

Corso di FISICA 1



Capitolo 4 – cinematica del punto, moti bidimensionali

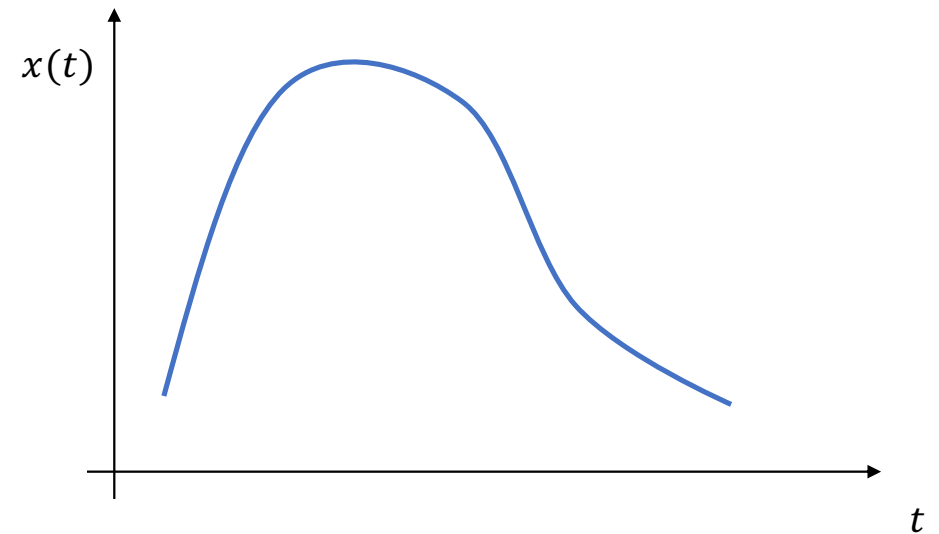
Monica Malvezzi, Università degli
Studi di Siena



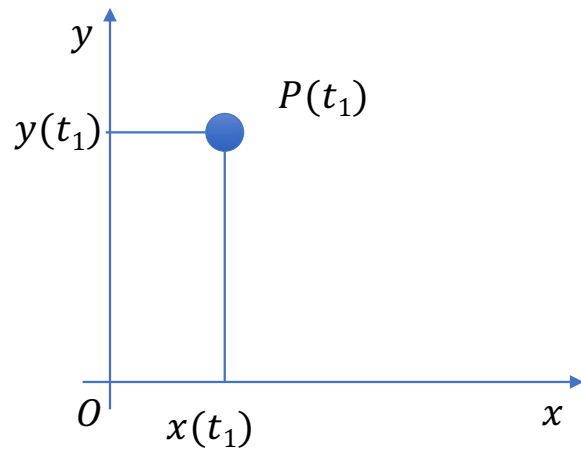
Introduzione

Nel capitolo precedente abbiamo studiato il moto di un punto materiale che si muove di moto rettilineo. Abbiamo fissato un'origine e un verso sulla retta percorsa dal punto e abbiamo rappresentato il moto tramite la funzione $x(t)$ (legge oraria), della quale abbiamo anche riportato il grafico in funzione del tempo.

Abbiamo anche definito la velocità $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ e l'accelerazione $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$.



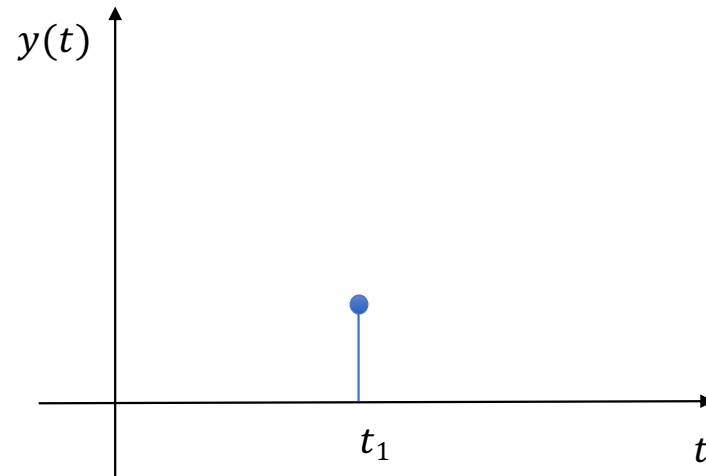
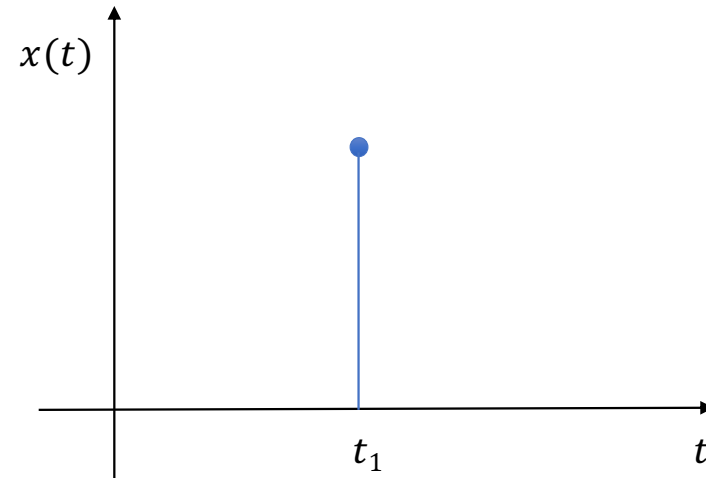
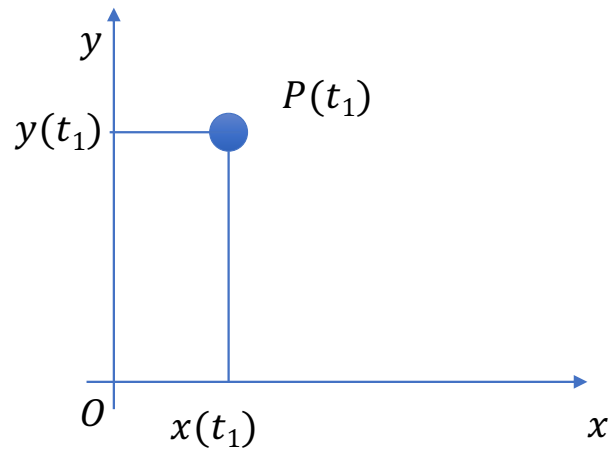
Introduzione



Analizziamo quindi il moto di un punto materiale su un piano. Per rappresentare il moto, fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine nel punto O e assi x e y . La posizione del punto P in un generico istante di tempo t_1 è rappresentata dalle sue coordinate rispetto al sistema di riferimento che abbiamo appena definito: $x(t_1)$ e $y(t_1)$.

Introduzione

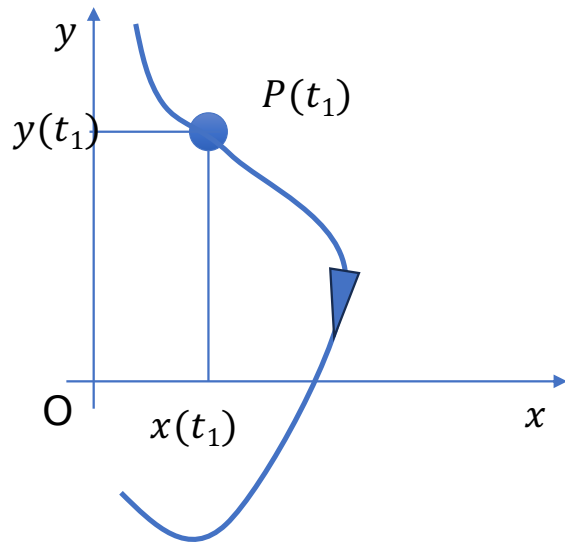
Per poter rappresentare completamente il moto del punto nel piano, in questo caso devo analizzare come variano sia la $x(t)$ che la $y(t)$.



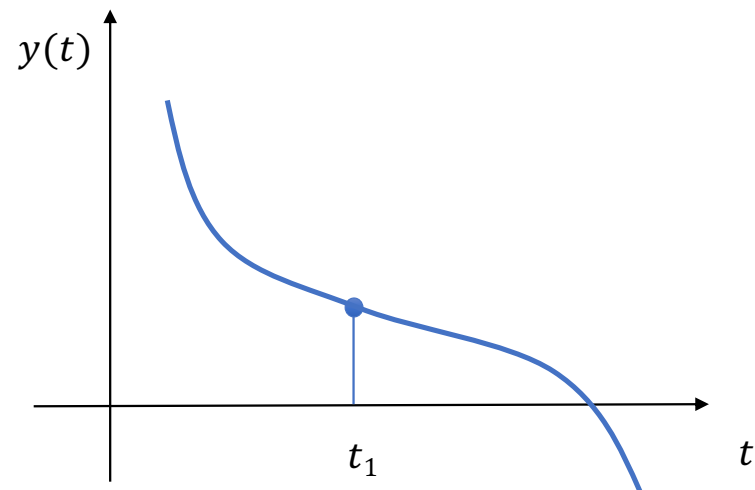
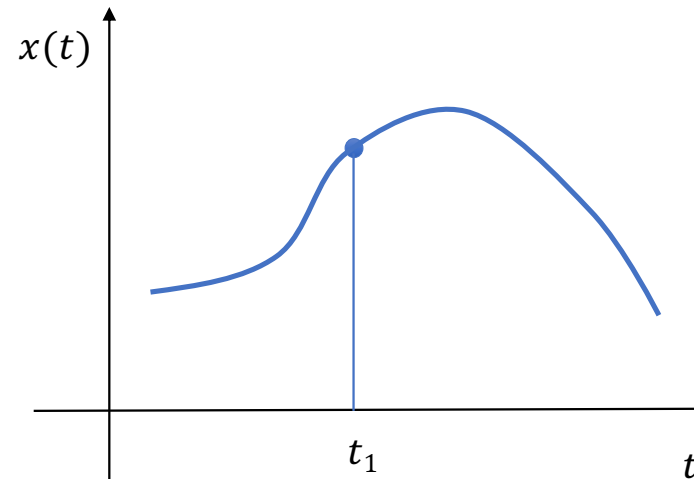


Traiettorie e leggi orarie

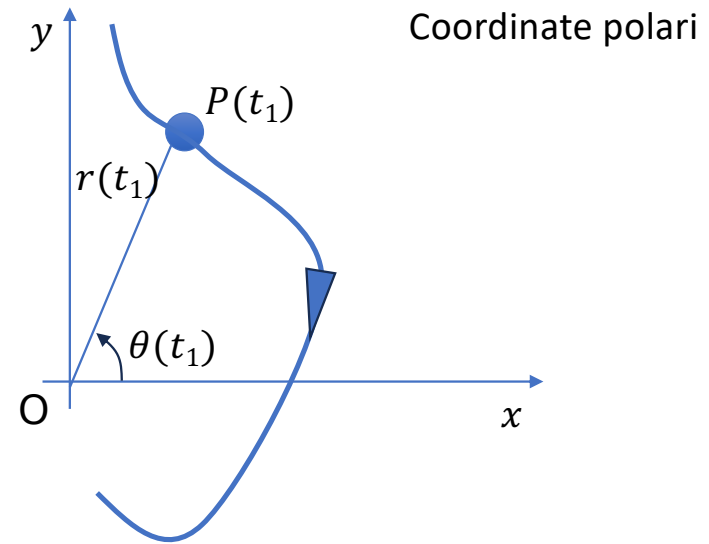
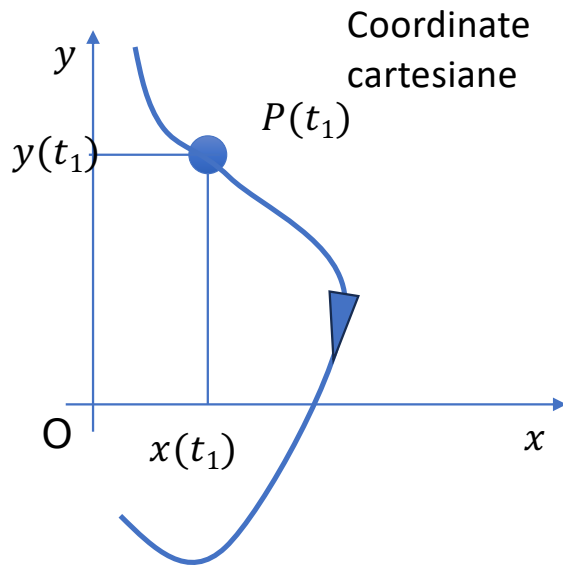
Traiettoria e leggi orarie



Si definisce **traiettoria** del punto il luogo geometrico descritto dal punto materiale durante il moto. Durante la percorrenza della traiettoria, sia la $x(t)$ che la $y(t)$ variano nel tempo secondo determinate funzioni (leggi orarie).

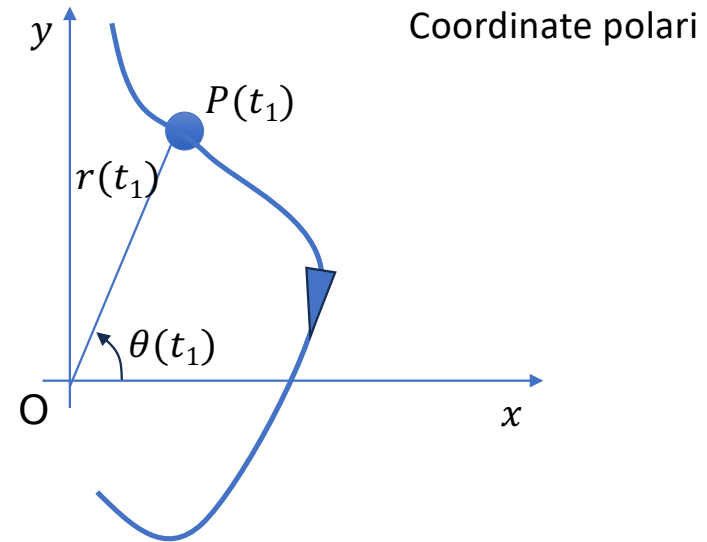
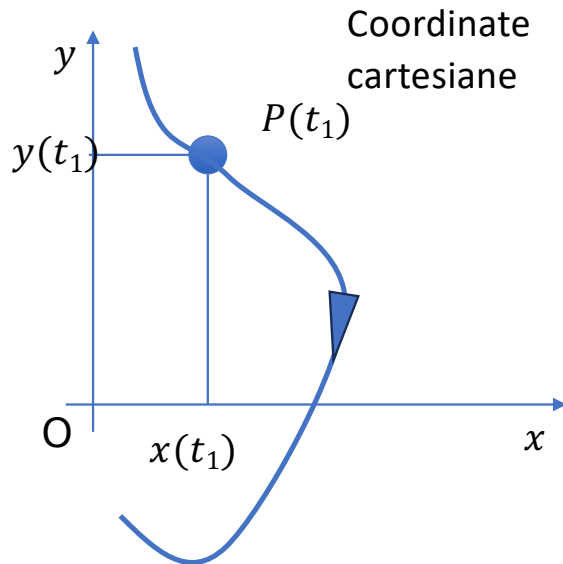


Coordinate cartesiane e coordinate polari



Le coordinate cartesiane non sono l'unico modo per rappresentare la posizione di un punto materiale nel piano, in alcune applicazioni è conveniente utilizzare le coordinate polari. Nelle coordinate polari, la posizione di un punto al tempo t_1 è rappresentata dalla sua distanza $r(t_1)$ rispetto all'origine del sistema di riferimento O e dall'angolo $\theta(t_1)$ tra il segmento $\overrightarrow{OP}$ e l'asse x .

Coordinate cartesiane e coordinate polari



È possibile passare dalle coordinate cartesiane a quelle polari e viceversa.

Se conosco le coordinate polari, le coordinate cartesiane possono essere calcolate in questo modo:

$$x(t) = r(t)\cos(\theta(t))$$

$$y(t) = r(t)\sin(\theta(t))$$

Se conosco le coordinate cartesiane, le coordinate polari possono essere calcolate in questo modo:

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

$$\vartheta(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}$$

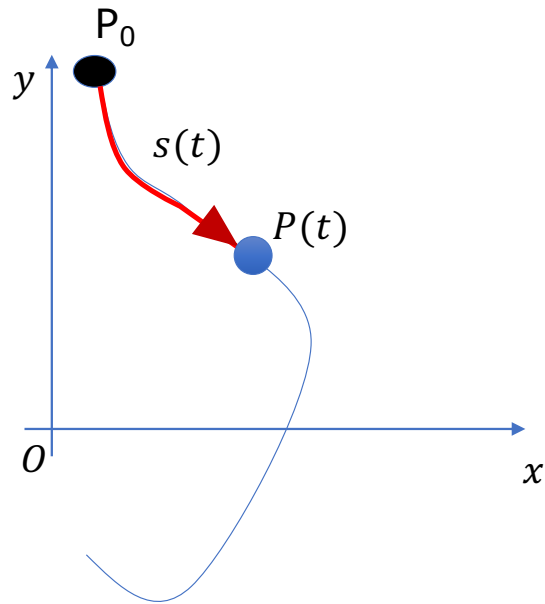
Coordinate cartesiane e coordinate polari

Se conosco le coordinate cartesiane, le coordinate polari possono essere calcolate in questo modo:

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$
$$\vartheta(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}$$

Dobbiamo però stare attenti alla funzione arcotangente, che nella sua definizione comune restituisce un angolo θ che varia nell'intervallo $0 \leq \theta \leq \pi$ oppure $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, mentre l'angolo θ può variare nell'intervallo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ oppure $-\pi \leq \theta \leq \pi$ (in tutto l'angolo giro). Per valutare l'effettivo valore di θ dobbiamo tener conto del segno di $x(t)$ e $y(t)$, e non solo del loro rapporto.

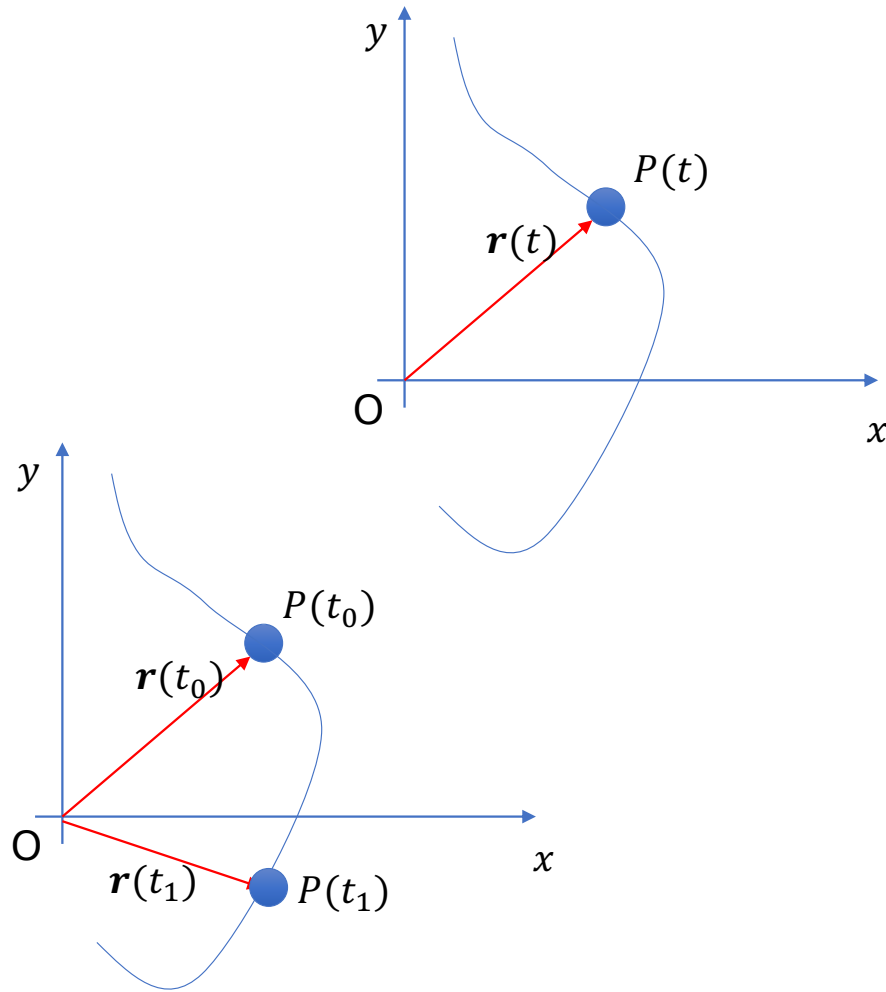
Ascissa curvilinea



Se è nota la traiettoria del punto materiale, è possibile fissare su di essa un punto di partenza, P_0 , e quindi identificare la posizione del punto specificando la sua ascissa curvilinea $s(t)$, vale a dire la lunghezza dell'arco di traiettoria percorso dal punto in un determinato istante.

Il valore di $s(t)$ può essere positivo, negativo o nullo a seconda della posizione di P rispetto a P_0 e al verso di percorrenza.

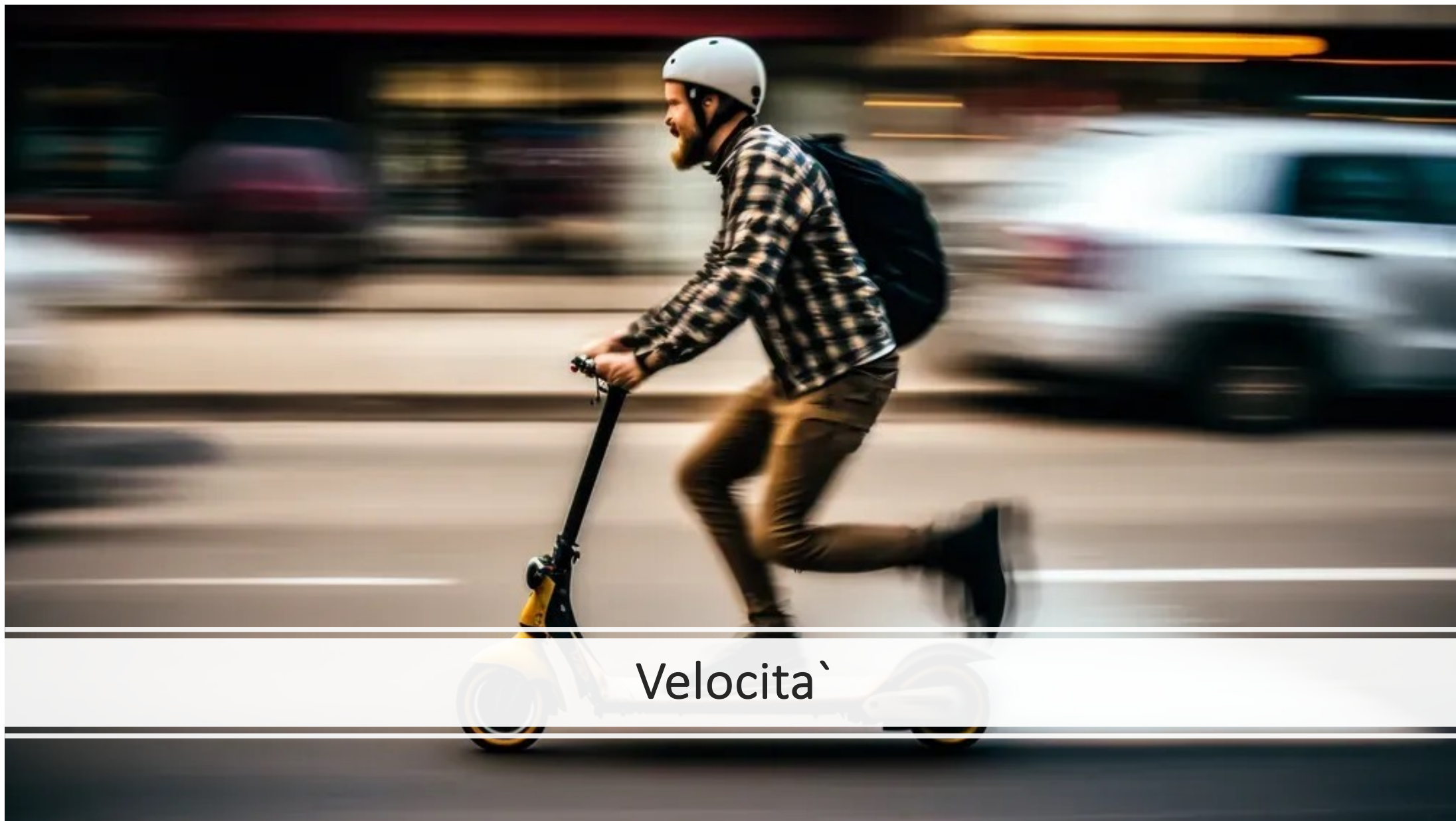
Raggio vettore



Un ulteriore modo per rappresentare la posizione del punto P nel suo moto nel piano è tramite il cosiddetto raggio vettore, vale a dire il vettore geometrico $\mathbf{r}(t)$ che istante per istante connette l'origine del Sistema di riferimento con il punto P . Conoscendo le coordinate cartesiane del punto, il raggio vettore è definito da

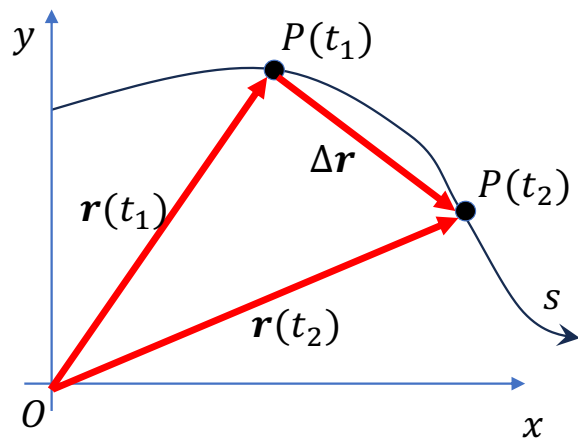
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

essendo $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ i versori corrispondenti agli assi x e y del sistema di riferimento.



Velocita`

Velocità media



$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$$

Supponiamo che un punto P percorra una traiettoria su un piano su cui abbiamo fissato un sistema di riferimento. Abbiamo visto che possiamo rappresentare il moto nel piano tramite il cosiddetto raggio vettore, vale a dire il vettore geometrico $\mathbf{r}(t)$ che istante per istante connette l'origine del Sistema di riferimento con il punto P .

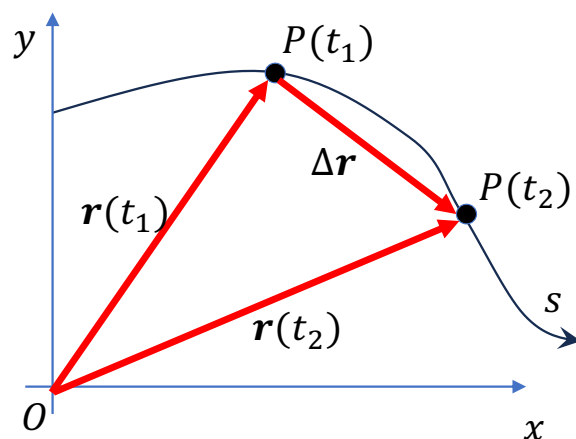
Considerando la posizione del punto in due istanti di tempo t_1 e t_2 tramite i rispettivi raggi vettori $\mathbf{r}(t_1)$ e $\mathbf{r}(t_2)$ si definisce velocità media nell'intervallo $[t_1, t_2]$ il vettore

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Essendo

$$\Delta t = t_2 - t_1$$
$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$$

Velocità media



La velocità media nell'intervallo $[t_1, t_2]$ è un vettore

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Che ha

- Modulo pari a

$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{|P(t_2) - P(t_1)|}{\Delta t}$$

(dimensionalmente è una lunghezza/tempo)

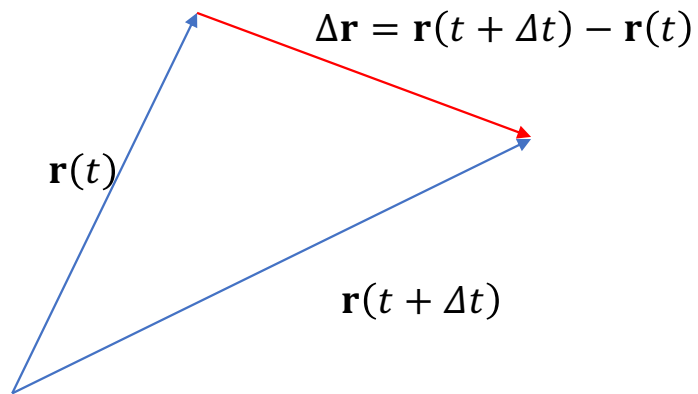
- Direzione: la retta che passa per $P(t_1)$ e $P(t_2)$
- Verso: da $P(t_1)$ a $P(t_2)$

Come abbiamo fatto per il moto rettilineo, per $\Delta t \rightarrow 0$ possiamo definire la velocità istantanea:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Ma come è definita la derivata rispetto al tempo di un vettore?

Intermezzo: derivata di un vettore rispetto al tempo



Consideriamo un vettore libero $\mathbf{r}(t)$ che varia nel tempo in modulo, direzione e verso. Nell'intervallo di tempo che va da t a $t + \Delta t$ il vettore passa da $\mathbf{r}(t)$ a $\mathbf{r}(t + \Delta t)$. Possiamo calcolare la variazione

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

e il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Posso definire quindi la derivata del vettore $\mathbf{r}$ rispetto al tempo

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Alcune regole utili per la derivazione dei vettori

Derivata della somma/differenza tra vettori

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

Derivata di un prodotto scalare-vettore

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = \frac{dm}{dt} \mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

In particolare

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (\text{se } m \text{ e' costante})$$

Derivata del prodotto scalare tra due vettori

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

Derivata del prodotto vettoriale tra due vettori (attenzione, ricordiamo che il prodotto vettoriale non è commutativo!)

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

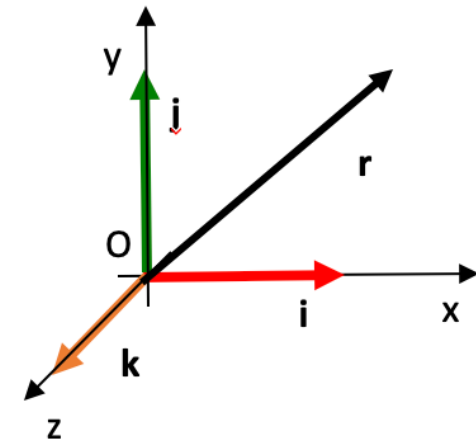
Componenti cartesiane della derivata di un vettore

Se conosciamo le componenti cartesiane di un vettore rispetto a un dato sistema di riferimento

$$\mathbf{r} = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j} + r_z \mathbf{k}$$

E se il sistema di riferimento è fisso rispetto al tempo (su questo punto torneremo in seguito), possiamo calcolare la derivata del vettore rispetto al tempo come

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dr_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dr_z}{dt} \mathbf{k}$$



Torniamo alla cinematica del punto nel piano...

Abbiamo definito la velocità istantanea di un punto materiale che si muove nel piano come

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Per $\Delta t \rightarrow 0$, si osserva che

- La lunghezza del vettore $|\Delta \mathbf{r}|$, pari alla lunghezza corda sulla traiettoria $\rightarrow$ lunghezza arco Δs
- La direzione del vettore $\Delta \mathbf{r} \rightarrow$ tangente alla traiettoria

Quindi

Per $\Delta t \rightarrow 0$,

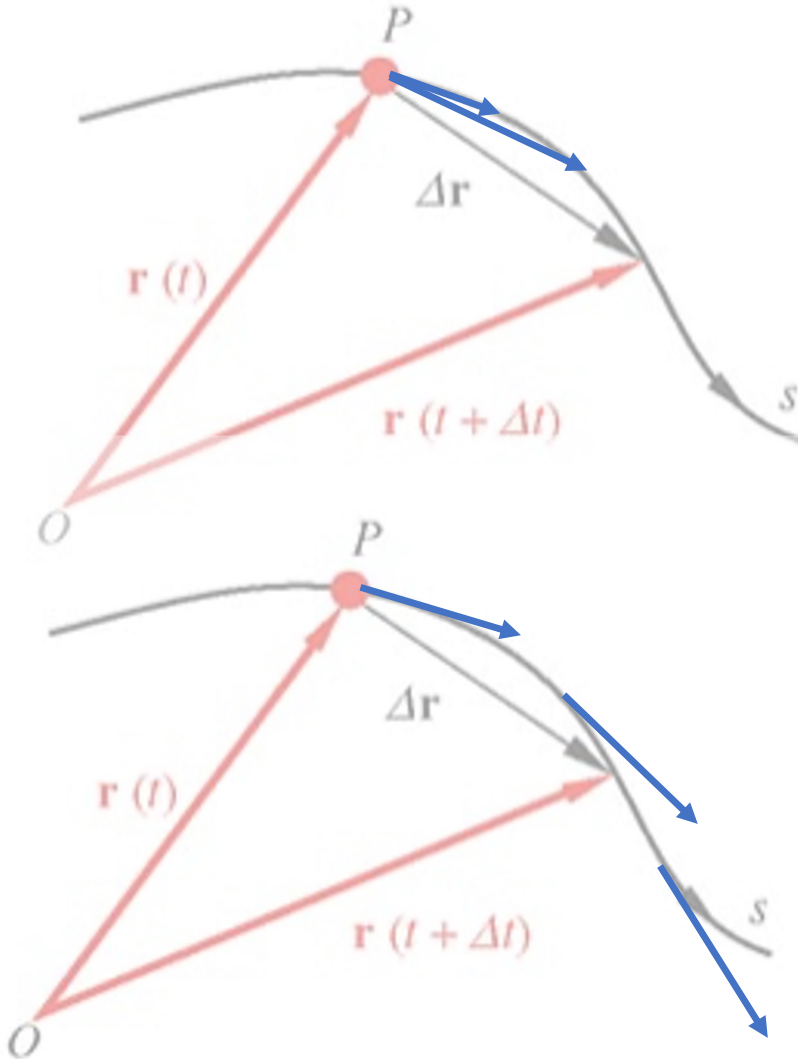
$$\Delta \mathbf{r} \rightarrow \Delta s \mathbf{u}_t$$

Possiamo quindi scrivere la velocità istantanea come

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \mathbf{u}_t = v \mathbf{u}_t$$

essendo

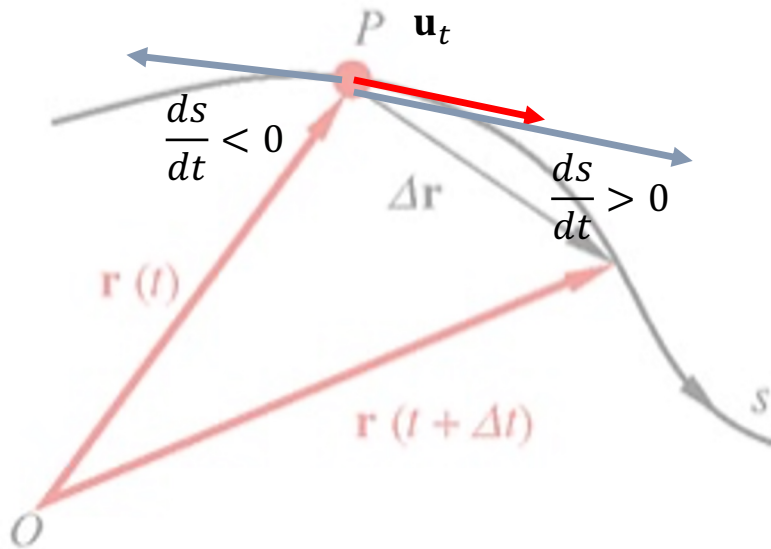
- $\frac{ds}{dt} = v$
- $\mathbf{u}_t$ versore tangente alla traiettoria



Vettore velocità

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v\mathbf{u}_t = \frac{ds}{dt}\mathbf{u}_t$$

Il versore $\mathbf{u}_t$ è tangente alla traiettoria, il suo verso è concorde con il verso di percorrenza della traiettoria.



$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

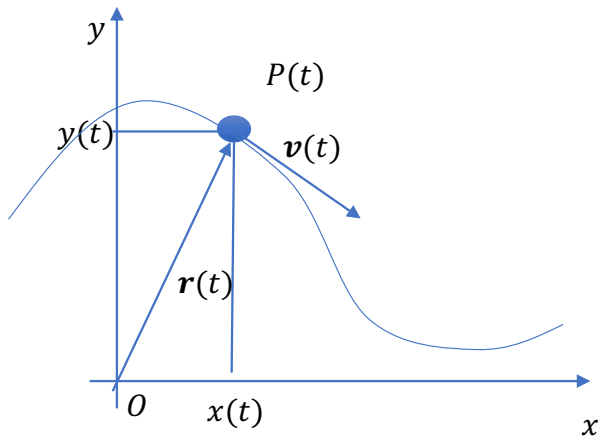
è la componente scalare della velocità lungo la direzione tangente (non è il modulo della velocità!) e può essere positiva, negativa o nulla

$\frac{ds}{dt} > 0$ se il punto materiale sta procedendo in direzione concorde con il verso di percorrenza della traiettoria

$\frac{ds}{dt} < 0$ se il punto materiale sta procedendo in direzione discorde rispetto al verso di percorrenza della traiettoria

$\frac{ds}{dt} = 0$ se il punto materiale è fermo

Componenti cartesiane della velocità



Se conosciamo la posizione del punto materiale rispetto a un dato sistema di riferimento nel piano (con origine nel punto O e assi x e y , possiamo esprimere il raggio vettore come

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

Se il sistema di riferimento è fisso rispetto al tempo possiamo calcolare la velocità del punto materiale come

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j}$$

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} \text{ componente della velocità lungo } x$$

$$v_y = \frac{dy(t)}{dt} \text{ componente della velocità lungo } y$$

Componenti cartesiane della velocità

Nelle slide precedenti abbiamo espresso il vettore velocità come derivata rispetto al tempo del vettore posizione:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v\mathbf{u}_t, \quad v = \frac{ds}{dt}$$

e in componenti cartesiane:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt} \mathbf{j}$$

Anche il versore tangente $\mathbf{u}_t$ può essere espresso in componenti cartesiane

$$\mathbf{u}_t = u_{t,x} \mathbf{i} + u_{t,y} \mathbf{j}$$

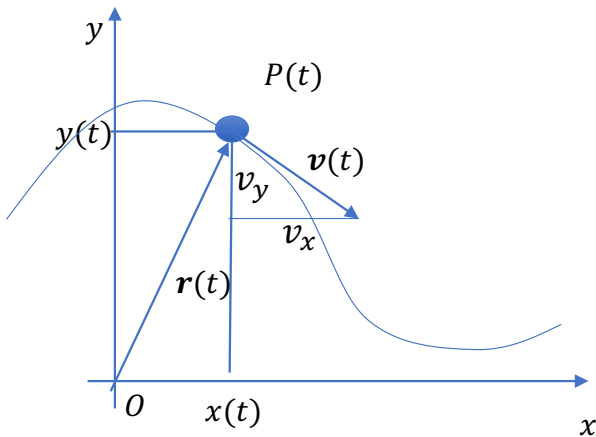
Possiamo riscrivere il vettore velocità come:

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \mathbf{u}_t = v(u_{t,x} \mathbf{i} + u_{t,y} \mathbf{j})$$

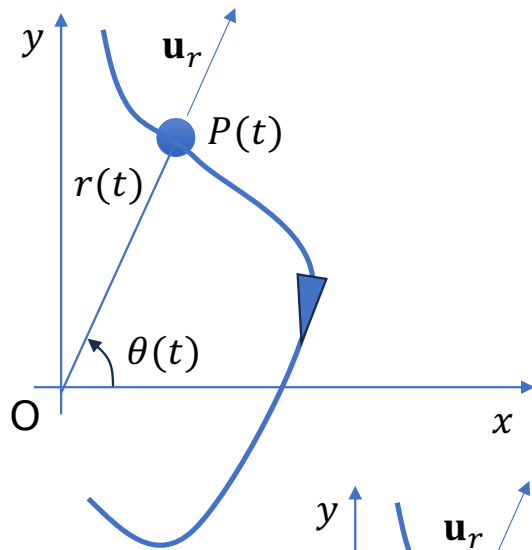
Da cui possiamo ricavare le seguenti espressioni per le componenti cartesiane della velocità

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} = v u_{t,x}$$

$$v_y = \frac{dy(t)}{dt} = v u_{t,y}$$



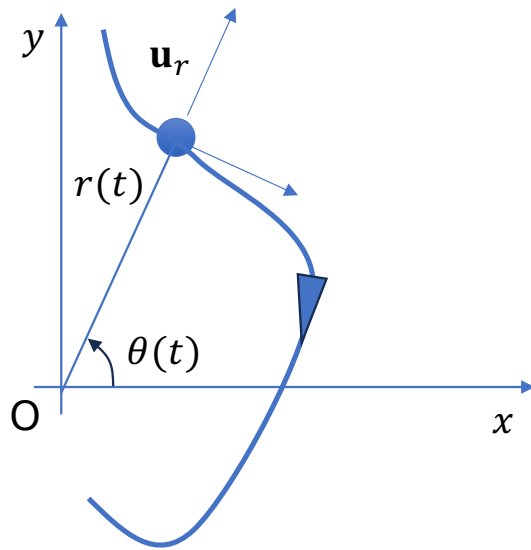
Velocità e coordinate polari



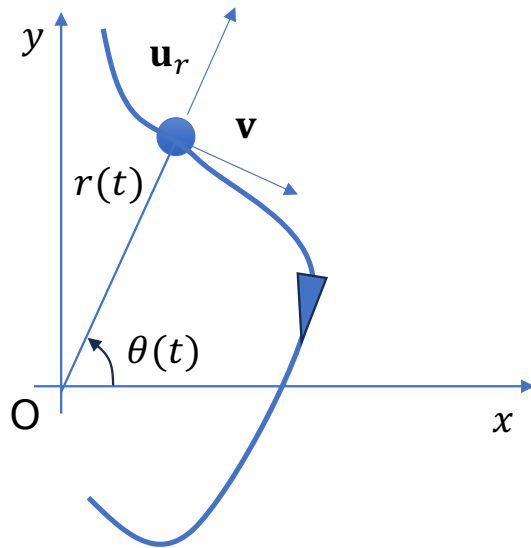
Abbiamo visto in precedenza che utilizzando le coordinate polari, la posizione di un punto al tempo t_1 è rappresentata dalla sua distanza $r(t)$ rispetto all'origine del sistema di riferimento O e dall'angolo $\theta(t)$ tra il segmento $\overrightarrow{OP}$ e l'asse x .

Definendo il versore $\mathbf{u}_r$ che identifica la direzione del segmento $\overrightarrow{OP}$, il vettore posizione può essere espresso come

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$$



Velocità e coordinate polari



Data l'espressione del vettore posizione appena vista,

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$$

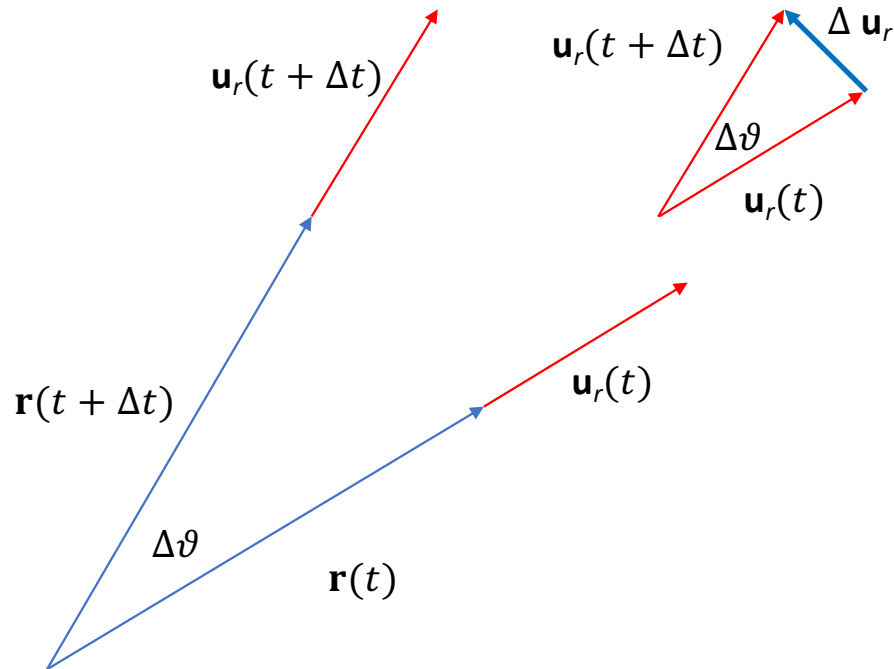
Possiamo scrivere la velocità come

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(r\mathbf{u}_r)}{dt}$$

Ricordando le proprietà di derivazione dei vettori, si ottiene

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(r\mathbf{u}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\mathbf{u}_r}{dt}$$

Velocità e coordinate polari



Calcoliamo la derivata del versore $\mathbf{u}_r$. Per definizione di derivata risulta:

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{u}_r}{\Delta t}$$

Analizziamo la costruzione geometrica riportata nella figura. Il vettore $\Delta \mathbf{u}_r$ avrà modulo pari a

$$\Delta u_r = 2u_r \sin \frac{\Delta\theta}{2} \cong \Delta\theta$$

E direzione perpendicolare a $\mathbf{u}_r$ per $\Delta\theta \rightarrow 0$, possiamo scrivere quindi che

$$\Delta \mathbf{u}_r \cong \Delta\theta \mathbf{u}_\theta$$

Essendo $\mathbf{u}_\theta$ un versore perpendicolare a $\mathbf{u}_r$

Velocità e coordinate polari

Tornando quindi all'espressione della velocità in coordinate polari

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(r\mathbf{u}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt}$$

Possiamo sostituire al termine $\frac{d\mathbf{u}_r}{dt}$ la relazione trovata in precedenza

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} \mathbf{u}_\vartheta$$

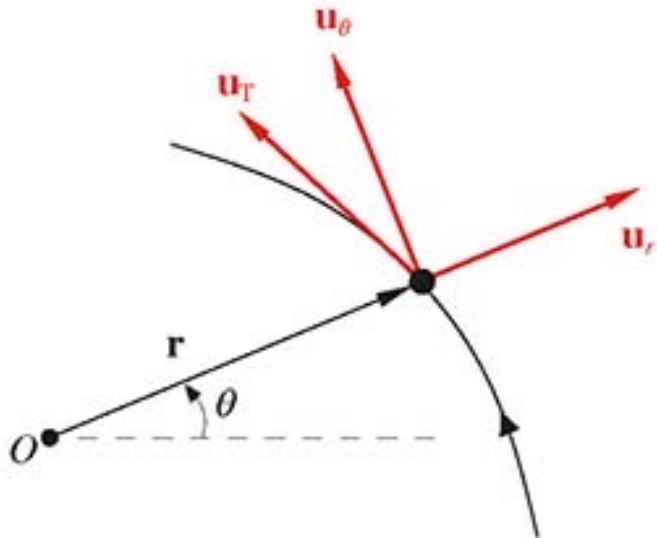
Risulta quindi

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\vartheta}{dt} \mathbf{u}_\vartheta$$

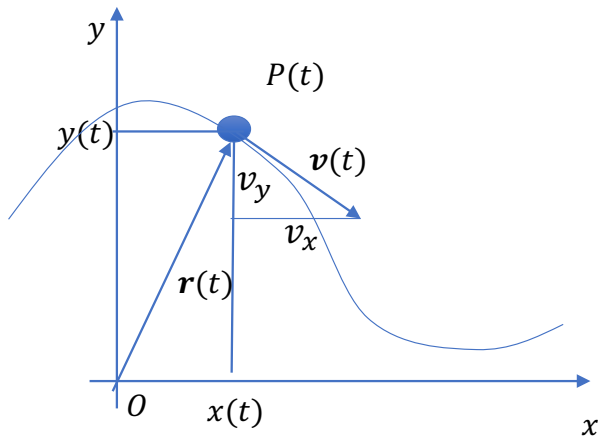
Possiamo quindi definire le due componenti scalari della velocità lungo le direzioni di $\mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_\vartheta$ come

$$v_r = \frac{dr}{dt}$$

$$v_\vartheta = r \frac{d\vartheta}{dt}$$



Riepilogo sulle definizioni di velocità



Derivata rispetto al tempo del vettore posizione:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v\mathbf{u}_t, \quad v = \frac{ds}{dt}$$

Componenti cartesiane:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt} \mathbf{j} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$$

Da cui possiamo ricavare le seguenti espressioni per le componenti cartesiane della velocità

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} = v u_{t,x}$$

$$v_y = \frac{dy(t)}{dt} = v u_{t,y}$$

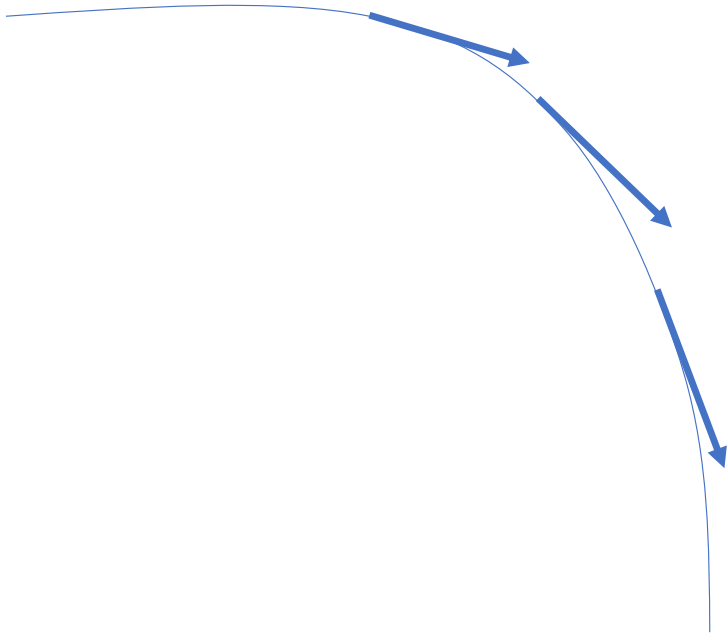
In coordinate polari

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\vartheta}{dt} \mathbf{u}_\vartheta$$



Accelerazione

Accelerazione



Abbiamo definito in precedenza il vettore velocità come la derivata rispetto al tempo del vettore posizione. Abbiamo verificato che il vettore velocità è in ogni istante tangente alla traiettoria. Abbiamo definito il versore tangente $\mathbf{u}_t$, orientato secondo il verso di percorrenza della traiettoria, e abbiamo visto che la sua componente scalare rispetto al versore tangente $\mathbf{u}_t$ è pari alla derivata rispetto al tempo dell'ascissa curvilinea:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \mathbf{u}_t = v \mathbf{u}_t$$

$$\frac{ds}{dt} = v$$

Analogamente a quanto visto in precedenza per il moto rettilineo, si definisce il vettore accelerazione come la derivata rispetto al tempo del vettore velocità

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Accelerazione

Essendo la velocità $\mathbf{v}$ un vettore, esso nel tempo può variare sia in modulo che in direzione.

Sviluppiamo la derivata rispetto al tempo del vettore velocità

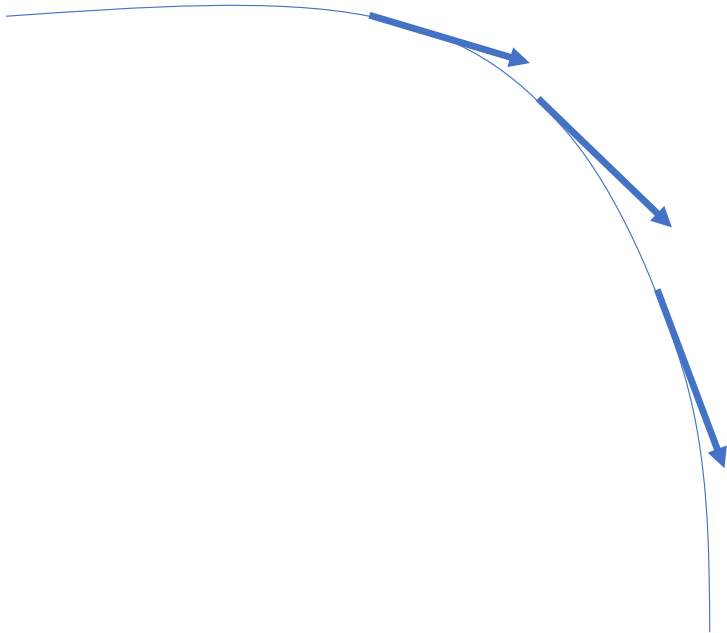
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\mathbf{u}_t)}{dt}$$

Utilizzando le regole di derivazione dei vettori otteniamo

$$\frac{d(v\mathbf{u}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t + v \frac{d\mathbf{u}_t}{dt}$$

Osserviamo quindi che il vettore accelerazione si compone di due elementi

- $\frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t$ è una componente di accelerazione diretta come $\mathbf{u}_t$ e descrive come varia il modulo della velocità lungo la traiettoria, grazie al termine $\frac{dv}{dt}$
- $v \frac{d\mathbf{u}_t}{dt}$ descrive come varia il versore $\mathbf{u}_t$ nel tempo, tiene quindi conto di come varia la direzione della velocità



Accelerazione

Analizziamo più nel dettaglio il termine

$$v \frac{d\mathbf{u}_t}{dt}$$

Calcoliamo innanzi tutto $\frac{d\mathbf{u}_t}{dt}$

$$\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{u}_t}{\Delta t}$$

Dove

$$\Delta \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_t(t + \Delta t) - \mathbf{u}_t(t)$$

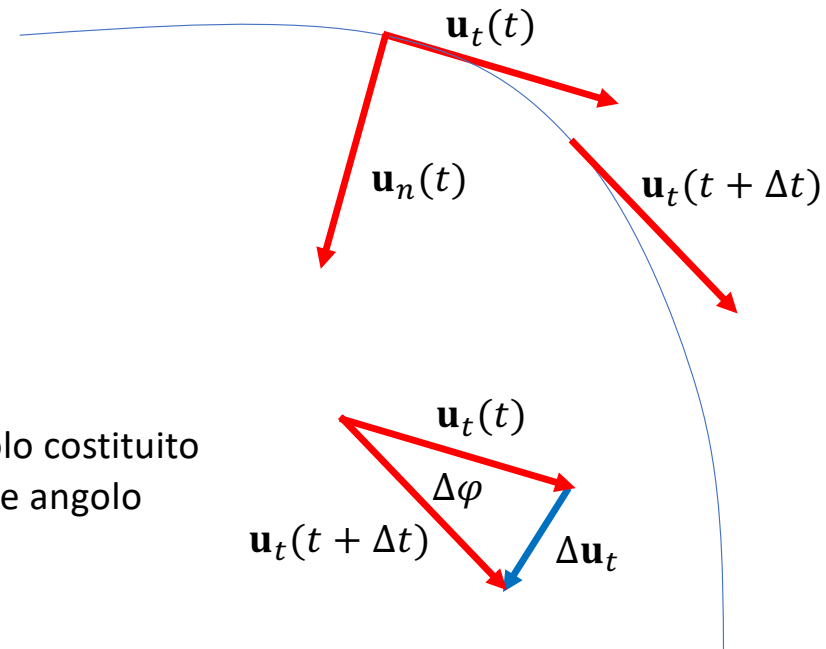
Osserviamo la costruzione geometrica: dato che il triangolo costituito dai vettori $\mathbf{u}_t(t)$ e $\mathbf{u}_t(t + \Delta t)$ è isoscele con i lati unitari e angolo $\Delta\varphi$, il modulo di $\Delta \mathbf{u}_t$ (base del triangolo) vale

$$|\Delta \mathbf{u}_t| = 2|\mathbf{u}_t(t)| \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cong \Delta\varphi$$

Quindi possiamo scrivere

$$\left| \frac{\Delta \mathbf{u}_t}{\Delta t} \right| \cong \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Per $\Delta t \rightarrow 0$, la direzione di $\Delta \mathbf{u}_t$ tende alla direzione perpendicolare a $\mathbf{u}_t$, definita dal versore $\mathbf{u}_n$ (versore normale).



Accelerazione

Sviluppiamo ulteriormente il rapporto

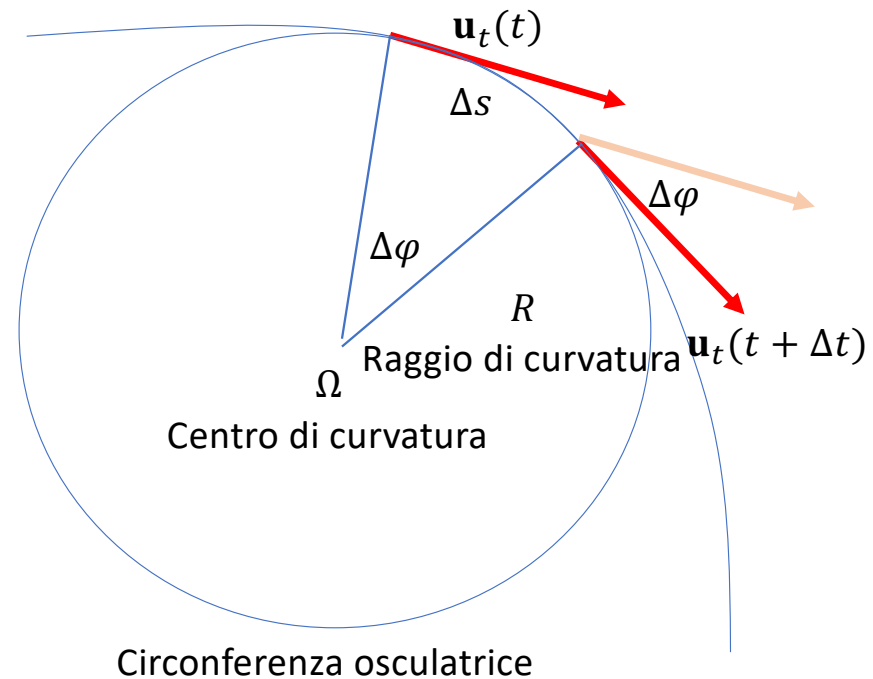
$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Supponendo di approssimare localmente la curva con una circonferenza di raggio R (circonferenza osculatrice) e centro Ω , possiamo scrivere

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R}$$

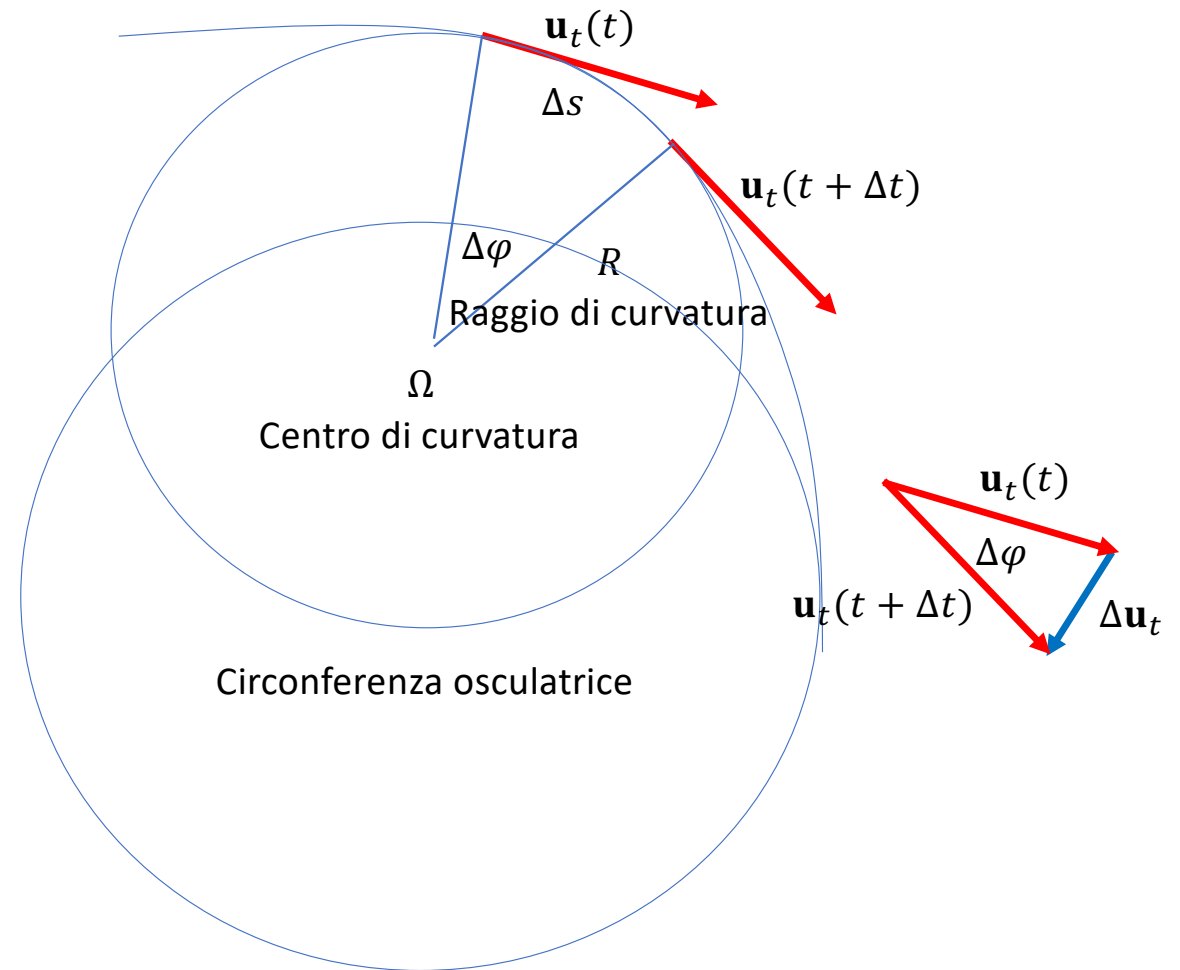
Per $\Delta t \rightarrow 0$ risulta quindi

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \frac{1}{R} = \\ &= \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}\end{aligned}$$



Note

- Il centro e il raggio della circonferenza osculatrice possono variare lungo la traiettoria! (sono proprietà locali della curva)
- Il versore normale $\mathbf{u}_n$ è diretto verso il centro della traiettoria (direzione centripeta)



Accelerazione

Riprendiamo quindi il secondo termine ottenuto derivando la velocità:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(v\mathbf{u}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_t + v\frac{d\mathbf{u}_t}{dt}$$
$$v\frac{d\mathbf{u}_t}{dt}$$

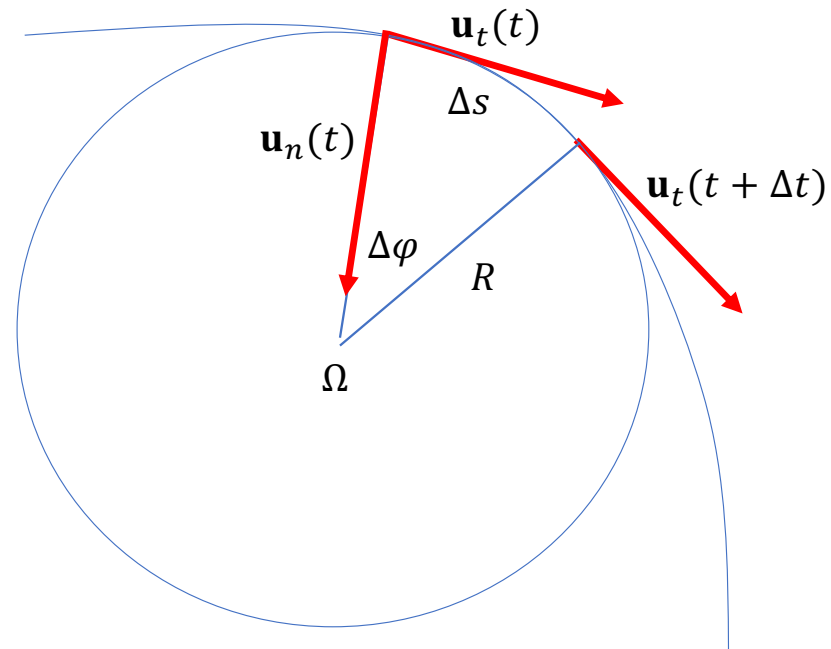
Abbiamo appena verificato che

$$\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{u}_n = \frac{v}{R}\mathbf{u}_n$$

Quindi, sostituendo nella componente dell'accelerazione otteniamo

$$v\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \frac{v^2}{R}\mathbf{u}_n$$

Il termine $v\frac{d\mathbf{u}_t}{dt}$ è quindi diretto secondo la normale alla traiettoria.



Accelerazione

Facciamo un breve riepilogo, abbiamo definite il vettore velocità come

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \mathbf{u}_t = v \mathbf{u}_t$$

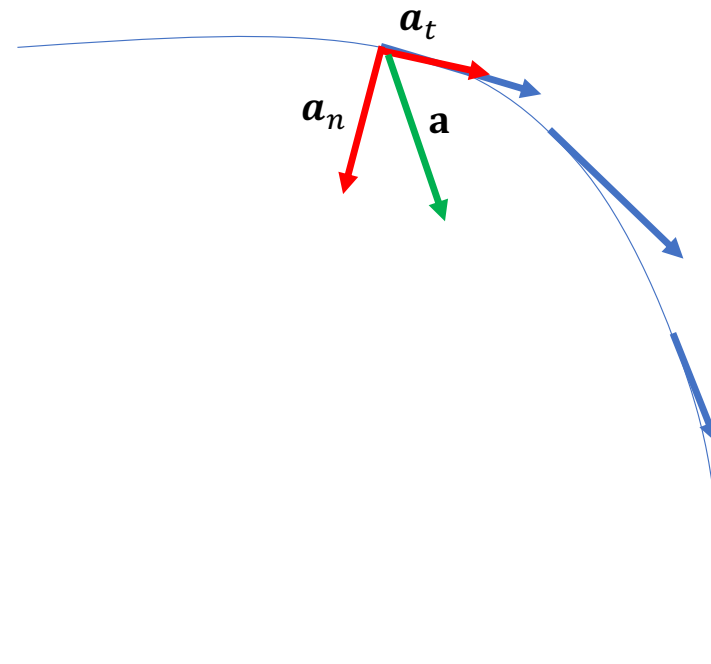
Derivando rispetto al tempo abbiamo verificato che il vettore accelerazione si compone di due termini: uno diretto secondo la tangente alla traiettoria $\mathbf{u}_t$, l'altro diretto secondo la direzione normale $\mathbf{u}_n$

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t + v \frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t + \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_n =$$

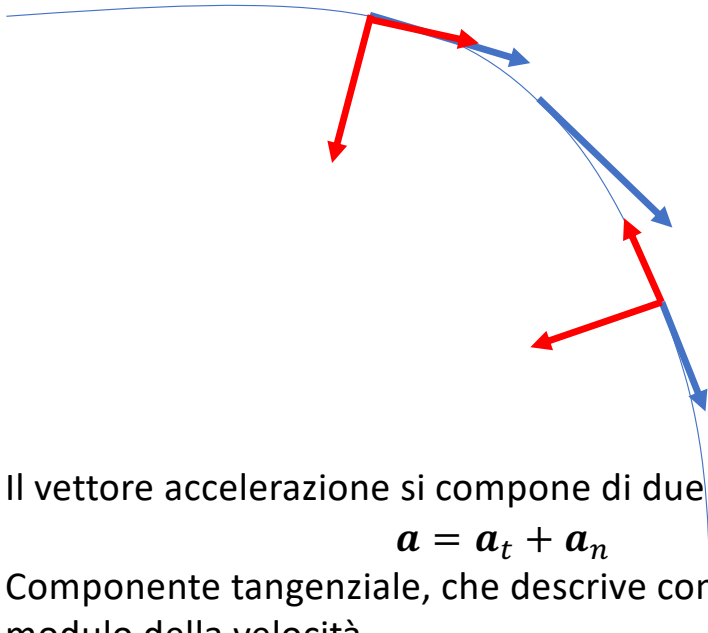
$$= \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$$

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t$$

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_n$$



Accelerazione, nota sulle componenti



Il vettore accelerazione si compone di due elementi

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$$

Componente tangenziale, che descrive come varia il modulo della velocità

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t$$

Componente normale, che descrive come varia la direzione della velocità

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_n$$

Nella componente tangenziale

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t$$

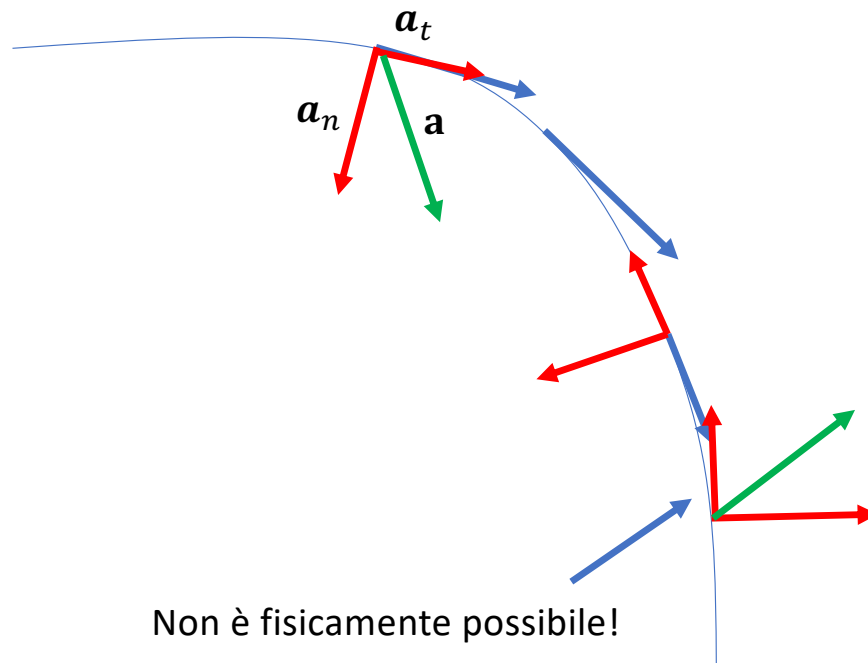
Il termine $\frac{dv}{dt}$ può essere positivo (se la velocità aumenta lungo la direzione positiva di $\mathbf{u}_t$), negativo (se la velocità diminuisce lungo la direzione positiva di $\mathbf{u}_t$) o nullo.

Nella componente normale, che descrive come varia la direzione della velocità

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_n$$

Il termine $\frac{v^2}{R}$ è sempre maggiore o uguale a zero. La componente normale dell'accelerazione è sempre diretta verso il centro della traiettoria (direzione centripeta).

Accelerazione, nota sulle componenti



Nella componente tangenziale

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t$$

Il termine $\frac{dv}{dt}$ può essere positivo (se la velocità aumenta lungo la direzione positiva di $\mathbf{u}_t$), negativo (se la velocità diminuisce lungo la direzione positiva di $\mathbf{u}_t$) o nullo.

Nella componente normale, che descrive come varia la direzione della velocità

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_n$$

Il termine $\frac{v^2}{R}$ è sempre maggiore o uguale a zero. La componente normale dell'accelerazione è sempre diretta verso il centro della traiettoria (direzione centripeta).

Accelerazione, riepilogo e modulo

Riportiamo l'espressione del vettore accelerazione

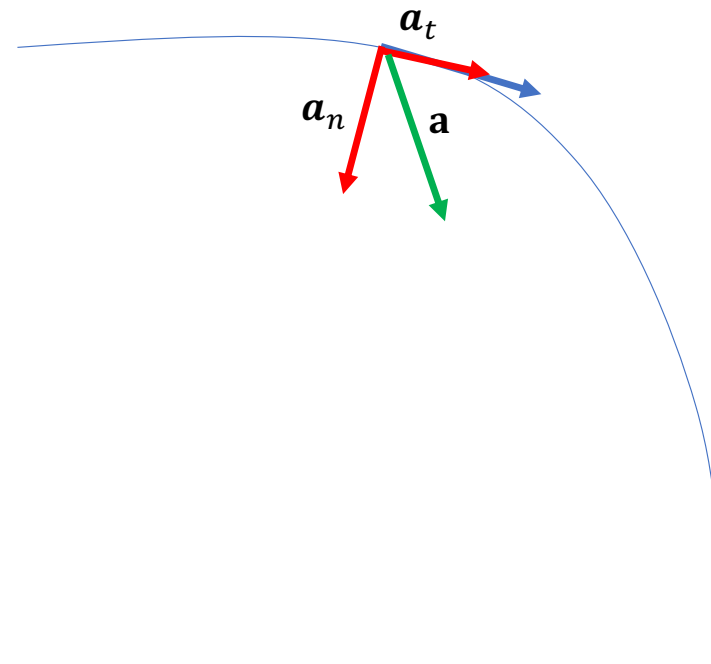
$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t + \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_n =$$

$$= \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$$

Le componenti $\mathbf{a}_t$ e $\mathbf{a}_n$ sono tra loro perpendicolari

Modulo del vettore accelerazione:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \end{aligned}$$



Accelerazione, componenti cartesiane

In precedenza abbiamo espresso la velocità anche in componenti cartesiane rispetto a un dato sistema di riferimento:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt} \mathbf{j} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$$

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} \text{ componente della velocità lungo } x$$

$$v_y = \frac{dy(t)}{dt} \text{ componente della velocità lungo } y$$

In modo analogo, possiamo determinare le componenti cartesiane dell'accelerazione, derivando rispetto al tempo quelle della velocità

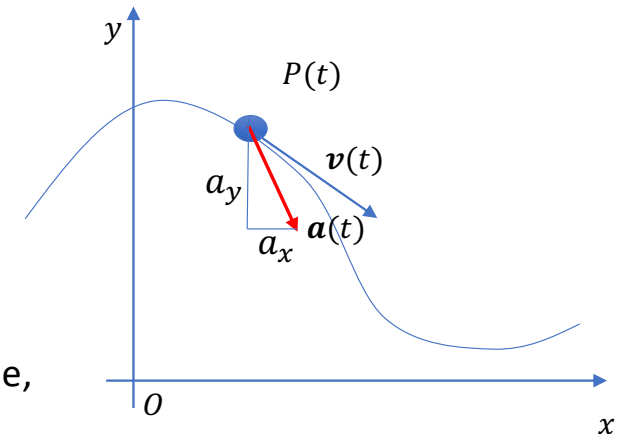
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}) = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \text{ componente dell'accelerazione lungo } x$$

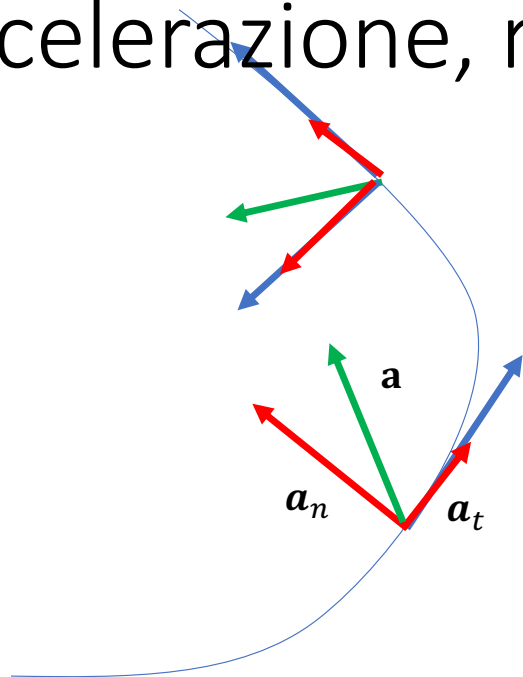
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2} \text{ componente dell'accelerazione lungo } y$$

Modulo dell'accelerazione

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right)^2}$$



Accelerazione, riepilogo delle rappresentazioni

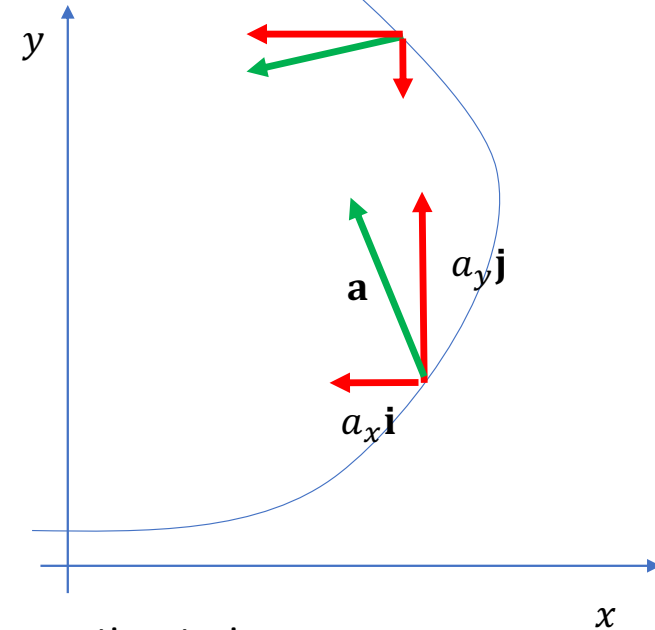


Componenti normale e tangenziale

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$$

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t$$

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_n$$



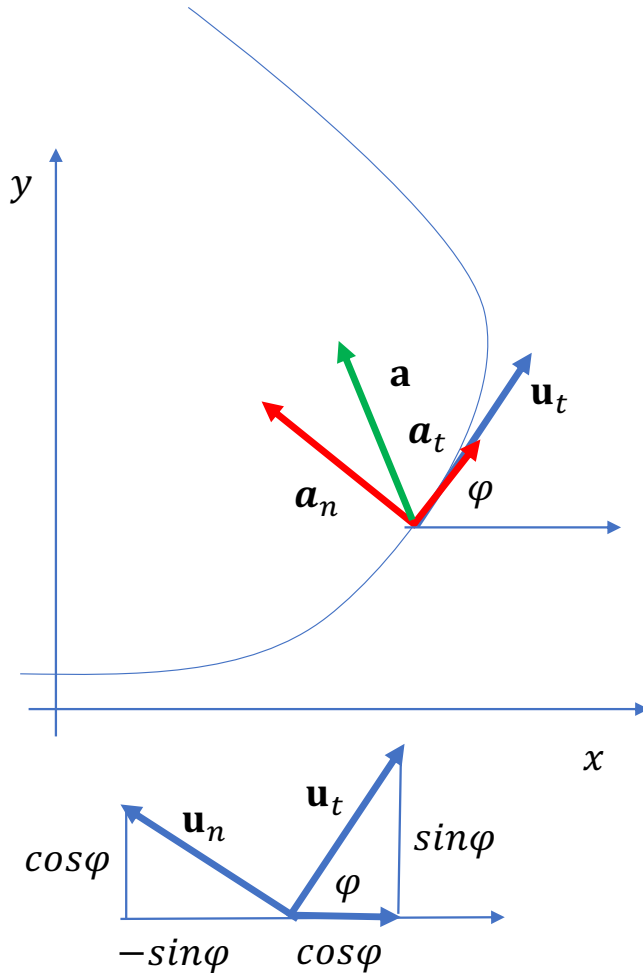
Componenti cartesiane

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}) = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

Accelerazione, riepilogo delle rappresentazioni



Che relazione esiste tra le due rappresentazioni?

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$$

Indichiamo con φ l'angolo tra il versore tangente e la direzione positiva dell'asse x

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t = \frac{dv}{dt} (\cos\varphi \mathbf{i} + \sin\varphi \mathbf{j})$$

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_n = \frac{v^2}{R} (-\sin\varphi \mathbf{i} + \cos\varphi \mathbf{j})$$

Ricordando l'espressione dell'accelerazione in componenti cartesiane

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$$

E confrontando con le espressioni precedenti si ottiene:

$$a_x = \frac{dv}{dt} \cos\varphi - \frac{v^2}{R} \sin\varphi$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} \sin\varphi + \frac{v^2}{R} \cos\varphi$$

Riepilogo sulle relazioni fondamentali della cinematica del punto materiale in moto bidimensionale

Posizione

$$\mathbf{r}(t)$$

Velocità

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Accelerazione

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

È possibile passare dalla posizione alla velocità e all'accelerazione tramite operazione di derivata rispetto al tempo. Vedremo in seguito l'esempio del moto circolare.

Accelerazione

$$\mathbf{a}(t)$$

Velocità

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(t) dt$$

Posizione

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(t) dt$$

È possibile passare dall'accelerazione alla velocità e alla posizione tramite operazione di integrale nel tempo. Vedremo in seguito l'esempio del moto parabolico.

Cenni alle relazioni cinematiche fondamentali nei moti 3D

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz(t)}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} \text{ componente della velocità lungo } x$$

$$v_y = \frac{dy(t)}{dt} \text{ componente della velocità lungo } y$$

$$v_z = \frac{dz(t)}{dt} \text{ componente della velocità lungo } z$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}) = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \text{ componente dell'accelerazione lungo } x$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2} \text{ componente dell'accelerazione lungo } y$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z(t)}{dt^2} \text{ componente dell'accelerazione lungo } z$$

Esempio #1

La posizione di un punto materiale è individuata dal seguente vettore

$$\mathbf{r}(t) = at\mathbf{i} + bt^2\mathbf{j} \text{ con } a = 6\text{m/s e } b = -3\text{m/s}^2$$

Determinare:

1. La velocità del punto materiale in funzione del tempo
2. L'accelerazione del punto materiale in funzione del tempo
3. Le componenti normale e tangenziale dell'accelerazione per $t = 3\text{ s}$
4. Il raggio di curvatura della traiettoria per $t = 3\text{ s}$

Esempio #1

Soluzione:

Punto 1

Esplicitiamo le componenti cartesiane del vettore posizione

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned}x(t) &= at \\ y(t) &= bt^2\end{aligned}$$

Le componenti del vettore velocità del punto materiale in funzione del tempo si ottengono derivando le componenti del vettore posizione:

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} = a = 6 \frac{m}{s}$$

$$v_y = \frac{dy(t)}{dt} = 2bt$$

Il modulo della velocità varia nel tempo secondo la relazione

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{a^2 + 4b^2t^2}$$

Esempio #1

Punto 2

Le componenti cartesiane del vettore accelerazione del punto materiale in funzione del tempo si ottengono derivando il vettore velocità rispetto al tempo

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 2b = -6 \text{ m/s}^2$$

Punto 3

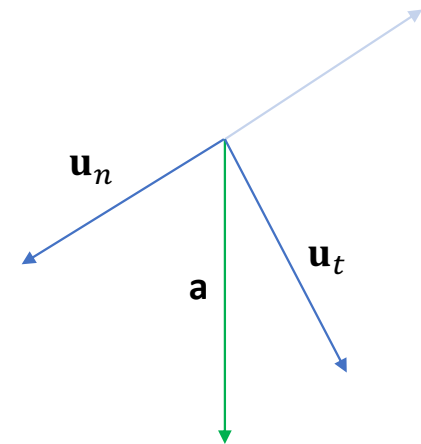
Calcoliamo le componenti del versore tangente $\mathbf{u}_t$

$$\mathbf{u}_t = \frac{1}{v} \mathbf{v} = \frac{1}{v} (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j})$$
$$u_{tx} = \frac{v_x}{v}$$

$$u_{ty} = \frac{v_y}{v}$$

Per $t=3\text{s}$

$$v_x = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v_y = -18 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v = \sqrt{a^2 + 4b^2 t^2} = 19 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Esempio #1

Le componenti del versore tangente $\mathbf{u}_t$ risultano

$$u_{tx} = \frac{v_x}{v} = 0.316$$

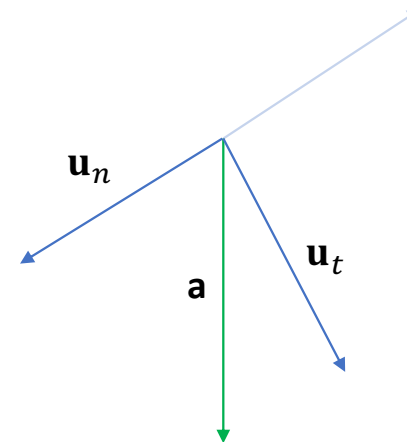
$$u_{ty} = \frac{v_y}{v} = -0.949$$

(verifica: $u_{tx}^2 + u_{ty}^2 = 1$)

Osservando la figura, vediamo che il versore $\mathbf{u}_n$ risulta ruotato rispetto a $\mathbf{u}_t$ di $\pi/2$ in senso orario, le sue componenti risultano pertanto

$$u_{nx} = u_{ty} = -0.949$$

$$u_{ny} = -u_{tx} = -0.316$$



Esempio #1

A questo punto possiamo calcolare la componente normale e tangenziale dell'accelerazione come:

$$a_t = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_t = a_y u_{ty} = 5.69 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_n = a_y u_{ny} = 1.90 \frac{m}{s^2}$$

(verifica: $\sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 6 \text{ m/s}^2$)

Punto 4.

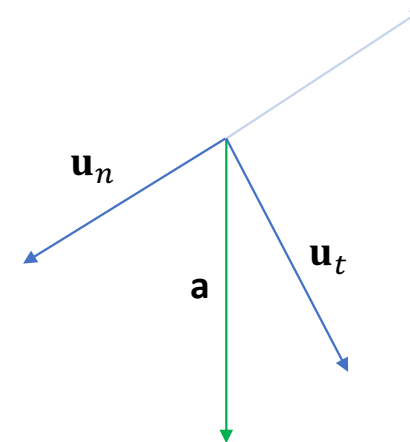
Ricordiamo che la componente normale dell'accelerazione è pari a

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Nei punti precedenti abbiamo calcolato $a_n = 1.90 \frac{m}{s^2}$ e $v = 19 \frac{m}{s}$.

Possiamo quindi ricavare

$$R = \frac{v^2}{a_n} = 190 \text{ m}$$



Esempio #2

L'accelerazione di un punto materiale in movimento è data da

$$\mathbf{a}(t) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \text{ con } a = 3\text{m/s}^2 \text{ e } b = 1\text{m/s}^2$$

Sapendo che il punto materiale parte per $t = 0$ dall'origine con velocità nulla, determinare:

1. La velocità del punto materiale in funzione del tempo
2. La posizione del punto materiale in funzione del tempo
3. Le componenti normale e tangenziale dell'accelerazione per $t = 3\text{ s}$
4. Il raggio di curvatura della traiettoria per $t = 3\text{ s}$

Esempio #2

Punto 1

La velocità si può calcolare a partire dall'accelerazione tramite un'integrazione nel tempo

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(t) dt$$

Dato che il punto materiale parte dall'origine con velocità nulla, risulta

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$$

Esplicitando le componenti cartesiane:

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x(t) dt = at$$

$$v_y = v_{0y} + \int_0^t a_y(t) dt = bt$$

Esempio #2

Punto 2

La posizione si può calcolare a partire dalla velocità tramite un'integrazione nel tempo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(t) dt$$

Dato che il punto materiale parte dall'origine

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$$

Esplicitando le componenti cartesiane si ottiene:

$$r_x = r_{0x} + \int_0^t v_x(t) dt = \frac{a}{2} t^2$$
$$r_y = r_{0y} + \int_0^t v_y(t) dt = \frac{b}{2} t^2$$

Esempio #2

Punto 3.

Calcoliamo le componenti cartesiane del versore tangente

$$\mathbf{u}_t = \frac{1}{v} \mathbf{v} = \frac{1}{v} (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j})$$

$$u_{tx} = \frac{v_x}{v}$$

$$u_{ty} = \frac{v_y}{v}$$

Per $t = 3s$ osserviamo che

$$v_x = at = 9 \text{ m/s}$$

$$v_y = bt = 3 \text{ m/s}$$

Ricordiamo che

$$a_x = 3 \text{ m/s}^2$$

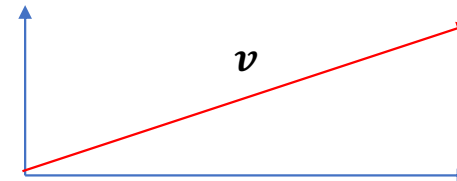
$$a_y = 1 \text{ m/s}^2$$

Vediamo che $\mathbf{v}$ ed $\mathbf{a}$, e quindi $\mathbf{u}_t$ ed $\mathbf{a}$ sono paralleli, risulta quindi

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t$$

l'accelerazione ha solo componente tangenziale

$$\mathbf{a}_n = 0$$



Esempio #2

Punto 4

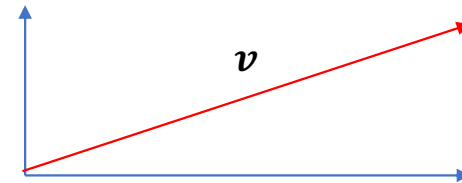
Dato che risulta

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

E che $a_n = 0$, il raggio di curvatura è pari a

$$R = \frac{v^2}{a_n} \rightarrow \infty$$

Quindi la traiettoria del punto materiale è rettilinea.



Problema proposto

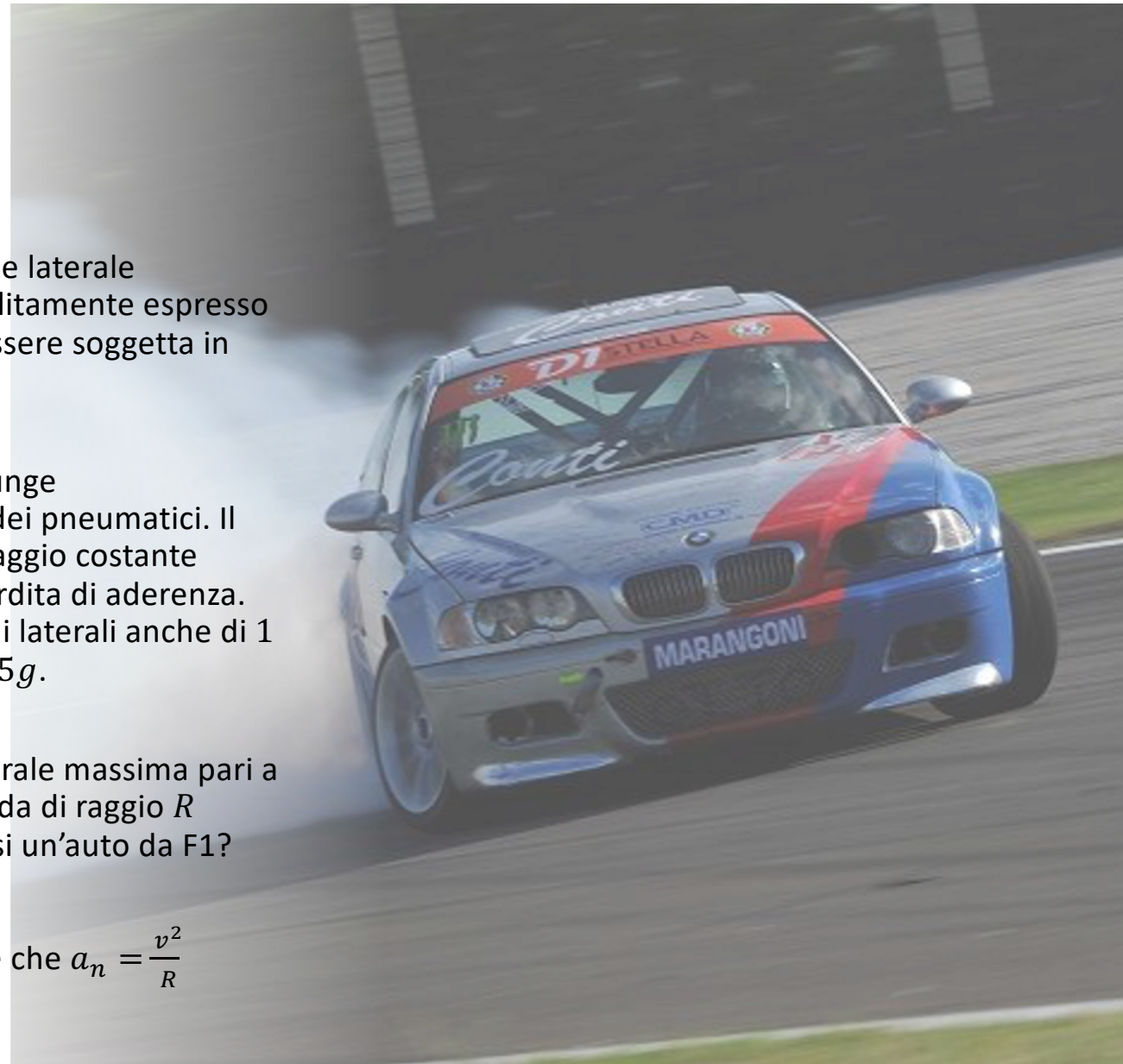
Massima accelerazione laterale nei veicoli

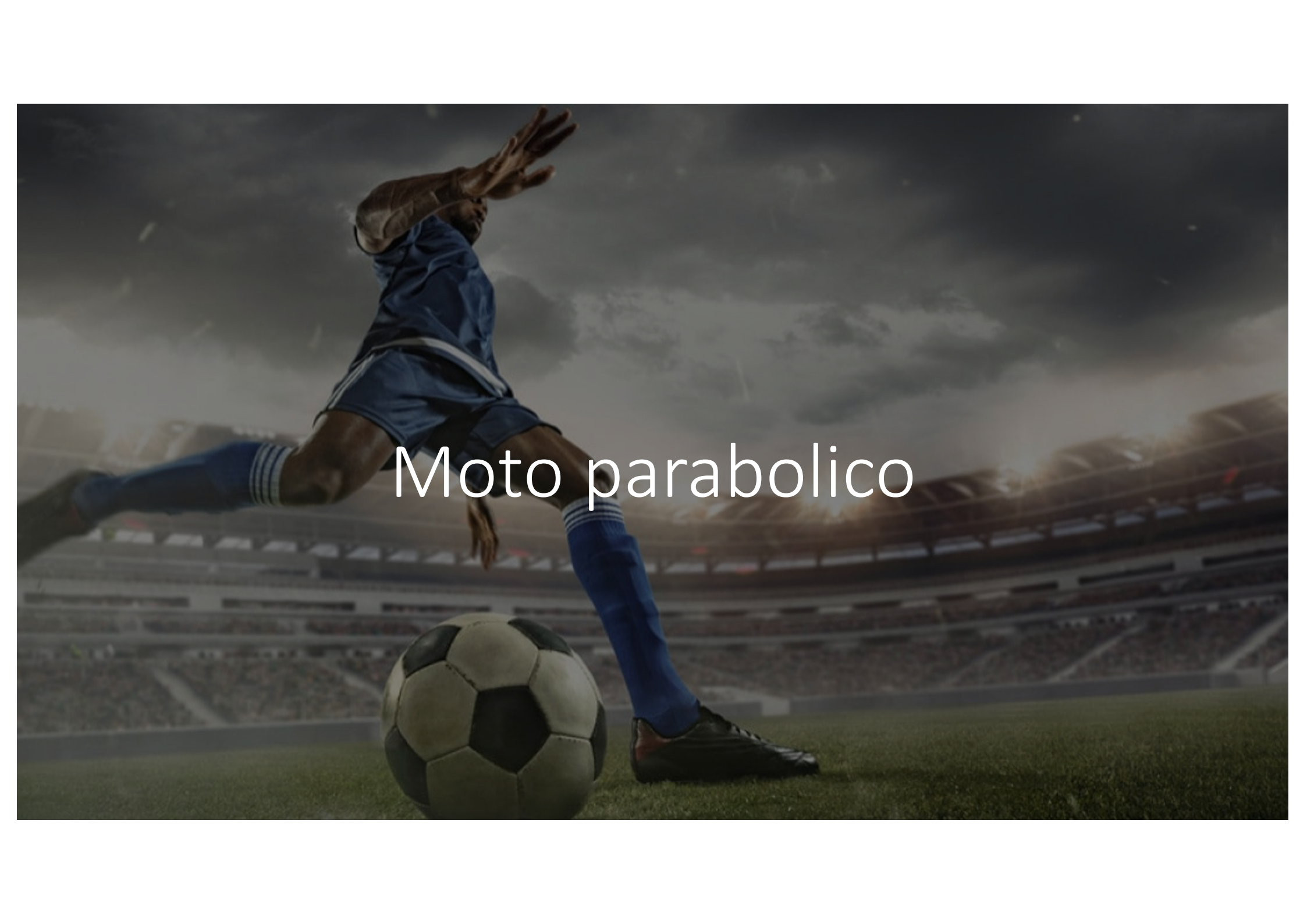
In campo automobilistico, la massima accelerazione laterale rappresenta il massimo valore di accelerazione (solitamente espresso in g , $1g = 9.81 \text{ m/s}^2$) a cui un'automobile può essere soggetta in curva per non avere problemi di stabilità.

Il massimo livello di accelerazione laterale si raggiunge immediatamente prima della perdita di aderenza dei pneumatici. Il rilevamento avviene di solito su una traiettoria a raggio costante (steering pad) con velocità progressive fino alla perdita di aderenza. Le auto sportive possono raggiungere accelerazioni laterali anche di $1 - 1.3 g$, mentre i veicoli da competizione fino a $3.5g$.

Se la mia auto può sostenere un'accelerazione laterale massima pari a $1.2 g$, a quale velocità posso percorrere una rotonda di raggio $R = 30m$? E se il raggio fosse $R = 20m$? E se avessi un'auto da F1?

- Per la risoluzione del problema, è utile ricordare che $a_n = \frac{v^2}{R}$

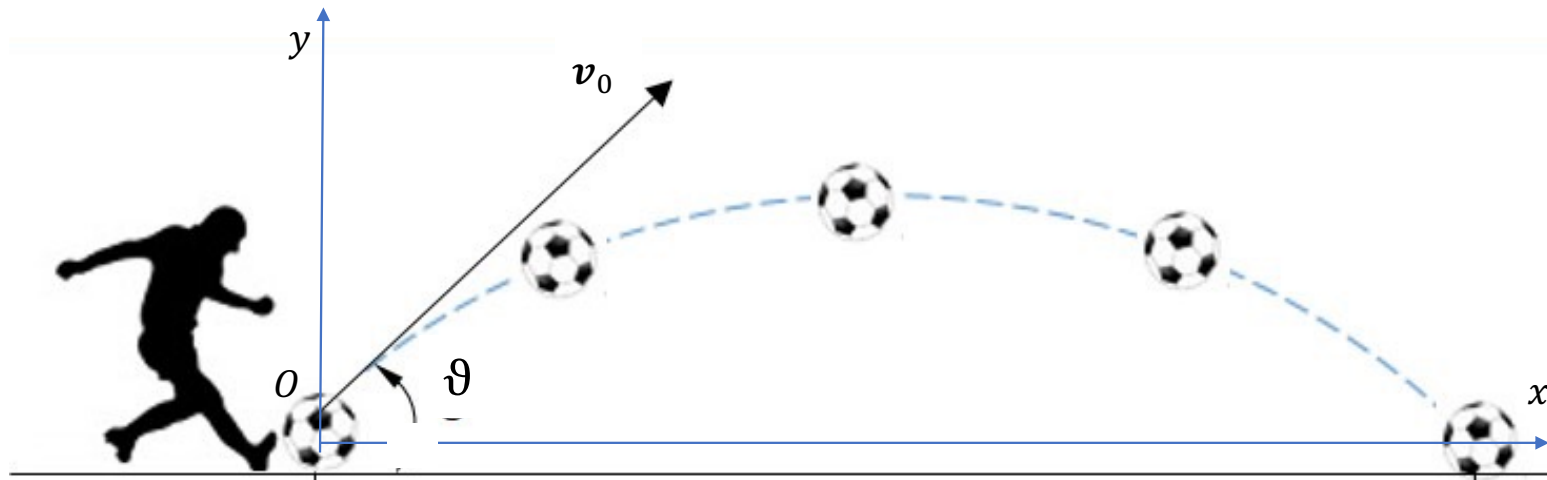


A soccer player in a blue uniform is captured in mid-air, performing a parabolic kick. The player's body is arched, with one leg extended towards a soccer ball on the grass and the other leg bent. The background shows a large stadium filled with spectators under a dramatic, cloudy sky. The text "Moto parabolico" is overlaid in the center of the image.

Moto parabolico

Moto parabolico

Analizziamo il moto di un punto materiale P lanciato con velocità iniziale v_0 che forma un angolo ϑ con il piano orizzontale dall'origine O di un sistema di riferimento cartesiano con asse x orizzontale e asse y verticale ascendente, tali che il piano xy contiene il vettore v_0 asse z perpendicolare al piano xy



Moto parabolico: velocità iniziale, accelerazione

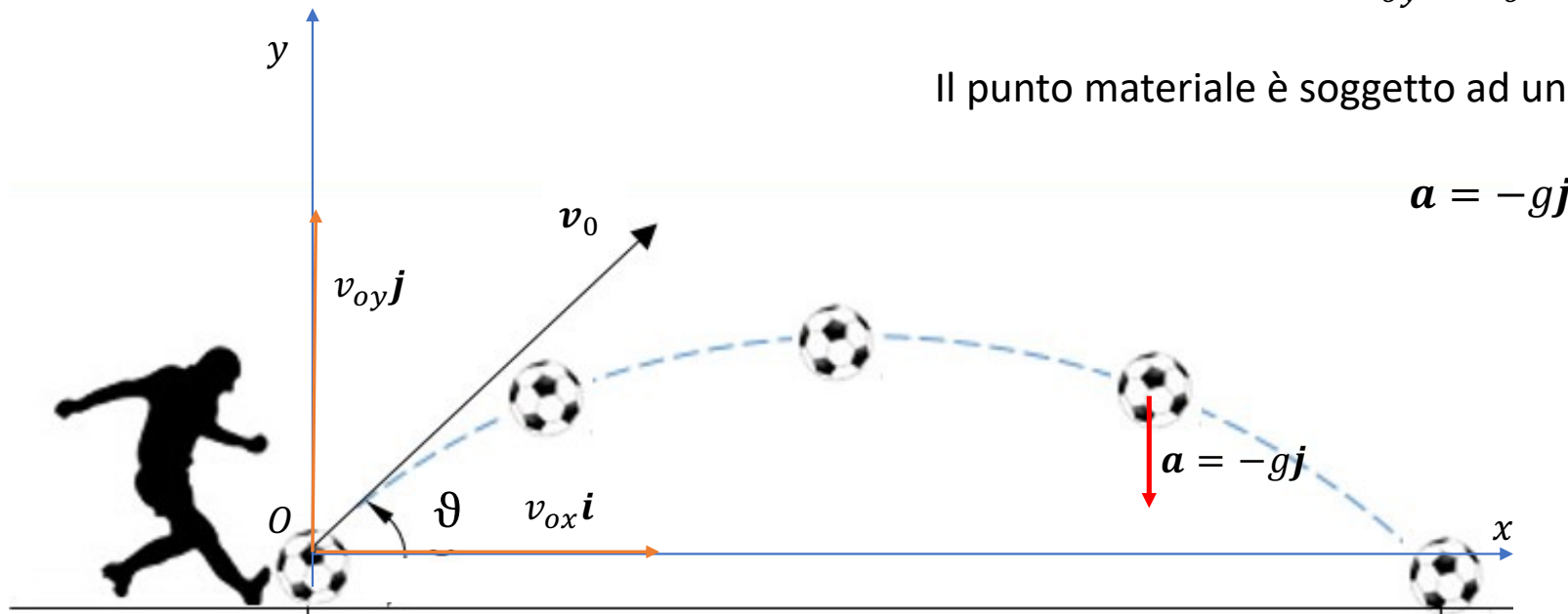
Rispetto a questo sistema di riferimento le componenti della velocità iniziale sono

$$\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j}$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \vartheta$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \vartheta$$

Il punto materiale è soggetto ad un'accelerazione costante



Moto parabolico: velocità durante il moto

Come varia la velocità nel tempo? Conoscendo l'accelerazione e la velocità iniziale, è possibile calcolare la velocità tramite integrazione nel tempo:

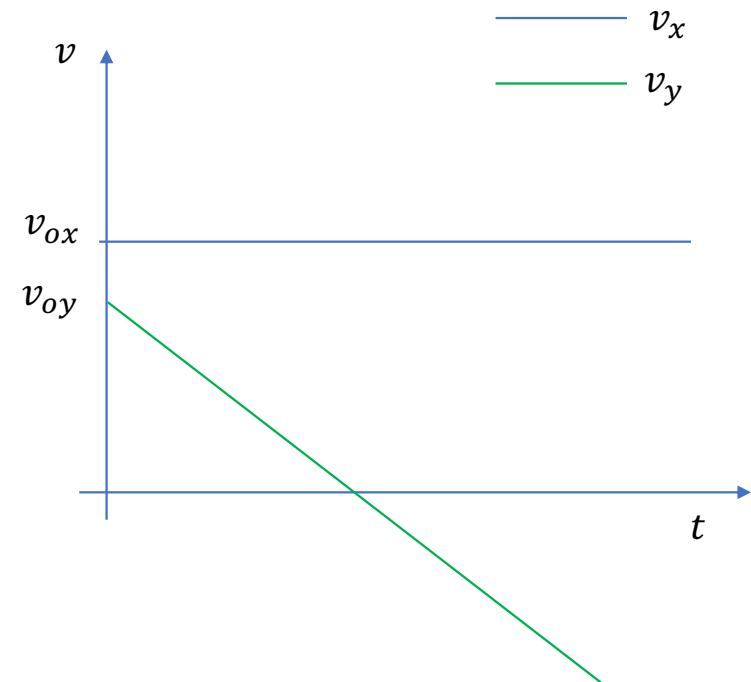
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(t) dt$$

Considerando le componenti cartesiane:

$$v_x = v_{ox} + \int_0^t 0 dt = v_{ox}$$

$$v_y = v_{oy} - \int_0^t g dt = v_{oy} - gt$$

- La componente orizzontale della velocità è costante
- La componente verticale varia linearmente nel tempo, con coefficiente angolare $-g$

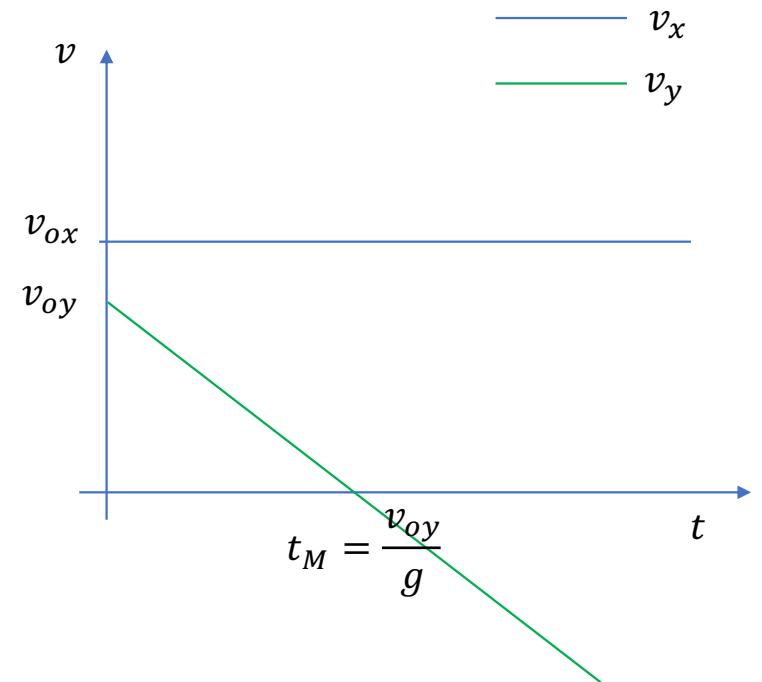


Moto parabolico: velocità durante il moto

Se $v_{oy} > 0$ v_y si annulla al tempo t_M tale che

$$v_{oy} - gt_M = 0$$

$$t_M = \frac{v_{oy}}{g} = \frac{v_o \sin \vartheta}{g}$$



Moto parabolico: posizione

Tramite un'ulteriore integrazione, tenendo conto della posizione iniziale, possiamo calcolare come varia la posizione del punto materiale nel tempo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(t) dt$$

In componenti cartesiane

$$x = x_o + \int_0^t v_x dt$$

$$y = y_o + \int_0^t v_y dt$$

Nel nostro caso, dato che il punto viene lanciato a partire dall'origine del sistema di riferimento, $x_o = 0$ e $y_o = 0$.

Sviluppando gli integrali si ottiene

$$x = \int_0^t v_{ox} dt = v_{ox}t$$

$$y = \int_0^t (v_{oy} - gt) dt = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Moto parabolico: posizione

Analizziamo i risultati ottenuti, ricordando che

$$v_{0x} = v_o \cos \vartheta$$

$$v_{0y} = v_o \sin \vartheta$$

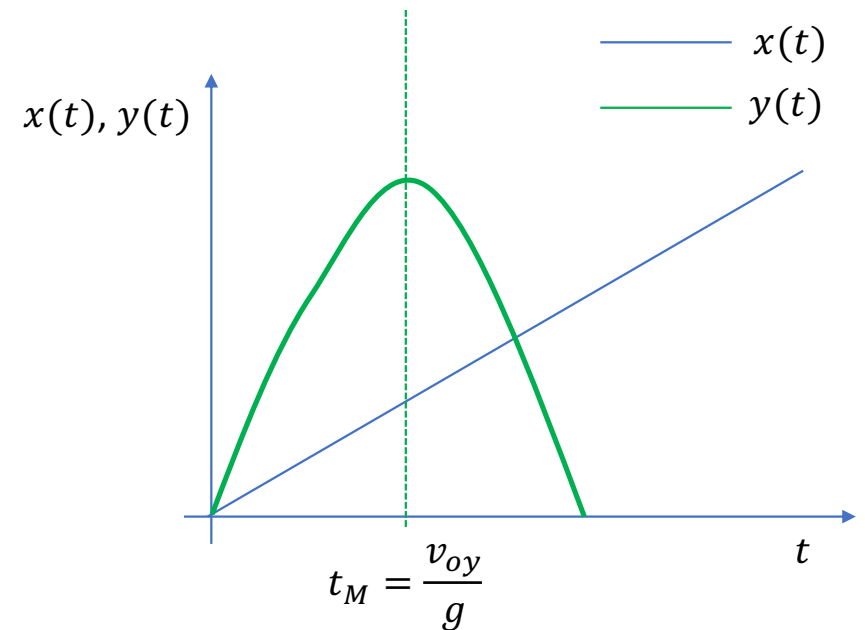
Possiamo scrivere:

$$x(t) = v_o \cos \vartheta t$$

$$y(t) = v_o \sin \vartheta t - \frac{1}{2} g t^2$$

$x(t)$ varia nel tempo con legge lineare, con coefficiente angolare $v_{0x} = v_o \cos \vartheta$.

$y(t)$ varia nel tempo secondo un polinomio di secondo grado.



Moto parabolico: altezza massima raggiunta

Quale sarà la massima quota raggiunta dal punto materiale durante il volo?

La quota del punto raggiunge il valore massimo quando v_y si annulla, quindi al tempo

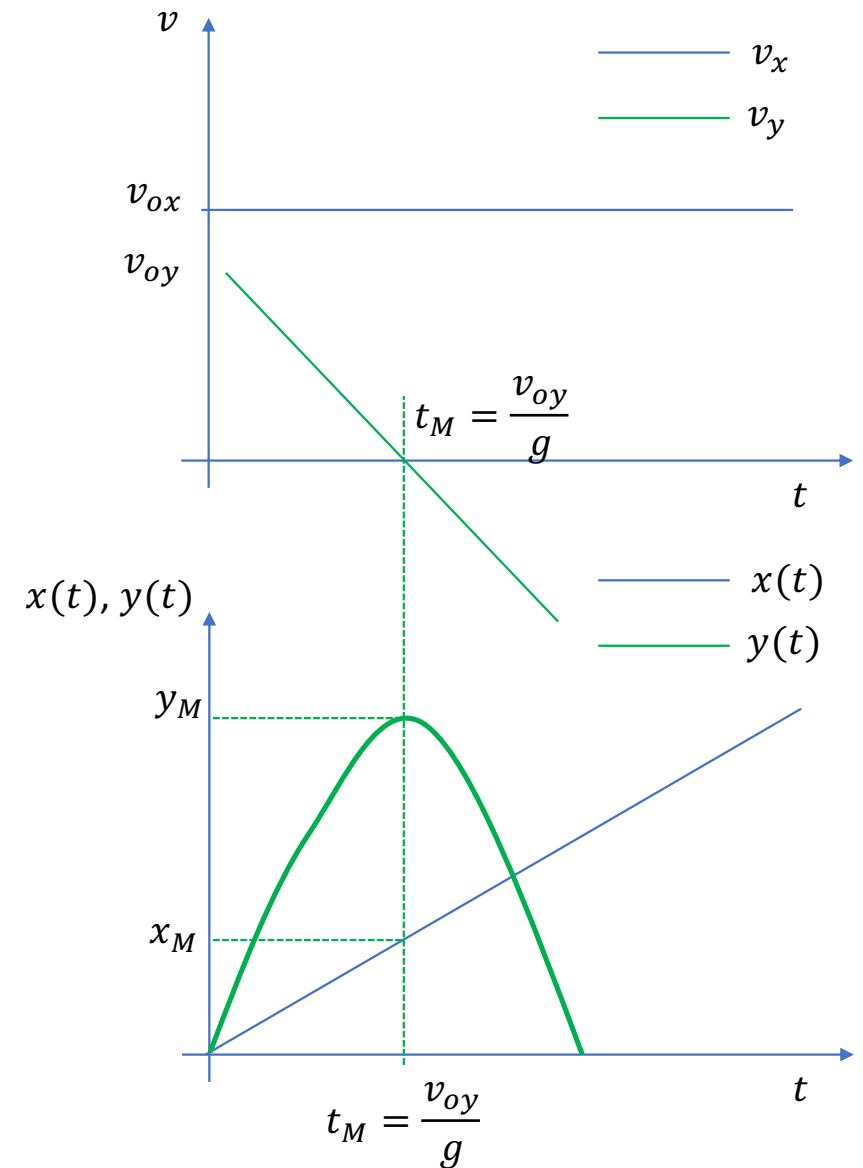
$$t_M = \frac{v_{oy}}{g} = \frac{v_o \sin \theta}{g}$$

Sostituendo nell'espressione di $y(t)$ si ottiene:

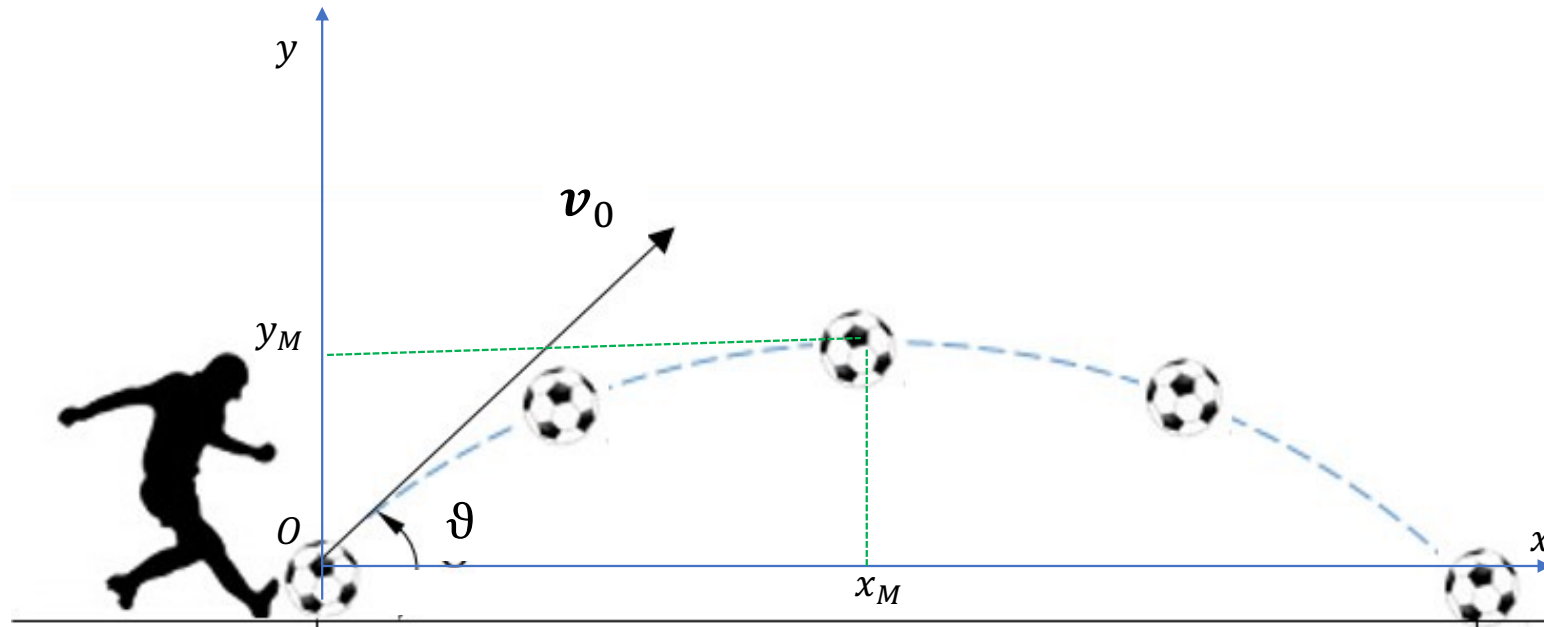
$$y_M = v_{oy}t_M - \frac{1}{2}gt_M^2 = v_{oy}\frac{v_{oy}}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_{oy}}{g}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v_o^2 \sin^2 \theta}{g}$$

Quale distanza lungo l'asse x avrà percorso il punto materiale quando raggiunge la massima quota?

$$x_M = v_{ox}t_M = v_o \cos \theta \frac{v_o \sin \theta}{g} = \frac{v_o^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$



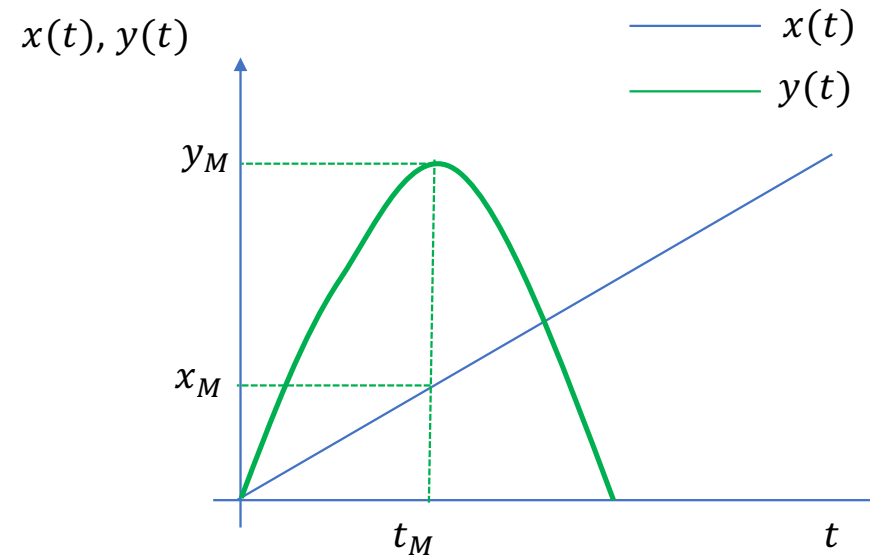
Moto parabolico: altezza massima raggiunta



Rappresentazione grafica: Traiettoria del punto materiale sul piano xy . Il tempo non appare esplicitamente.

$$x_M = \frac{v_0^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{g}$$
$$y_M = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \vartheta}{g}$$

Moto parabolico: altezza massima raggiunta



Rappresentazione grafica: componenti cartesiane della traiettoria $x(t)$ e $y(t)$ in funzione del tempo.

$$t_M = \frac{v_{0y}}{g}$$
$$x_M = \frac{v_0^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{g}$$
$$y_M = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \vartheta}{g}$$

Moto parabolico: tempo di volo, gittata

Dopo quanto tempo il punto raggiunge il suolo?

Ricordiamo che

$$y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Il punto raggiunge il suolo quando $y = 0$

L'equazione di secondo grado

$$v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

Ammette due soluzioni, la prima è

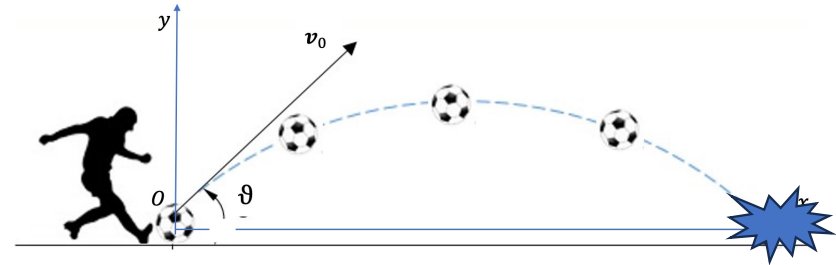
$$t = t_0 = 0$$

(infatti il punto materiale partiva da $y(0) = 0$)

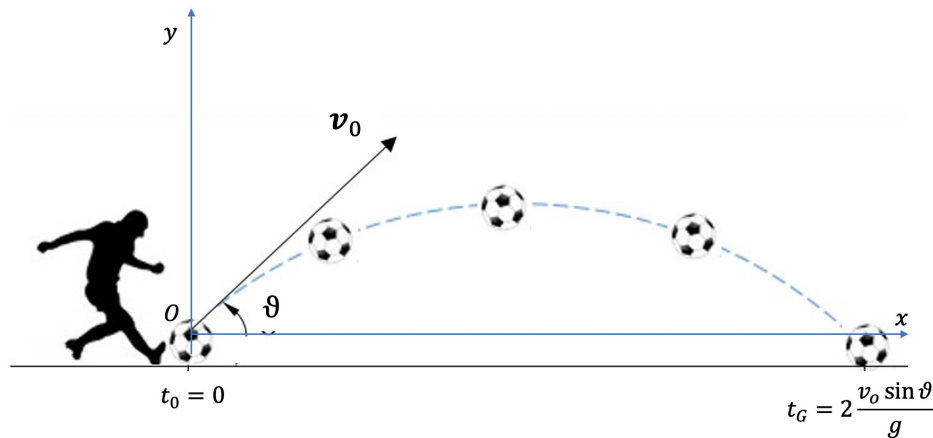
L'altra soluzione è

$$t = t_G = 2\frac{v_{oy}}{g} = 2\frac{v_o \sin \vartheta}{g}$$

Questo è il tempo in corrispondenza del quale il punto materiale tocca di nuovo il suolo (tempo di volo).



Moto parabolico: tempo di volo, gittata



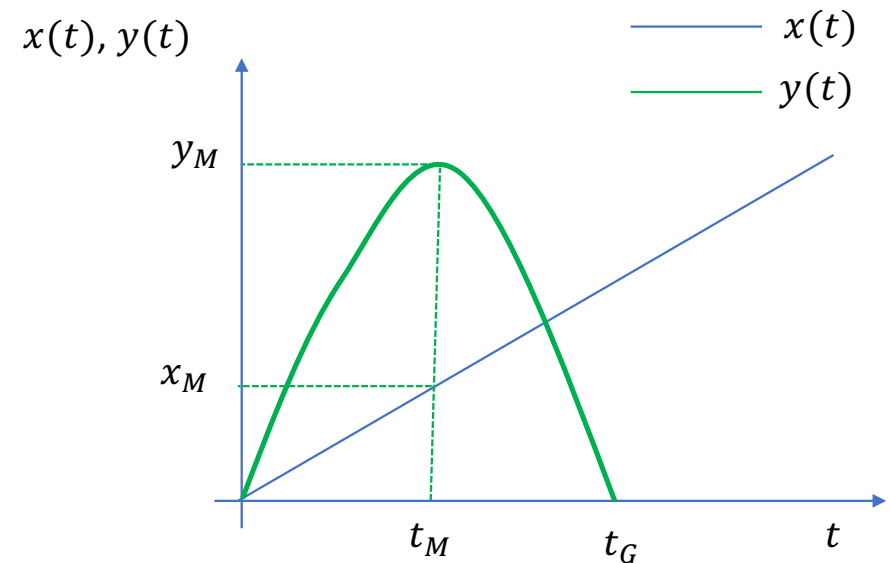
Il tempo di volo è dato da

$$t_G = 2 \frac{v_0 \sin \vartheta}{g}$$

ricordando che

$$t_M = \frac{v_0 \sin \vartheta}{g}$$

È semplice (e intuitivo) verificare che $t_G = 2t_M$



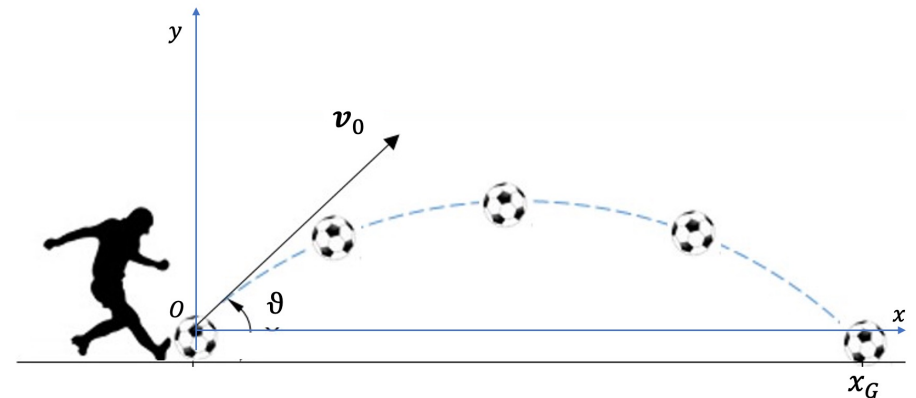
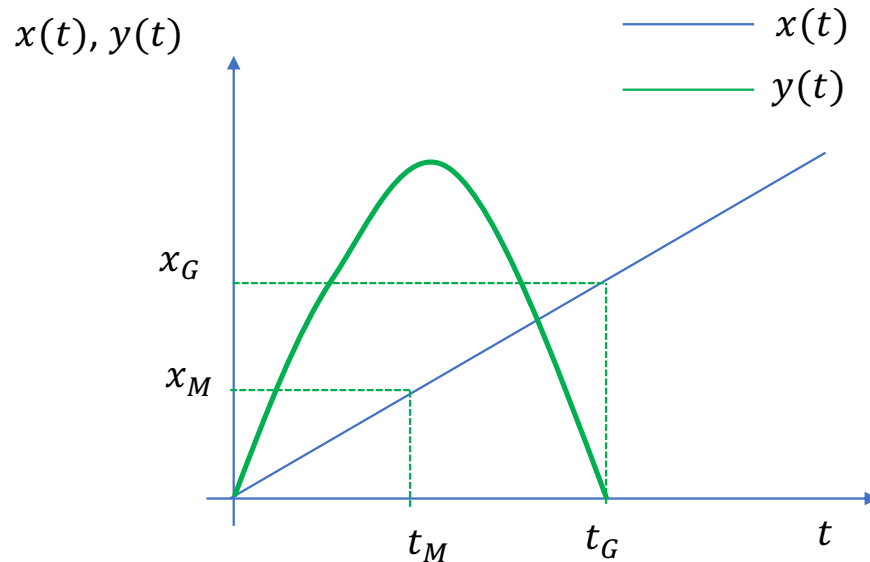
Moto parabolico: tempo di volo, gittata

Quale distanza lungo l'asse x ha percorso il punto materiale quando raggiunge di nuovo il suolo?
(gittata)

$$x_G = v_{ox} t_G = v_o \cos \vartheta \frac{2v_o \sin \vartheta}{g} = \frac{2v_o^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{g}$$

Si osserva che

$$x_G = 2x_M$$



Moto parabolico: traiettoria

Qual è la curva descritta dal punto durante il moto? (traiettoria del punto P)

Abbiamo visto in precedenza che le componenti cartesiane dello spostamento sono date da:

$$\begin{aligned}x(t) &= v_{ox}t \\ y(t) &= v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

Per descrivere la traiettoria, dobbiamo cercare una relazione che lega tra loro le componenti cartesiane, quindi scrivere

$$y(x)$$

Possiamo esplicitare il tempo dall'espressione $x(t)$:

$$\begin{aligned}x &= v_{ox}t \\ t &= x/v_{ox}\end{aligned}$$

Possiamo quindi sostituire nell'espressione $y(t)$:

$$y(x) = v_{oy}\frac{x}{v_{ox}} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{ox}}\right)^2$$

Moto parabolico: traiettoria

Ricordiamo le espressioni delle componenti cartesiane della velocità

$$v_{ox} = v_o \cos \vartheta$$

$$v_{oy} = v_o \sin \vartheta$$

Possiamo quindi sostituire nell'espressione trovata in precedenza

$$y(x) = v_{oy} \frac{x}{v_{ox}} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{ox}} \right)^2$$

$$y(x) = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} x - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_o^2 \cos^2 \vartheta} \right)^2$$

Che possiamo infine semplificare come

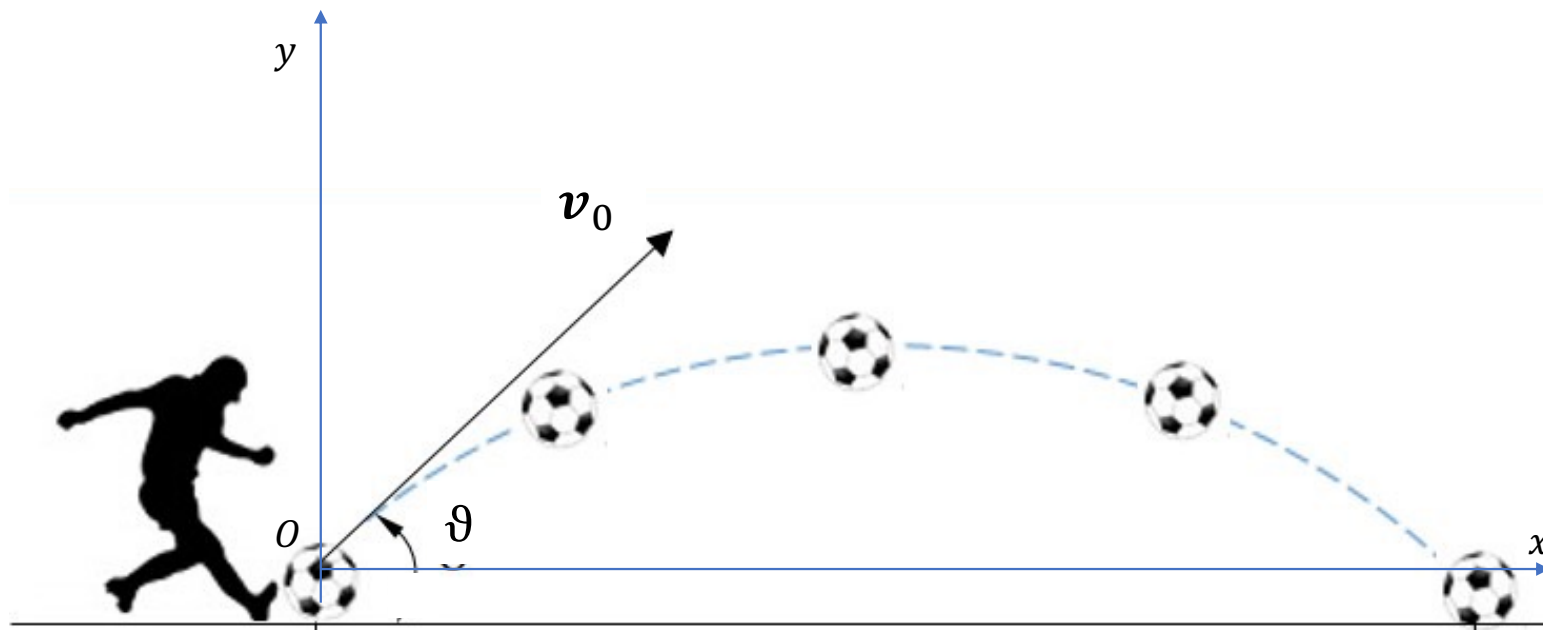
$$y(x) = \tan \theta x - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_o^2 \cos^2 \vartheta} \right)^2$$

Noti v_o e θ , questa è l'equazione di una parabola (da cui il nome di moto parabolico!)

Moto parabolico: traiettoria

Traiettoria del punto:

$$y(x) = \tan \theta x - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0^2 \cos^2 \theta} \right)^2$$



Moto parabolico: traiettoria

Analizziamo la curva appena trovata:

$$y(x) = \tan \vartheta x - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0^2 \cos^2 \vartheta} \right)^2$$

La quota massima si raggiunge quando:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Calcoliamo la derivata:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \vartheta - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \vartheta}$$

Cerchiamo i valori di x per i quali si annulla la derivata

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Da cui otteniamo:

$$x = v_0^2 \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{g} = x_M$$

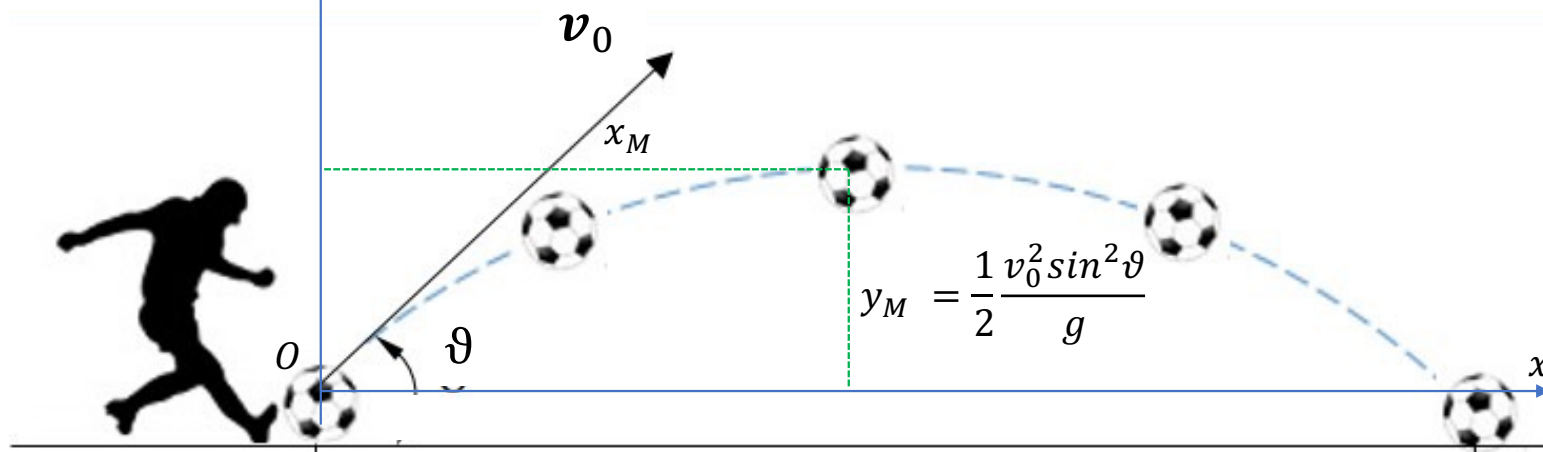
A cui corrisponde un'altezza massima di $y_M = v_{oy} \frac{x_M}{v_{ox}} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_M}{v_{ox}} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \vartheta}{g}$

(è ovviamente lo stesso risultato trovato in precedenza analizzando $x(t)$ e $y(t)$!)

Moto parabolico: analisi della traiettoria

$$x_M = v_0^2 \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{g}$$

$$y_M = v_{oy} \frac{x_M}{v_{ox}} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_M}{v_{ox}} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \vartheta}{g}$$



Moto parabolico: analisi della traiettoria

A parità di modulo della velocità iniziale v_o , per quale valore dell'angolo ϑ ho la massima gittata?

Ricordiamo l'espressione della gittata in funzione di v_o e di ϑ :

$$x_G = 2v_o^2 \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{g}$$

Il valore di x_G varia al variare di ϑ . Per calcolare il massimo valore di x_G determino la derivata di x_G rispetto a ϑ

$$\frac{dx_M}{d\vartheta} = \frac{v_o^2}{g} (\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta)$$

E analizzo per quali valori di ϑ si annulla:

$$\frac{dx_M}{d\vartheta} = 0$$

Moto parabolico: analisi della traiettoria

Sviluppando i calcoli ottengo:

$$\frac{v_0^2}{g} (\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta) = 0$$

$$\begin{aligned} (\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta) &= 0 \\ (\tan^2 \vartheta - 1) &= 0 \\ (\tan^2 \vartheta &= 1) \end{aligned}$$

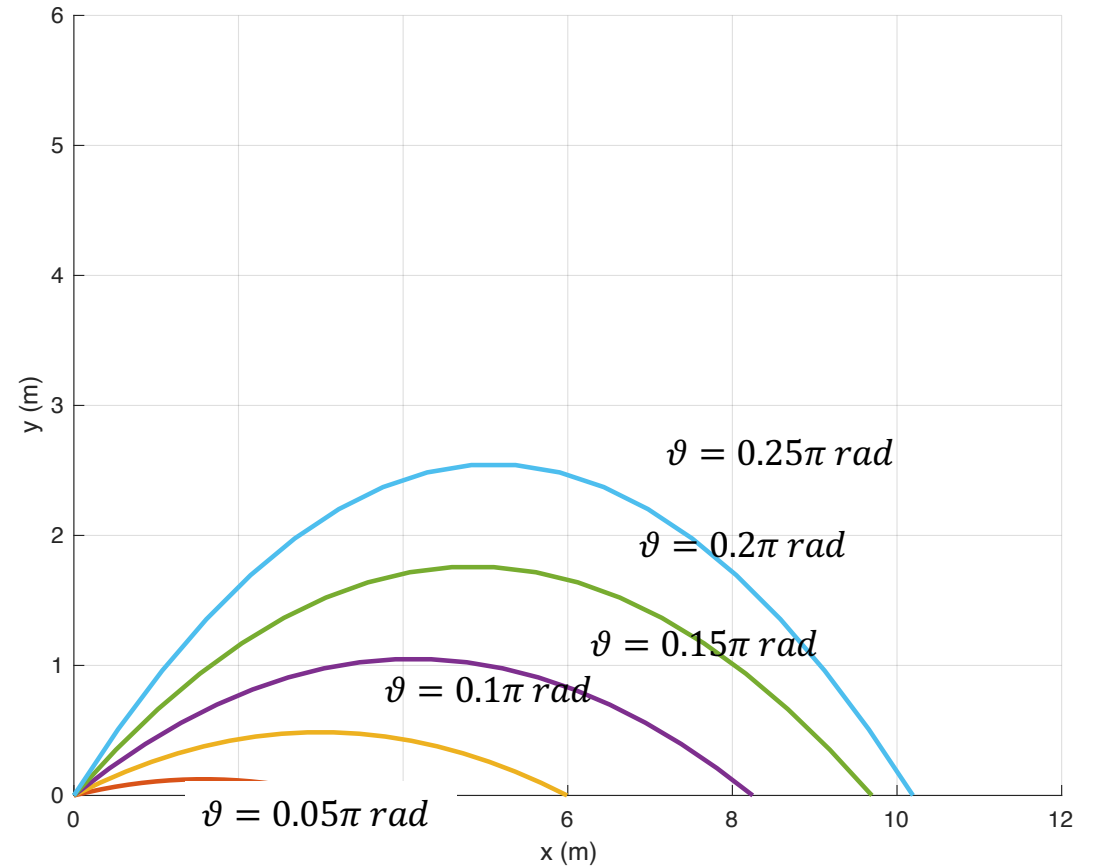
$$\vartheta = \pi/4$$

La gittata è massima quando l'angolo ϑ è pari a $\pi/4$. La gittata in questo caso vale:

$$x_{Gmax} = 2v_0^2 \frac{\sin(\pi/4) \cos(\pi/4)}{g} = \frac{v_0^2}{g}$$

Moto parabolico: analisi della traiettoria

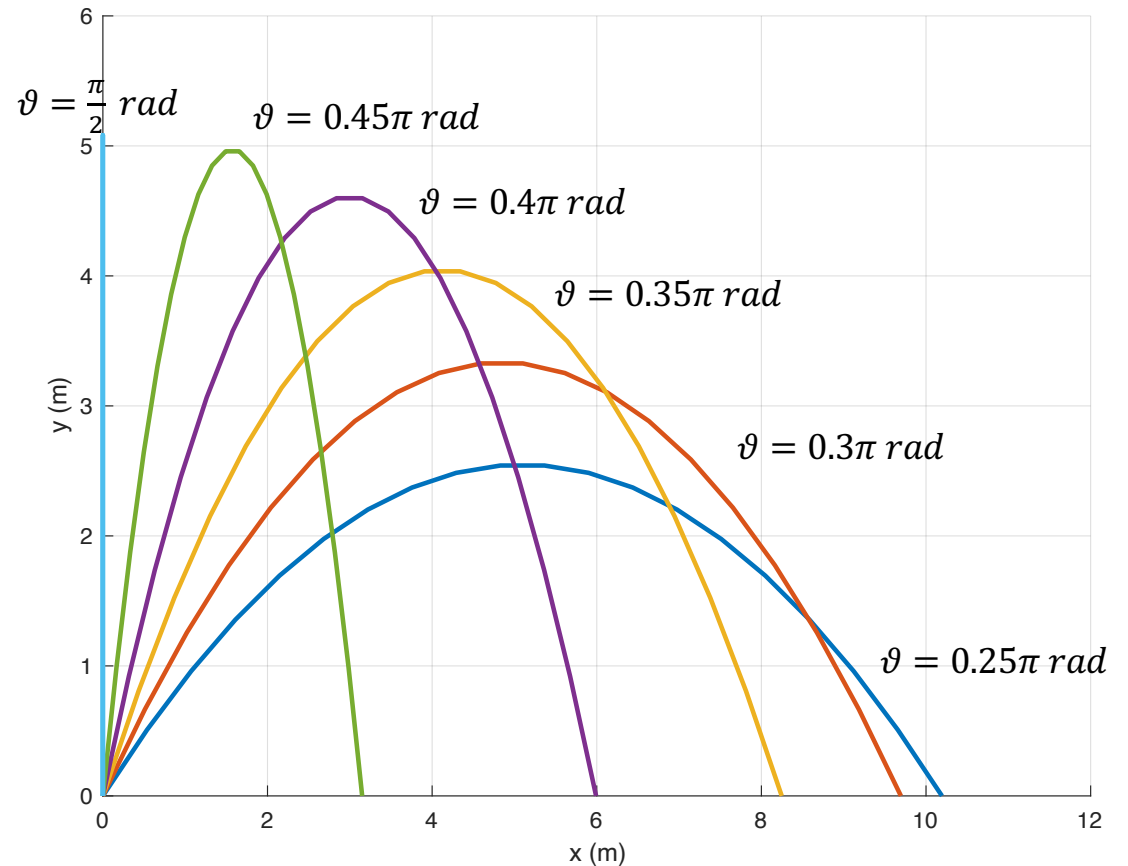
Verifichiamo questo risultato con un esempio numerico: analizziamo come varia la traiettoria al variare dell'angolo ϑ partendo da una velocità iniziale $v_0 = 10 \text{ m/s}$. Il grafico riporta i risultati ottenuti per ϑ variabile tra $0.05\pi \text{ rad}$ e $0.25\pi \text{ rad}$: si osserva che la gittata aumenta all'aumentare di θ .



Moto parabolico: analisi della traiettoria

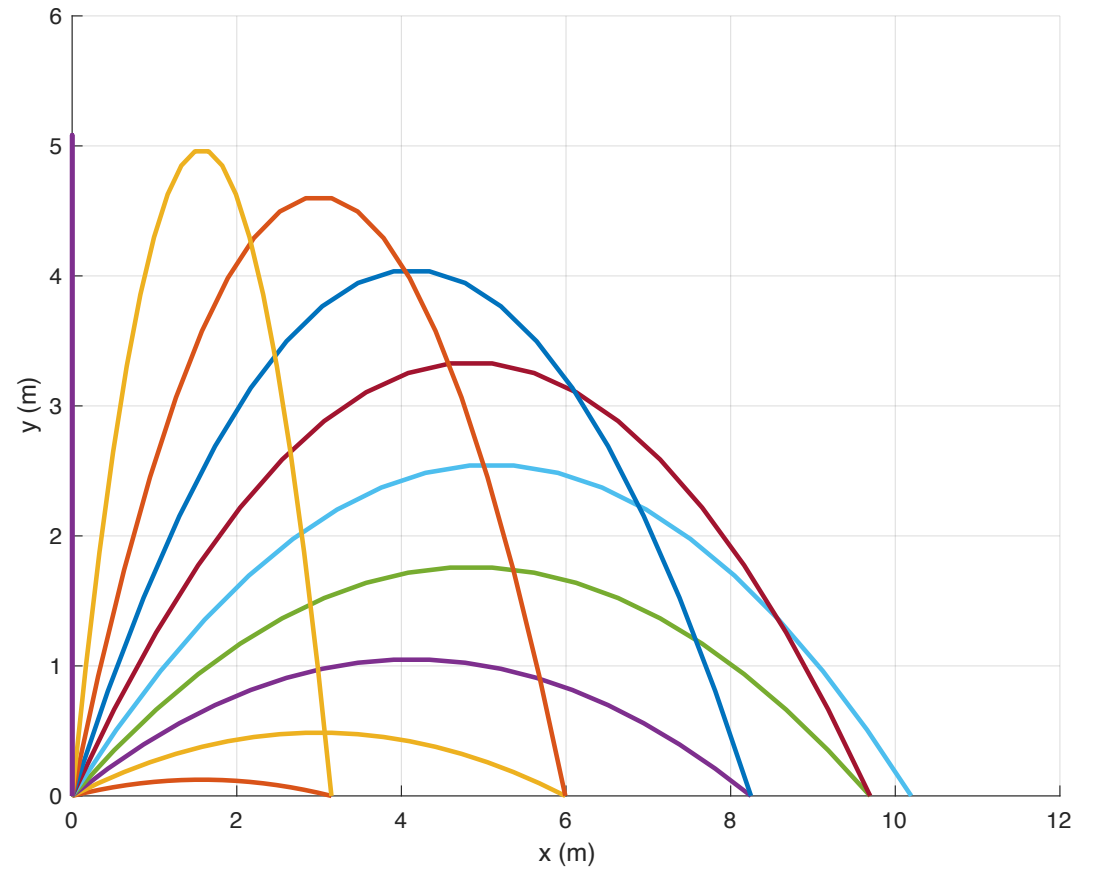
Questo grafico riporta invece i risultati ottenuti per ϑ variabile tra 0.5π rad e 0.25π rad: si osserva che la gittata diminuisce all'aumentare di θ .

La gittata massima si ottiene quindi per
 $\theta = 0.25\pi$ rad
come calcolato in precedenza.



Moto parabolico: analisi della traiettoria

Grafico riassuntivo



Opzionale: script Matlab utilizzato per generare i grafici

```
clear all
close all
clc
%
v0 = 10; % m/s
g = 9.81; %m/s^2

thetav = [0.:0.05:0.5]*pi; %rad
for i=1:length(thetav)
    v0x = v0*cos(thetav(i)); %m/s
    v0y = v0*sin(thetav(i)); %m/s
    xG=2*v0^2*sin(thetav(i))*cos(thetav(i))/g; % m
    xvett = linspace(0,xG,20); %m
    yvett = xvett*tan(thetav(i))-g/2*xvett.^2/(v0^2*(cos(thetav(i))^2));
    figure(1)
    hold on
    plot(xvett,yvett,'LineWidth',2)

end
figure(1)
grid on
axis([0,12,0,6])
xlabel('x (m)')
ylabel('y (m)')
```

Moto parabolico: velocità all'impatto con il suolo

Nel caso generale, quale sarà la velocità del punto materiale al momento dell'impatto?

Ricordiamo le espressioni delle componenti della velocità in funzione del tempo

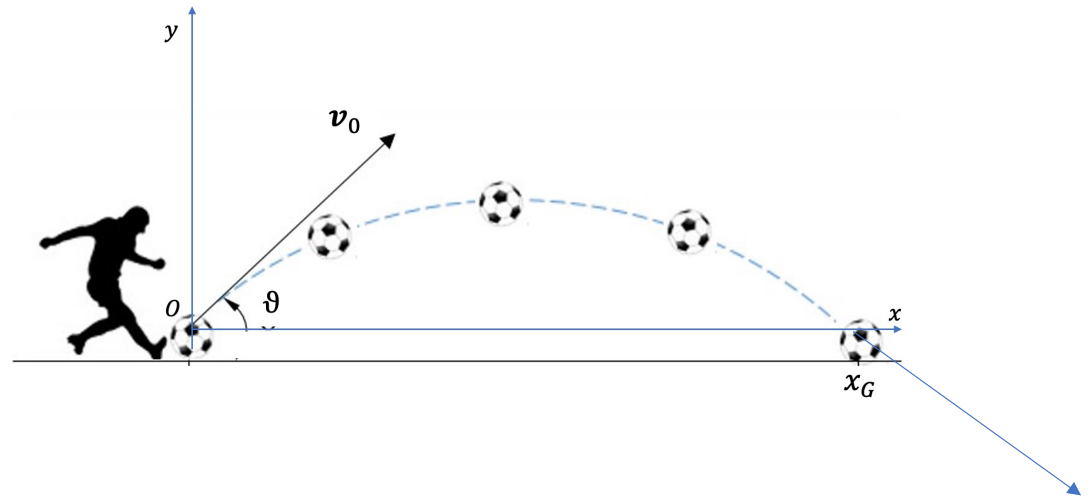
$$\begin{aligned}v_x &= v_{ox} \\v_y &= v_{oy} - gt\end{aligned}$$

Ricordiamo che tempo di volo è pari a

$$t_G = 2 \frac{v_o \sin \vartheta}{g}$$

Sostituendo e sviluppando i calcoli si ottiene

$$\begin{aligned}v_{xG} &= v_{ox} \\v_{Gy} &= v_{oy} - gt_G = v_o \sin \vartheta - 2g \frac{v_o \sin \vartheta}{g} = v_o \sin \vartheta = -v_{oy}\end{aligned}$$



Moto parabolico: note

Nelle slide precedenti abbiamo analizzato uno dei possibili casi di moto parabolico (partenza dall'origine del sistema di riferimento con velocità iniziale inclinata di un angolo ϑ rispetto alla direzione orizzontale), ma possono verificarsi altre condizioni (ad esempio, partenza da un'altezza h con velocità orizzontale, arrivo a una quota diversa da 0, ecc., ne vedremo alcuni casi negli esercizi). In ogni caso, conviene partire sempre dalle equazioni della cinematica per un moto bidimensionale di caduta libera:

$$\begin{aligned}v_x &= v_{ox} \\v_y &= v_{oy} - gt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_{ox}t \\y &= y_0 + v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

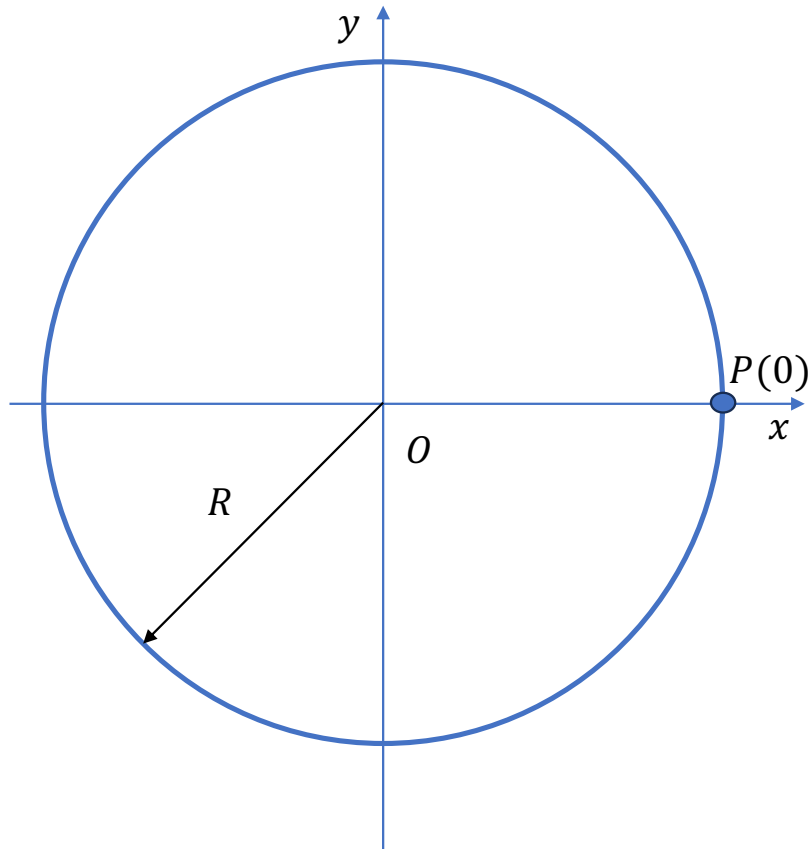
e analizzare caso per caso le condizioni iniziali, le condizioni del problema e le relative incognite.



Moto circolare



Moto circolare: introduzione

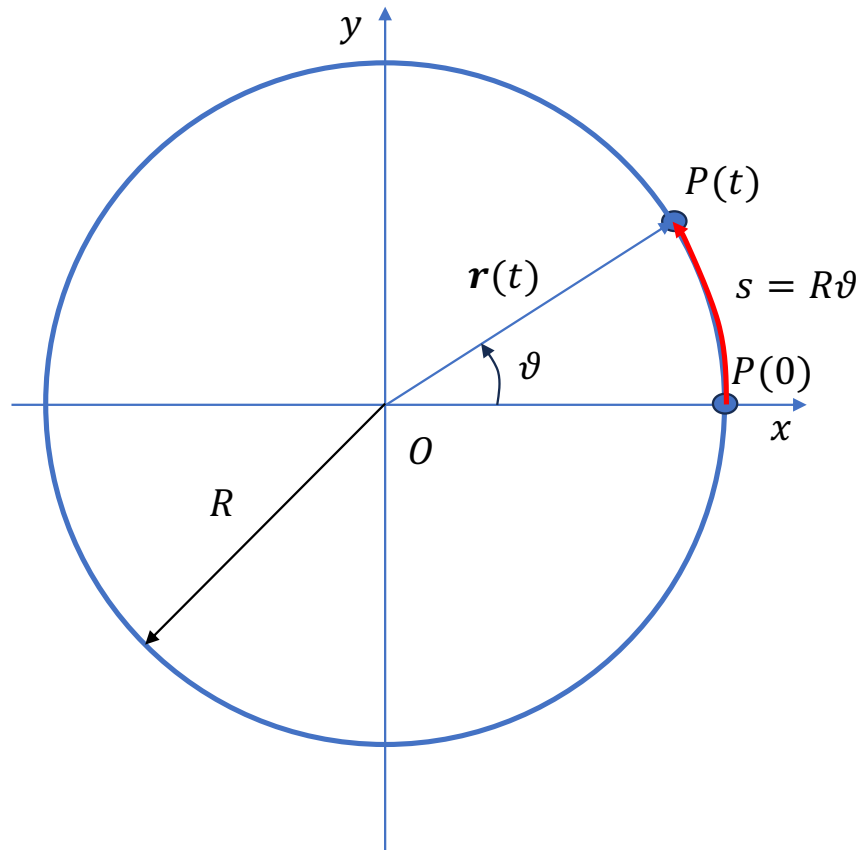


Un moto circolare è un moto in cui la traiettoria è una circonferenza.

Supponiamo di avere un punto materiale P che si muove di moto circolare, seguendo una circonferenza di centro O e raggio R .

Fissiamo un sistema di riferimento con origine nel centro O e asse x diretto in modo tale che il punto materiale si trovi sull'asse stesso per $t = 0$.

Moto circolare: ascissa curvilinea



Al generico istante t il punto si trova nella posizione $P(t)$ sulla circonferenza. La sua posizione è definita dal raggio vettore $\mathbf{r}(t)$, che forma un angolo ϑ con la direzione positiva dell'asse x . L'angolo ϑ varia durante il moto del punto: $\vartheta(t)$

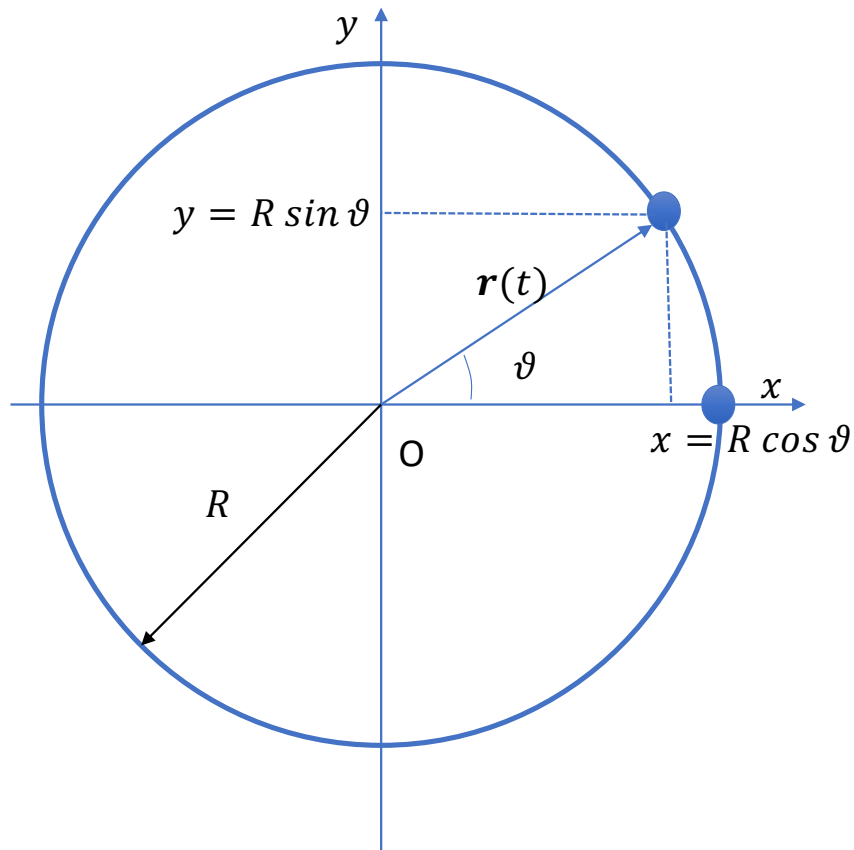
L'ascissa curvilinea s è l'arco percorso dal punto materiale a partire dalla sua posizione iniziale.

Essendo un arco di circonferenza risulta

$$s(t) = R\theta(t)$$

Per $t = 0$, $s(0) = 0$, il punto P si trova sull'asse x .

Moto circolare: coordinate cartesiane del punto



Rispetto al sistema di riferimento che abbiamo definito, le coordinate del punto materiale durante il moto circolare sono espresse da:

$$x = R \cos \vartheta$$

$$y = R \sin \vartheta$$

Moto circolare: velocità

Nella trattazione generale dei moti piani abbiamo visto che la velocità in un generico istante è data da

$$\mathbf{v} = v \mathbf{u}_t$$

Dove $\mathbf{u}_t$ è il versore tangente alla traiettoria in

quell'istante e $v = \frac{ds}{dt}$

In un moto circolare, abbiamo definito l'ascissa curvilinea come

$$s = R\vartheta$$

Sostituendo nell'espressione della velocità otteniamo:

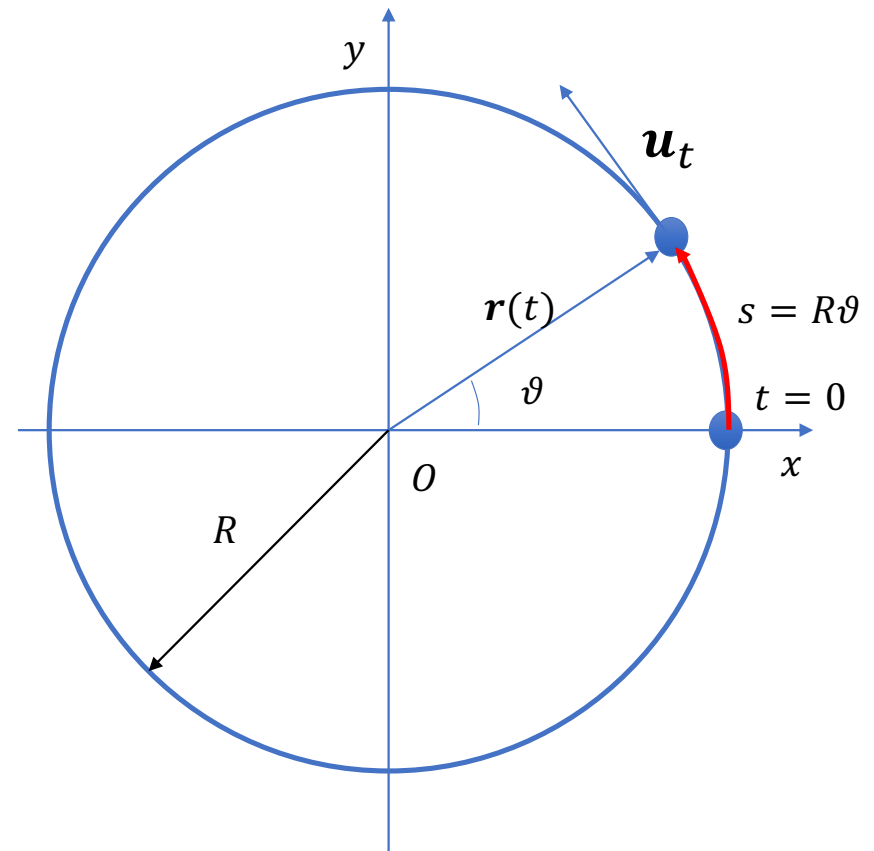
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{dR\vartheta}{dt} = R \frac{d\vartheta}{dt} = R\omega$$

Introduciamo la velocità angolare ω

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$$

Relazioni fondamentali tra la velocità e la velocità angolare:

$$\omega = \frac{v}{R}, \quad v = R\omega$$



Moto circolare: velocità

Ricordiamo le componenti cartesiane del vettore posizione

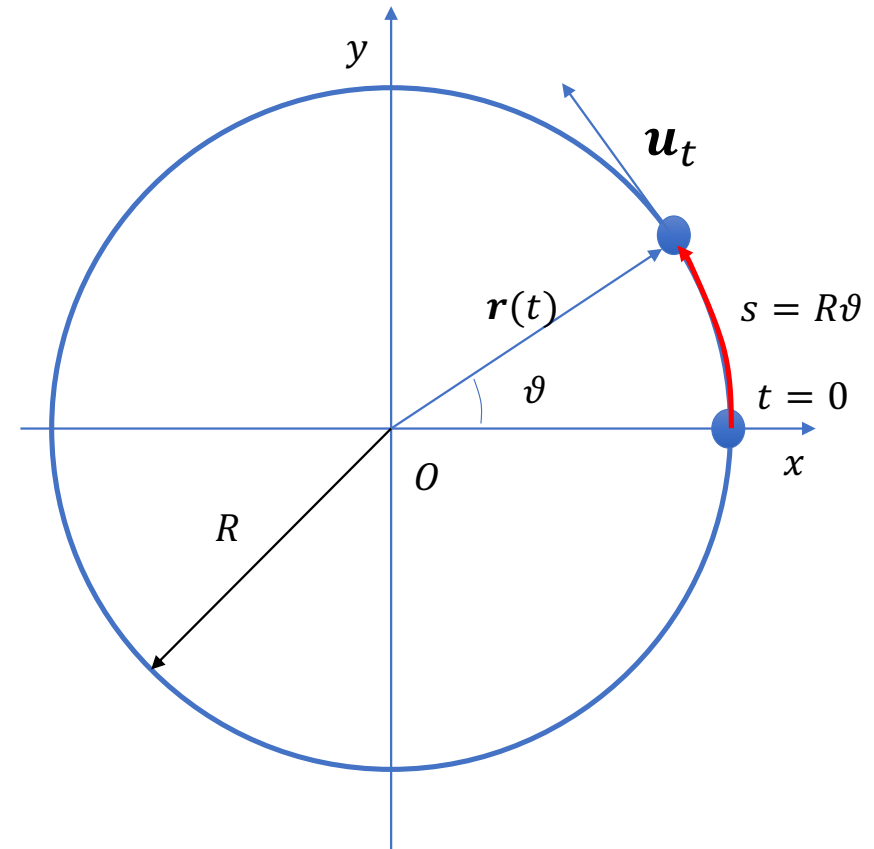
$$x = R \cos \vartheta$$

$$y = R \sin \vartheta$$

Derivando rispetto al tempo, possiamo determinare le componenti cartesiane della velocità

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -R \frac{d\vartheta}{dt} \sin \vartheta = -R \omega \sin \vartheta = -v \sin \vartheta$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = R \frac{d\vartheta}{dt} \cos \vartheta = R \omega \cos \vartheta = v \cos \vartheta$$



Moto circolare: accelerazione

Riepilogando, in un moto circolare abbiamo visto che la posizione può essere descritta dall'ascissa curvilinea

$$s = R\vartheta$$

Mentre la velocità è data da $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_t$, dove la componente scalare è data da:

$$v = R\omega$$

Per quanto riguarda l'accelerazione, nello studio della cinematica dei moti nel piano abbiamo visto che essa si compone di due termini, uno normale e uno tangenziale:

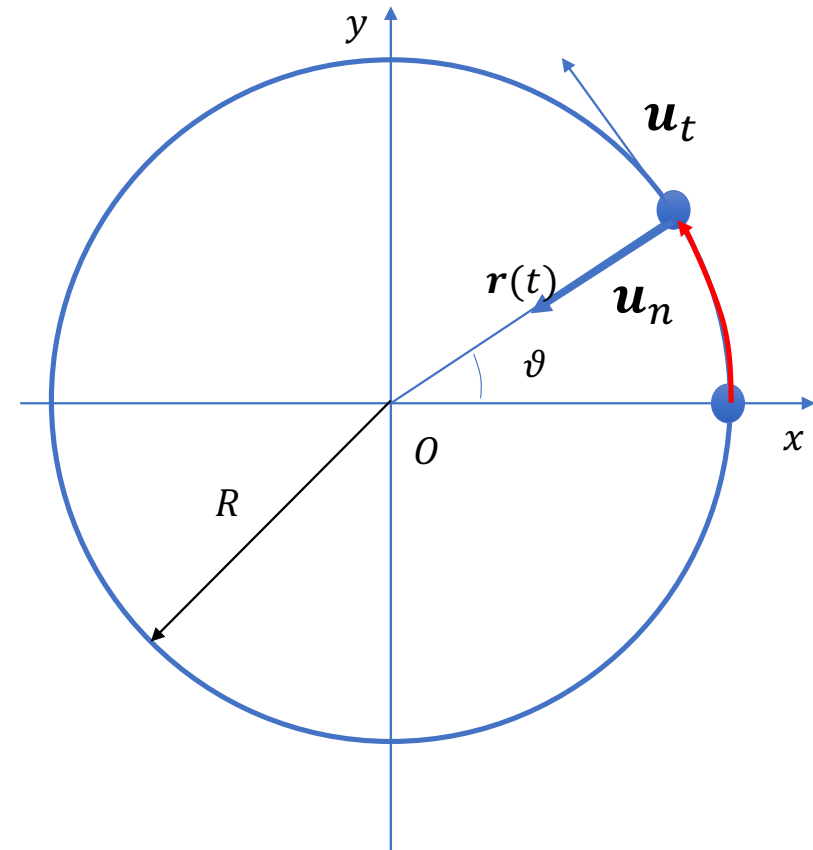
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t$$

Nel moto circolare, per quanto visto in precedenza sulla velocità, possiamo scrivere (osserviamo che $R\mathbf{u}_n = -\mathbf{r}$):

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_n = R\omega^2 \mathbf{u}_n = -\omega^2 \mathbf{r}$$

Mentre per la componente tangenziale risulta:

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t = R \frac{d\omega}{dt} \mathbf{u}_t$$



Moto circolare: accelerazione, componenti cartesiane

Riepilogando, le componenti cartesiane della posizione risultano

$$x = R \cos \vartheta$$

$$y = R \sin \vartheta$$

Mentre quelle della velocità sono date da:

$$v_x = -v \sin \vartheta = -R\omega \sin \vartheta$$

$$v_y = v \cos \vartheta = R\omega \cos \vartheta$$

Deriviamo ulteriormente rispetto al tempo per definire le componenti cartesiane dell'accelerazione, sviluppando i calcoli si ottiene:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(-R\omega \sin \vartheta)}{dt} = -R\omega \frac{d(\sin \vartheta)}{dt} - R \frac{d\omega}{dt} \sin \vartheta = -R\omega^2 \cos \vartheta - R \frac{d\omega}{dt} \sin \vartheta$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d(R\omega \cos \vartheta)}{dt} = R\omega \frac{d(\cos \vartheta)}{dt} + R \frac{d\omega}{dt} \cos \vartheta = -R\omega^2 \sin \vartheta + R \frac{d\omega}{dt} \cos \vartheta$$

Moto circolare: accelerazione, componenti cartesiane

Allo stesso risultato della slide precedente si arriva partendo dall'espressione:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t$$

Abbiamo visto in precedenza che:

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_n = R\omega^2 \mathbf{u}_n$$

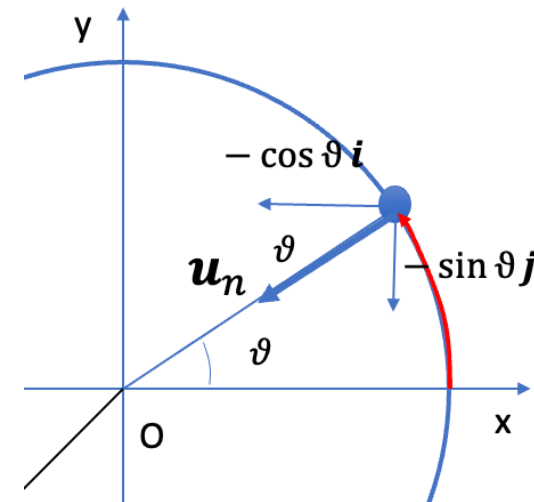
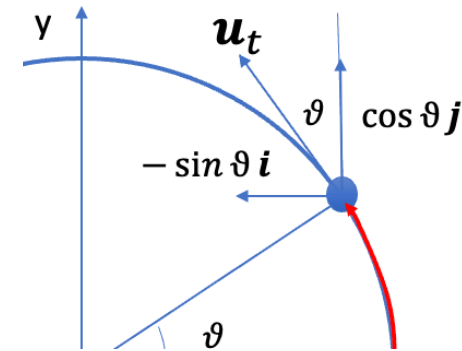
$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t = R \frac{d\omega}{dt} \mathbf{u}_t$$

E osservando che le componenti cartesiane dei versori tangente e normale in un moto circolare risultano

$$\mathbf{u}_t = -\sin \vartheta \mathbf{i} + \cos \vartheta \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_n = -\cos \vartheta \mathbf{i} - \sin \vartheta \mathbf{j}$$

Sostituendo, si ottengono le stesse relazioni trovate in precedenza.



Moto circolare uniforme

In un moto circolare uniforme, il punto materiale percorre una traiettoria circolare con velocità costante in modulo.

Ricordiamo l'espressione dell'ascissa curvilinea in un moto circolare

$$s = R\vartheta$$

E quella della velocità

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_t$$

Se il moto è circolare uniforme,

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{dR\vartheta}{dt} = R \frac{d\vartheta}{dt} = R\omega \text{ costante}$$

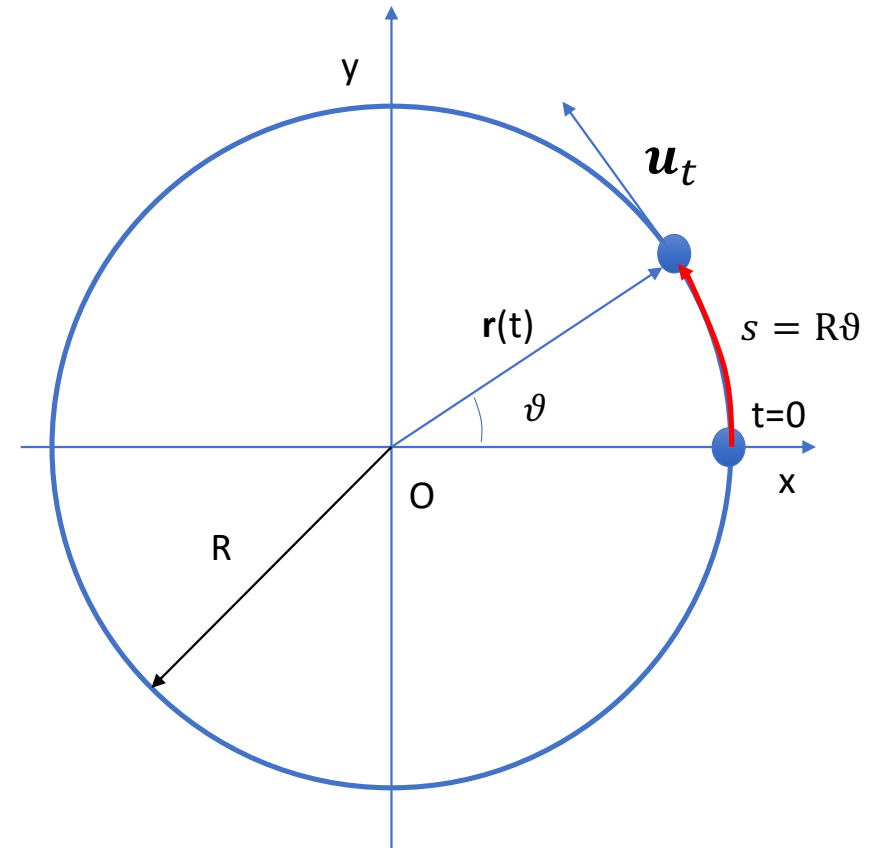
Quindi:

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} \text{ è costante}$$

$$v = R\omega \text{ è costante}$$

In un moto circolare uniforme il modulo della velocità e la velocità angolare sono costanti.

Attenzione: la velocità non è costante dato che la sua direzione cambia lungo la traiettoria circolare!



Moto circolare uniforme

Dato che la velocità angolare è costante,

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$$

Possiamo ricavare come varia l'angolo ϑ nel tempo

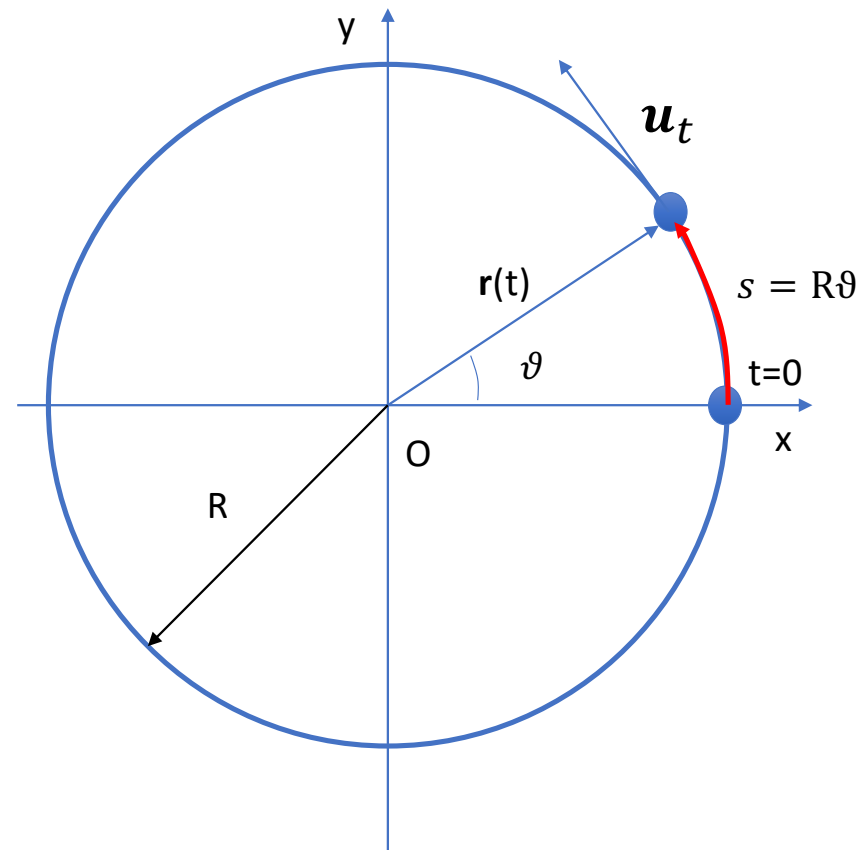
$$\vartheta = \vartheta_0 + \int_0^t \omega dt$$

Risolvendo si ottiene (ricordiamo che $\vartheta(0) = \vartheta_0 = 0$)

$$\vartheta = \omega t$$

L'ascissa curvilinea cambia nel tempo secondo la relazione

$$s(t) = R\vartheta(t) = R\omega t$$



Moto circolare uniforme, accelerazione

Ricordiamo l'espressione dell'accelerazione in un moto circolare:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t$$
$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_n = R\omega^2 \mathbf{u}_n$$

Se il moto è circolare e uniforme, la componente tangenziale si annulla:

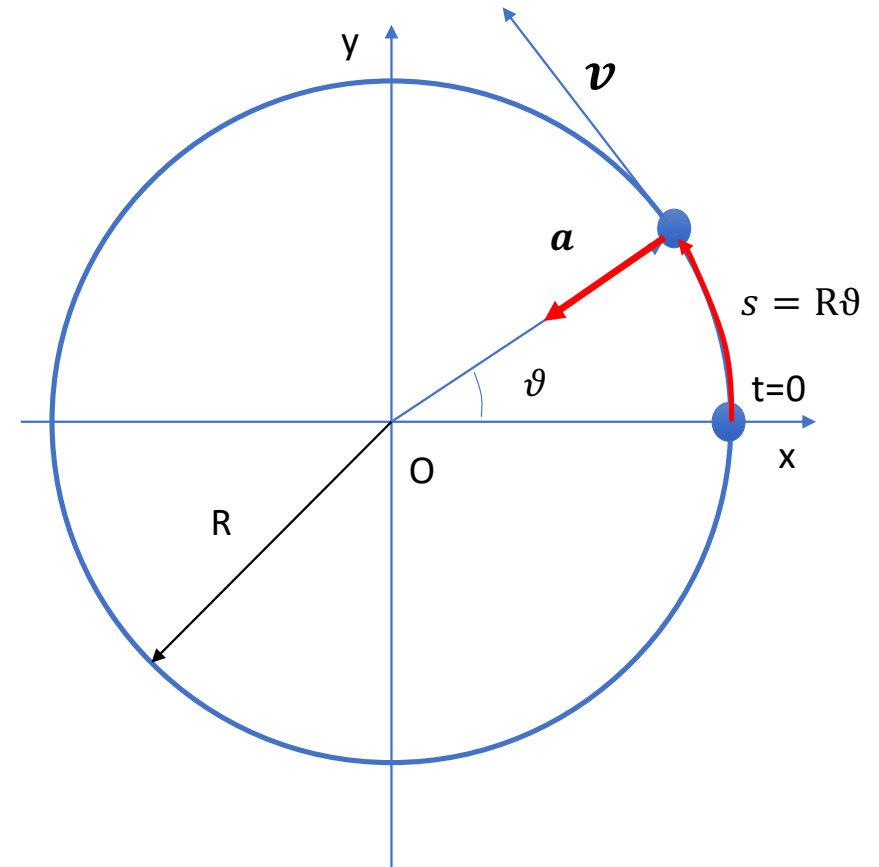
$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t = R \frac{d\omega}{dt} \mathbf{u}_t = 0$$

L'accelerazione ha quindi solo componente centripeta

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n = -\omega^2 \mathbf{r}$$

E le sue componenti cartesiane risultano

$$a_x = -R\omega^2 \cos \vartheta$$
$$a_y = -R\omega^2 \sin \vartheta$$



Moto circolare uniforme, componenti cartesiane

Moto circolare uniforme, componenti cartesiane della posizione

$$x = R \cos \omega t$$

$$y = R \sin \omega t$$

Velocità:

$$v_x = -v \sin \vartheta = -R\omega \sin \omega t$$

$$v_y = v \cos \vartheta = R\omega \cos \omega t$$

Accelerazione:

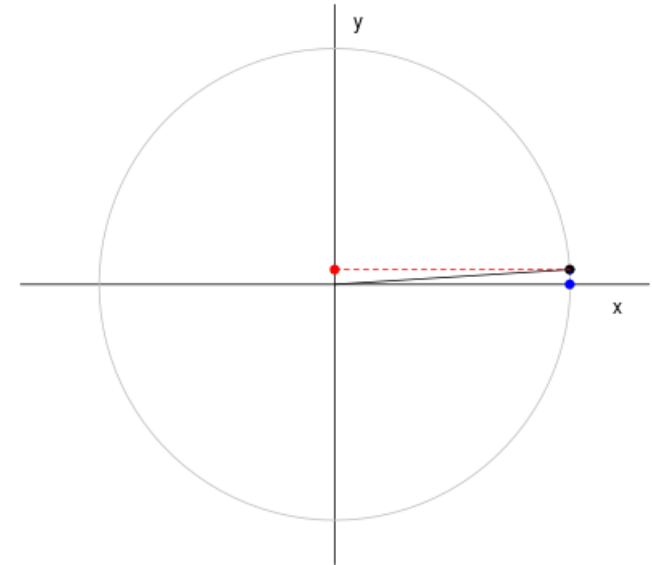
$$a_x = -R\omega^2 \cos \omega t$$

$$a_y = -R\omega^2 \sin \omega t$$

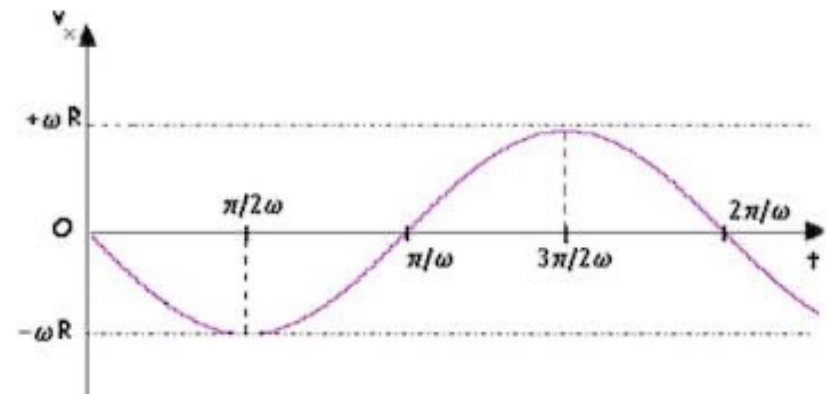
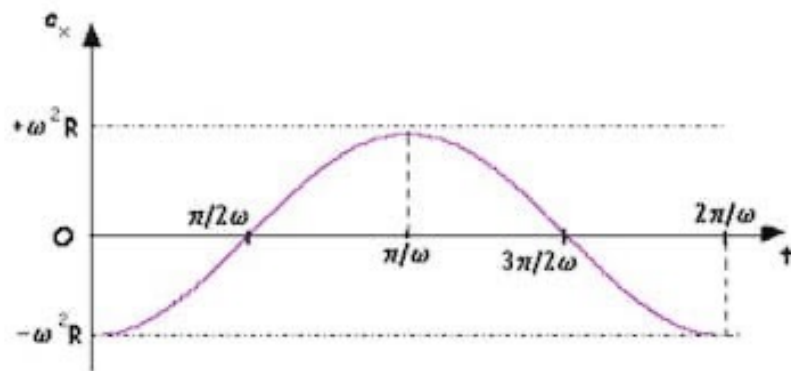
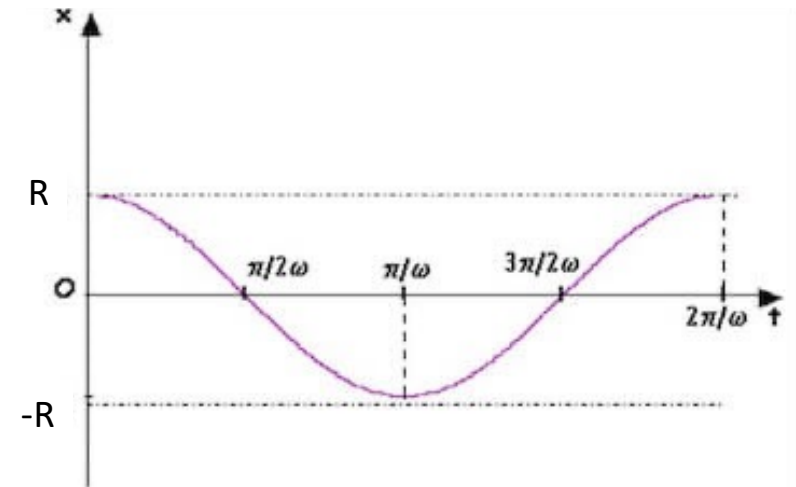
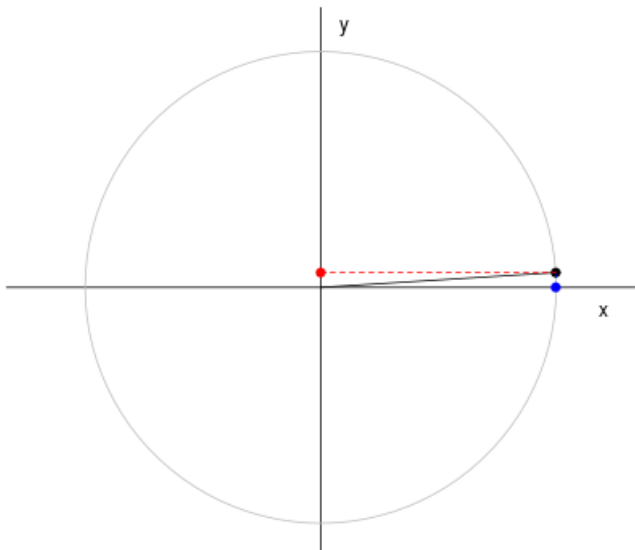
Si osserva che moto circolare uniforme è la composizione di due moti armonici monodimensionali (uno lungo x e uno lungo y), entrambi con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

T è anche il tempo necessario al punto materiale per compiere un giro della circonferenza



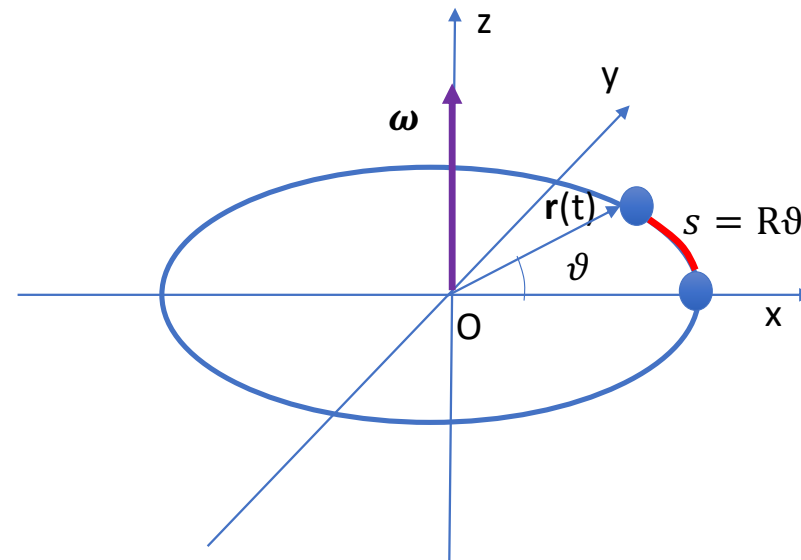
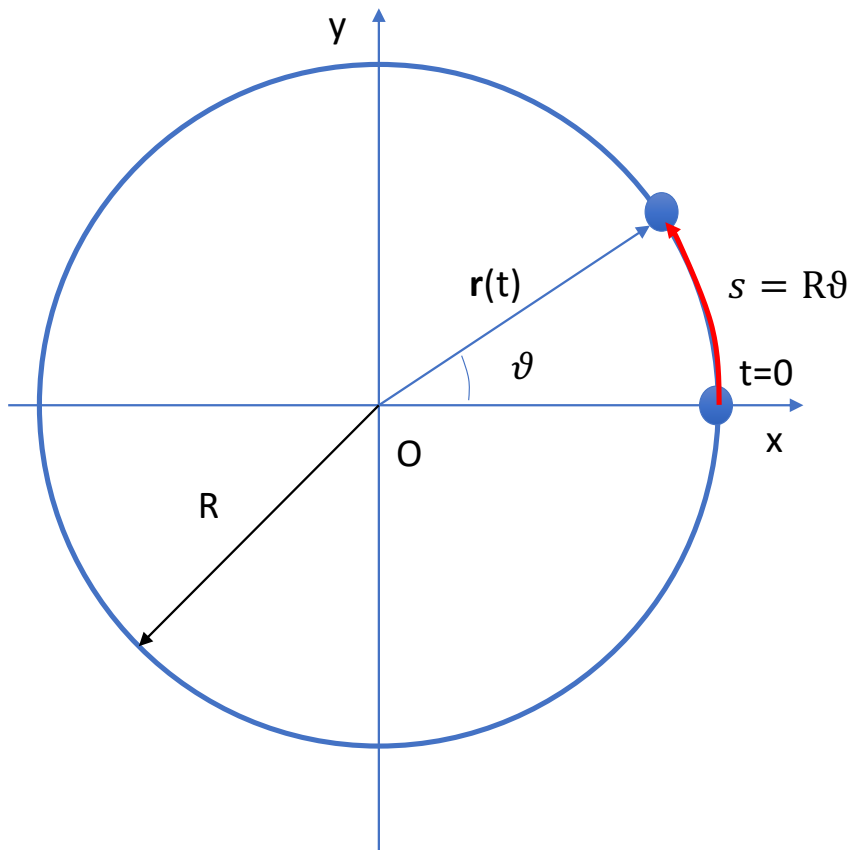
Moto circolare uniforme, componenti cartesiane



Moto circolare uniforme, definizione vettoriale della velocità angolare

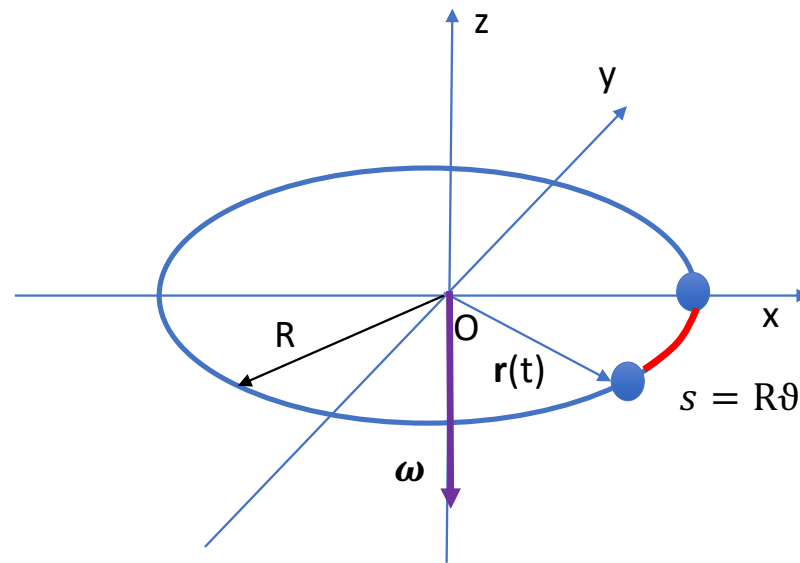
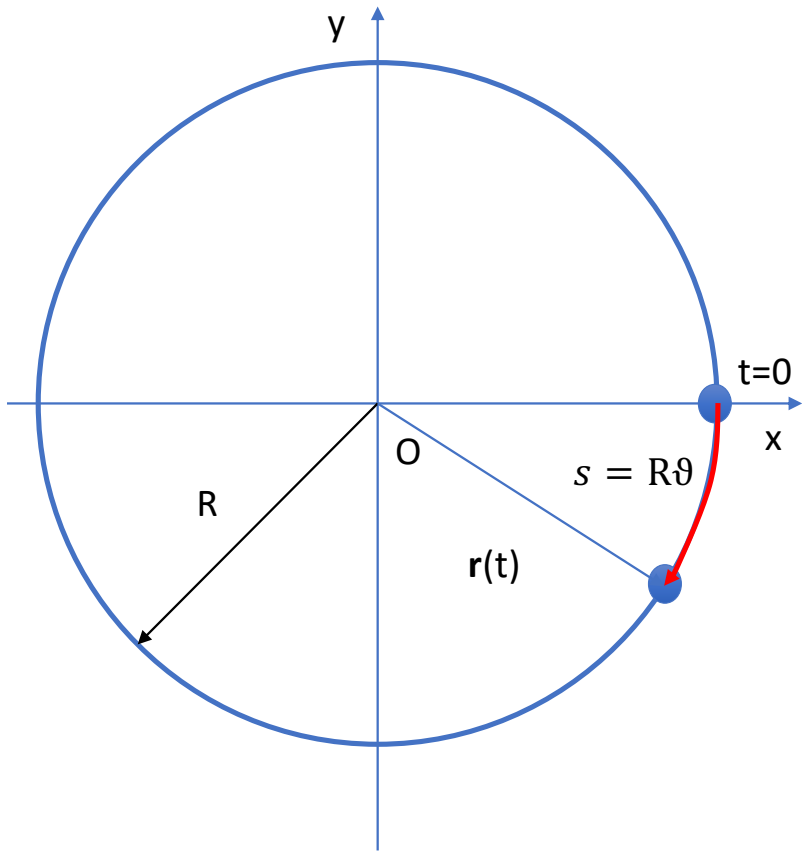
In un moto circolare che si svolge con velocità angolare ω , è conveniente definire il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$

- Modulo pari alla velocità angolare ω (espressa solitamente in rad/s)
- Direzione: perpendicolare al piano del moto (quindi, nel nostro caso, parallela all'asse z del sistema di riferimento)
- Verso: tale da vedere il punto ruotare in senso antiorario (nella figura, è rivolto in modo concorde a z).



Moto circolare uniforme, definizione vettoriale della velocità angolare

- Se il punto percorre la circonferenza in senso orario, il vettore velocità angolare ha verso opposto a quello dell'asse z .



Moto circolare uniforme, definizione vettoriale della velocità angolare

Calcoliamo il prodotto vettoriale

$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = ?$

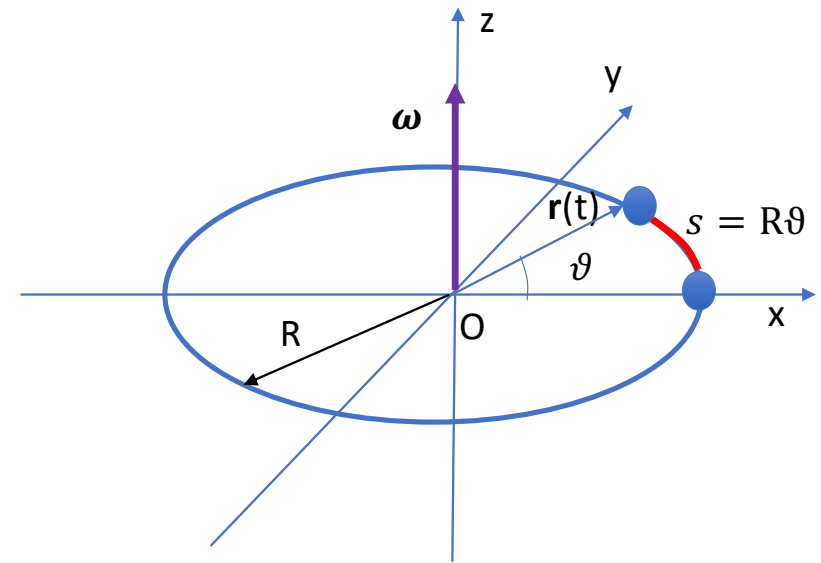
- Modulo: $\boldsymbol{\omega}$ ed $\mathbf{r}$ sono tra loro perpendicolari (dato che $\mathbf{r}$ è sul piano xy e $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a z), quindi il modulo è pari a
- $|\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{r}| = \omega R$
- Direzione: perpendicolare a $\boldsymbol{\omega}$, quindi sul piano xy , perpendicolare a $\mathbf{r}$, quindi tangente alla circonferenza, la direzione perciò è quella del versore tangente, $\mathbf{u}_t$.
- Verso: tale da formare, con $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{r}$, una terna destrorsa, è proprio il verso di $\mathbf{u}_t$

Ma allora,

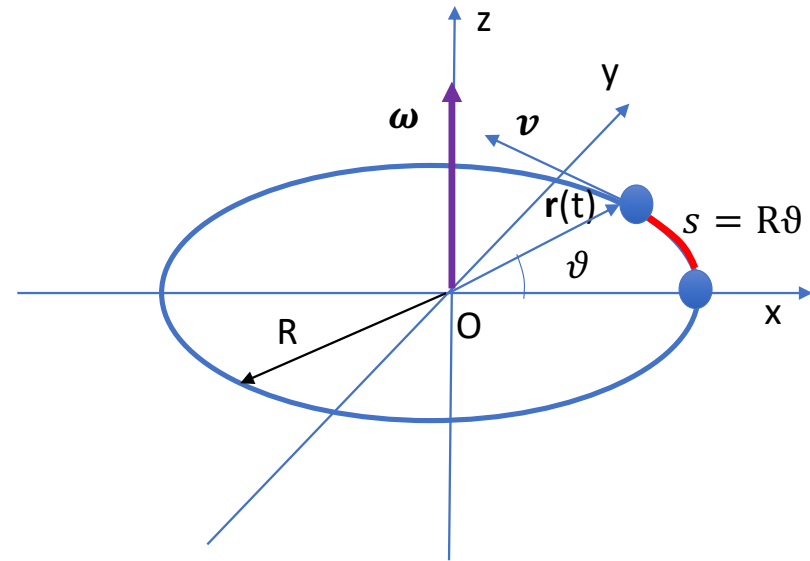
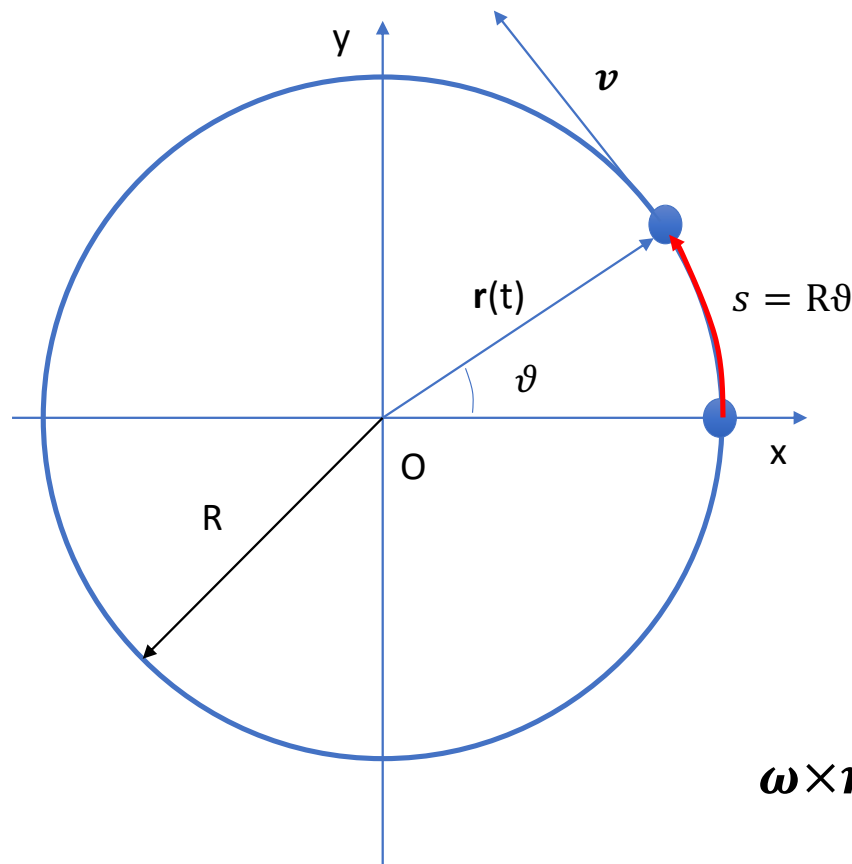
$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}$$

Posso ottenere la velocità del punto materiale moltiplicando vettorialmente la velocità angolare per il raggio vettore (attenzione all'ordine nel prodotto vettoriale!)

Questa espressione per la velocità è molto comoda nei calcoli e tornerà utile nei corpi rigidi.



Moto circolare uniforme, definizione vettoriale della velocità angolare



$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}$$

Moto circolare uniforme, definizione vettoriale della velocità angolare

Utilizzando la notazione vettoriale della velocità angolare abbiamo espresso la velocità nel moto circolare con il seguente prodotto vettoriale

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Utilizziamo questa notazione e le regole di derivazione dei vettori per calcolare l'accelerazione:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d(\mathbf{r})}{dt} = \\ &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) =\end{aligned}$$

Moto circolare uniforme, definizione vettoriale della velocità angolare

Analizziamo il termine

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}$$

$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \rightarrow$ Modulo: sarà pari alla derivata rispetto al tempo della velocità angolare

Direzione: se il moto circolare si svolge sul piano xy , $\boldsymbol{\omega}$ è sempre perpendicolare al piano quindi anche $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ sarà perpendicolare al piano

Verso: concorde con $\boldsymbol{\omega}$ se $\boldsymbol{\omega}$ aumenta, discorde in caso contrario

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \rightarrow \text{Modulo: pari a } \left| \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right| |\mathbf{r}| = R \frac{d\omega}{dt}$$

- Direzione: perpendicolare a $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ e $\mathbf{r}$, quindi tangente alla circonferenza
- Verso: tale da formare una terna destrorsa con $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ e $\mathbf{r}$

Ma allora, riguardando i risultati trovati in precedenza:

$$\mathbf{a}_t = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}$$

Moto circolare uniforme, definizione vettoriale della velocità angolare

Analizziamo il termine

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

Modulo: pari a $\omega^2 R$

Direzione: perpendicolare a $\boldsymbol{\omega}$ e a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, quindi diretto come $\boldsymbol{r}$

Verso: centripeto

Ma allora, il termine $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$ è proprio l'accelerazione normale:

$$\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

Dettagli sul calcolo: il doppio prodotto vettoriale

Per il doppio prodotto vettoriale vale il seguente risultato:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

Nel nostro caso:

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}$$

Ma $\boldsymbol{\omega}$ ed $\mathbf{r}$ sono perpendicolari quindi $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) = 0$ mentre $(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \omega^2$, quindi

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r} = -\omega^2\mathbf{r} = \mathbf{a}_n$$

Moto circolare uniforme, definizione vettoriale della velocità angolare

Riassumendo, utilizzando la definizione vettoriale della velocità angolare possiamo scrivere l'accelerazione come:

$$\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

In cui le componenti tangenziale e normale dell'accelerazione sono date da:

$$\mathbf{a}_t = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2 \mathbf{r}$$