

Corso di FISICA 1



Capitolo 5 – dinamica del punto materiale

Monica Malvezzi, Università degli
Studi di Siena



Introduzione

Cinematica: studio del moto indipendentemente dalle cause che lo generano.

Nello studio della cinematica abbiamo determinato:

- Posizione $\mathbf{r}(t)$
- Velocità $\mathbf{v}(t)$
- Accelerazione $\mathbf{a}(t)$

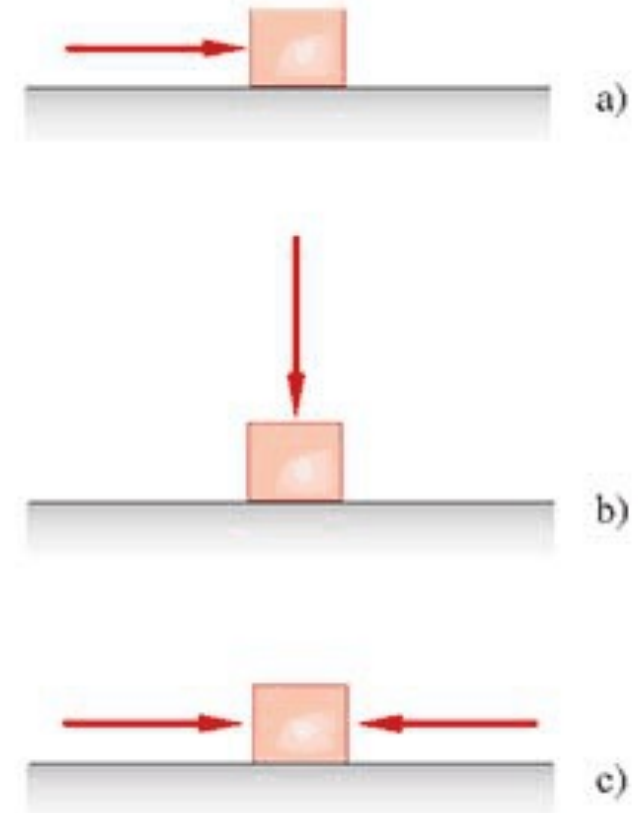
Di un punto materiale durante il moto (in funzione del tempo).

Dinamica: studio di come il moto di un sistema è influenzato dalle interazioni con l'ambiente circostante.

Introduzione

Per lo studio della dinamica dobbiamo definire delle nuove grandezze.

- Forza: rappresentazione dell'interazione del corpo con l'ambiente circostante. La forza è una grandezza vettoriale, dato che il suo effetto sul punto materiale dipende dalla direzione e dall'intensità. Quindi è caratterizzata da un modulo, una direzione, un verso e un punto di applicazione. Si rappresenta tramite un vettore applicato.



Introduzione

Per lo studio della dinamica dobbiamo definire delle nuove grandezze.

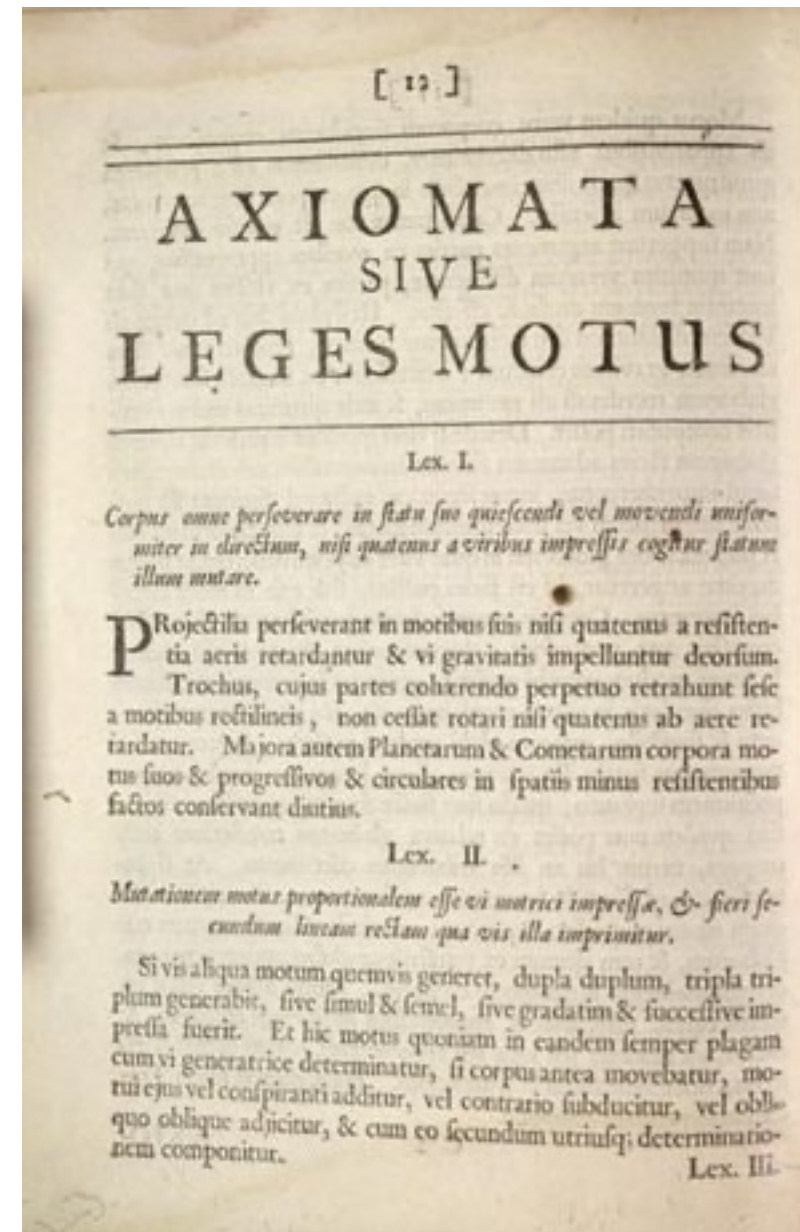
- **Massa:** proprietà del corpo che descrive la sua “resistenza” a variazioni di moto (inerzia).

È una grandezza scalare. La massa è una delle grandezze fondamentali della fisica secondo il Sistema Internazionale. L'unità di misura della massa nel SI è il kg .



Le leggi (o principi) della dinamica

Le tre leggi della dinamica sono alla base dello studio della meccanica classica e furono presentate da Newton nel 1687 nell'opera *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (I principi matematici della filosofia naturale)



Primo principio (principio di inerzia)

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus à viribus impressis cogitur statum illum mutare

Un corpo non soggetto a forze non subisce variazioni di velocità, quindi:

Se era inizialmente in quiete ($\boldsymbol{v}(0) = 0$) rimane in quiete ($\boldsymbol{v}(t) = 0$)

Se inizialmente aveva velocità ($\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0 \neq 0$) non nulla, continua a muoversi di moto rettilineo uniforme ($\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0$).

Secondo principio

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Un punto materiale sottoposto a una o più forze si muoverà con un'accelerazione vettorialmente proporzionale alla risultante di tali forze.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$\mathbf{F}$ risultante (somma vettoriale) delle forze applicate al corpo

m massa inerziale, è una proprietà del punto materiale che descrive la sua resistenza a variare il proprio stato di moto, ossia a modificare la propria velocità

$\mathbf{a}$ accelerazione del punto materiale

Secondo principio

Analizziamo dimensionalmente la relazione che descrive il secondo principio della dinamica

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

La forza $\mathbf{F}$ dimensionalmente è il prodotto di una massa per un'accelerazione, che a sua volta è pari a una lunghezza divisa per il quadrato di un tempo $[F]=ML/T^2$. Utilizzando le unità del SI il modulo della forza si misura quindi in $kg \cdot m/s^2$. Per misurare il modulo di una forza si definisce un'unità di misura derivata, il Newton N (Newton).

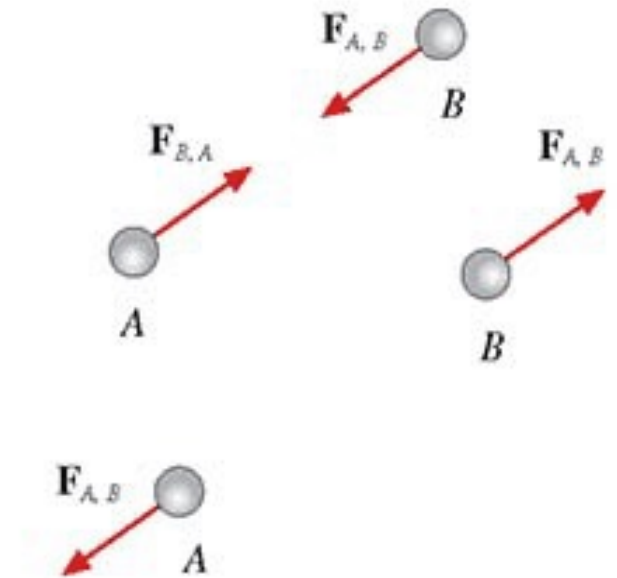
$$1 N = 1 kg \cdot m/s^2$$

Terzo principio (principio di azione e reazione)

Actioni contrariam semper et equalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi

Se un corpo A esercita una forza $\mathbf{F}_{A,B}$ sul corpo B , il corpo B a sua volta eserciterà sul corpo A una forza $\mathbf{F}_{B,A}$ tale che

$$\mathbf{F}_{B,A} = -\mathbf{F}_{A,B}$$



Analisi della dinamica di un punto materiale

Problema dinamico diretto: sono note le forze applicate ad punto materiale, si vuole determinare il suo moto.

Applicando il secondo principio della dinamica

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

E ricordando che l'accelerazione è definita come:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

Il problema si riconduce a risolvere un'equazione differenziale

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

Equazione differenziale vettoriale del secondo ordine.

Analisi della dinamica di un punto materiale

Problema dinamico inverso: il moto del punto materiale è noto, si vogliono determinare le forze che vi sono applicate.

In questo caso conosciamo $\mathbf{r}$ e possiamo determinare

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

Il problema si riconduce a risolvere un sistema di equazioni di tipo algebrico:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Limiti di validità delle leggi di Newton

- **Velocità inferiore alla velocità della luce**
- **Massa: corpi macroscopici**

Quantità di moto

Definizione: la **quantità di moto** di un punto materiale è definita come il prodotto tra la sua massa (scalare) e la sua velocità (vettore)

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

La quantità di moto è quindi un vettore che ha

- La stessa direzione della velocità $\mathbf{v}$
- Lo stesso verso della velocità $\mathbf{v}$ (dato che la massa è positiva)
- Modulo $m|\mathbf{v}|$ che dimensionalmente sarà una massa per una velocità
 $[p] = ML/T$
- Unità di misura per la quantità di moto nel SI: $kg \cdot m/s$. Ricordando inoltre che il Newton, unità di misura della forza, è definito come una massa per un'accelerazione, $N = kg \cdot m/s^2$ risulta anche che l'unità di misura della quantità di moto nel SI è $N \cdot s$)

Altra formulazione della seconda legge di Newton

La seconda legge di Newton può essere formulata anche in questo modo:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

La risultante delle forze applicate a un punto materiale è pari alla variazione della quantità di moto rispetto al tempo.

Altra formulazione della seconda legge di Newton

Le due formulazioni

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

sono equivalenti?

Ricordiamo che

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Se la massa è costante:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$$

Le due formulazioni sono equivalenti.

Altra formulazione della seconda legge di Newton

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Ma se la massa m non è costante

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \mathbf{v} = m\mathbf{a} + \frac{dm}{dt} \mathbf{v}$$

e in questo caso le due formulazioni non sono equivalenti.

Altra formulazione della seconda legge di Newton

La formulazione

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

E' più generale e vale anche per i sistemi a massa variabile.

La formulazione

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Si può applicare solo se il punto materiale ha massa costante.

Variazione della quantità di moto

Consideriamo di nuovo la formulazione della seconda legge di Newton con la quantità di moto

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Possiamo riscrivere questa espressione come:

$$\mathbf{F} dt = d\mathbf{p}$$

Integrando tra un istante iniziale e un istante generico t otteniamo

$$\int_0^t \mathbf{F} dt = \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} d\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \Delta\mathbf{p}$$

L'integrale nel tempo della forza $\int_0^t \mathbf{F} dt$ è pari alla variazione della quantità di moto $\Delta\mathbf{p}$.

Impulso di una forza

Definiamo **l'impulso di una forza** al tempo t come l'integrale tra un istante iniziale e un istante generico della forza nel tempo:

$$\mathbf{J} = \int_0^t \mathbf{F} dt$$

L'impulso è un vettore. La direzione e il verso dipendono da come varia la forza $\mathbf{F}$ nel tempo. Il modulo dell'impulso, dal punto di vista dimensionale, è dato da una forza per un tempo $[\mathbf{J}] = [\mathbf{F}]\mathbf{T}$. Nelle unità del SI si esprime in $\text{N} \cdot \text{s}$ oppure $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ (la stessa unità di misura della quantità di moto!)

Teorema dell'impulso

Avendo definito l'impulso di una forza al tempo t come

$$J = \int_0^t \mathbf{F} dt$$

E ricordando il risultato ottenuto integrando nel tempo la seconda legge di Newton espressa in termini di quantità di moto, otteniamo quindi:

$$J = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \Delta \mathbf{p}$$

La variazione della quantità di moto di un punto materiale in un dato intervallo di tempo è pari all'impulso della forza applicata al punto materiale nello stesso intervallo di tempo.

Questo risultato prende il nome di “**Teorema dell'impulso**” o forma integrale della seconda legge di Newton.

Teorema dell'impulso

Abbiamo visto quindi due diverse formulazioni della seconda legge di Newton.

Forma differenziale (rappresenta la situazione del punto materiale in un dato istante)

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Forma integrale (valuta l'effetto della forza sul sistema in un tempo finito)

$$\mathbf{J} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \Delta\mathbf{p}$$

Teorema dell'impulso

Riepilogando, il teorema dell'impulso può essere formulato come

$$\mathbf{J} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \Delta \mathbf{p}$$

Se la massa m è costante risulta inoltre

$$\mathbf{J} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = m\Delta \mathbf{v}$$

Se, poi, la forza $\mathbf{F}$ è costante (in modulo, direzione e verso!),

$$\mathbf{J} = \int_0^t \mathbf{F} dt = \mathbf{F}t$$

la variazione al tempo t della velocità rispetto alla velocità iniziale è data da

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{1}{m} \mathbf{F}t$$

Teorema dell'impulso

Infine, se $\mathbf{F} = 0$

$$\mathbf{J} = \int_0^t \mathbf{F} dt = 0$$

$$m\Delta\mathbf{v} = 0$$

La velocità $\mathbf{v}$ non varia (in modulo, direzione e verso), quindi il punto materiale è fermo oppure si muove di moto rettilineo uniforme. Abbiamo ri- trovato in questo modo un'altra formulazione del principio di inerzia.

Applicazione della seconda legge di Newton

Riprendiamo la formulazione della seconda legge di Newton in forma differenziale:

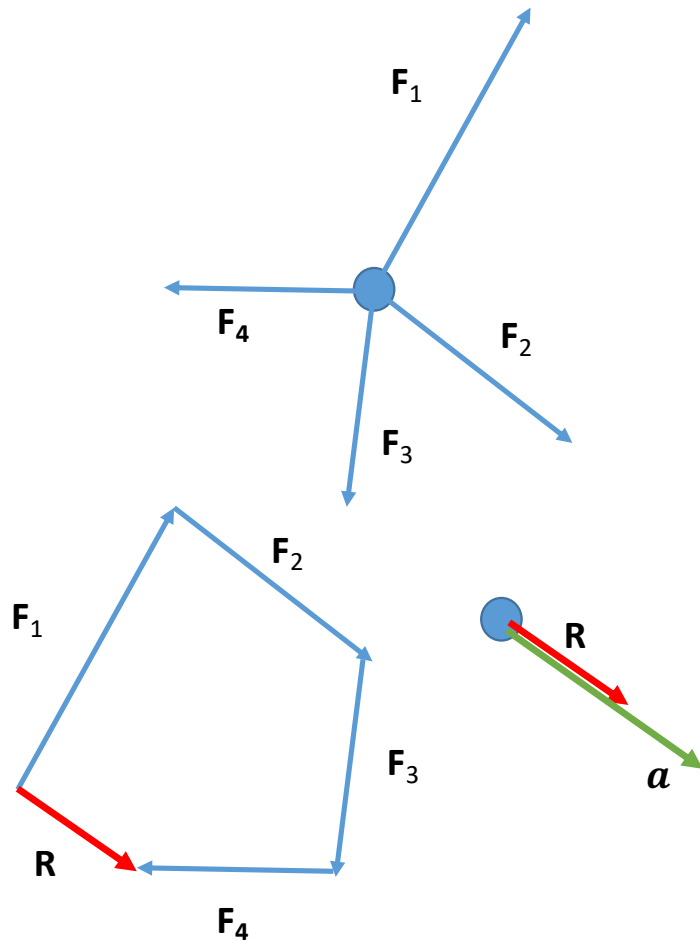
$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$\mathbf{F}$ è la risultante delle forze applicate al punto materiale.

Se su un corpo agiscono più forze la risultante è data dalla somma vettoriale.

Risultante delle forze applicate



Esempio: su un punto materiale sono applicate quattro forze, come mostrato in figura. Quale sarà la sua accelerazione? Calcoliamo la risultante delle forze (ricordando che si tratta di una somma vettoriale!):

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

Per la seconda legge della dinamica, la risultante delle forze è pari alla derivata della quantità di moto:

$$\mathbf{R} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

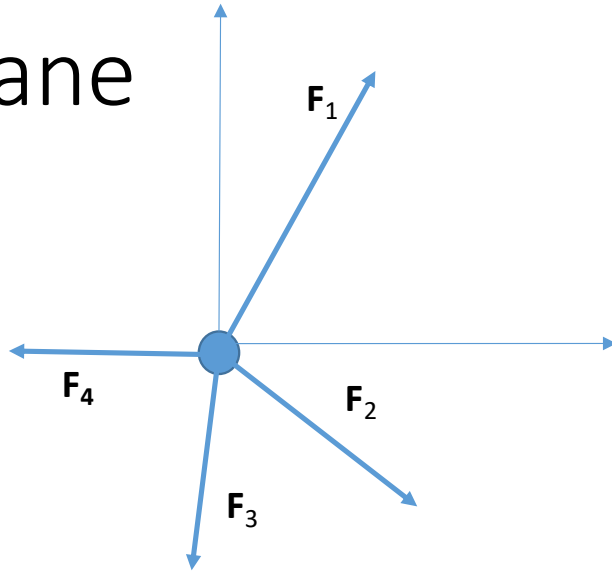
Se la massa è costante, la variazione della quantità di moto è pari al prodotto della massa per l'accelerazione.

$$\mathbf{R} = m\mathbf{a}$$

L'accelerazione del punto materiale sarà quindi pari a

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m} \mathbf{R}$$

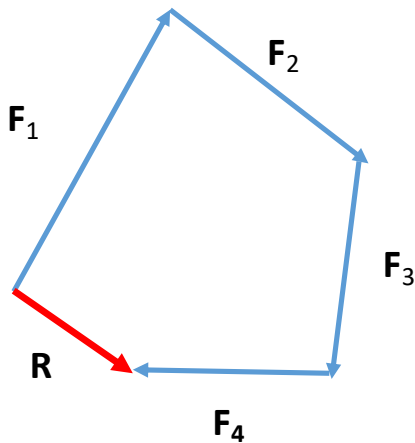
Risultante delle forze applicate, componenti cartesiane



La risultante delle forze applicate al punto materiale si calcola come somma vettoriale delle forze agenti sul punto:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

Se le forze sono espresse in coordinate cartesiane rispetto a un Sistema di riferimento $Oxyz$, possiamo calcolare le componenti cartesiane della risultante come:



$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^n F_{xi} \\ R_y &= \sum_{i=1}^n F_{yi} \\ R_z &= \sum_{i=1}^n F_{zi} \end{aligned}$$

Statica del punto materiale

Se la risultante delle forze applicate al punto materiale è nulla, $\mathbf{R} = 0$ e la sua velocità iniziale è nulla, $\mathbf{v}(0) = 0$, per il secondo principio della dinamica

$$\mathbf{R} = m\mathbf{a}$$

L'accelerazione del punto materiale è nulla

$$\mathbf{a} = 0$$

e di conseguenza il punto rimane con velocità nulla $\mathbf{v}(t) = 0$ (condizione di equilibrio statico).

Quindi, condizione necessaria affinché un punto materiale si trovi in condizioni di equilibrio statico è che

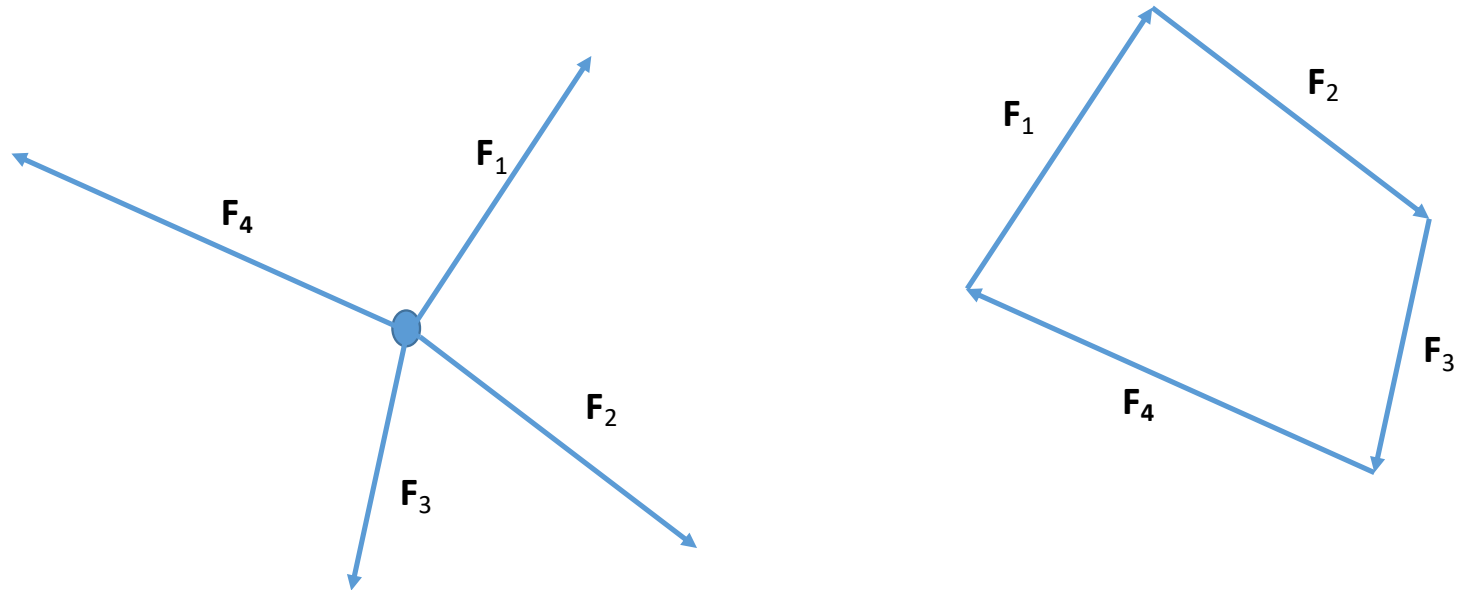
$$\mathbf{R} = 0$$

Statica del punto materiale

Condizione necessaria affinché un punto materiale si trovi in condizioni di equilibrio statico

$$\mathbf{R} = 0$$

Graficamente, i vettori forza affiancati tra loro devono costituire una spezzata chiusa.



Statica del punto materiale

Condizione necessaria affinché un punto materiale si trovi in condizioni di equilibrio statico è che

$$\mathbf{R} = 0$$

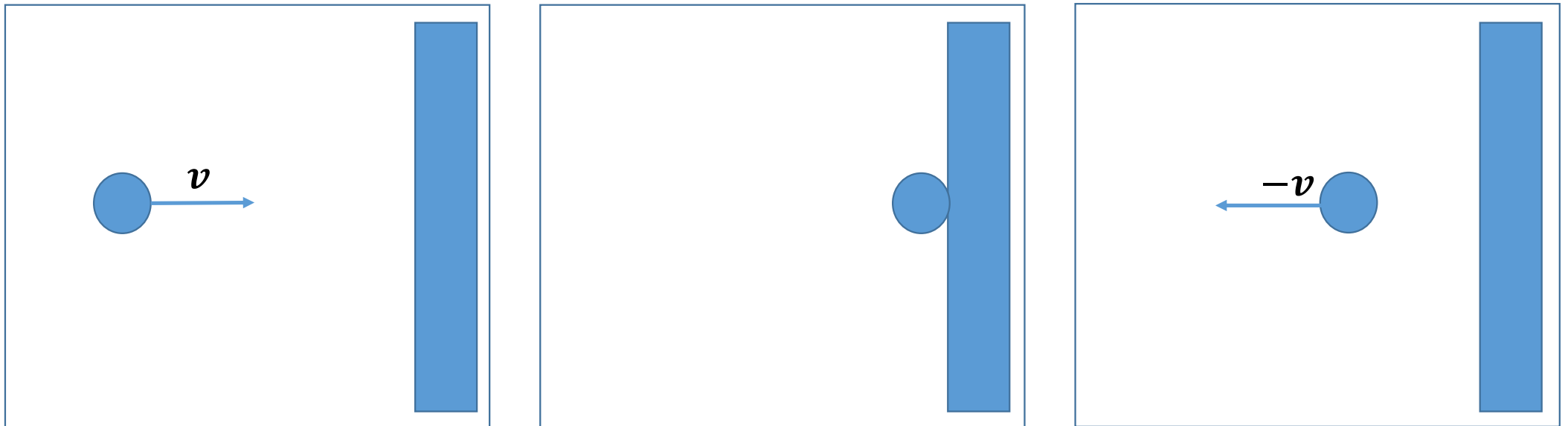
In componenti cartesiane:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n F_{xi} \\ 0 &= \sum_{i=1}^n F_{yi} \\ 0 &= \sum_{i=1}^n F_{zi} \end{aligned}$$

Applicazione del teorema dell'impulso

Consideriamo un punto materiale P di massa m che si muove inizialmente a velocità costante v , in un certo istante urta contro una superficie disposta ortogonalmente al vettore v , rimbalza e quindi ripercorre la traiettoria con velocità opposta $-v$.

Calcoliamo la variazione di quantità di moto durante l'urto. Supponendo che l'urto abbia una durata Δt , calcoliamo il valore medio della forza con cui il punto colpisce la superficie.



Applicazione del teorema dell'impulso

Quantità di moto iniziale

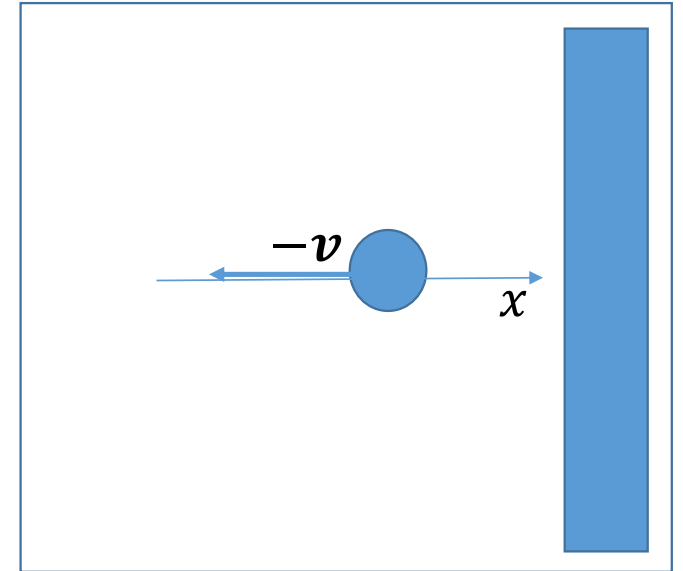
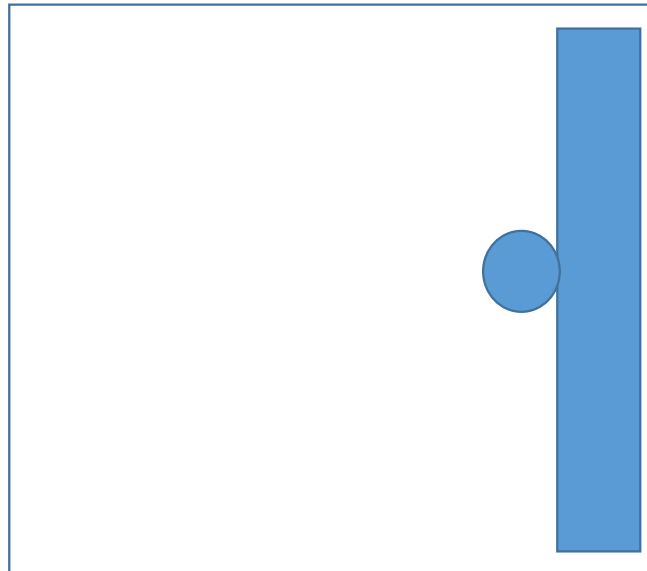
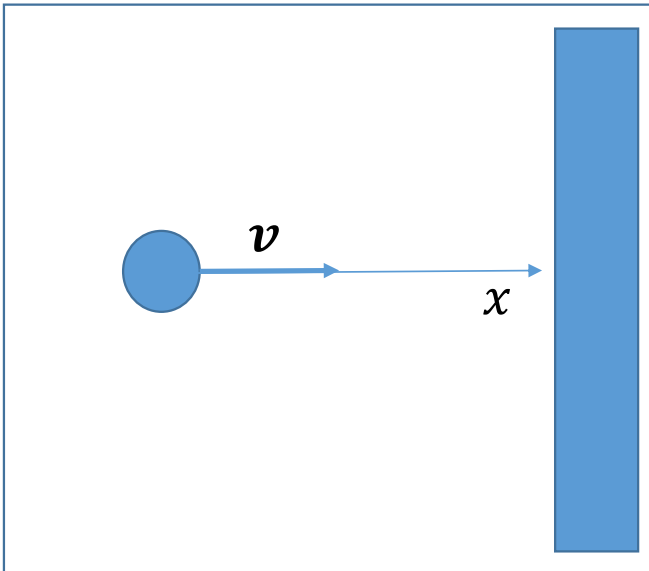
$$p_0 = mv$$

Quantità di moto finale

$$p_1 = -mv$$

Variazione quantità di moto

$$\Delta p = p_1 - p_0 = -2mv$$



Applicazione del teorema dell'impulso

In componenti cartesiane, prendendo un asse x orientato come la velocità iniziale $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{i}$$

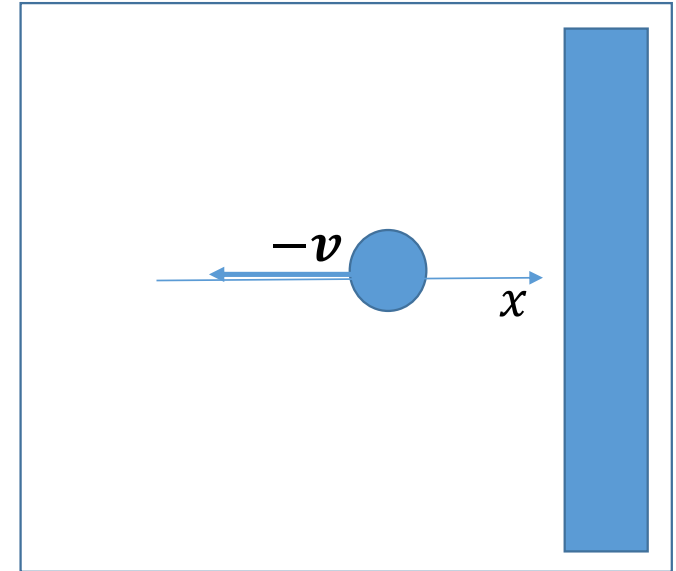
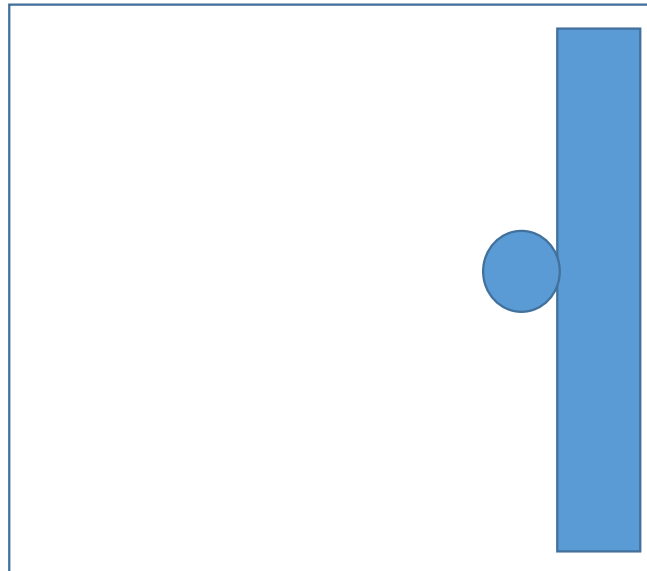
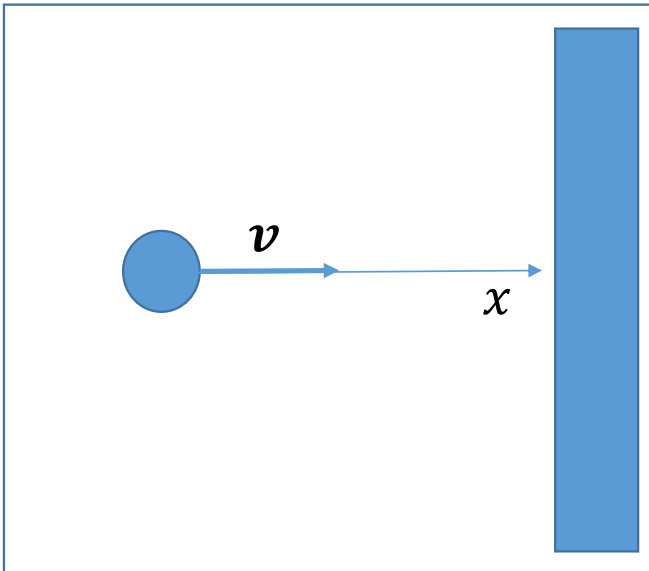
$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = -2mv\mathbf{i}$$

Per il teorema dell'impulso risulta

$$\mathbf{J} = \Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = -2mv\mathbf{i}$$

Ma per definizione di impulso abbiamo

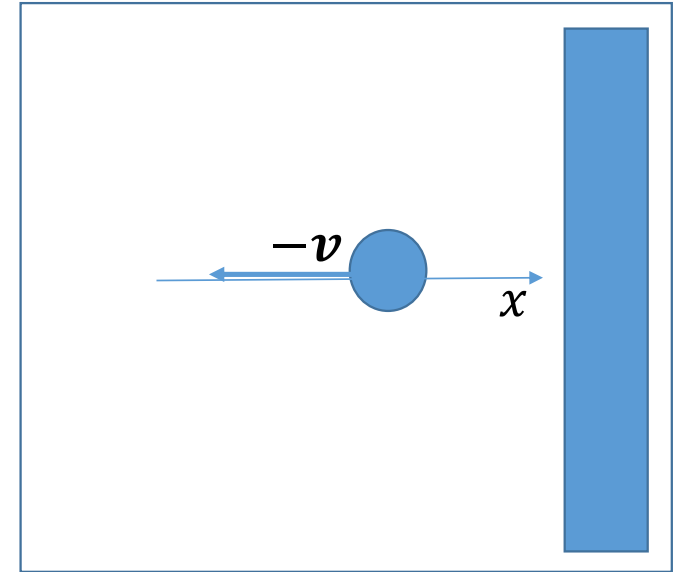
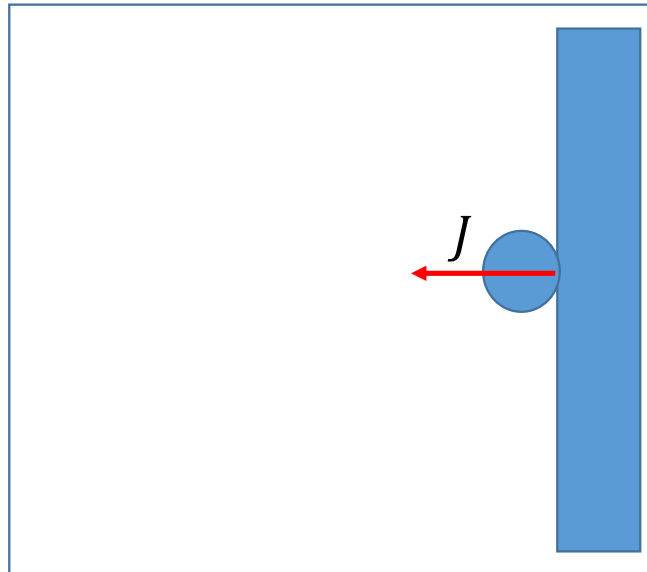
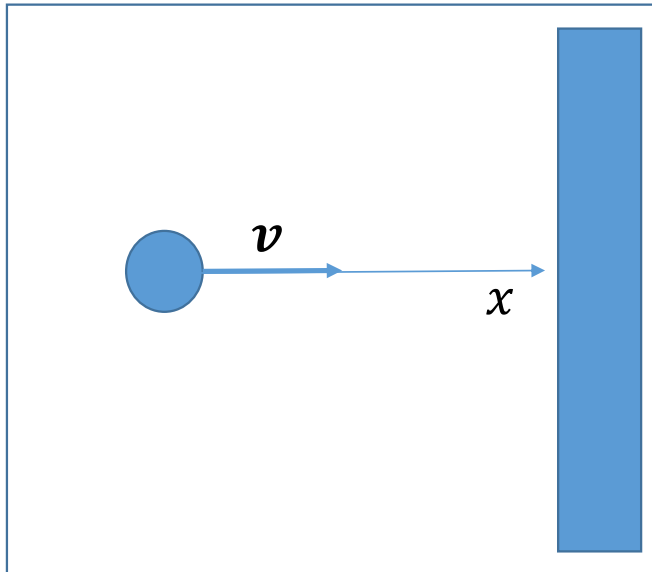
$$\mathbf{J} = \int_0^t \mathbf{F} dt$$



Applicazione del teorema dell'impulso

Supponendo di considerare come istante iniziale un istante subito prima dell'urto e come istante finale uno immediatamente dopo, dato che l'urto ha una durata Δt possiamo scrivere

$$J = \int_0^{\Delta t} F dt = -2mvi$$



Applicazione del teorema dell'impulso

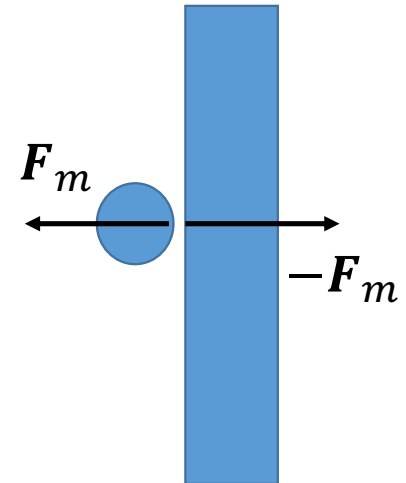
Ricordando come si valuta il valore medio di una funzione nel tempo, il valore medio della forza nel tempo Δt vale

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \mathbf{F} dt$$

Ricordando la definizione di impulso abbiamo quindi

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{J} = -\frac{2mv}{\Delta t} \mathbf{i}$$

$\mathbf{F}_m$ è la forza (media) che la superficie esercita sul punto materiale durante l'urto. Per il terzo principio della dinamica, il punto materiale a sua volta eserciterà sulla superficie una forza opposta - $\mathbf{F}_m$.



Moto circolare

Quali forze dobbiamo applicare ad un punto materiale affinché si muova di moto circolare?

In questo caso, il moto del punto materiale è noto, vogliamo determinare la forza necessaria per realizzarlo, si tratta di un problema di dinamica inversa.



Applichiamo il secondo principio della dinamica nella forma

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Moto circolare

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Nello studio della cinematica del moto circolare abbiamo visto che l'accelerazione si compone di due termini:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t$$

La componente normale vale

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_n = R\omega^2 \mathbf{u}_n = -\omega^2 \mathbf{r}$$

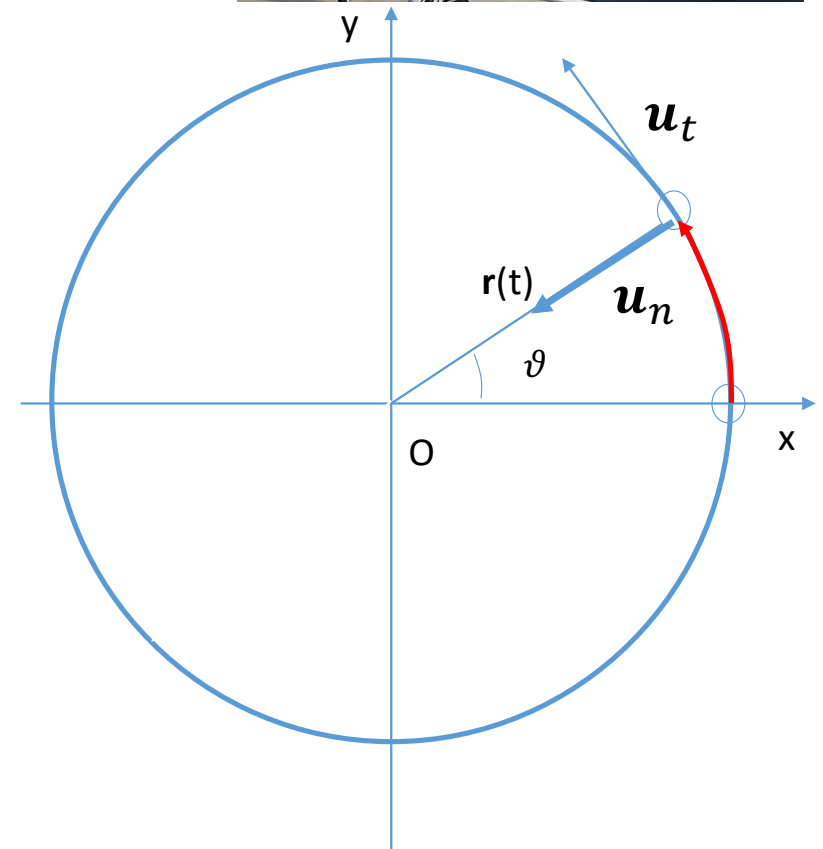
Mentre la componente tangenziale vale

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t = R \frac{d\omega}{dt} \mathbf{u}_t$$

Avendo indicato con

ω la velocità angolare (rad/s)

$\frac{d\omega}{dt}$ accelerazione angolare (rad/s²)



Moto circolare

Sostituendo nell'espressione del secondo principio della dinamica otteniamo:

$$\mathbf{F} = m(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t)$$

Possiamo scrivere quindi:

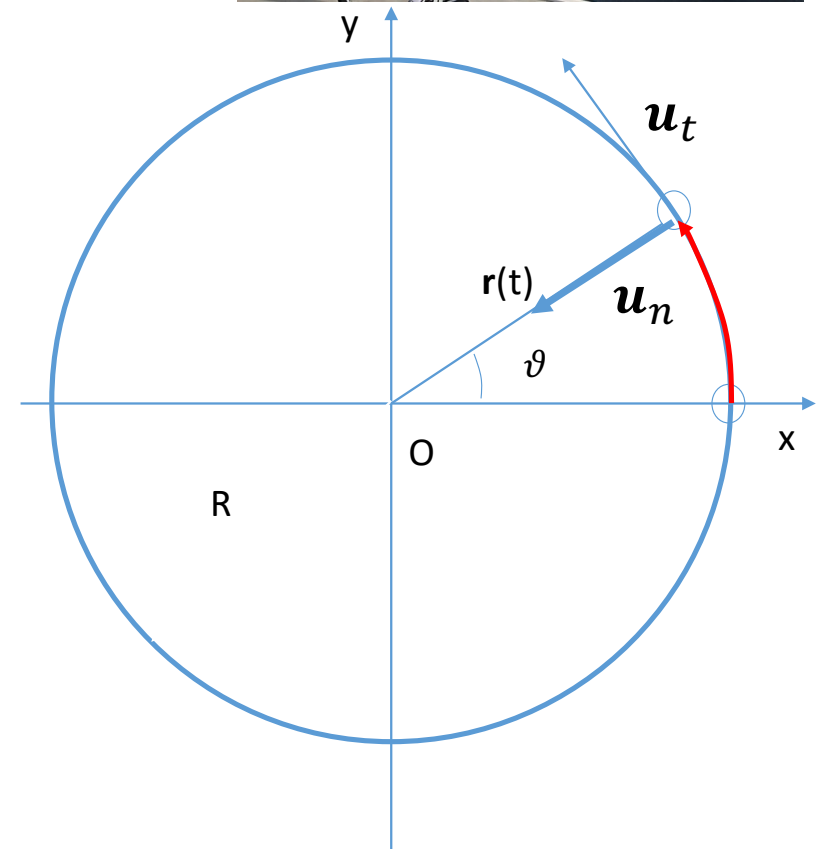
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n$$

$$\mathbf{F}_n = -m\omega^2 \mathbf{r}$$

$$\mathbf{F}_t = mR \frac{d\omega}{dt} \mathbf{u}_t$$

$\mathbf{F}_n$ componente normale della forza, contribuisce alla variazione della direzione della velocità e quindi a mantenere il punto sulla traiettoria circolare.

$\mathbf{F}_t$ componente tangenziale della forza, contribuisce alla variazione del modulo della velocità.



Moto circolare

Nel caso di moto circolare uniforme

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_n$$

$$\mathbf{F}_n = -m\omega^2 \mathbf{r}$$

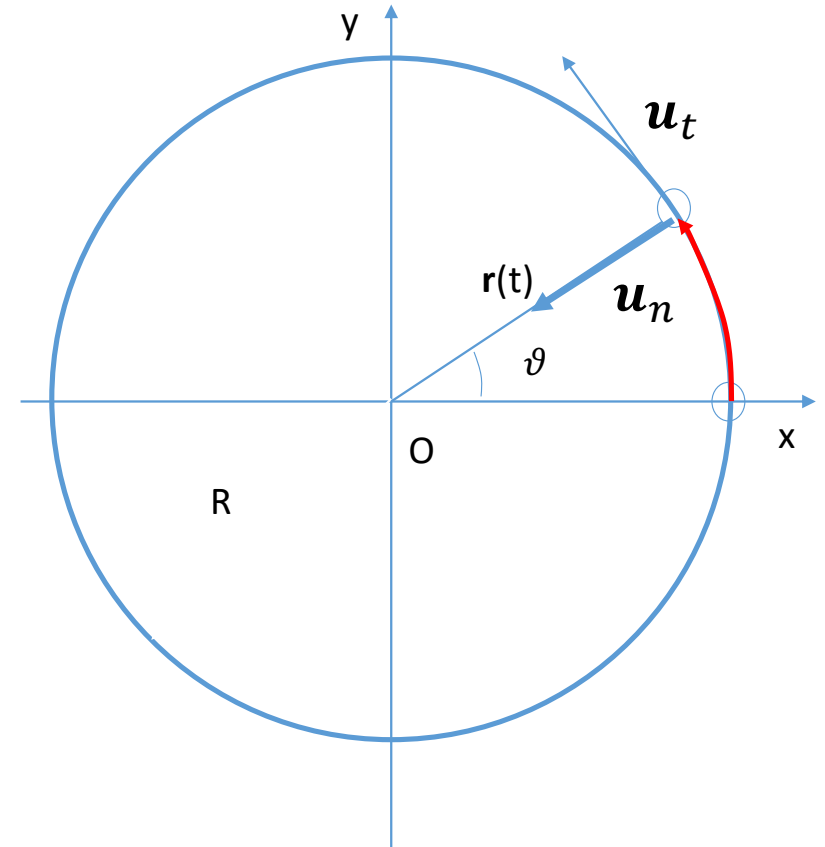
Esercizio proposto: lancio del martello

$$m = 7.27 \text{ kg}$$

$$R = (1.16 + 0.74) \text{ m}$$

$$v = 27 \text{ m/s}$$

Supponendo v costante, qual è la forza a cui è sottoposto il braccio dell'atleta subito prima del lancio?



La forza peso

Un corpo in caduta libera sulla terra cade con accelerazione ***g*** avente

- modulo pari a

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

- direzione verticale (verso il centro della terra)
- verso diretto al centro della terra (discendente)



Moto circolare

Forza peso

Per il secondo principio della dinamica sul corpo in caduta libera agisce una forza

$$\mathbf{F}_p = m\mathbf{g}$$

- modulo pari a

$$mg$$

- direzione verticale (verso il centro della terra)
- verso diretto al centro della terra (discendente)



Massa e peso

Massa - Forza peso

Massa

- Scalare
- Si misura in kg
- E' una proprieta' del corpo

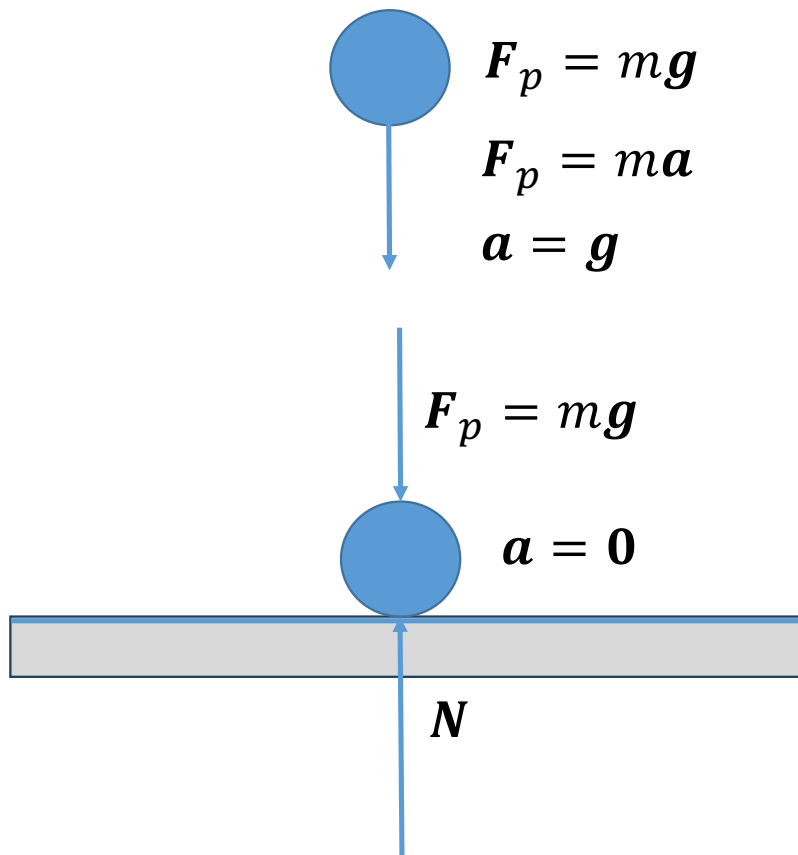
Peso

- Vettore
- Si dovrebbe misurare in N
- Dipende dal corpo e da ***g***

Forze di
interazione con
superficie
piana



Forze di interazione (contatto) con superficie orizzontale



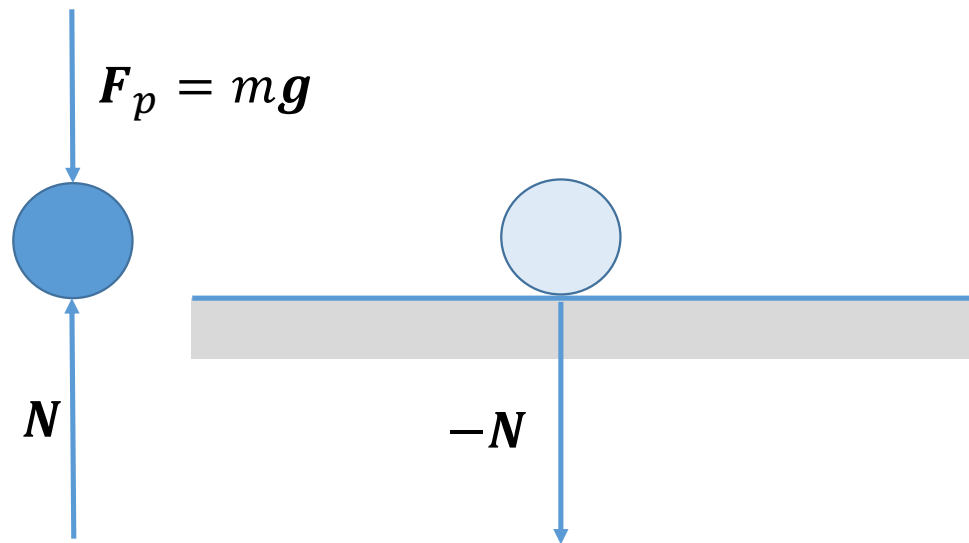
Abbiamo visto che un corpo in caduta libera è soggetto alla forza peso e accelera con accelerazione pari a g verso il suolo. Invece, un corpo appoggiato su una superficie piana orizzontale non si muove. Quindi ha anche accelerazione nulla, e per il secondo principio della dinamica la risultante delle forze agenti su di esso è nulla.

La superficie piana per effetto del contatto con il corpo esercita una forza N tale che:

$$F_p + N = 0$$

$$N = -F_p$$

Forze di interazione (contatto) con superficie orizzontale



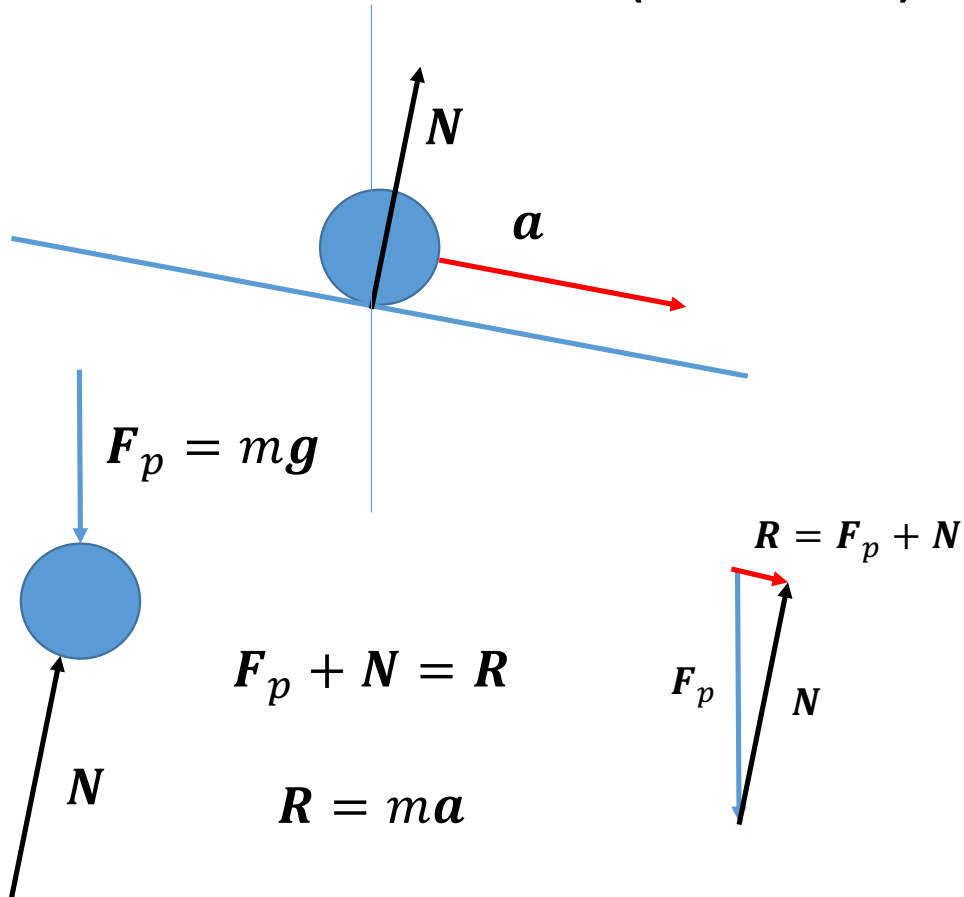
Per il terzo principio della dinamica, il punto materiale eserciterà a sua volta una forza sulla superficie pari a $-N$.

La forza N che la superficie esercita sul corpo è necessaria affinché il corpo non penetri all'interno della superficie. Se la superficie è perfettamente liscia, la sua direzione è quindi perpendicolare alla superficie stessa. Se la superficie è orizzontale, la forza che essa esercita (detta anche reazione) è verticale.

Piano inclinato



Forze di interazione (contatto) con superficie inclinata



Abbiamo visto che la forza N che la superficie esercita sul corpo è perpendicolare alla superficie stessa. Questo vale anche se la superficie è inclinata. In questo caso la forza N non sarà più verticale. L'angolo tra N e la verticale è uguale all'inclinazione della superficie.

Per il secondo principio della dinamica,

$$R = ma$$

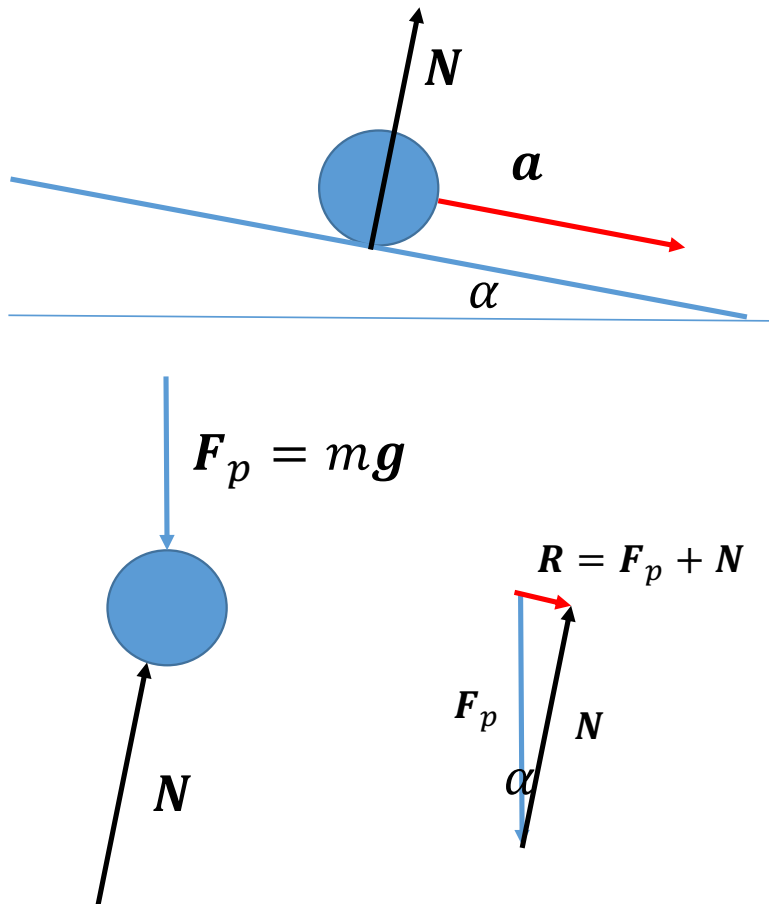
Dove

$$F_p + N = R$$

Dato che il moto si svolge parallelamente alla superficie, a avrà direzione parallela alla superficie e quindi anche R sarà parallela alla superficie.

Osservando la figura, vediamo che i vettori F_p , N ed R costituiscono un triangolo rettangolo di cui F_p è l'ipotenusa e l'angolo tra F_p ed N è pari all'inclinazione del piano.

Forze di interazione (contatto) con superficie inclinata



Indicando con α l'angolo di inclinazione del piano, e ricordando che il modulo della forza peso è $F_p = mg$, si verifica che:

$$N = mg \cos \alpha$$

$$R = mg \sin \alpha$$

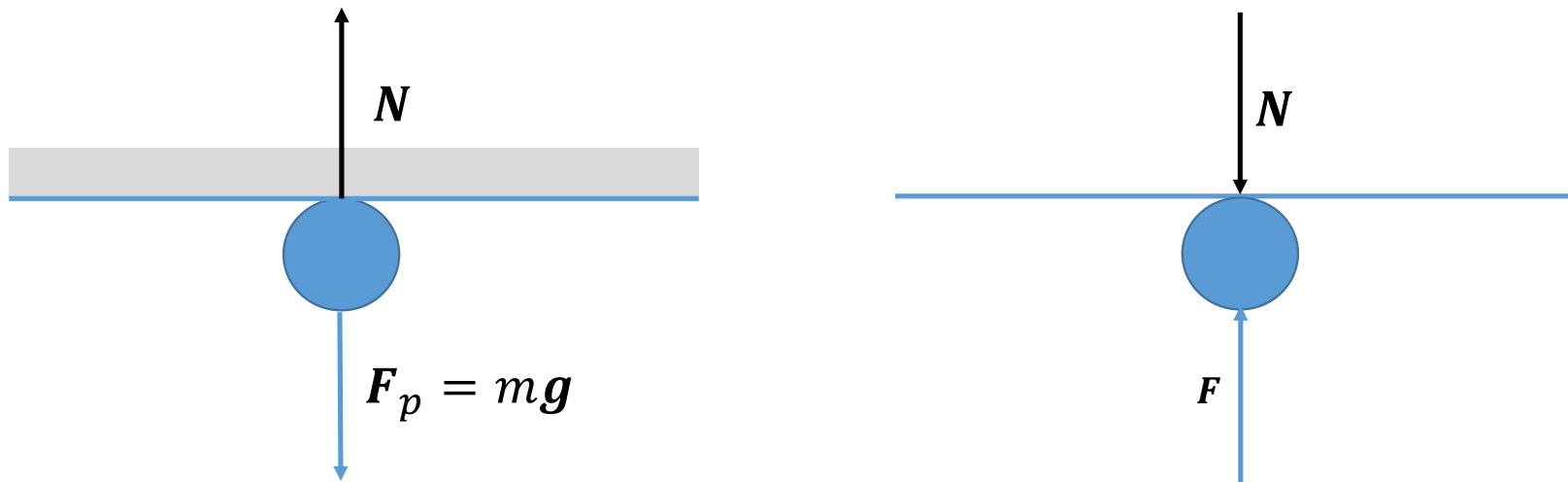
E quindi il punto materiale scivola lungo il piano inclinato con accelerazione in modulo pari a a tale che

$$ma = mg \sin \alpha$$

quindi

$$a = g \sin \alpha$$

Forze di interazione (contatto) con superficie – vincolo unilaterale



Si osserva che la forza di contatto ha solo carattere respingente, non può “attrarre” i corpi ma solo impedire che essi oltrepassino la superficie. Se il punto materiale è a contatto con il soffitto, ad esempio, per evitare la caduta dovrebbe attrarre verso di sé il punto, ma in un contatto semplice privo adesione questo non può succedere e il punto materiale, non trattenuto, cade.

Contatto con superficie liscia $\rightarrow$ vincolo unilaterale.

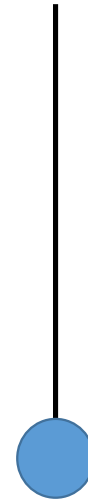
Forze di interazione con altri corpi - elementi flessibili

Per poter trattenere un punto materiale al soffitto possiamo utilizzare un filo o un cavo.

Fili, cavi, funi, catene ecc. in meccanica sono chiamati elementi flessibili monodimensionali.

Monodimensionali--> una dimensione prevalente rispetto alle altre due

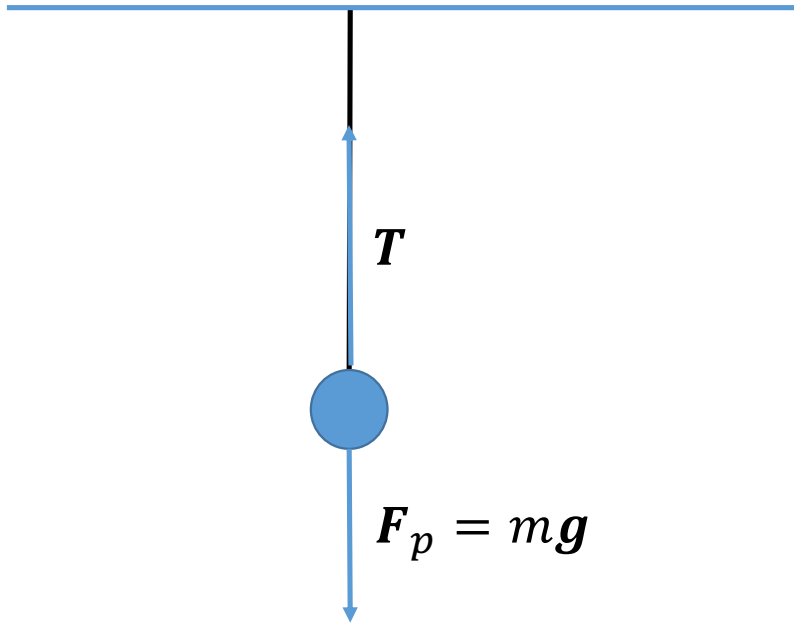
Flessibili --> quando non sono soggetti a forze, possono assumere qualsiasi configurazione, inoltre possono applicare e resistere solo forze di trazione (possono solo essere tesi).



Corpo sospeso da un filo

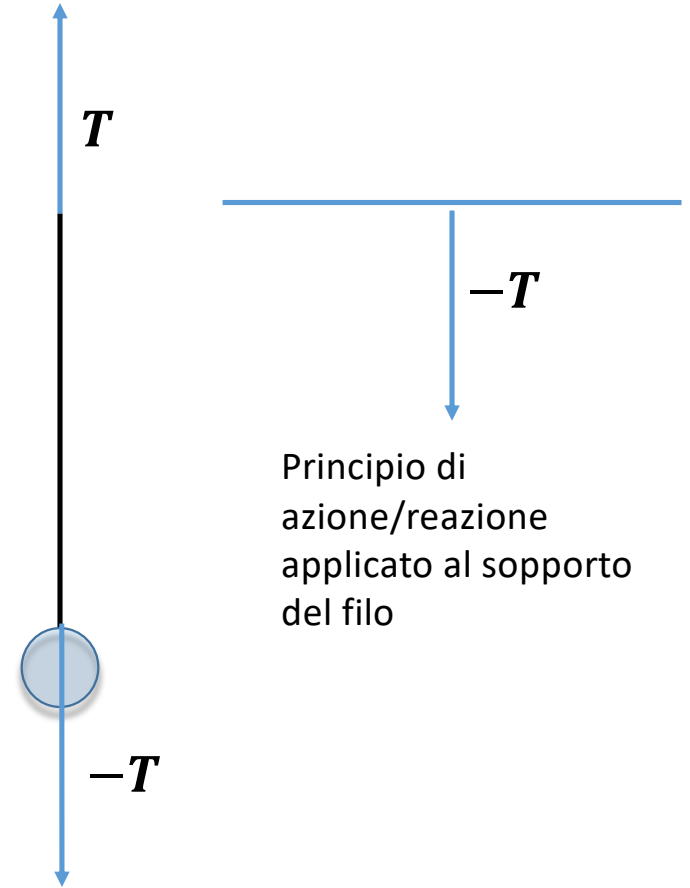
Analizziamo un corpo sospeso al soffitto con un filo in condizioni statiche. Il corpo è soggetto alla propria forza peso $\mathbf{F}_p$. Dato che il corpo non cade, la risultante delle forze applicate su di esso deve essere nulla, quindi il filo esercita sul corpo una forza $\mathbf{T}$ tale che:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_p + \mathbf{T} &= 0 \\ \mathbf{T} &= -\mathbf{F}_p\end{aligned}$$



Corpo sospeso da un filo

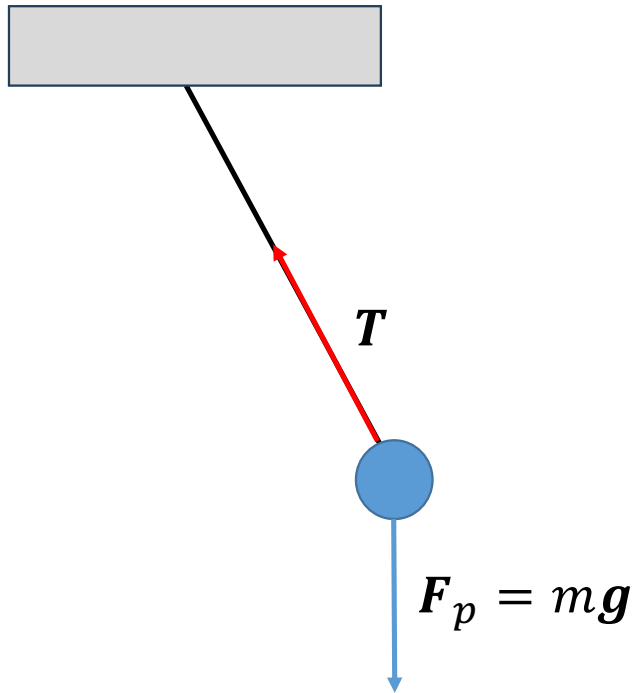
Per il terzo principio della dinamica, il corpo esercita sul filo una forza $-T$. Sul filo agisce anche la reazione applicata dal soffitto, che trattiene l'altro capo del filo. Anche il filo è in equilibrio, quindi la forza che il soffitto esercita sul filo sarà T . Applicando di nuovo il terzo principio della dinamica, sul soffitto, per effetto del filo, sarà esercitata una forza $-T = mg$.



Principio di azione/reazione
ed equilibrio filo

Principio di
azione/reazione
applicato al soffitto
del filo

Corpo sospeso da un filo



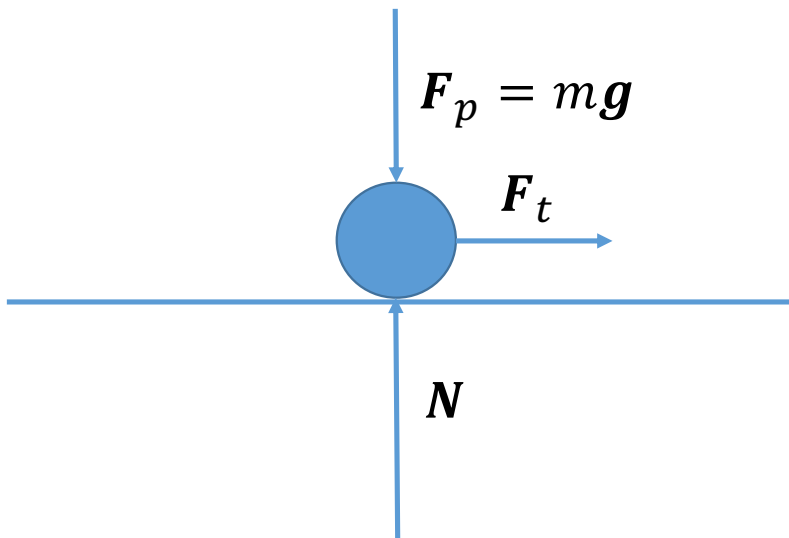
In condizioni dinamiche, il corpo sospeso può avere accelerazione diversa da zero e risulta

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{T} = m\mathbf{a}$$

Dato che il filo può solo essere teso, la direzione della forza $\mathbf{T}$ è comunque la stessa del filo.

Forze di interazione con altri corpi - introduzione all'attrito

Contatto con superficie liscia



Consideriamo un punto materiale appoggiato su una superficie piana liscia (priva di attrito), a cui è applicata una forza orizzontale F_t , oltre che alla forza peso e alla reazione del piano. La risultante delle forze è data da:

$$F_p + N + F_t \neq 0$$

La risultante è diretta orizzontalmente, risulta infatti:

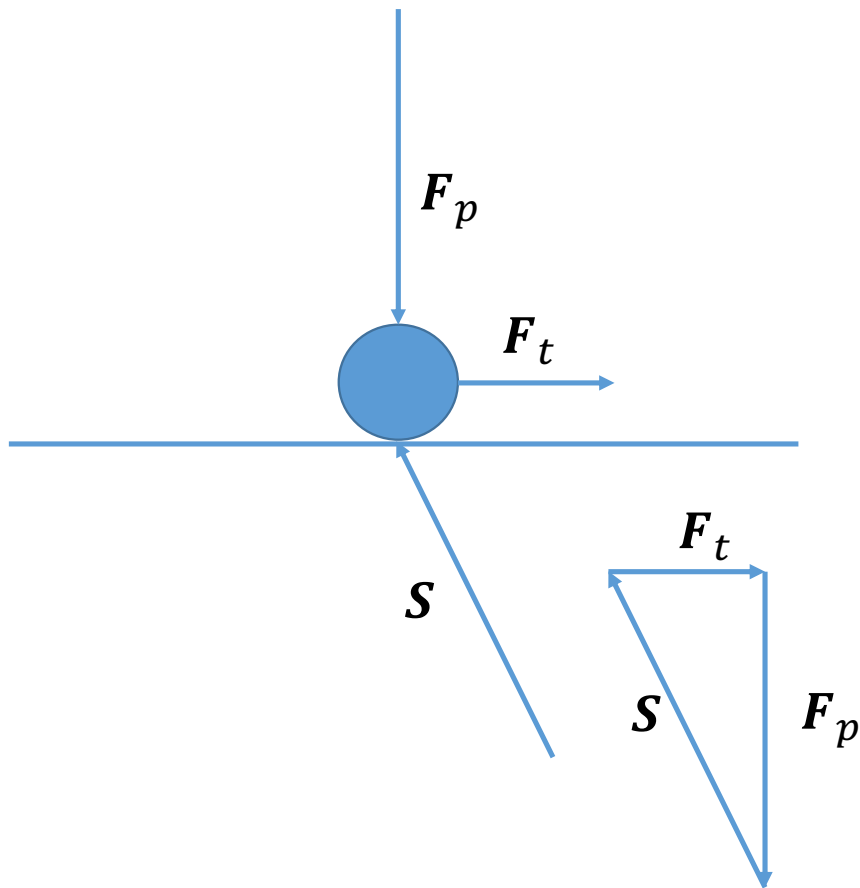
$$N = -F_p$$

e quindi per il secondo principio della dinamica l'accelerazione del punto materiale è data da:

$$F_t = ma$$

Forze di interazione con altri corpi - introduzione all'attrito

Forza di attrito – condizioni statiche



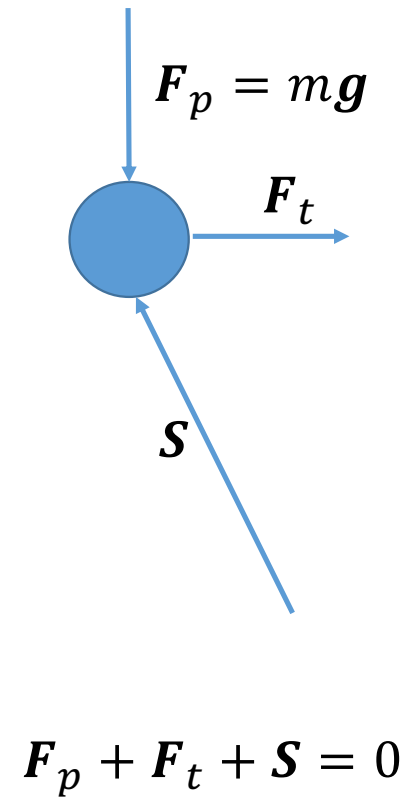
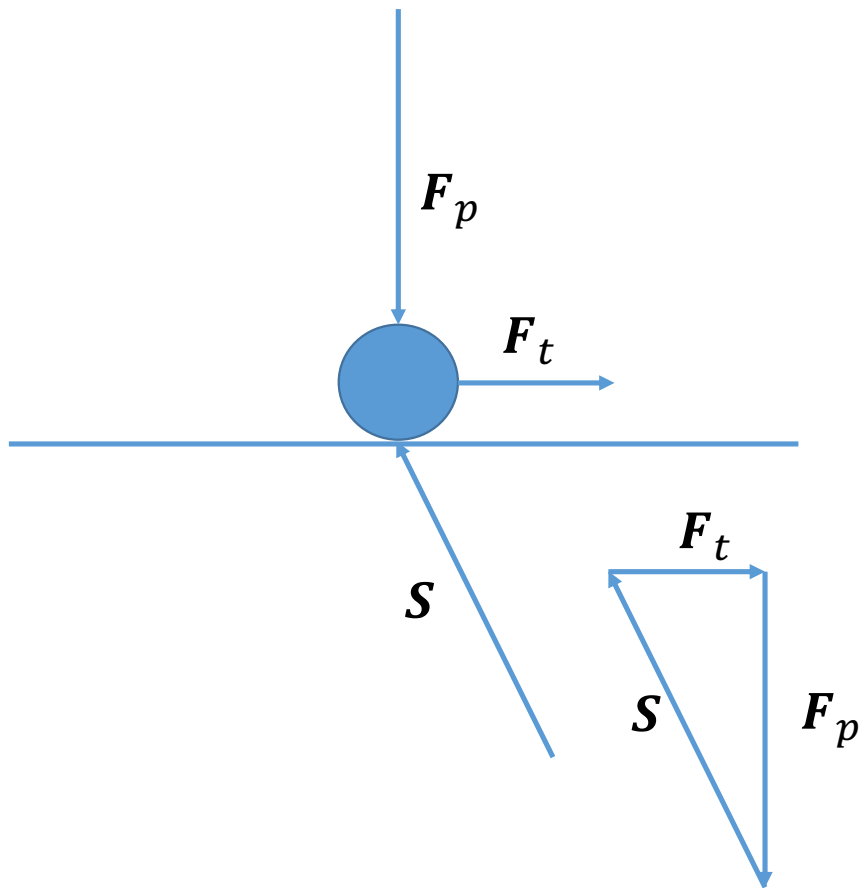
L'esperienza ci insegna che molto spesso, se la superficie non è perfettamente liscia, anche applicando una forza orizzontale F_t ad un punto materiale inizialmente in quiete, questo non inizia a muoversi.

Questo significa che la risultante delle forze continua a essere nulla anche dopo l'applicazione della forza orizzontale, che è possibile solo se la reazione vincolare S del piano non è verticale, ma inclinata in modo che risulti

$$F_p + S + F_t = 0$$

Forze di interazione con altri corpi - introduzione all'attrito

Forza di attrito – condizioni statiche



Forze di interazione con altri corpi - introduzione all'attrito

La forza $\mathbf{S}$ del piano in questo caso non è verticale e si può scomporre in due componenti $\mathbf{N}$ (verticale) ed $\mathbf{A}$ (orizzontale), tali che

$$\mathbf{S} = \mathbf{N} + \mathbf{A}$$

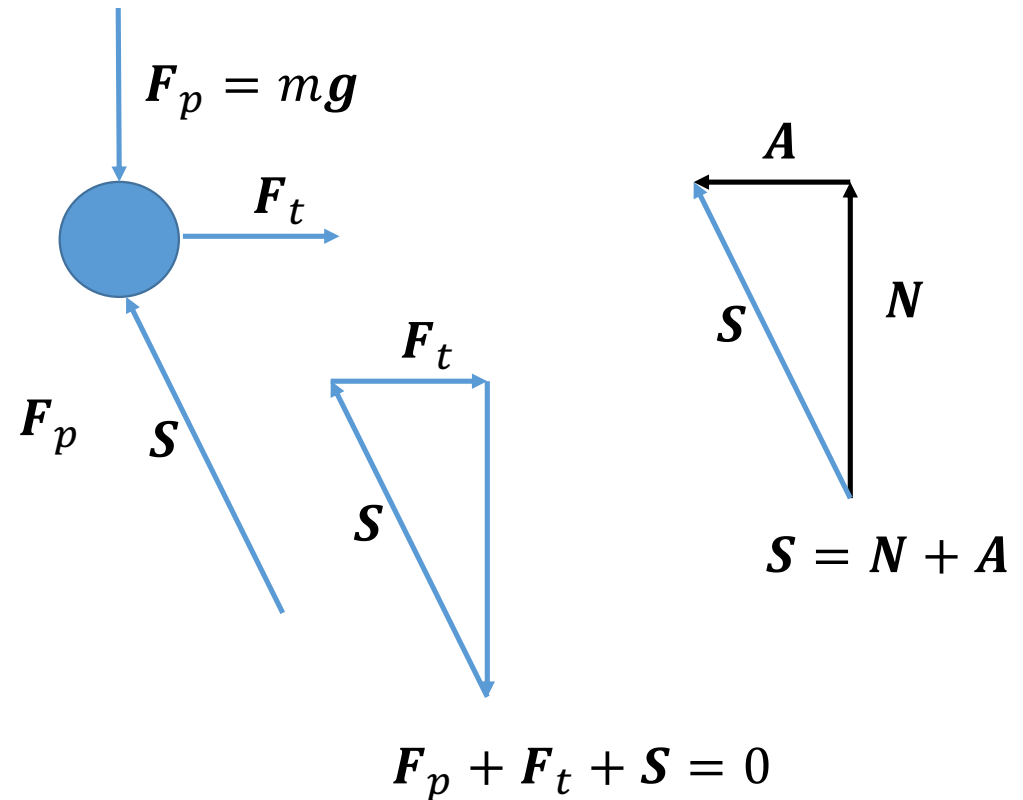
Per l'equilibrio del punto materiale abbiamo visto che risulta

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{S} + \mathbf{F}_t = 0$$

Dato che $\mathbf{F}_t$ è orizzontale e $\mathbf{F}_p$ verticale, per l'equilibrio risulta che

$$\mathbf{A} = -\mathbf{F}_t$$

$$\mathbf{N} = -\mathbf{F}_p$$

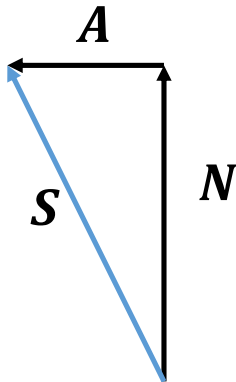


Forze di interazione con altri corpi – modello dell'attrito di Coulomb (statico)

Se il modulo di F_t (e quindi di A) aumenta oltre un certo limite, il punto materiale inizia a scivolare orizzontalmente sul piano. Quanto vale questo limite?

Secondo il modello di attrito proposto da Coulomb il punto materiale rimane in equilibrio fintanto che

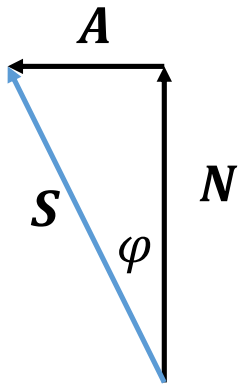
$$A \leq \mu_s N$$



Il coefficiente μ_s prende il nome di coefficiente di attrito statico e dipende dalle caratteristiche delle superfici:

- Materiali
- Finitura superficiale
- Presenza di contaminanti
- Geometria delle superfici di contatto

Forze di interazione con altri corpi – modello dell'attrito di Coulomb (statico)



Abbiamo introdotto μ_s coefficiente di attrito statico, tale che

$$A \leq \mu_s N$$

Possiamo riscrivere questa relazione come

$$\frac{A}{N} \leq \mu_s$$

Ma osservando il triangolo rettangolo costituito dai vettori A , N (cateti) ed S (ipotenusa) risulta anche

$$\frac{A}{N} = \tan \varphi$$

dove φ è l'angolo tra la forza S e la direzione normale

$$\tan \varphi \leq \mu_s$$

Affinché il punto materiale rimanga in equilibrio è necessario che

$$\varphi \leq \varphi_s$$

Essendo $\varphi_s = \arctan \mu_s$ angolo di attrito statico.

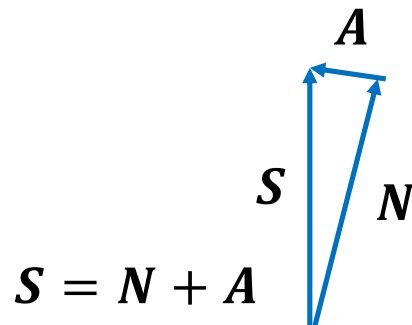
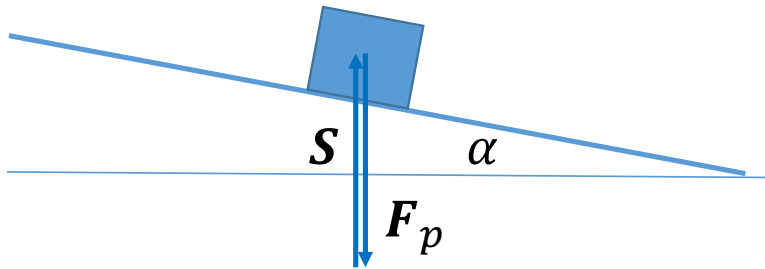
Piano inclinato con attrito, condizioni statiche

Consideriamo un punto materiale su un piano inclinato con attrito. Se l'inclinazione del piano è piccola e l'attrito sufficiente, osserviamo che il punto rimane in equilibrio sul piano. In queste condizioni risulta chiaramente

$$\mathbf{S} + \mathbf{F}_p = 0$$

Possiamo anche in questo caso scomporre la forza di contatto $\mathbf{S}$ nelle componenti normale $\mathbf{N}$ e tangenziale $\mathbf{A}$, cioè

$$\mathbf{S} = \mathbf{N} + \mathbf{A}$$



Piano inclinato con attrito, condizioni statiche

Richiamando μ_s , il coefficiente di attrito statico definito in precedenza, anche in questo caso risulta

$$A \leq \mu_s N$$

Che possiamo riscrivere come

$$\frac{A}{N} \leq \mu_s$$

ma osservando il triangolo rettangolo formato dai vettori $\mathbf{S}$, $\mathbf{N}$ ed $\mathbf{A}$ si vede facilmente che

$$\frac{A}{N} = \tan \alpha$$

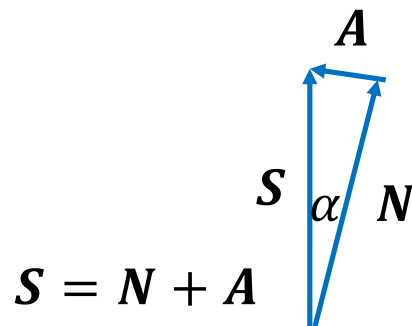
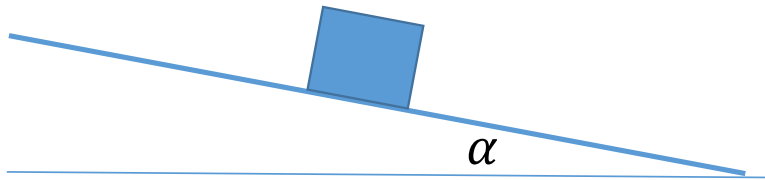
la condizione imposta dal modello di attrito statico di Coulomb può essere riscritta come

$$\tan \alpha \leq \mu_s$$

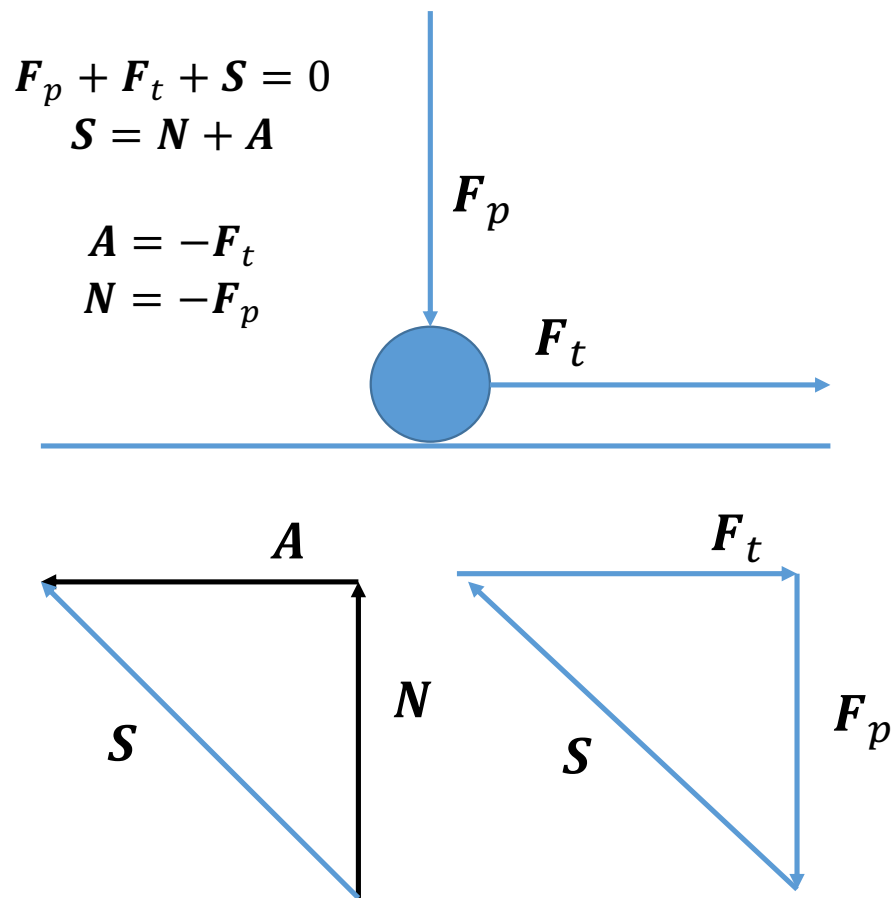
indicando quindi con $\varphi_s = \arctan \mu_s$ l'angolo di attrito statico, si conclude che il punto materiale rimane in equilibrio sul piano se

$$\alpha \leq \varphi_s$$

Cioè se l'inclinazione del piano è inferiore all'angolo di attrito. Se questa condizione non è verificata, il punto scivola lungo il piano.



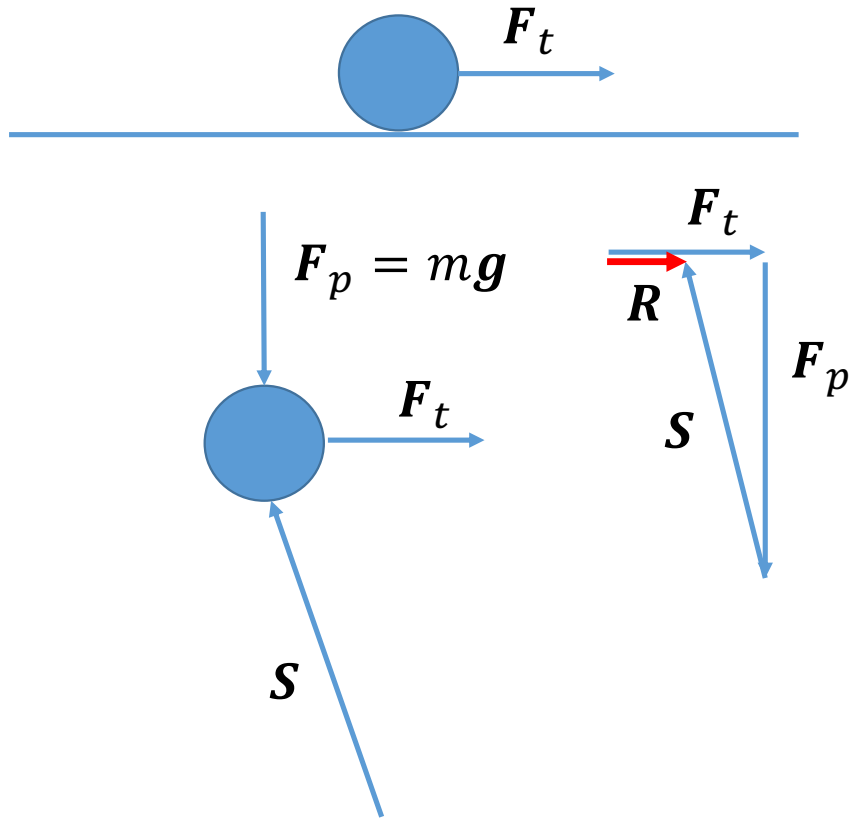
Forze di interazione con altri corpi – modello dell'attrito di Coulomb (dinamico)



Analizziamo il caso dinamico. Consideriamo un punto materiale su una superficie orizzontale con attrito, soggetto a una forza tangenziale F_t . Abbiamo visto che in questo caso la reazione del piano S non è orizzontale e può essere scomposta in due componenti A ed N . Il punto rimane in equilibrio se $A \leq \mu_s N$

Se invece $A > \mu_s N$ il punto materiale inizia a scivolare sulla superficie, non è più in condizioni statiche.

Forze di interazione con altri corpi – modello dell'attrito di Coulomb (dinamico)



Se $A > \mu_s N$ il punto materiale inizia a scivolare sulla superficie, avrà quindi un'accelerazione $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ diretta orizzontalmente.

Per il secondo principio della dinamica, ricordiamo che

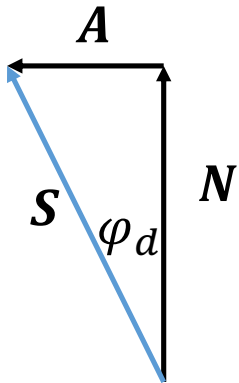
$$\mathbf{R} = m\mathbf{a}$$

quindi la risultante delle forze applicate al punto materiale non è nulla

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_t + \mathbf{S} = \mathbf{R}$$

Ed ha direzione orizzontale (dato che l'accelerazione $\mathbf{a}$ è orizzontale).

Forze di interazione con altri corpi – modello dell'attrito di Coulomb (dinamico)



In questo caso il modello di attrito di Coulomb introduce la seguente relazione tra la componente normale e tangenziale della forza di contatto

$$A = \mu_d N$$

Essendo μ_d il coefficiente di attrito dinamico.

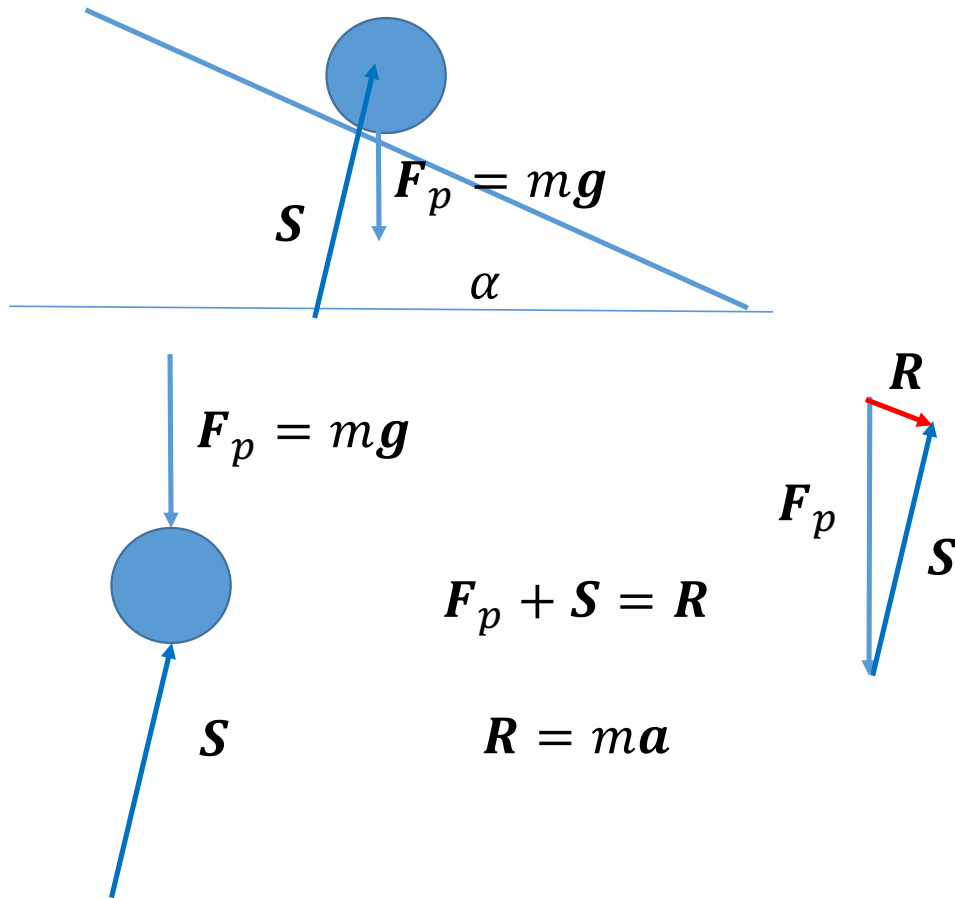
La relazione precedente può essere riscritta come

$$\frac{A}{N} = \mu_d$$

$$\frac{A}{N} = \tan \varphi_d$$

essendo $\varphi_d = \arctan \mu_d$ angolo di attrito dinamico

Piano inclinato con attrito, condizioni dinamiche



In condizioni dinamiche, il punto materiale scivola lungo il piano inclinato con un'accelerazione $a \neq 0$. Per il secondo principio della dinamica risulta

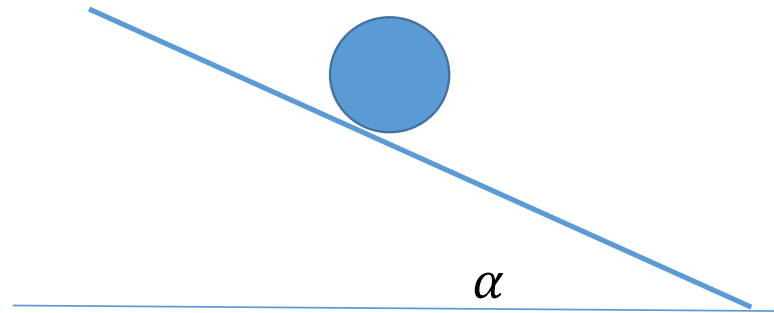
$$R = ma$$

Essendo R la risultante delle forze applicate al punto, cioè

$$F_p + S = R$$

In condizioni dinamiche $R \neq 0$ e ha direzione parallela al piano.

Piano inclinato con attrito, condizioni dinamiche



In condizioni dinamiche $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ e ha direzione parallela al piano. Possiamo anche in questo caso scomporre la forza di contatto nella componente normale e parallela al piano

$$\mathbf{S} = \mathbf{N} + \mathbf{A}$$

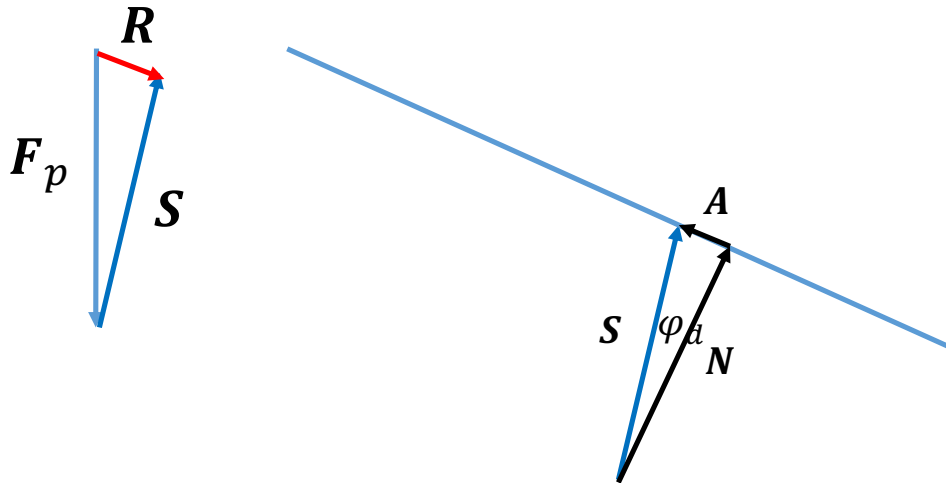
Per il modello coulombiano dell'attrito risulta, come abbiamo visto in precedenza

$$A = \mu_d N$$

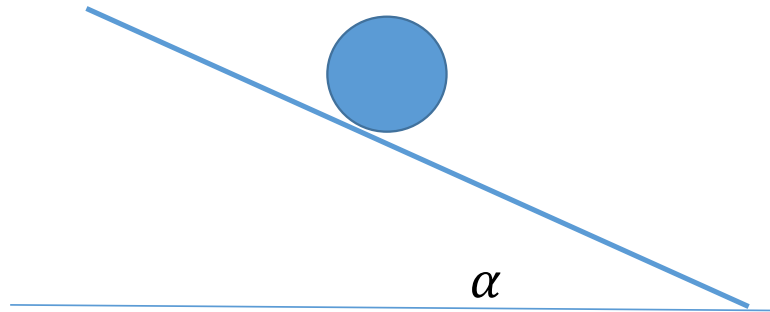
$$\frac{A}{N} = \mu_d$$

$$\frac{A}{N} = \tan \varphi_d$$

$$\tan \varphi_d = \mu_d$$



Piano inclinato con attrito, condizioni dinamiche



$$A = \mu_d N$$

Osserviamo che la componente normale è pari a

$$N = mg \cos \alpha$$

Sostituendo e sviluppando i calcoli si ottiene

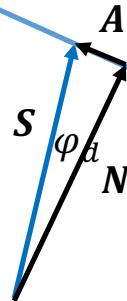
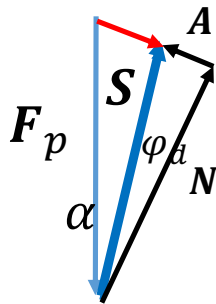
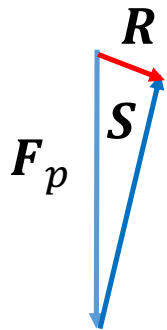
$$A = \mu_d N = \mu_d mg \cos \alpha$$

$$R = mg \sin \alpha - \mu_d mg \cos \alpha$$

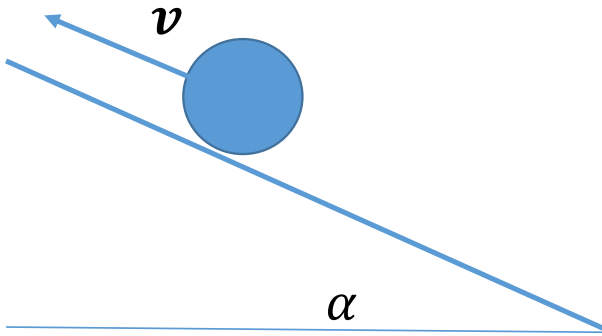
L'accelerazione del punto materiale che scivola lungo un piano inclinato è

$$\begin{aligned} a &= g \sin \alpha - \mu_d g \cos \alpha \\ &= g(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha) \end{aligned}$$

Ricordiamo che l'accelerazione nel caso di superficie liscia era $a = g \sin \alpha$, in presenza di attrito l'accelerazione diminuisce di $\mu_d g \cos \alpha$



Piano inclinato con attrito, condizioni dinamiche



Analizziamo il caso in cui il punto materiale è lanciato sul piano verso l'alto e si sta muovendo in salita.

Anche in questo caso risulta

$$A = \mu_d N$$

$$N = mg \cos \alpha$$

$$A = \mu_d N = \mu_d mg \cos \alpha$$

Ma dobbiamo fare attenzione al verso di A che in questo caso è verso il basso (l'attrito ostacola il moto quindi la direzione della forza di attrito è sempre opposta a quella del moto). Sostituendo e sviluppando i calcoli si ottiene

$$R = mg \sin \alpha + \mu_d mg \cos \alpha$$

e l'accelerazione in questo caso è pari a

$$\begin{aligned} a &= g \sin \alpha + \mu_d g \cos \alpha \\ &= g(\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha) \end{aligned}$$

