comunque  $v$  è funzione del tempo ( $v(t)$ ).



# Dalla posizione alla velocità e viceversa

Abbiamo visto che

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Dato  $v(t)$  posso calcolare  $x(t)$ ?

# Dalla posizione alla velocità e viceversa

Dato  $v(t)$  posso calcolare  $x(t)$ ?

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Elaboriamo questa espressione:

$$v dt = dx$$

Applichiamo membro a membro l'operazione di integrale:

$$\int_0^t v(t) dt = \int_{x_0}^x dx$$

Sviluppando l'integrale:

$$\int_0^t v(t) dt = x - x_0$$

Si ottiene infine:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t) dt$$

Data  $v(t)$  e la posizione iniziale  $x_0$  è possibile determinare  $x(t)$  tramite un'operazione di integrazione rispetto al tempo.

## Dalla posizione alla velocità e viceversa

Esempio, dato un punto materiale che si muove a partire dalla posizione  $x(0)$  con una velocità che varia nel tempo secondo la legge  $v(t) = at + bt^2$ , possiamo determinare la posizione:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \int_0^t v dt = x_0 + \int_0^t (at + bt^2) dt \\ &= x_0 + \frac{at^2}{2} + \frac{bt^3}{3} \end{aligned}$$

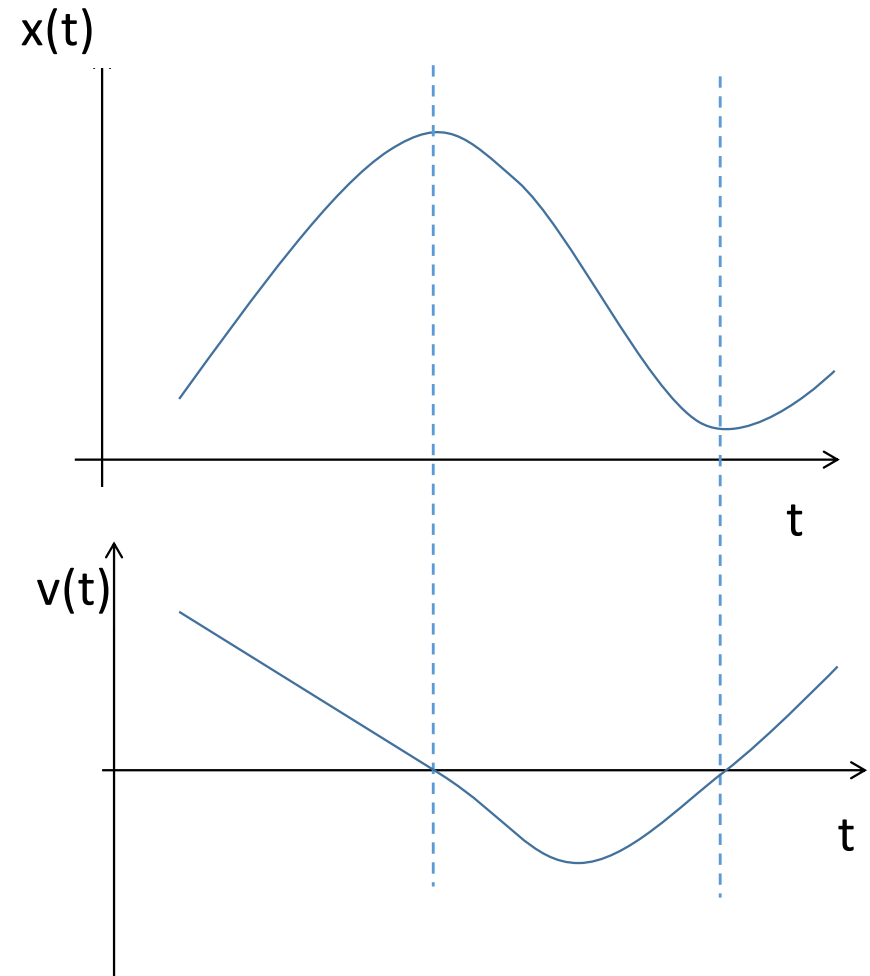
Quali saranno le dimensioni delle variabili  $a$  e  $b$ ?



Accelerazione

# Introduzione

Nelle slide precedenti abbiamo introdotto la cinematica del punto materiale in moto rettilineo e abbiamo analizzato la posizione e la velocità in funzione del tempo.



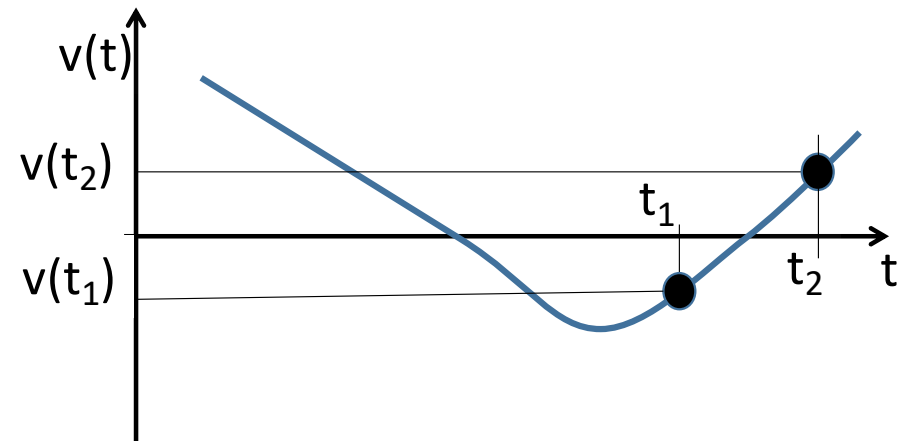
# Accelerazione media

Consideriamo un punto materiale che si muove di moto rettilineo, in cui la posizione è descritta, rispetto a un sistema di riferimento, dalla legge oraria  $x(t)$ , da cui possiamo calcolare tramite operazione di derivata la velocità  $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

All'istante  $t_1$  il punto si muove alla velocità  $v(t_1)$ , mentre ad un istante successivo  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ), esso si muove alla velocità  $v(t_2)$ .

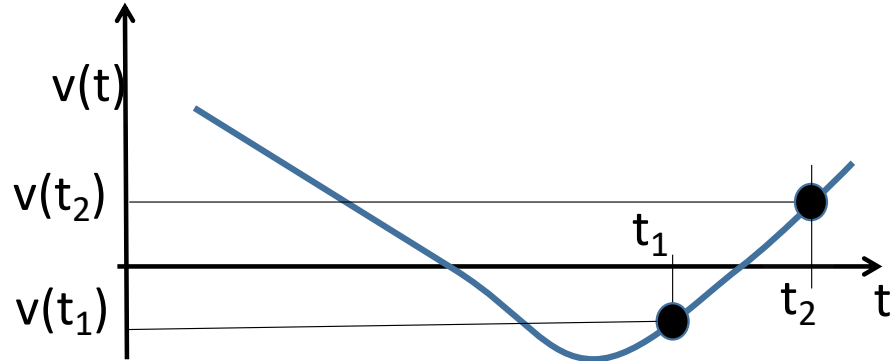
Si definisce la accelerazione media nell'intervallo  $[t_1, t_2]$ ,  $a_{m1,2}$  la seguente quantità:

$$a_{m1,2} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_{1,2}}{\Delta t_{1,2}}$$



Dimensionalmente,  
 $[a_{m1,2}] = (L/T)/T \quad (m/s^2)$

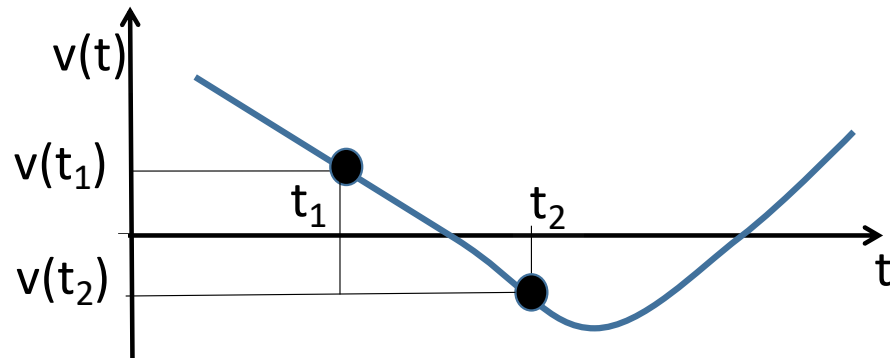
# Accelerazione media



$$a_{m1,2} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_{1,2}}{\Delta t_{1,2}}$$

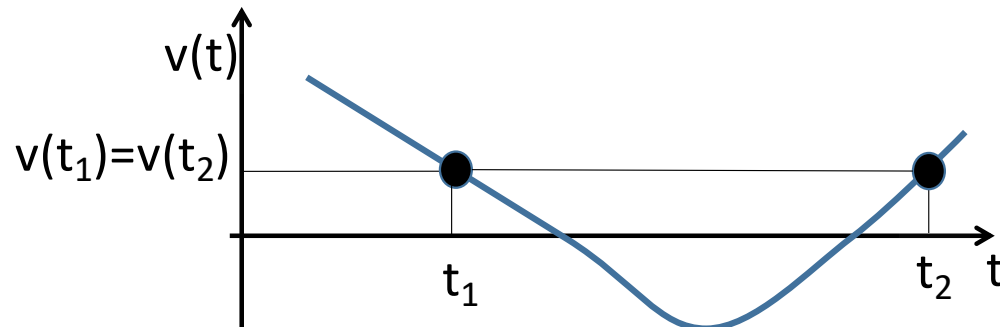
Se da  $t_1$  a  $t_2$  la velocità aumenta, cioè se  $v(t_2) > v(t_1)$

$$a_{m1,2} > 0$$



Viceversa, se da  $t_1$  a  $t_2$  la velocità diminuisce, cioè se  $v(t_2) < v(t_1)$

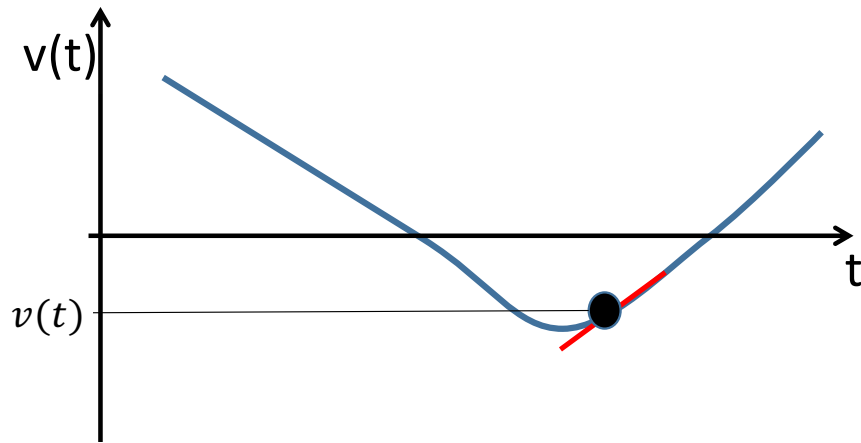
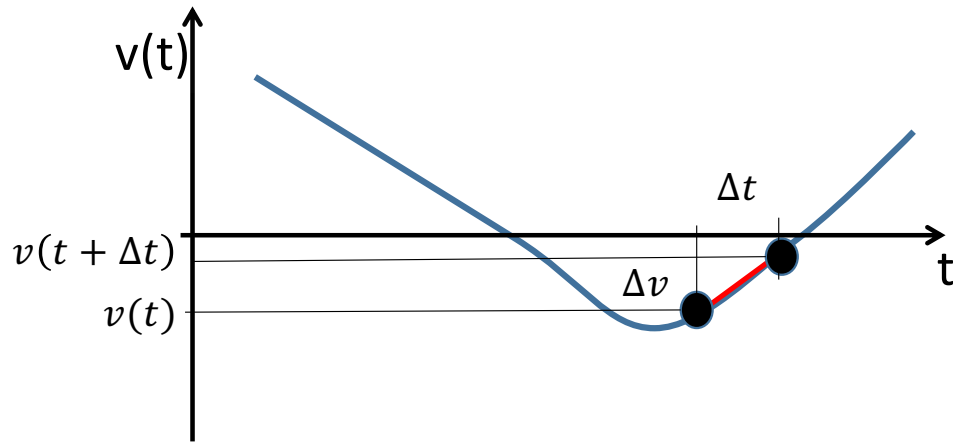
$$a_{m1,2} < 0$$



Infine, se  $v(t_2) = v(t_1)$  risulta

$$a_{m1,2} = 0$$

# Accelerazione istantanea



Come per la velocità, abbiamo definito l'accelerazione media nell'intervallo  $[t_1, t_2]$ ,  $a_{m1,2}$  la seguente quantità:

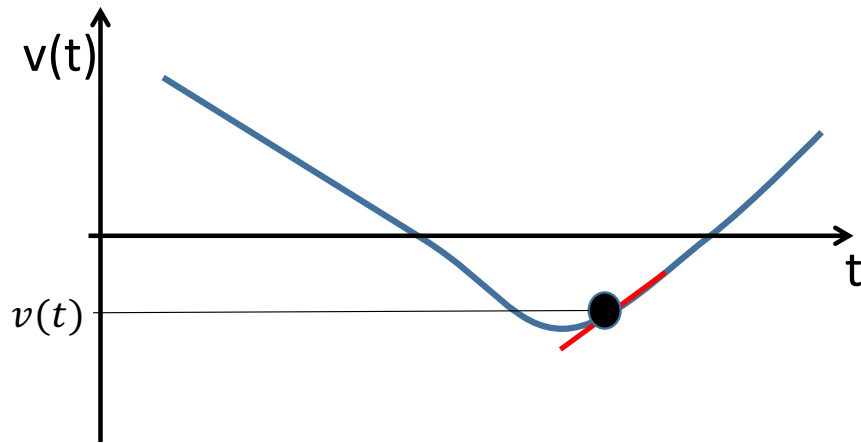
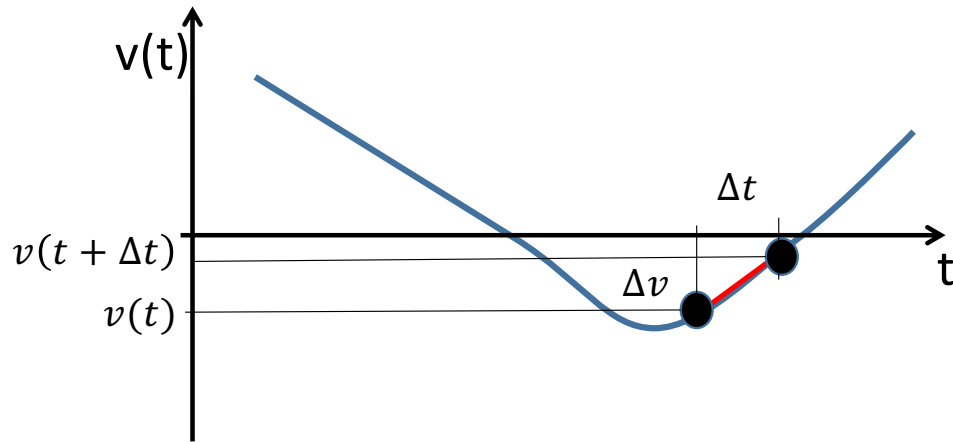
$$a_{m1,2} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_{1,2}}{\Delta t_{1,2}}$$

Cosa succede se prendiamo intervalli di tempo  $[t_1, t_2]$  sempre più piccoli, tali cioè che  $\Delta t_{1,2} \rightarrow 0$ ?

Si definisce accelerazione istantanea (o semplicemente accelerazione) del punto materiale all'istante  $t$  la seguente quantità

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \right) = \frac{dv}{dt}$$

# Accelerazione istantanea



L'accelerazione istantanea all'istante  $t$  è definita come

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \right) = \frac{dv}{dt}$$

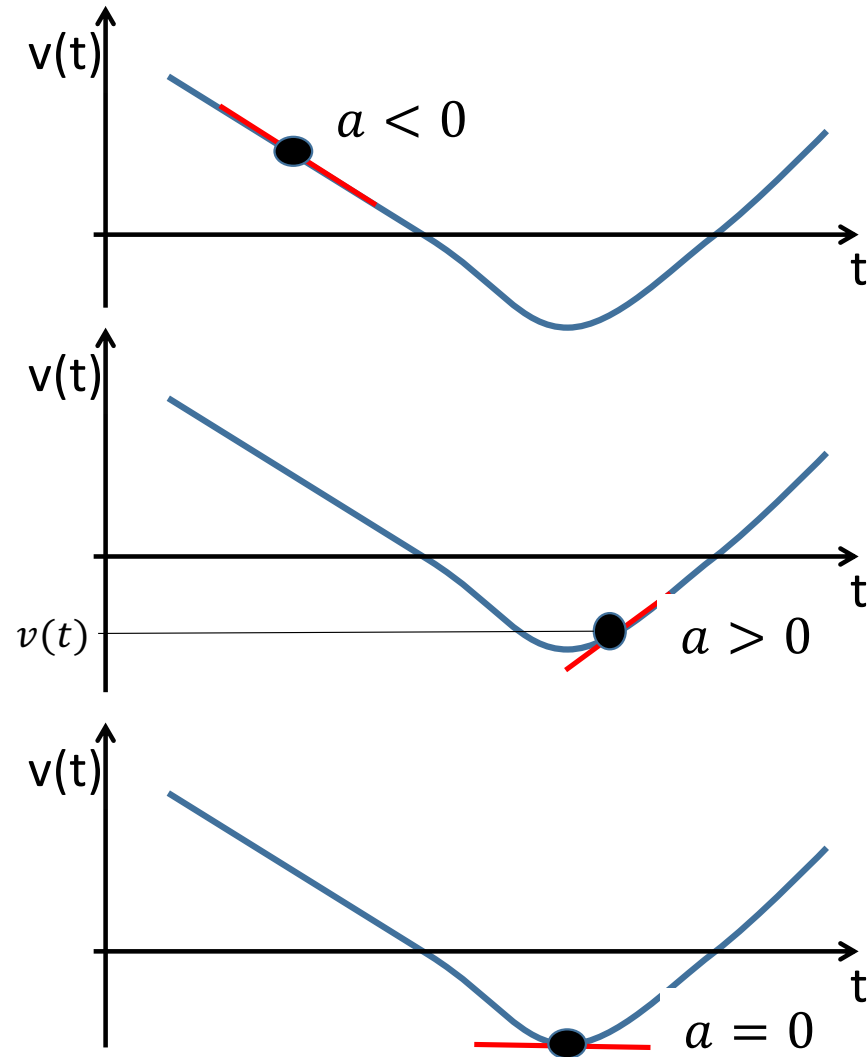
Ma ricordando la definizione della velocità

$$v = \frac{dx}{dt}$$

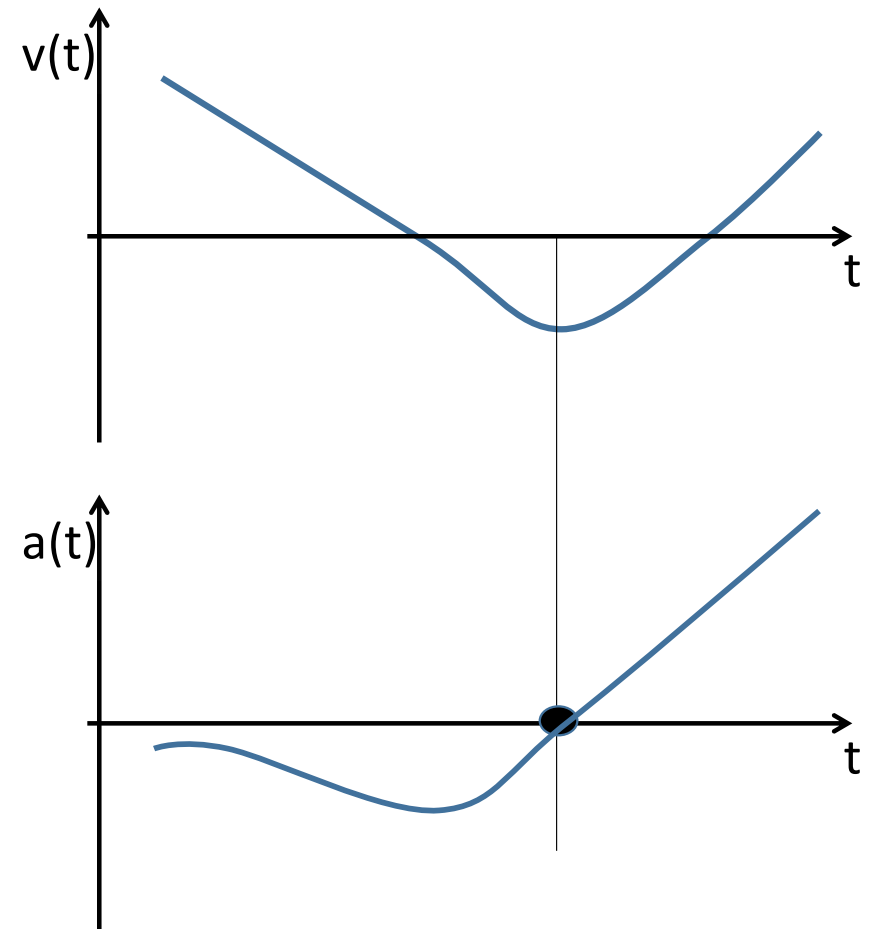
Risulta anche

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

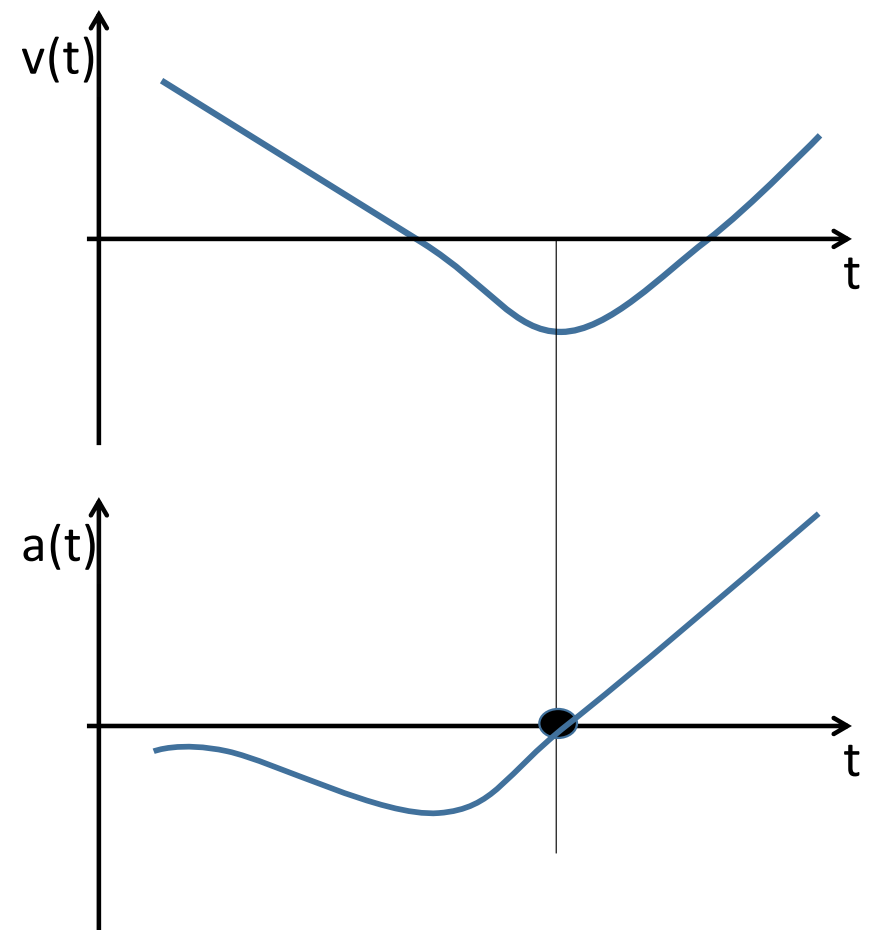
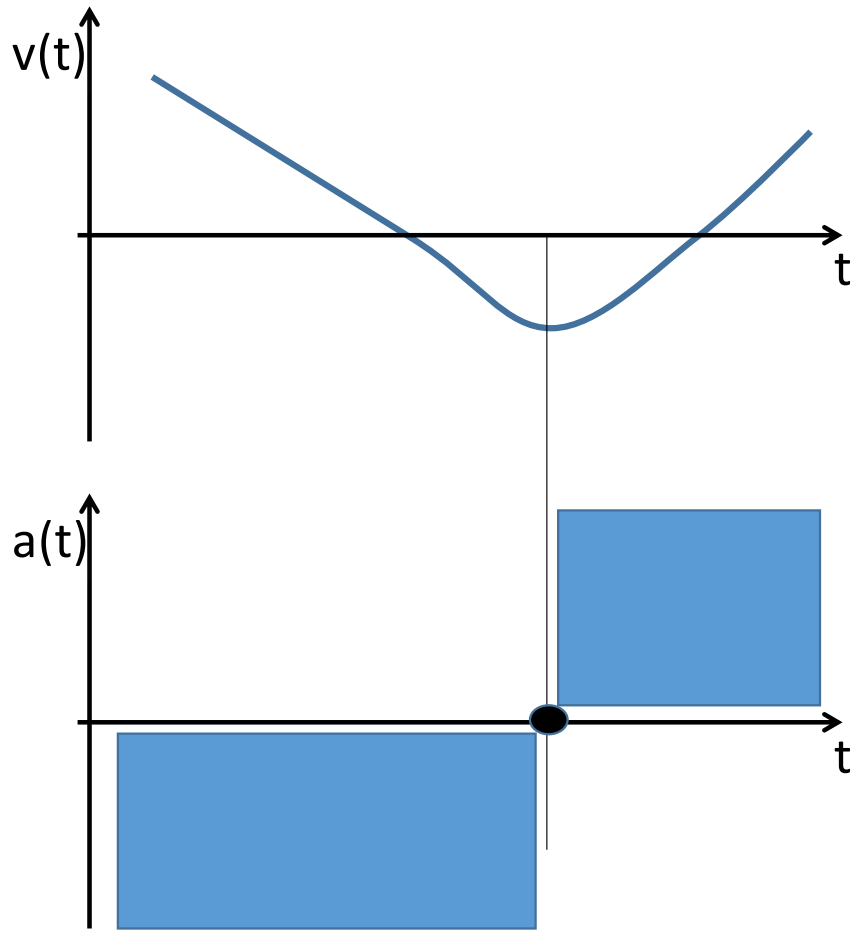
# Accelerazione istantanea



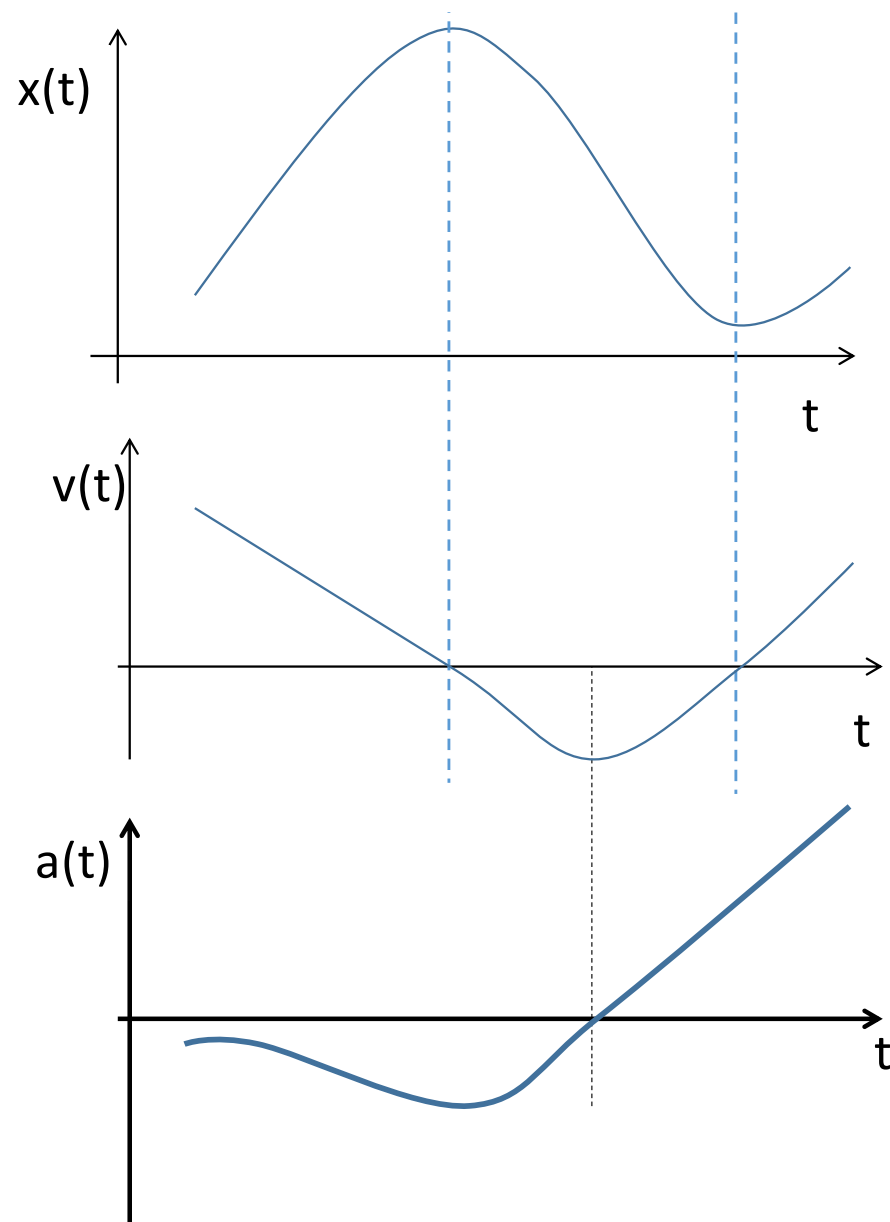
Possiamo riportare su un grafico anche l'andamento dell'accelerazione in funzione del tempo



# Accelerazione istantanea



Posizione, velocità e accelerazione  
in funzione del tempo



# Accelerazione istantanea

$a = 0 \rightarrow v$  costante (moto rettilineo uniforme)

$a$  e  $v$  hanno lo stesso segno  $\rightarrow$  il punto materiale accelera (il modulo di  $v$  aumenta)

$a$  e  $v$  hanno segno opposto  $\rightarrow$  il punto decelera o frena (il modulo di  $v$  diminuisce)

# Dall'accelerazione alla velocità e alla posizione

Abbiamo visto che l'accelerazione è definita come la derivata rispetto al tempo della velocità

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)dt$$

Data l'accelerazione  $a(t)$ , posso calcolare la velocità  $v(t)$ ?

$$adt = dv$$

$$\int_0^t a(t)dt = \int_{v_0}^v dv$$

$$\int_0^t a(t)dt = v - v_0$$

# Dall'accelerazione alla velocità e alla posizione

Dopo di che, mi ricordo che

$$v = \frac{dx}{dt}$$

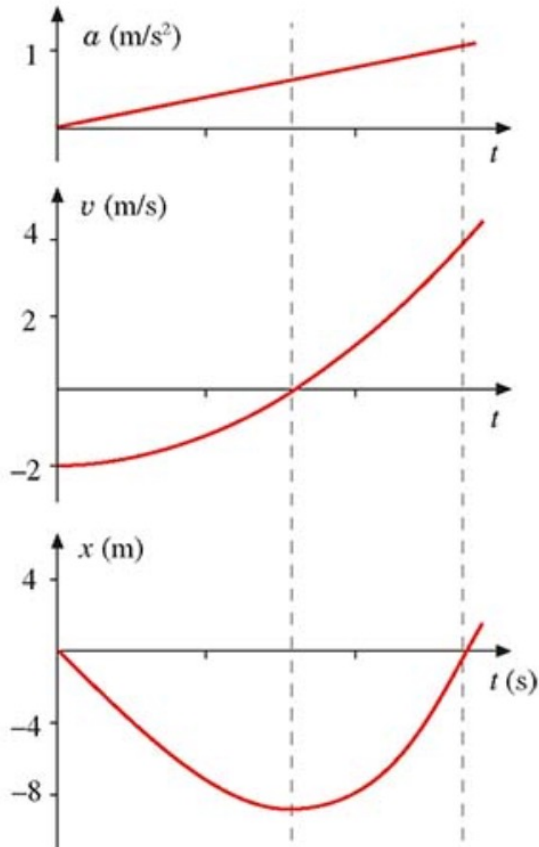
Da cui abbiamo trovato

$$x = x_0 + \int_0^t v dt$$

Quindi, conoscendo  $a(t)$ ,  $v_0$  e  $x_0$  tramite due integrazioni nel tempo posso calcolare la velocità  $v(t)$  e la posizione  $x(t)$

$$a(t) \Rightarrow v(t) = v_0 + \int_0^t a(t) dt \Rightarrow x = x_0 + \int_0^t v(t) dt$$

Esempio:  $a(t) = ct$  (con  $c$  costante, che dimensioni?),  $v_0 = -2 \text{ m/s}$ ,  $x_0 = 0 \text{ m}$

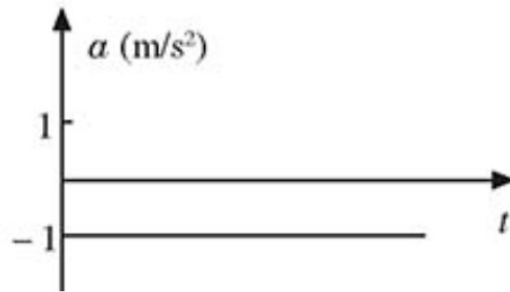


$$v = v_0 + \int_0^t a dt = v_0 + \int_0^t c t dt = v_0 + \frac{c t^2}{2}$$

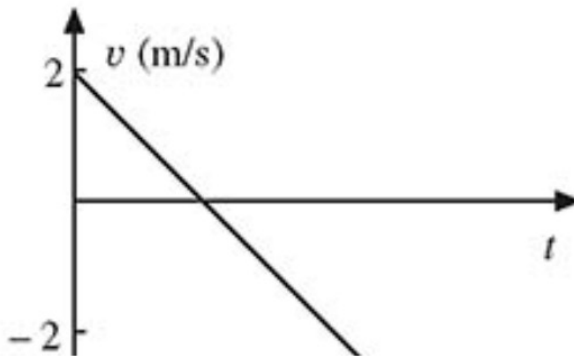
$$x = x_0 + \int_0^t v dt$$

$$= x_0 + \int_0^t \left( v_0 + \frac{c t^2}{2} \right) dt = x_0 + v_0 t + \frac{c t^3}{6}$$

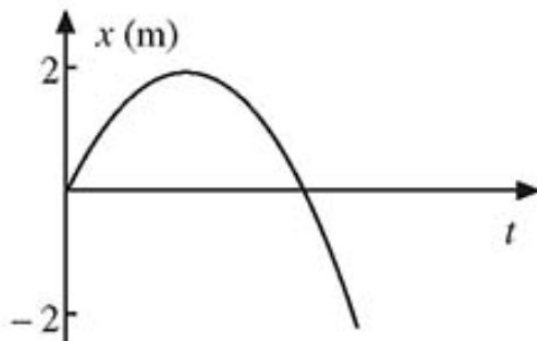
## Moto uniformemente accelerato



$$a = \text{costante}$$

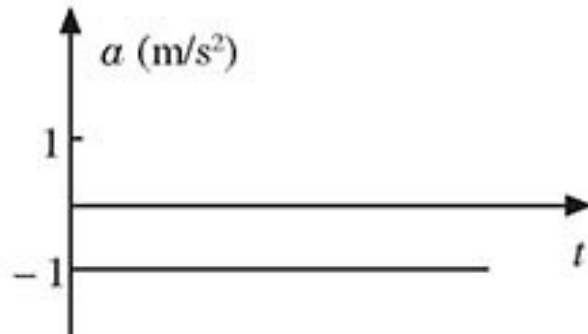


$$v = v_0 + \int_0^t a dt = v_0 + at$$



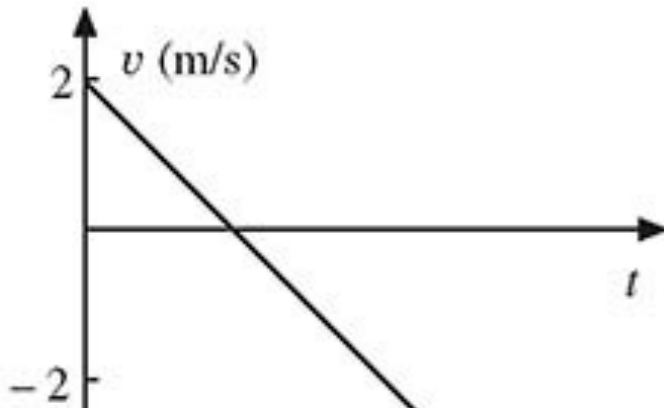
$$x = x_0 + \int_0^t v dt = x_0 + \int_0^t (v_0 + at) dt$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

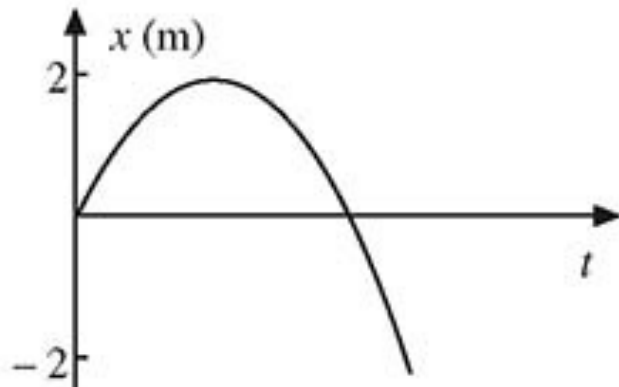


Esempio  $a(t) = -1 \text{ m/s}^2$  costante,  $v_0 = 2 \text{ m/s}$ ,  $x_0 = 0 \text{ m}$

$$v = v_0 + \int_0^t a dt = v_0 + at$$



$$x = x_0 + \int_0^t v dt = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$



Esercizio-approfondimento: un treno AV viaggia alla velocità  $v_0 = 350 \text{ km/h}$ , nell'istante  $t = 0 \text{ s}$  il treno si trova nella posizione  $x_0 = 0 \text{ m}$  e inizia a frenare con un'accelerazione  $a(t) = -1.2 \text{ m/s}^2$  costante.

A quale distanza da  $x_0$  si fermerà?

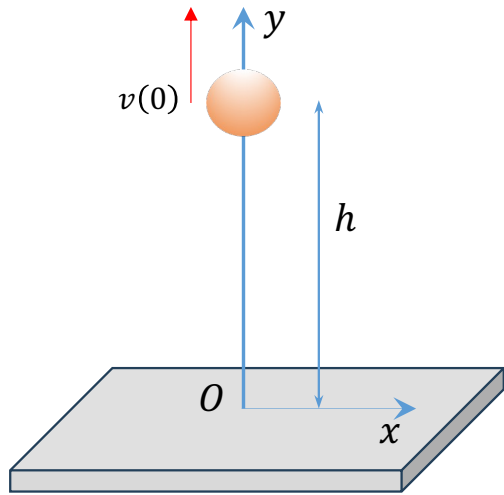
Quanto tempo impiega a fermarsi?

Disegnare la curva  $v(x)$  (curva di frenatura)

# Moto di caduta libera



# Moto di caduta libera



Analizziamo il moto di caduta di un grave in direzione verticale. Si tratta di un moto uniformemente accelerato con accelerazione  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  (accelerazione di gravità) diretta verso il basso.

Fissiamo un asse  $y$  con origine sul suolo e direzione verticale ascendente (verso l'alto).

Si tratta di un moto in cui l'accelerazione è nota e costante:

$$a = -g$$

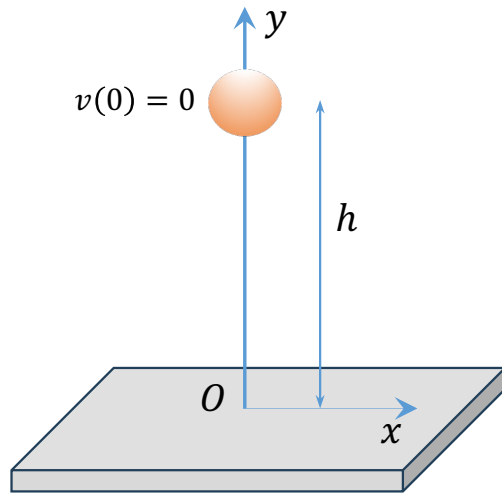
Tramite una prima integrazione rispetto al tempo (conoscendo la velocità iniziale) possiamo determinare la velocità, che varierà con una legge lineare (polinomio di primo grado)

$$v = v_0 - gt$$

Tramite una seconda integrazione rispetto al tempo (conoscendo l'altezza iniziale) possiamo determinare la posizione, che varierà rispetto al tempo con legge parabolica (polinomio di secondo grado).

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

# Moto di caduta libera – caso 1



Analizziamo il moto di un corpo lasciato cadere da un'altezza  $y_0 = h$  con velocità iniziale  $v_0 = 0$ .

La velocità è pari a

$$v = v_0 - gt = -gt$$

Mentre la posizione varia nel tempo secondo la legge:

$$y = h + v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 = h - \frac{1}{2} gt^2$$

# Moto di caduta libera – caso 1

La velocità è pari a

$$v = -gt$$

Come varia la velocità al variare dell'altezza? Per rispondere a questa domanda, dobbiamo determinare  $v(y)$ . Riprendiamo l'espressione di  $y(t)$

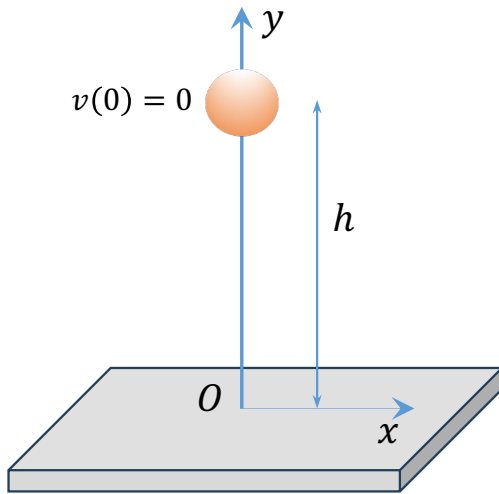
$$y = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Esplicitiamo  $t$  in funzione di  $y$

$$h - y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\frac{2}{g}(h - y) = t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}(h - y)}$$



# Moto di caduta libera – caso 1

Sostituisco l'espressione di  $t$  appena trovata nell'espressione di  $v$

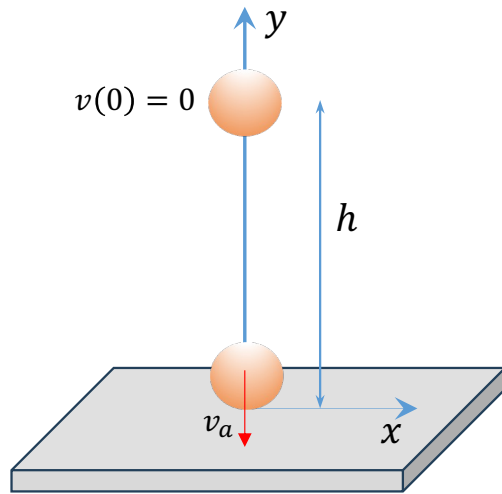
$$v = -gt = -g \sqrt{\frac{2}{g}} (h - y) = -\sqrt{2g(h - y)}$$

Abbiamo quindi determinato come varia  $v$  in funzione di  $y$

$$v(y) = -\sqrt{2g(h - y)}$$

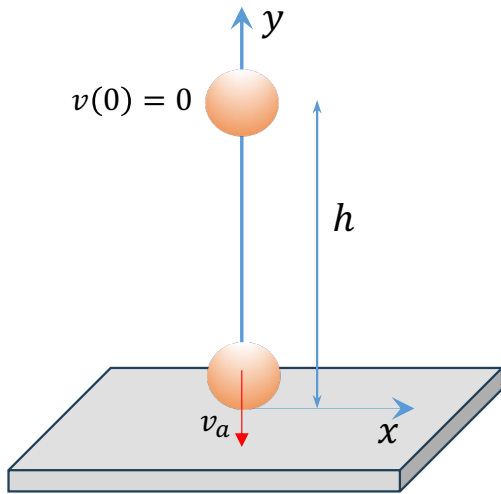
Quanto vale la velocità del corpo quando atterra sul pavimento? Per rispondere dobbiamo sostituire  $y = 0$  (quota del pavimento) nell'espressione precedente:

$$v_a = v(0) = -\sqrt{2gh}$$



# Moto di caduta libera – caso 1

Dopo quanto tempo dall'inizio della caduta il corpo raggiunge il suolo? Per rispondere dobbiamo sostituire  $y = 0$  (quota del pavimento) nell'espressione del tempo che abbiamo trovato in precedenza:

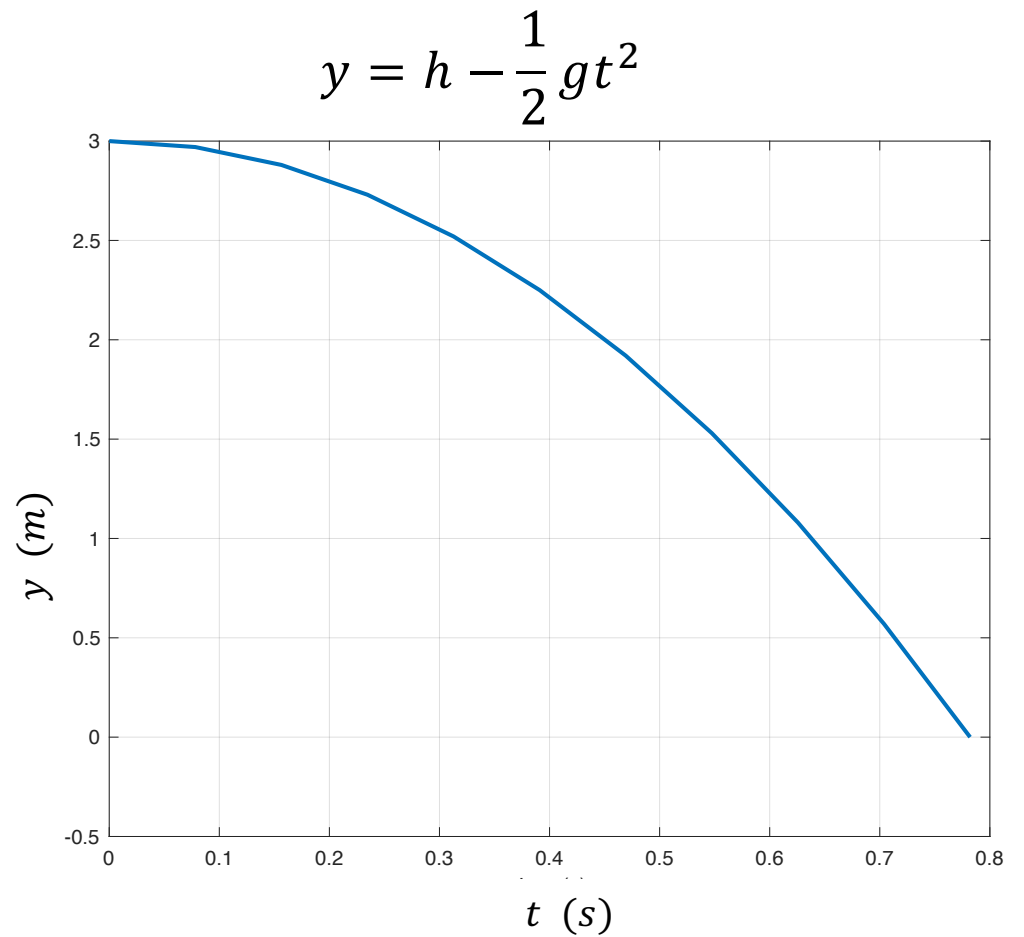
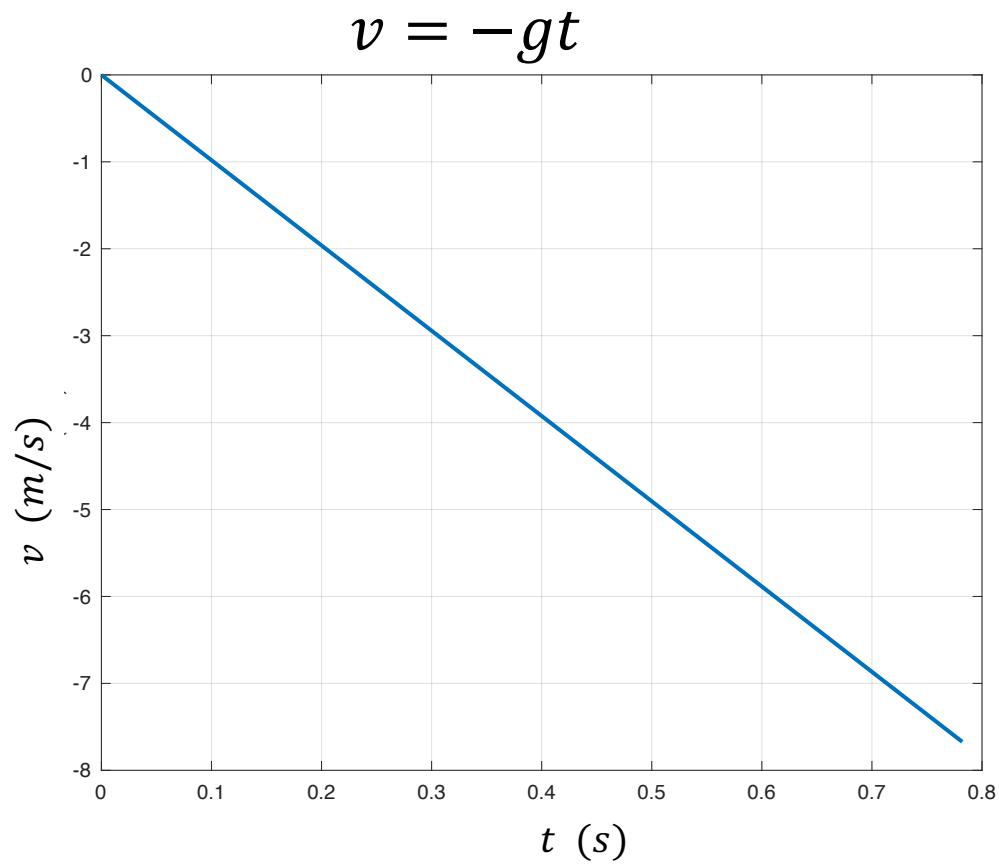


$$t(y) = \sqrt{\frac{2}{g} (h - y)}$$

$$t_a = \sqrt{\frac{2}{g} h}$$

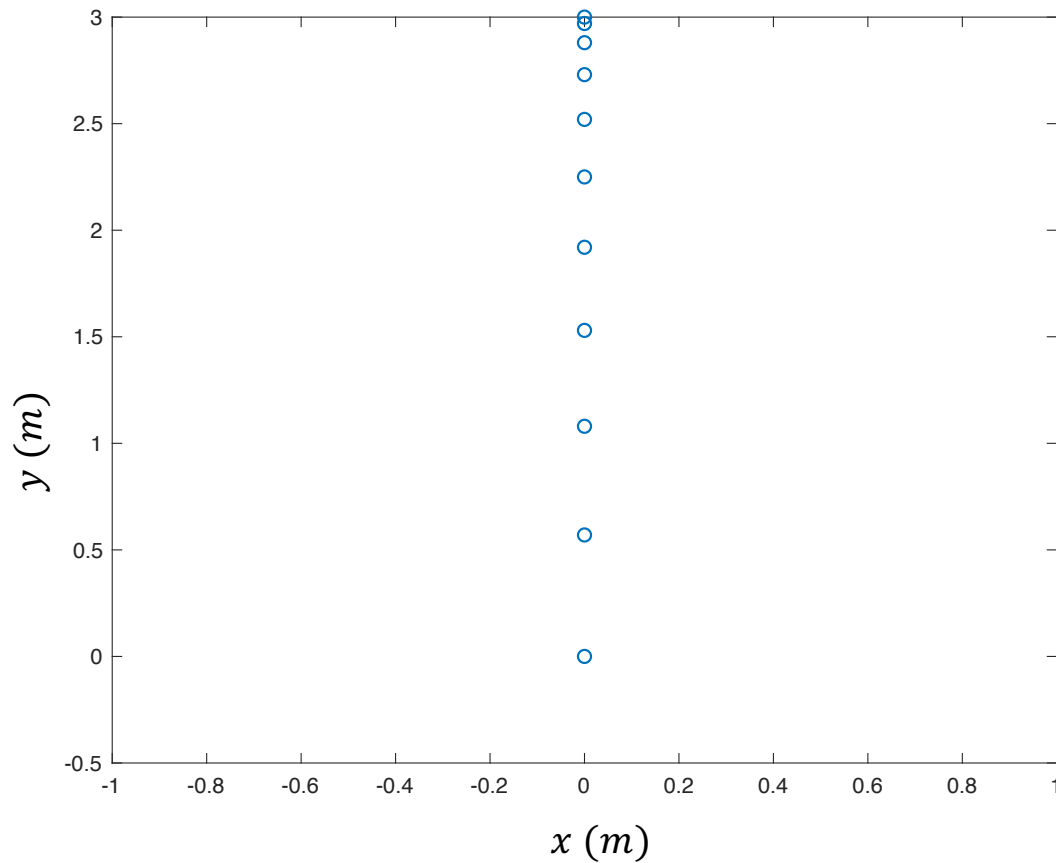
# Moto di caduta libera – caso 1, grafici

$$v_0 = 0 \text{ m/s}, \quad h = 3 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

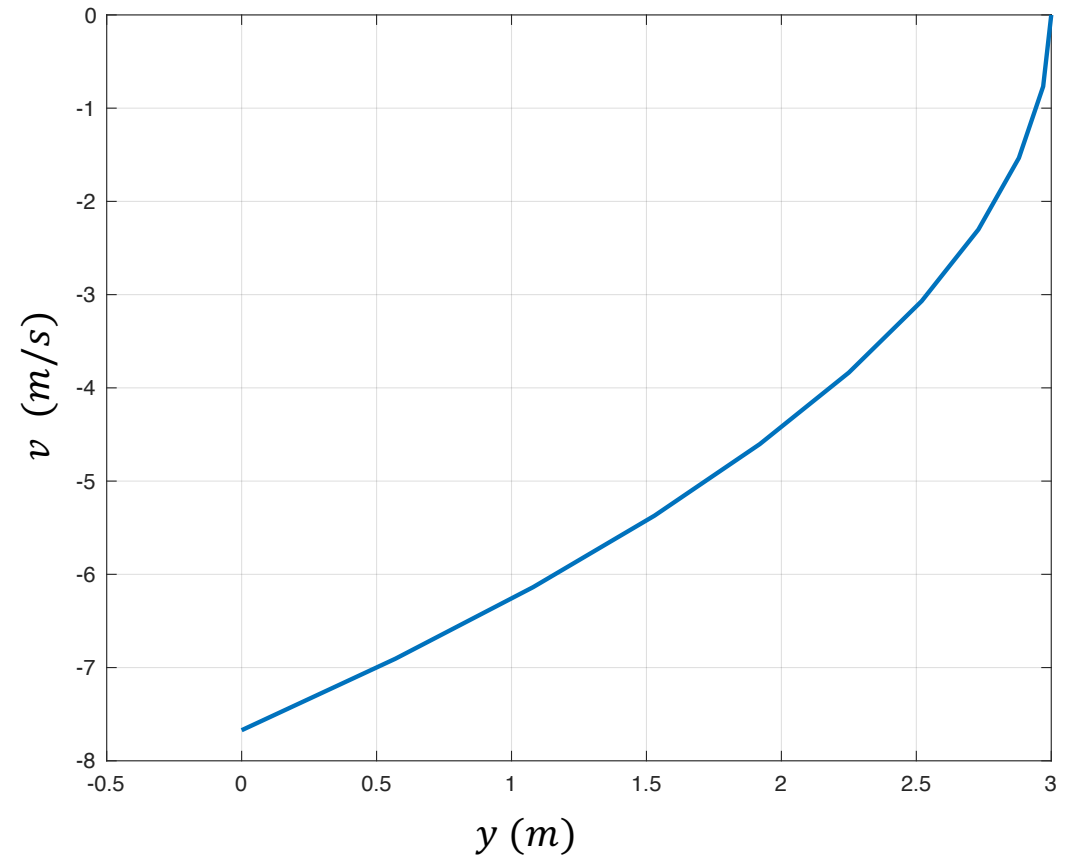


# Moto di caduta libera – caso 1, grafici

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2$$



$$v(y) = -\sqrt{2g(h - y)}$$

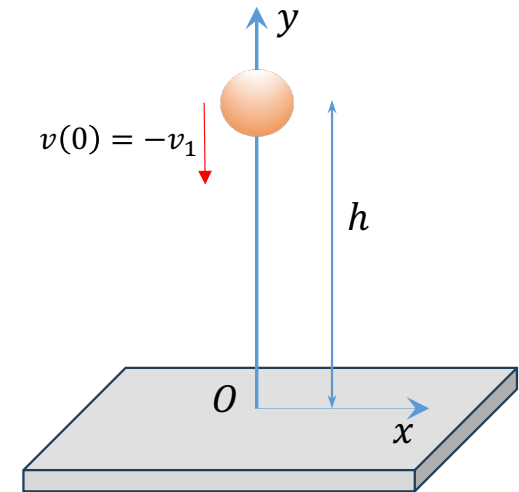


# Moto di caduta libera – caso 2

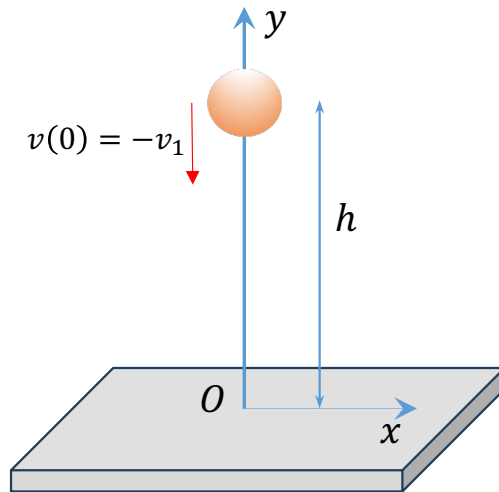
Analizziamo adesso il caso di un corpo lanciato verso il basso da un'altezza  $h$  con velocità iniziale  $-v_1$  (diretta verso il basso).

Le espressioni della velocità e della posizione in funzione del tempo in questo caso sono:

$$v = -v_1 - gt$$
$$y = h - v_1 t - \frac{1}{2}gt^2$$



# Moto di caduta libera – caso 2



Anche in questo, proviamo a calcolare la velocità in funzione dell'altezza  $v(y)$ . Prima di tutto ricaviamo il tempo  $t$  dall'espressione della posizione

$$y = h - v_1 t - \frac{1}{2} g t^2$$

RisolviAMO l'equazione di secondo grado:

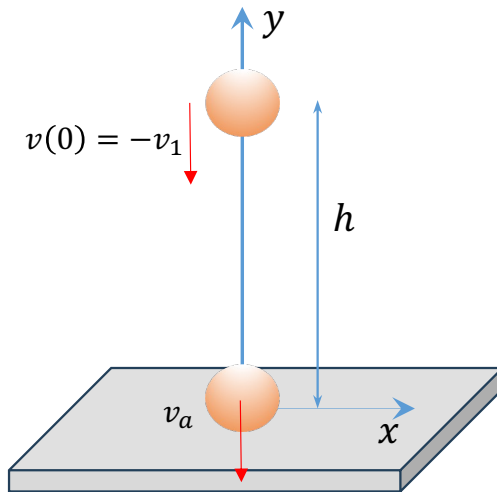
$$t = -\frac{v_1}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_1}{g}\right)^2 + \frac{2}{g} (h - y)}$$

(la soluzione con il segno negativo non ci interessa perché darebbe dei valori di  $t$  negativi)

# Moto di caduta libera – caso 2

Dopo quanto tempo il punto materiale atterra (raggiunge il suolo)?

→ Basta sostituire  $y = 0$  nell'espressione di  $t$



$$t_a = -\frac{v_1}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_1}{g}\right)^2 + \frac{2}{g}h}$$

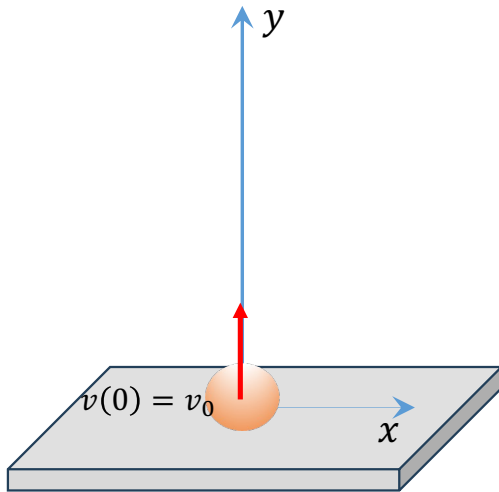
Quale sarà la velocità del punto materiale all'atterraggio?

→ Basta sostituire  $t_a$  nell'espressione di  $v(t)$

$$v_a = -v_1 - gt_a = -v_1 - g \left( -\frac{v_1}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_1}{g}\right)^2 + \frac{2}{g}h} \right)$$

$$v_a = -\sqrt{v_1^2 + 2gh}$$

# Moto di caduta libera – caso 3



Caso 3 – corpo lanciato verso l’alto dal pavimento  
 $y(0) = 0$  con velocità iniziale  $v_0$ .

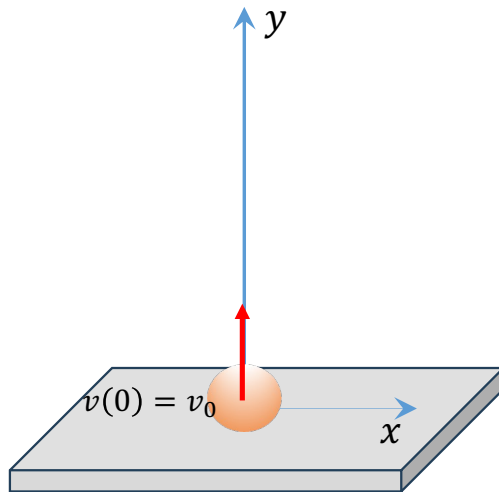
Riprendendo le espressioni trovate in precedenza  
per velocità e posizione, abbiamo:

$$v(t) = v_0 - gt$$

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

Il punto parte da  $y(0) = 0$ , raggiunge un’altezza  
massima e poi torna indietro.

# Moto di caduta libera – caso 3



Analizziamo la velocità

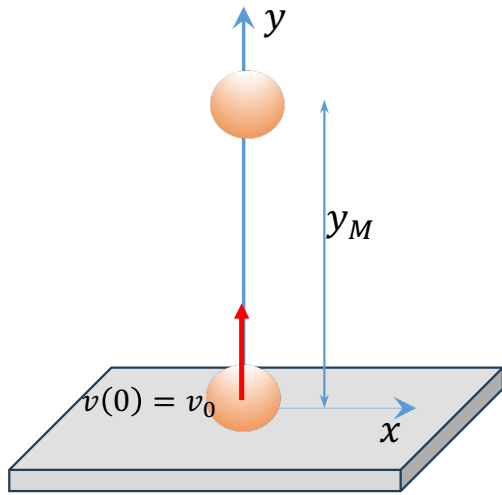
$$v(t) = v_0 - gt$$

La velocità parte da un valore iniziale  $v_0$  positivo e diminuisce linearmente. Ad un certo istante risulterà  $v(t_1) = 0$ , dopo di che la velocità diventa negativa.

Quindi

- Per  $0 \leq t < t_1$ ,  $v(t) > 0$ , il punto sale verso l'alto.
- Per  $t = t_1$ ,  $v(t) = 0$ , il punto è istantaneamente fermo.
- Per  $t > t_1$ ,  $v(t) < 0$ , il punto torna indietro, verso il basso.

# Moto di caduta libera – caso 3



Dopo quanto tempo dalla partenza viene raggiunta la massima altezza?

→ La massima altezza viene raggiunta al tempo  $t_M$  per il quale si annulla la velocità

$$0 = v_0 - gt_M$$

$$t_M = \frac{v_0}{g}$$

Quale sarà la massima altezza raggiunta?

→ Basta sostituire  $t = t_1$  nell'espressione di  $y(t)$

$$y_M = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \left( \frac{v_0}{g} \right)^2$$

$$y_M = \frac{v_0^2}{2g}$$

# Moto di caduta libera – caso 3

Dopo quanto tempo dalla partenza viene raggiunta una determinata altezza  $h$ , tale che  $0 < h < y_M$ ?

→ Riprendiamo l'espressione  $y(t)$  e poniamo  $y(t) = h$

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

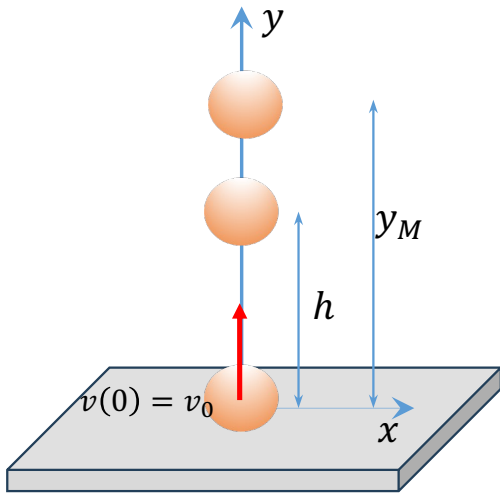
$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado

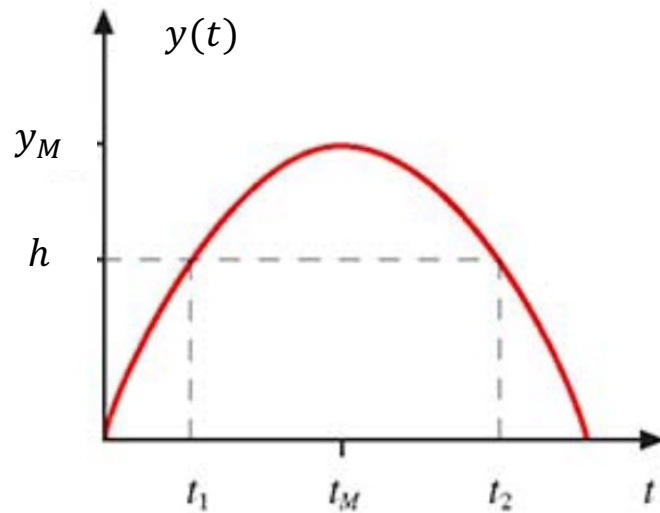
$$\frac{1}{2} g t^2 - v_0 t + h$$

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$$

In questo caso l'equazione di secondo grado dà due soluzioni positive: il punto materiale raggiunge l'altezza  $h$  in due istanti di tempo: la prima salendo, la seconda scendendo.



# Moto di caduta libera – caso 3

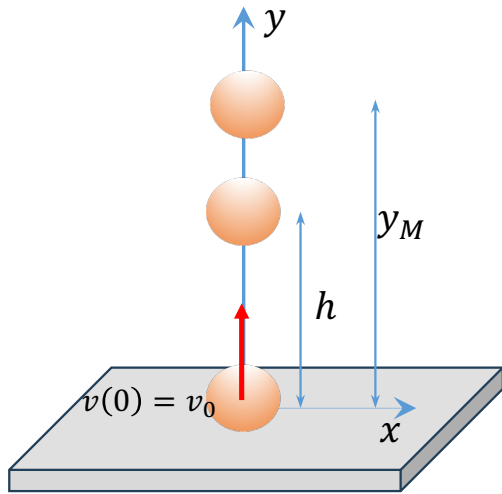


$$t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$$

Analizziamo la soluzione del problema osservando il grafico della posizione in funzione del tempo

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

# Moto di caduta libera – caso 3



Dopo quanto tempo il punto materiale atterra di nuovo?

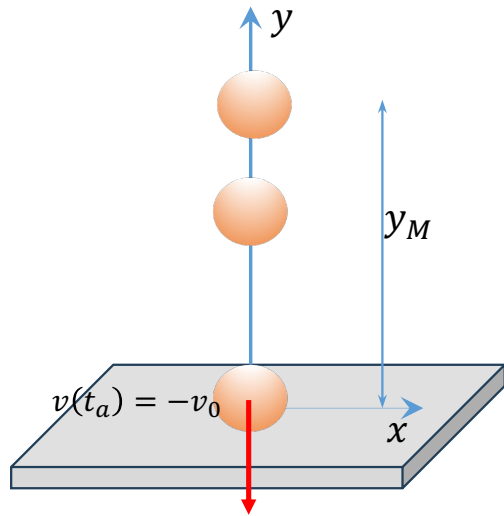
→ Riprendiamo l'espressione  $y(t)$  e valutiamo per quali valori di  $t$  risulta  $y = 0$

$$0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Le soluzioni dell'equazione di secondo grado sono in questo caso

- $t = 0$  (soluzione ovvia, il punto parte da  $y = 0$ )
- $t_a = 2 \frac{v_0}{g}$  questo è il valore di tempo per il quale il punto materiale torna a  $y = 0$  durante la discesa (osserviamo che  $t_a = 2t_M$ )

# Moto di caduta libera – caso 3



Quale sarà la velocità all'atterraggio?

→ Basta sostituire il valore di  $t_a$  appena trovato nell'espressione di  $v(t)$

$$v = v_0 - gt$$

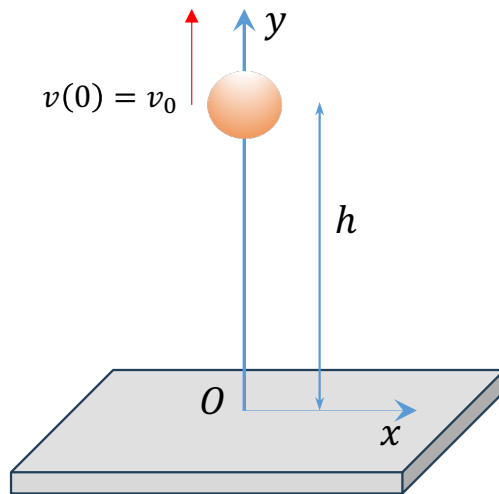
$$t_a = 2\frac{v_0}{g}$$

$$v_a = v_0 - gt_a = v_0 - 2g\frac{v_0}{g} = -v_0$$

$$v_a = -v_0$$

La velocità all'atterraggio è opposta a quella della partenza.

# Moto di caduta libera – caso 4



Caso 4 – corpo lanciato da un'altezza  $y(0) = h$  con velocità iniziale  $v(0) = v_0$  verso l'alto.

Analizziamo l'andamento della velocità e della posizione in funzione del tempo

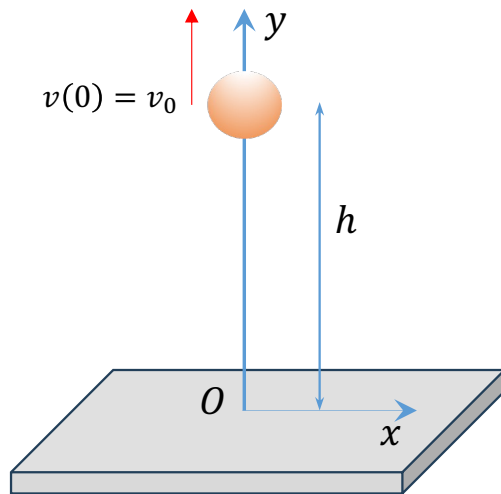
$$v(t) = v_0 - gt$$
$$y(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

$$0 = h + v_3 t - \frac{1}{2} gt^2$$

$$t_c = -v_3 \dots v_3$$

# Moto di caduta libera – caso 4

Dopo quanto tempo il punto materiale raggiunge il suolo?



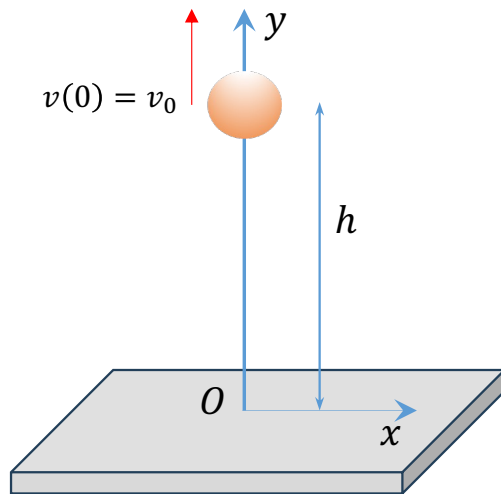
$$0 = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$\frac{1}{2} g t^2 - v_0 t - h = 0$$

$$t_a = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$$

L'equazione di secondo grado in questo caso ammette due soluzioni di cui una positiva e una negativa, solo la soluzione positiva ha significato fisico, risulta quindi

$$t_a = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$$

# Moto di caduta libera – caso 4



Dopo quanto tempo il punto materiale raggiunge la massima altezza?

Riprendiamo l'espressione della velocità

$$v(t) = v_0 - gt$$

Quando il punto raggiunge la massima altezza la velocità si annulla, risulta quindi

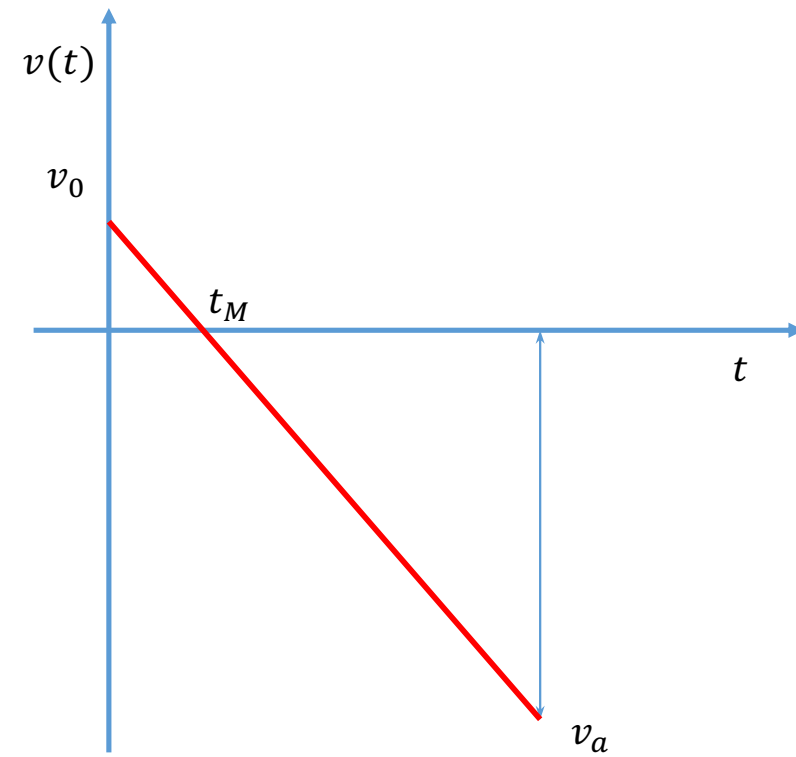
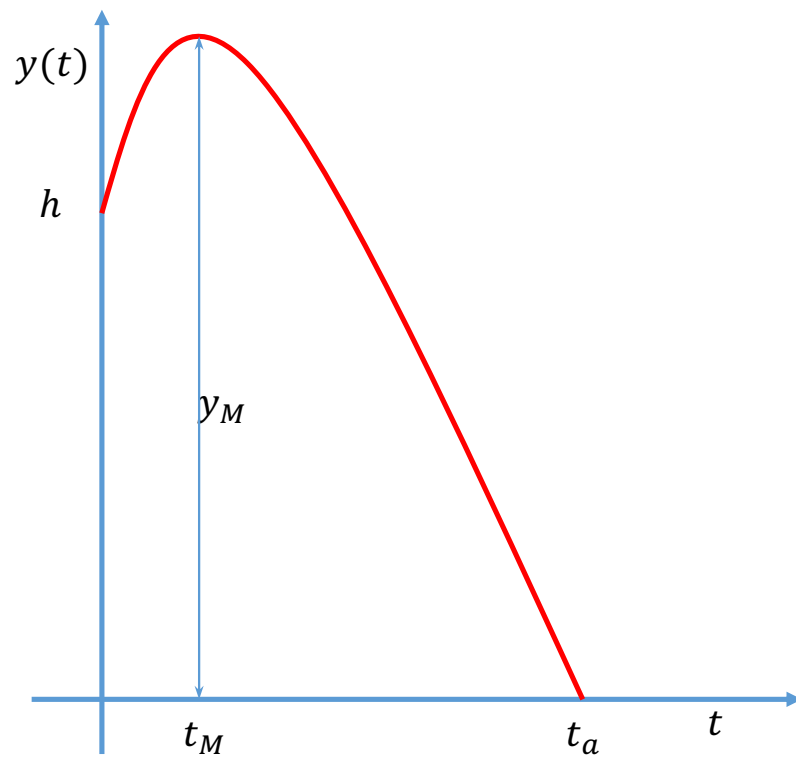
$$0 = v_0 - gt$$

$$t_M = \frac{v_0}{g}$$

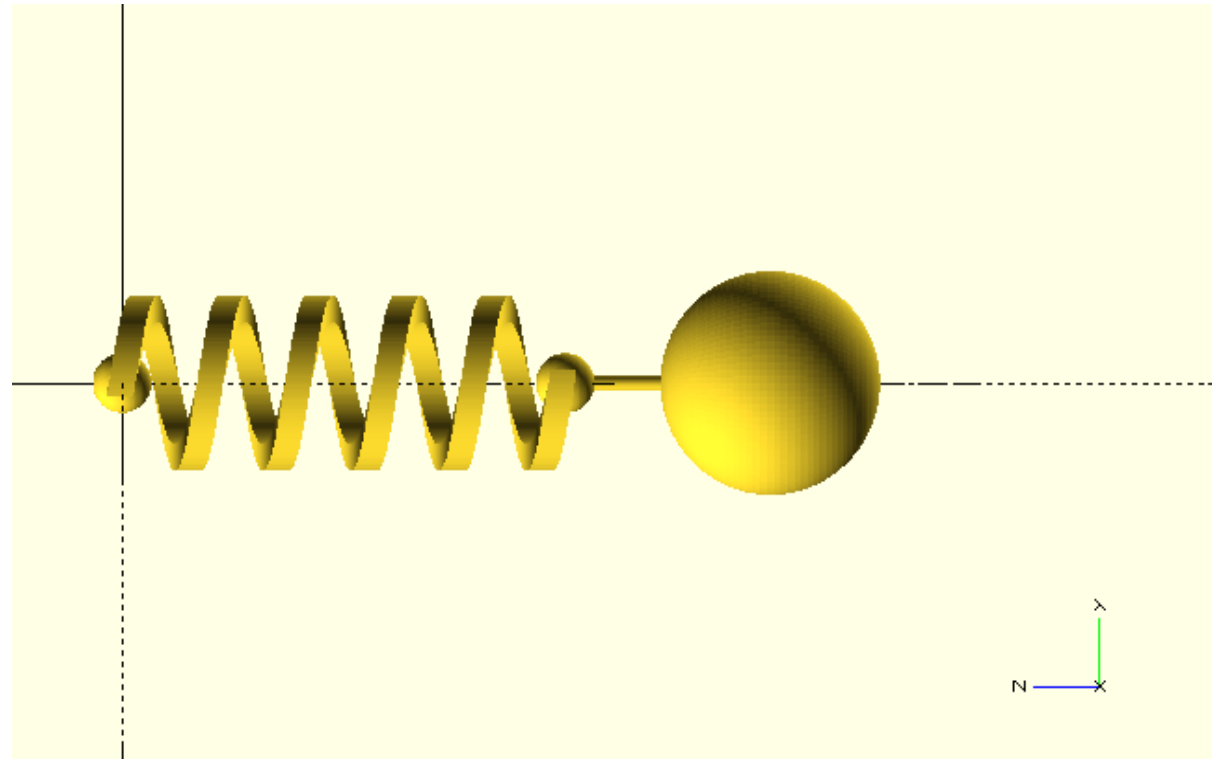
Quale sarà la massima altezza raggiunta?

$$y_M = h + v_0 t_M - \frac{1}{2} g t_M^2 = h + \frac{v_0^2}{2g}$$

# Moto di caduta libera – caso 4



# Moto armonico



# Moto armonico - introduzione

Nel moto uniformemente accelerato siamo partiti dall'accelerazione e tramite due integrazioni rispetto al tempo, abbiamo determinato la velocità e poi lo spostamento.

In questo caso invece analizziamo il moto del punto materiale a partire dallo spostamento, e tramite due operazioni di derivazione rispetto al tempo, calcoleremo la velocità e l'accelerazione.

Il moto armonico è caratteristico di vari fenomeni fisici: è il moto che si osserva ad esempio collegando una massa puntiforme a un supporto fisso tramite un elemento elastico (molla), oppure è il moto del pendolo semplice in determinate ipotesi operative (piccole oscillazioni), ma sui sistemi fisici in cui è possibile trovare un moto armonico torneremo nelle lezioni successive. In questa parte analizziamo il moto dal punto di vista puramente cinematico.

# Moto armonico

Supponendo che il moto si svolga lungo una retta  $x$ , sulla quale abbiamo fissato un'origine  $O$  e una direzione, in un moto armonico lo spostamento è dato dalla seguente legge oraria

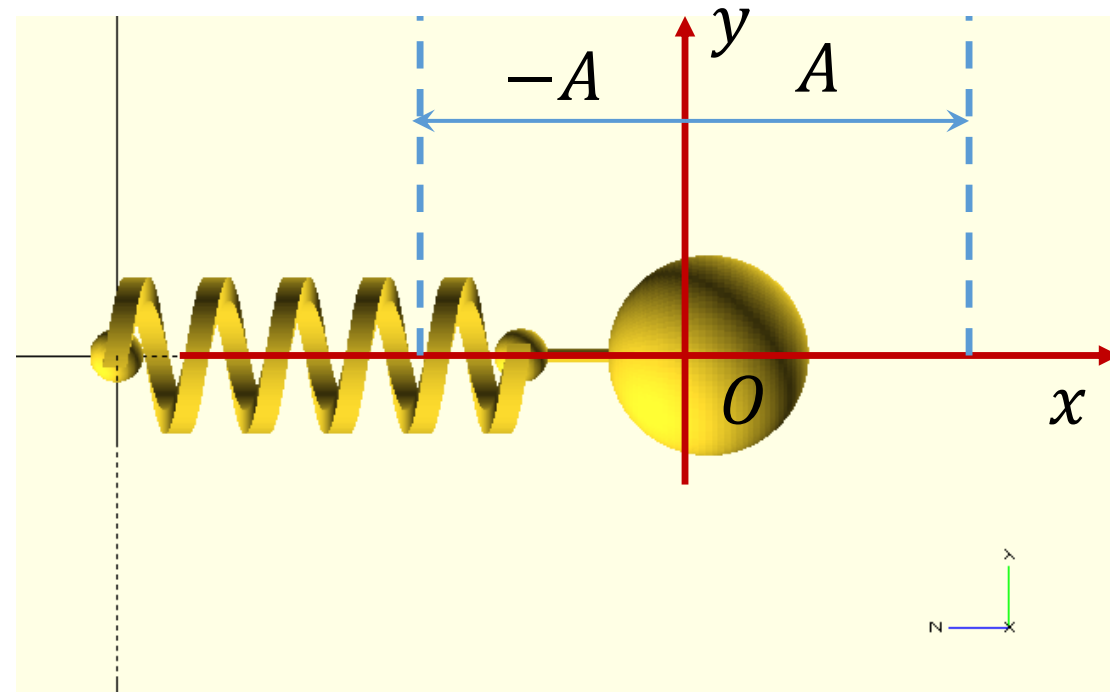
$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

$x(t)$  --> spostamento in funzione del tempo

$A$  ampiezza (lunghezza)

$\omega$  pulsazione (angolo/tempo -rad/s)

$\phi$  fase (angolo (rad))



# Moto armonico

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

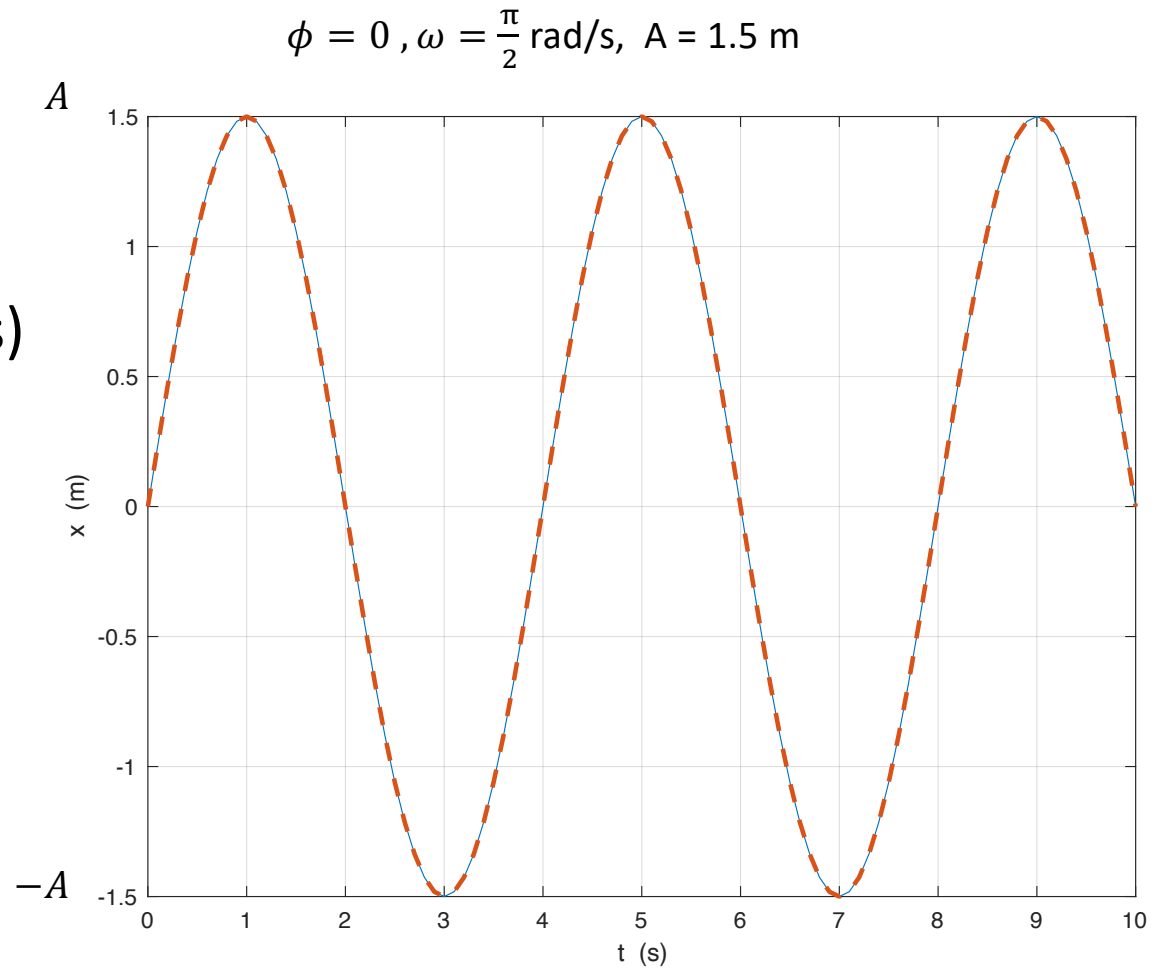
$A$  ampiezza (lunghezza)

$\omega$  pulsazione (angolo/tempo -rad/s)

$\phi$  fase (angolo (rad))

Esempio numerico con:

$$\phi = 0, \omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}, A = 1.5 \text{ m}$$



# Moto armonico

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

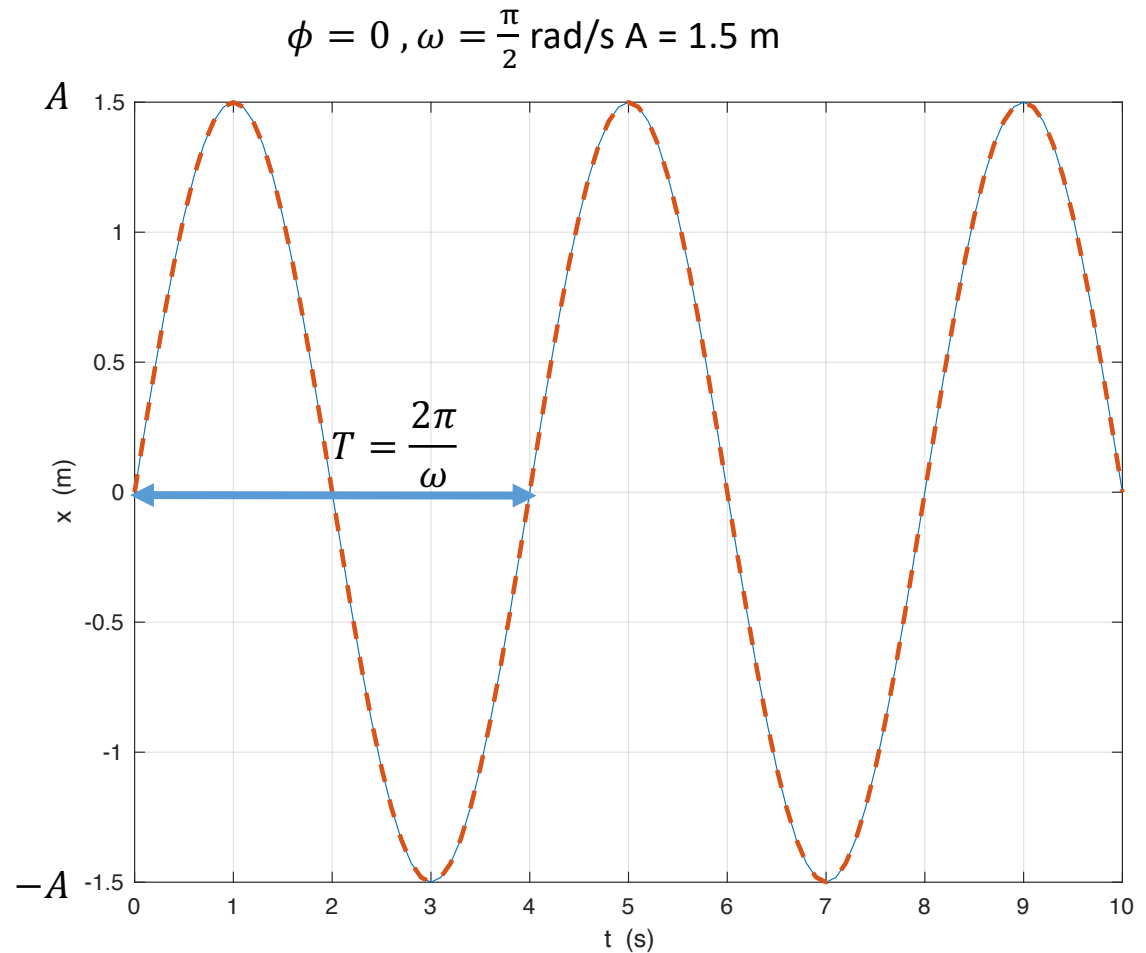
Ricordando che la funzione seno è periodica, possiamo definire il periodo dell'oscillazione come

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Dimensionalmente, il periodo è un tempo.

Nell'esempio in figura, risulta

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \text{ rad}}{\frac{\pi}{2} \text{ rad/s}} = 4 \text{ s}$$



# Moto armonico

Si definisce frequenza il reciproco del periodo

$$f = \frac{1}{T}$$

Risulta facilmente che

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

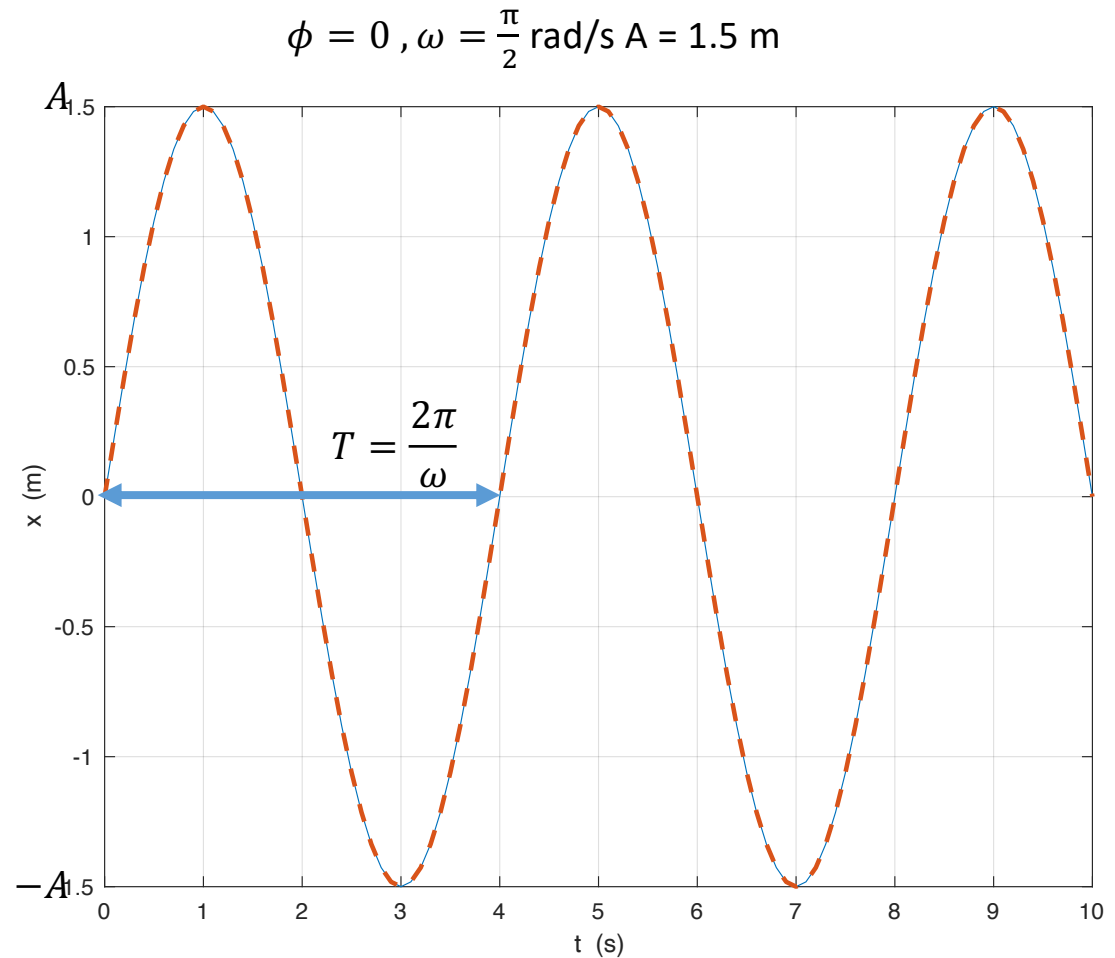
$$\omega = 2\pi f$$

L'unità di misura della frequenza è  $1/s = s^{-1} = \text{Hz}$  Hertz

Nell'esempio numerico in figura,

$$f = \frac{1}{T} = 0.25 \text{ Hz}$$

Altro esempio: in un'oscillazione a 500 Hz il periodo è  $T = 1/500 \text{ s}$



# Moto armonico

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

$A$  ampiezza

$\omega$  pulsazione

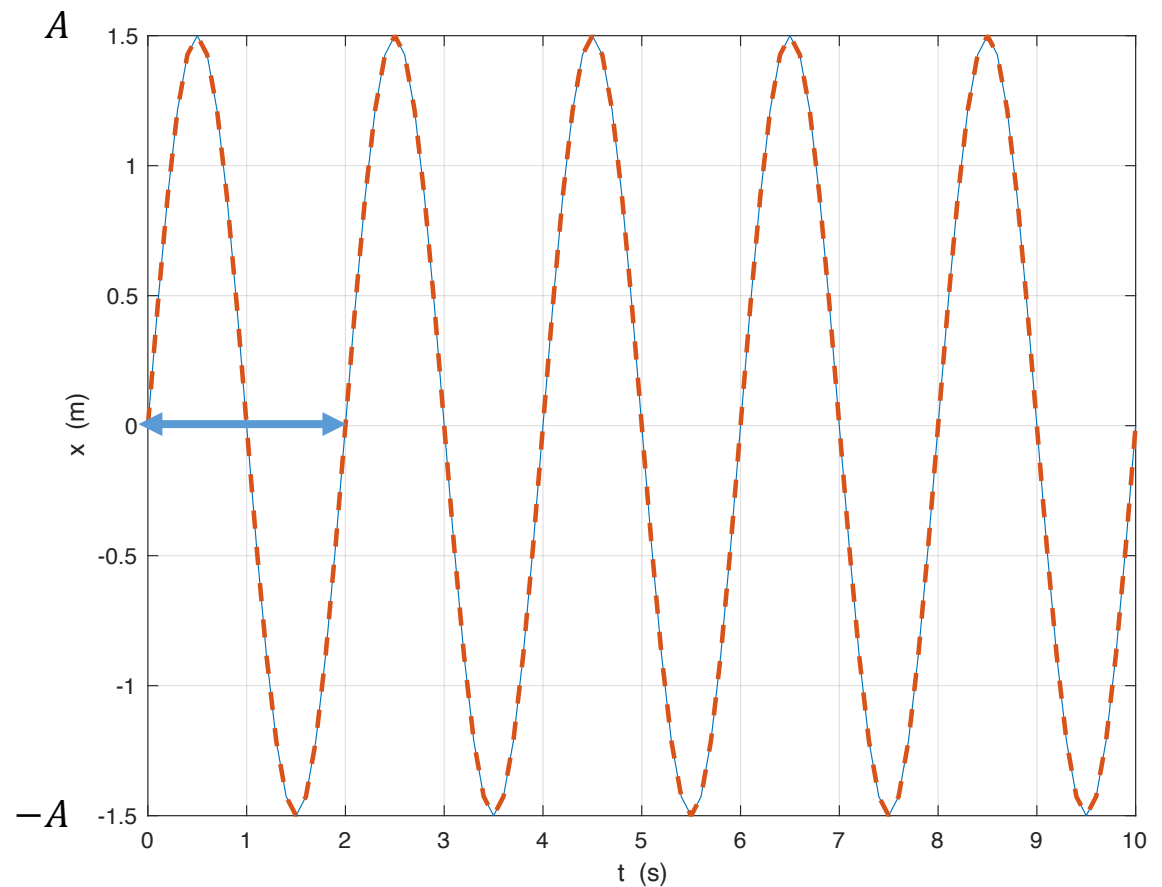
$\phi$  fase

Esempio numerico con  $\omega = \pi$  rad/s (doppia rispetto all'esempio precedente)

Si osserva che in questo caso il periodo è dimezzato rispetto all'esempio precedente.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \text{ s}$$

$$\phi = 0, \omega = \pi \text{ rad/s } A = 1.5 \text{ m}$$



# Moto armonico

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

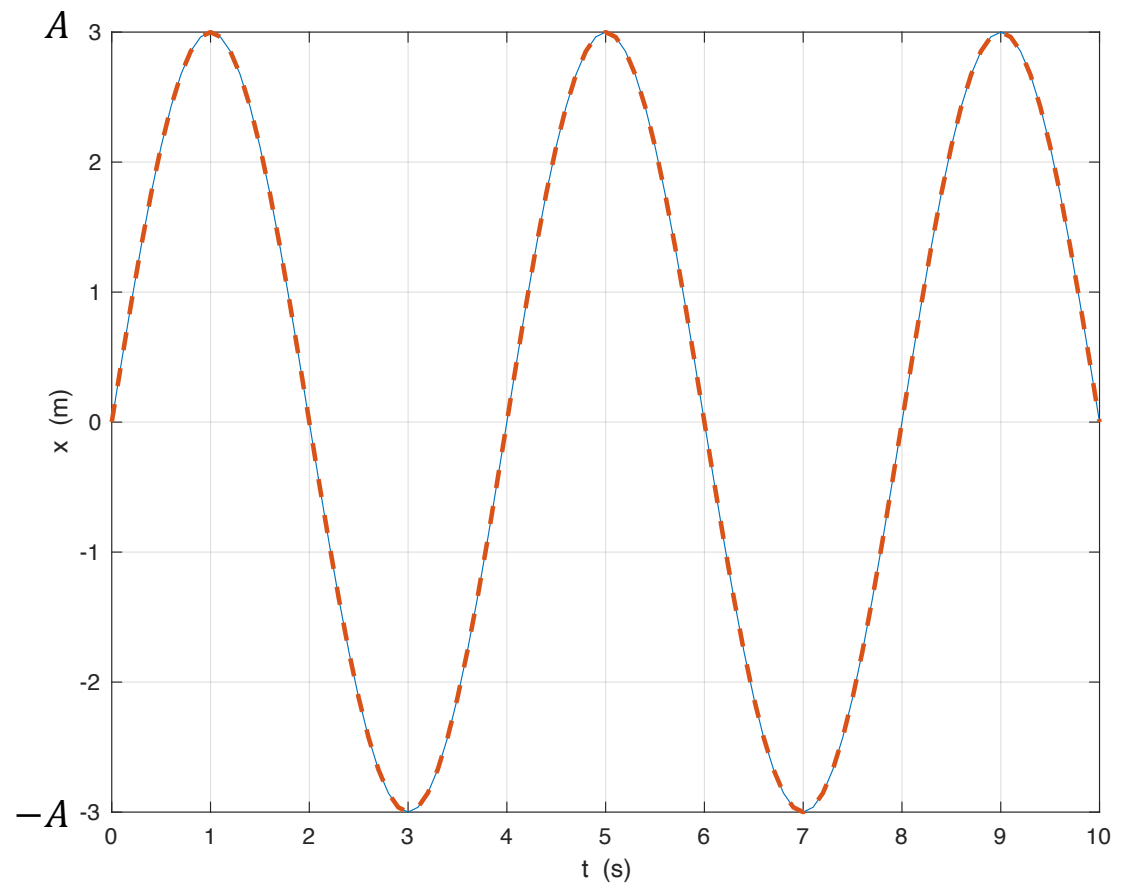
$A$  ampiezza

$\omega$  pulsazione

$\phi$  fase

Esempio numerico ottenuto con  
 $A = 3$  m (doppia rispetto  
all'esempio precedente)

$$\phi = 0, \omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}, A = 3 \text{ m}$$



# Moto armonico

$$\phi = \frac{\pi}{4} \text{ rad}, \omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}, A = 3 \text{ m}$$

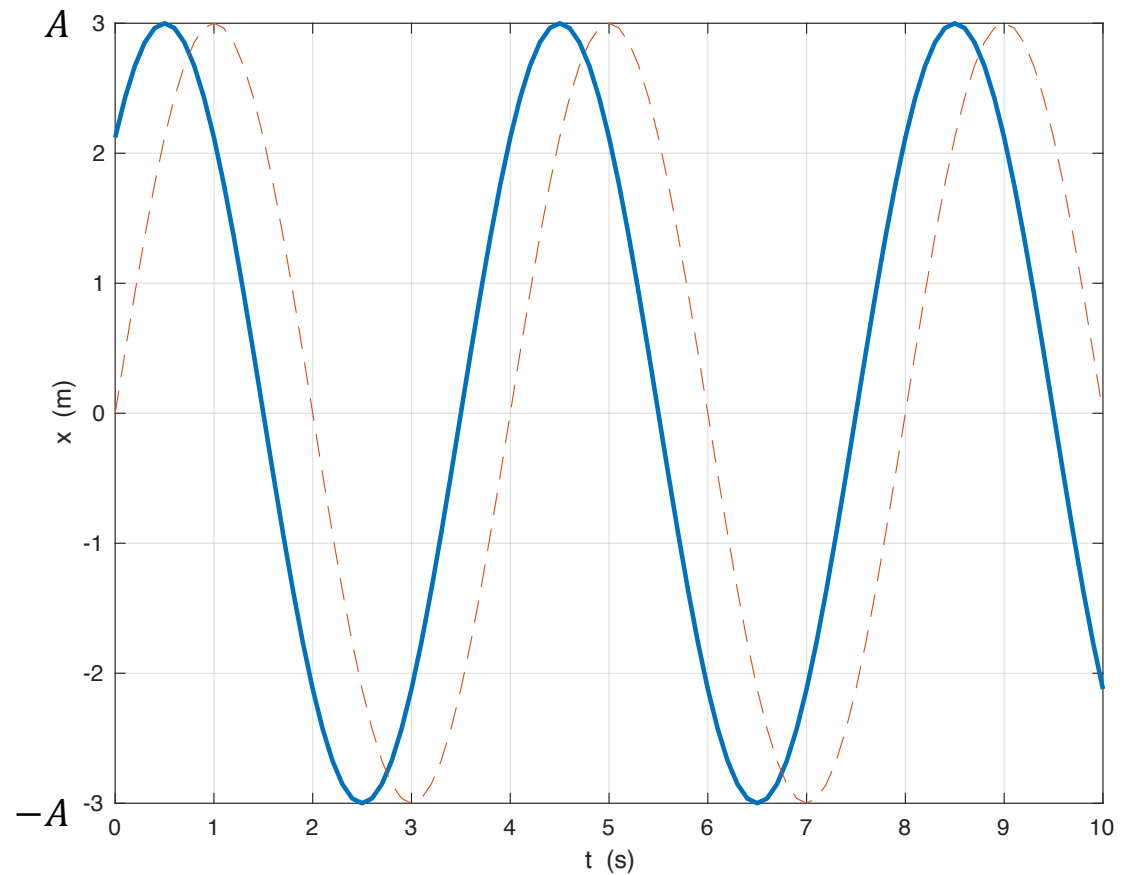
$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

$A$  ampiezza

$\omega$  pulsazione

$\phi$  fase

Effetto della fase: una fase positiva  
sposta verso sinistra (anticipa)  
l'oscillazione.



# Moto armonico

Nel moto armonico, abbiamo visto che la posizione è definita dalla seguente legge oraria:

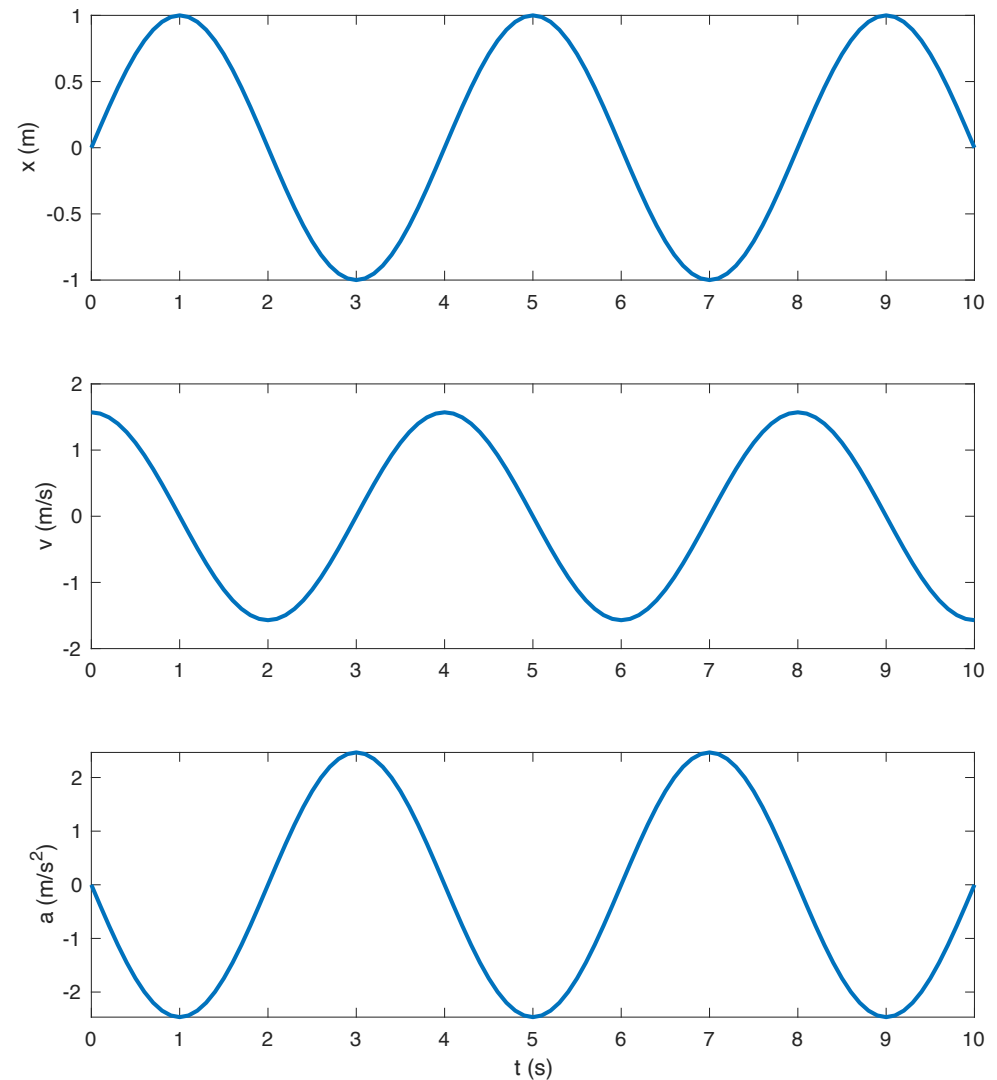
$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

Tramite una prima derivazione rispetto al tempo, è possibile valutare la velocità:

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

Tramite una seconda derivazione rispetto al tempo, è possibile valutare l'accelerazione:

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$



# Moto armonico

Si osserva che:

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

→ Questo è risultato specifico del moto armonico!

Ma abbiamo anche visto che

$$a(t) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Per il moto armonico vale quindi

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

Quest'ultima è un'equazione in cui appare una funzione incognita  $x(t)$  insieme alla sua derivata (in questo caso la derivata seconda,  $\frac{d^2 x}{dt^2}$ ). Queste equazioni prendono il nome di equazioni differenziali.

Con i passaggi precedenti, abbiamo verificato che La soluzione dell'equazione

differenziale  $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$  è  $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = A \omega \cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -A \omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

# Moto smorzato esponenzialmente

$$a(t) = -kv(t)$$

$k$  costante (dimensioni?)  $1/s$ ,  $s^{-1} \rightarrow \text{Hz}$

Moto smorzato esponenzialmente



# Moto smorzato esponenzialmente

Analizziamo un tipo di moto in cui l'accelerazione è proporzionale alla velocità. La costante di proporzionalità è negativa.

$$a(t) = -kv(t)$$

Questo modello fisico si trova ad esempio quando analizziamo il moto di corpi all'interno di fluidi viscosi, come ad esempio i liquidi.

Ricordando che l'accelerazione è la derivata rispetto al tempo della velocità, possiamo riscrivere l'equazione precedente come:

$$\frac{dv}{dt} = -kv(t)$$

Si tratta di un'altra equazione differenziale, questa volta l'incognita è la velocità  $v(t)$ .

# Moto smorzato esponenzialmente

Cerchiamo di risolvere questa equazione differenziale

$$\frac{dv}{dt} = -kv(t)$$

$$\frac{dv}{v} = -kdt \rightarrow \text{separazione delle variabili}$$

Integriamo membro a membro tra l'istante iniziale e il generico istante  $t$ , e tra la velocità iniziale  $v_0$  e la generica velocità  $v$ :

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \int_0^t -kdt$$

# Moto smorzato esponenzialmente

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \int_0^t -k dt$$

Sviluppando gli integrali otteniamo

$$\ln v - \ln v_0 = -kt$$

Ricordando le proprietà dei logaritmi

$$\ln \frac{v}{v_0} = -kt$$

Ricordando la relazione tra logaritmi e legge esponenziale

$$\frac{v}{v_0} = e^{-kt}$$

$$v(t) = v_0 e^{-kt}$$

# Moto smorzato esponenzialmente

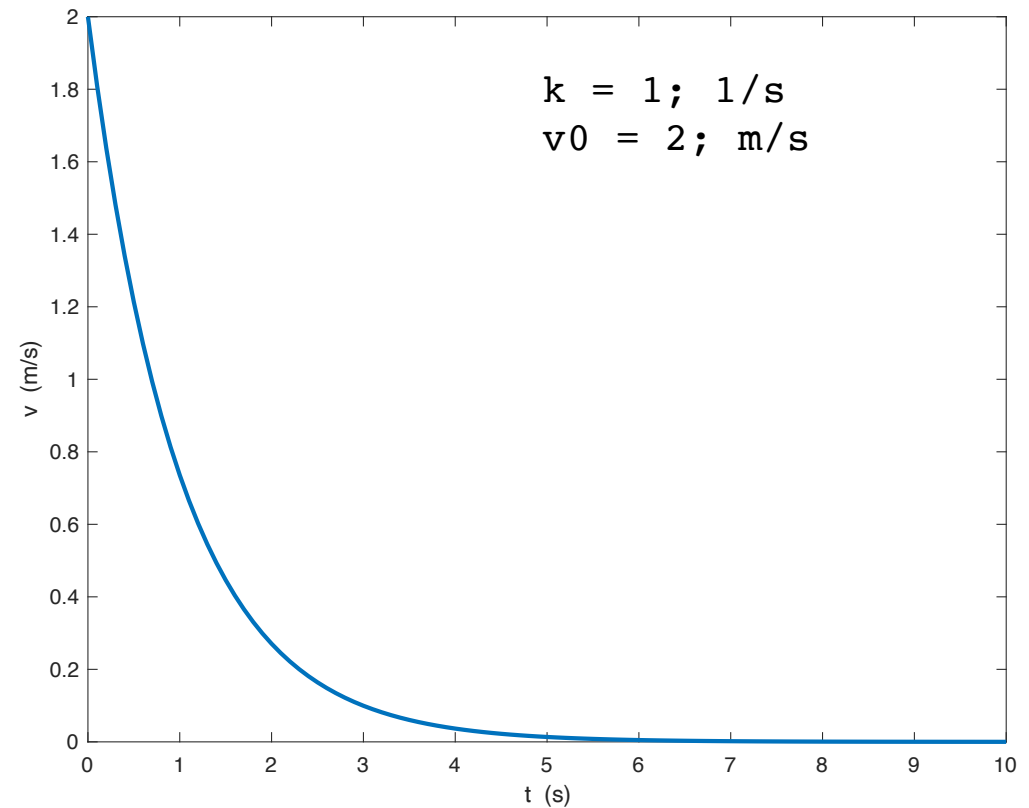
La velocità varia nel tempo secondo una legge esponenziale con esponente negativo

$$v = v_0 e^{-kt}$$

Si verifica facilmente che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = 0$$

Il corpo rallenta con legge esponenziale.



# Moto smorzato esponenzialmente

$$v = v_0 e^{-kt}$$

Con una successiva operazione di integrazione, conoscendo la posizione iniziale  $x_0$ , possiamo determinare anche lo spostamento

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t v(t) dt = x_0 + \int_0^t v_0 e^{-kt} dt = \\ &= x_0 + \left[ -\frac{v_0}{k} e^{-kt} \right]_0^t \end{aligned}$$

$$x(t) = x_0 + (1 - e^{-kt}) \frac{v_0}{k}$$

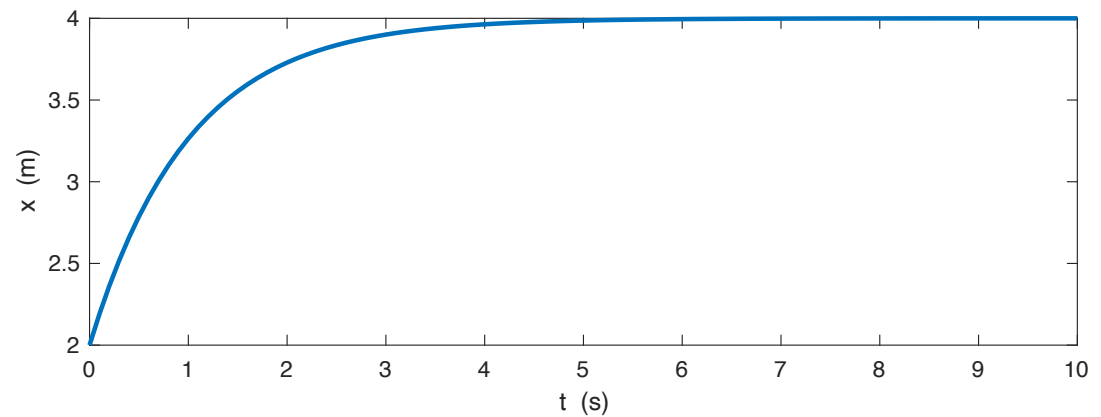
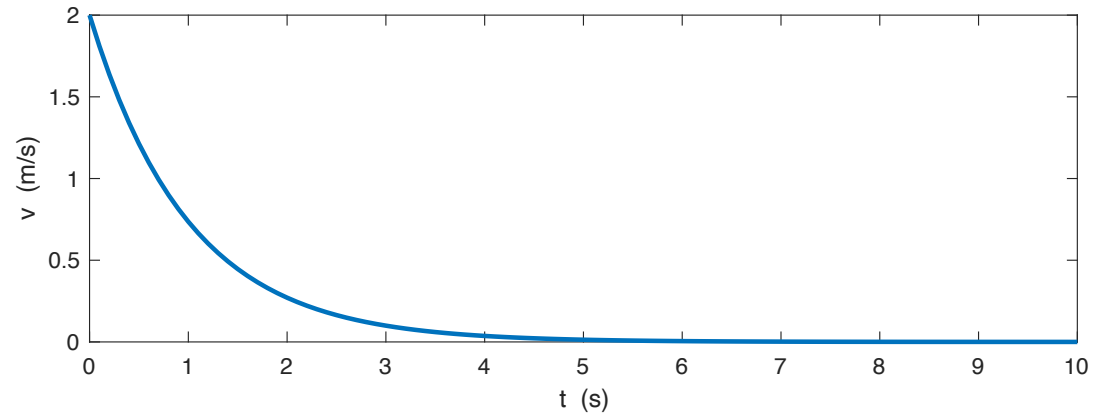
# Moto smorzato esponenzialmente

$$v = v_0 e^{-kt}$$

$$x(t) = x_0 + (1 - e^{-kt}) \frac{v_0}{k}$$

Esempio numerico con

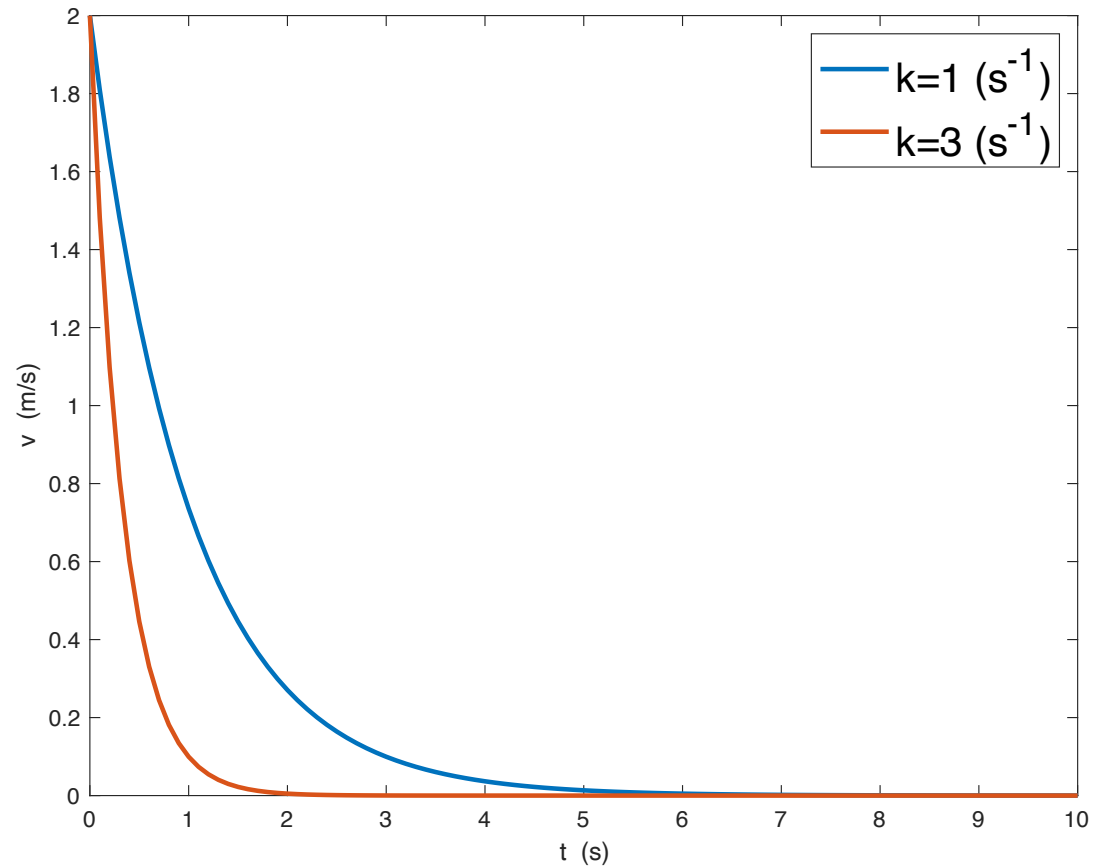
$$\begin{aligned} k &= 1 \text{ 1/s} \\ v_0 &= 2 \text{ m/s} \\ x_0 &= 2 \text{ m} \end{aligned}$$



# Moto smorzato esponenzialmente

$$v = v_0 e^{-kt}$$

Esempio numerico:  
variazione della velocità  
per diversi valori della  
costante  $k$



## Moto rettilineo - riepilogo

$$x(t) \\ v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a(t) \\ v(t) = v_0 + \int_0^t a(t) dt$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t) dt$$

# Moto rettilineo - riepilogo

## Casi di studio

- Moto uniforme
- Moto uniformemente accelerato
- Moto di caduta libera
- Moto armonico
- Moto smorzato esponenzialmente