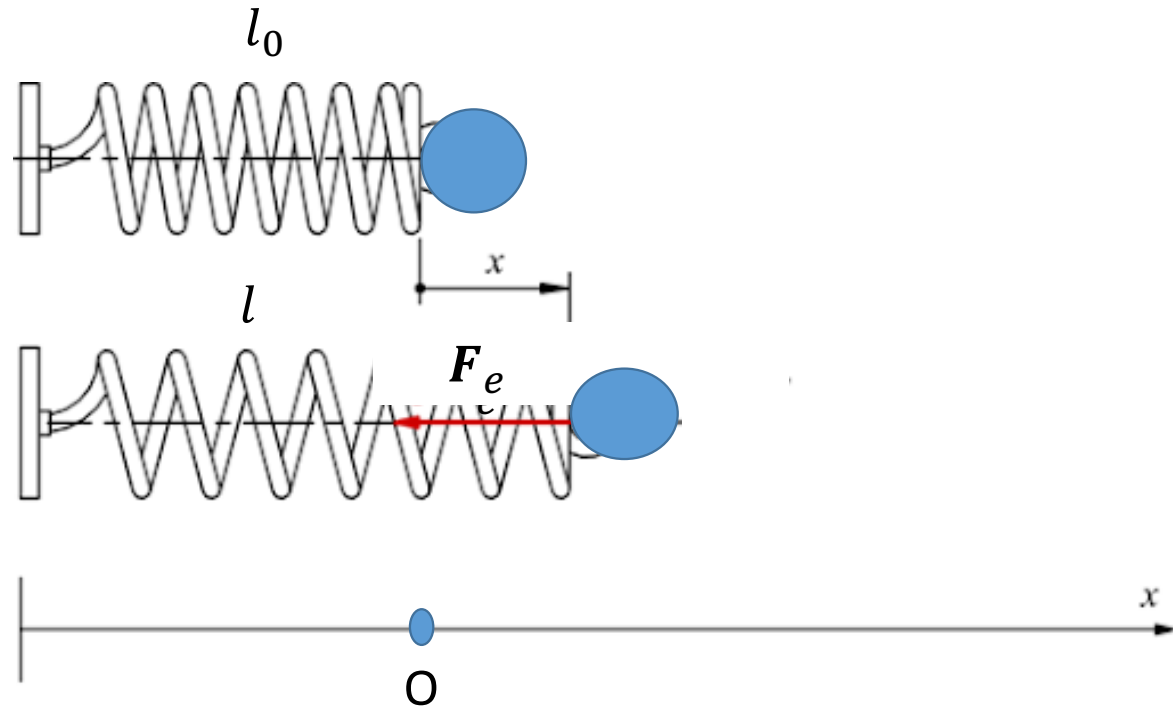


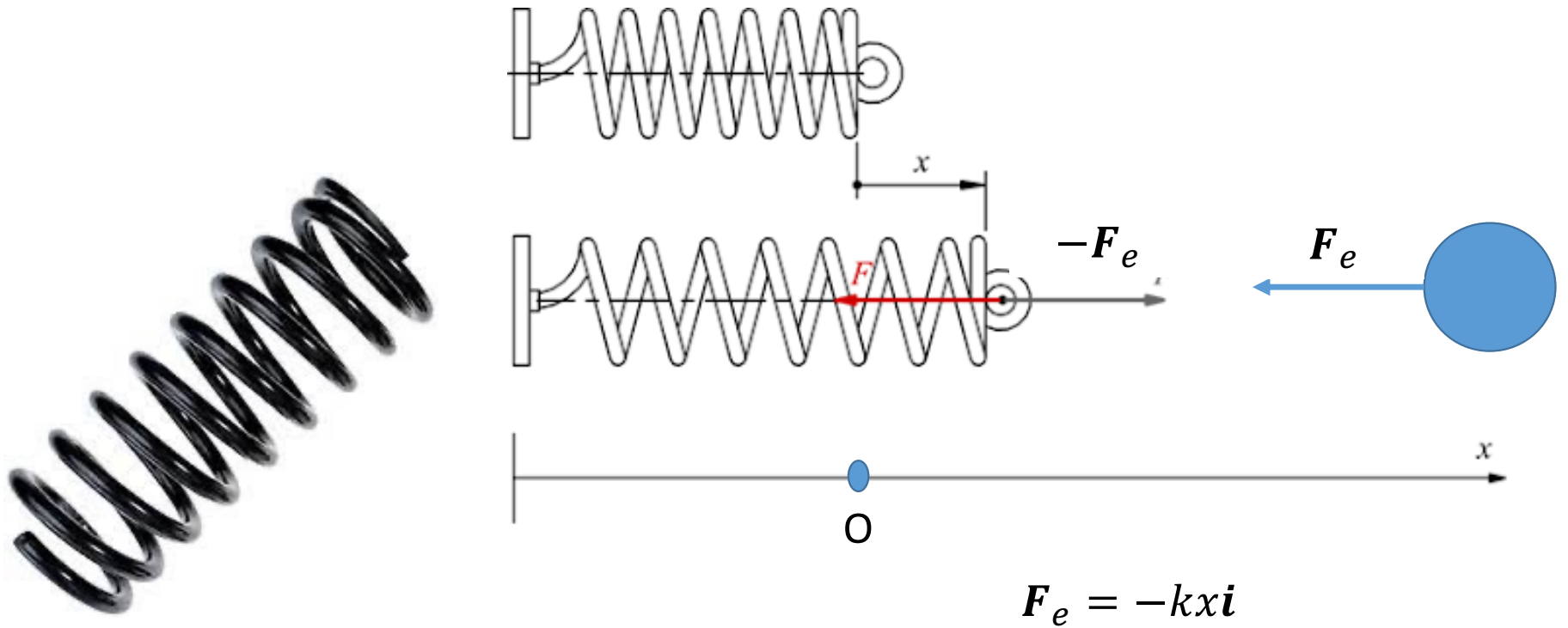
Forza elastica - introduzione



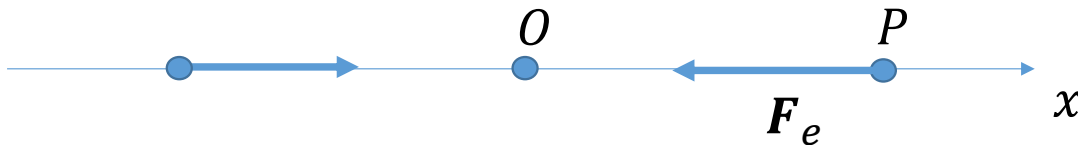
$$x = l - l_0$$

$$\mathbf{F}_e = -kx\mathbf{i}$$

Forza elastica - introduzione



Forza elastica



Un elemento elastico lineare che agisce in direzione x è un sistema in grado di applicare una forza pari a

$$\mathbf{F}_e = -kx\mathbf{i}$$

(legge di Hooke)

k costante di rigidità dell'elemento elastico $[k]=[F]/L$

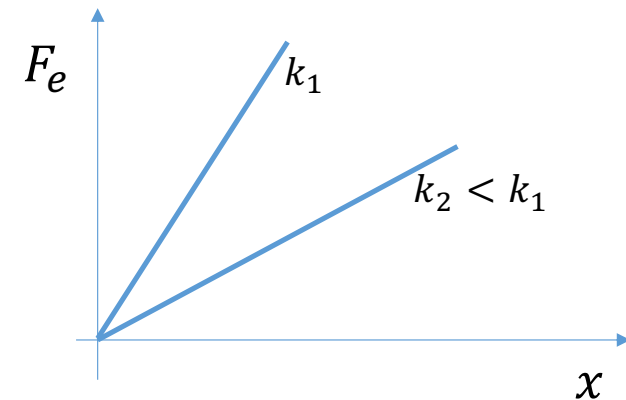
Nel SI si misura in N/m.

Molti componenti meccanici hanno (almeno in prima approssimazione) un comportamento che può essere rappresentato da questa legge.

Osserviamo che:

La direzione della forza è opposta allo spostamento.

Il modulo della forza è proporzionale allo spostamento.



Forza elastica

Analizziamo la dinamica di un punto materiale di massa m collegato a un supporto fisso tramite una molla con costante elastica k . Applicando la seconda legge di Newton si ha:

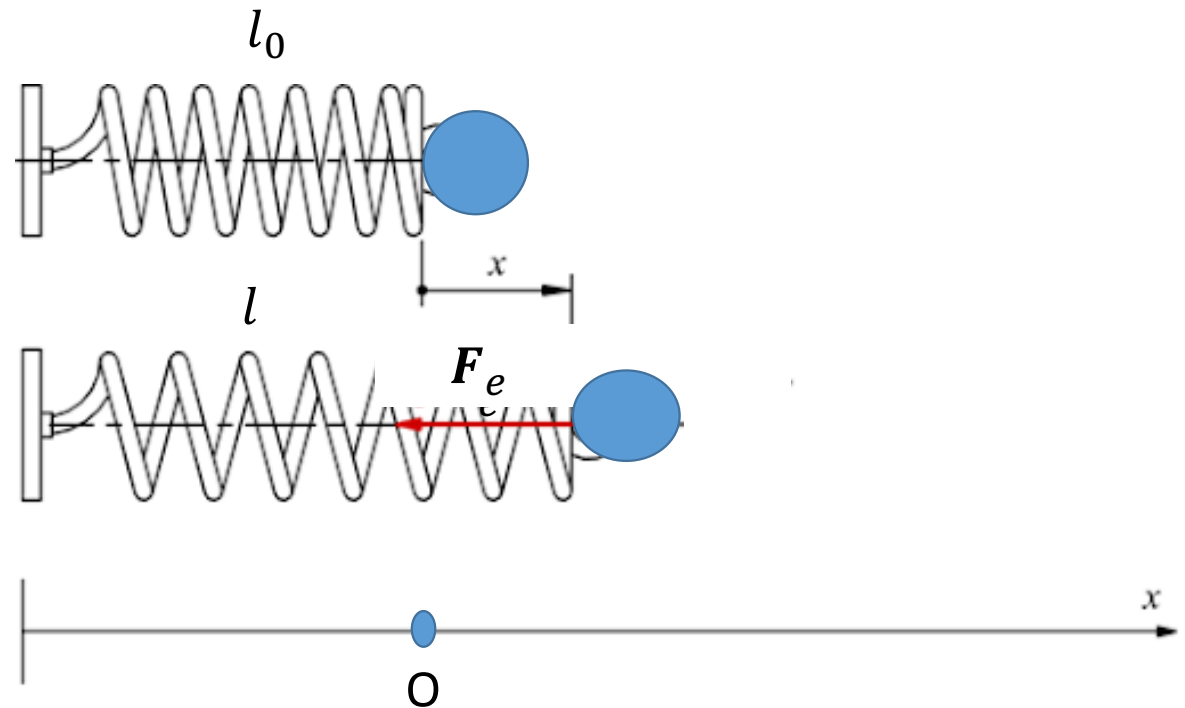
$$\mathbf{F}_e = m\mathbf{a}$$

Considerando la componente in direzione del moto x e ricordando la relazione tra accelerazione e spostamento

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

Che possiamo riscrivere come

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$



Otteniamo quindi la seguente equazione differenziale

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

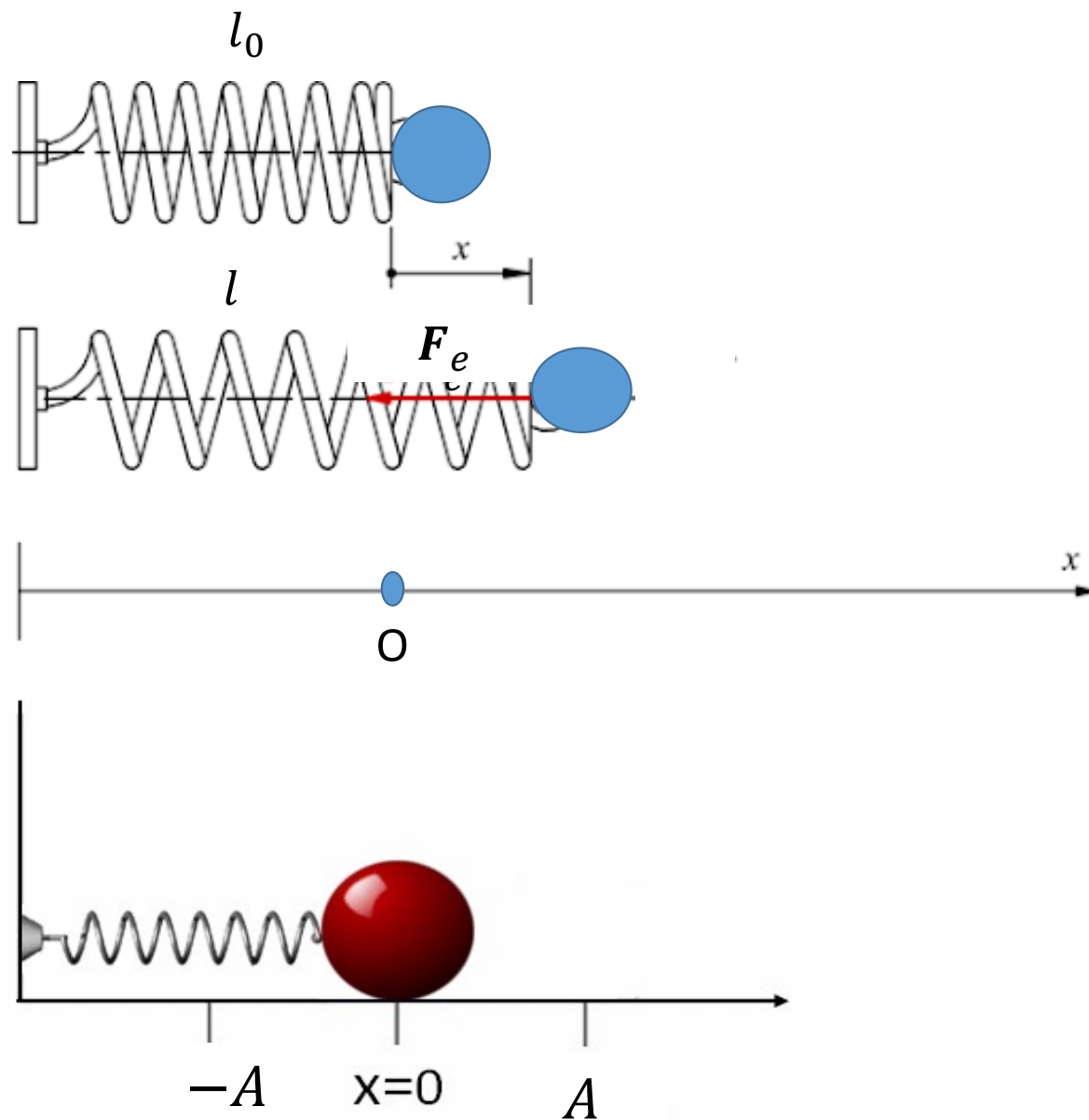
Forza elastica

Otteniamo la seguente equazione differenziale

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Che abbiamo visto essere l'equazione differenziale caratteristica del moto armonico, la cui soluzione è

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$



Forza elastica

L'equazione differenziale che abbiamo trovato è:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Quella del moto armonico che abbiamo visto nelle lezioni precedenti era

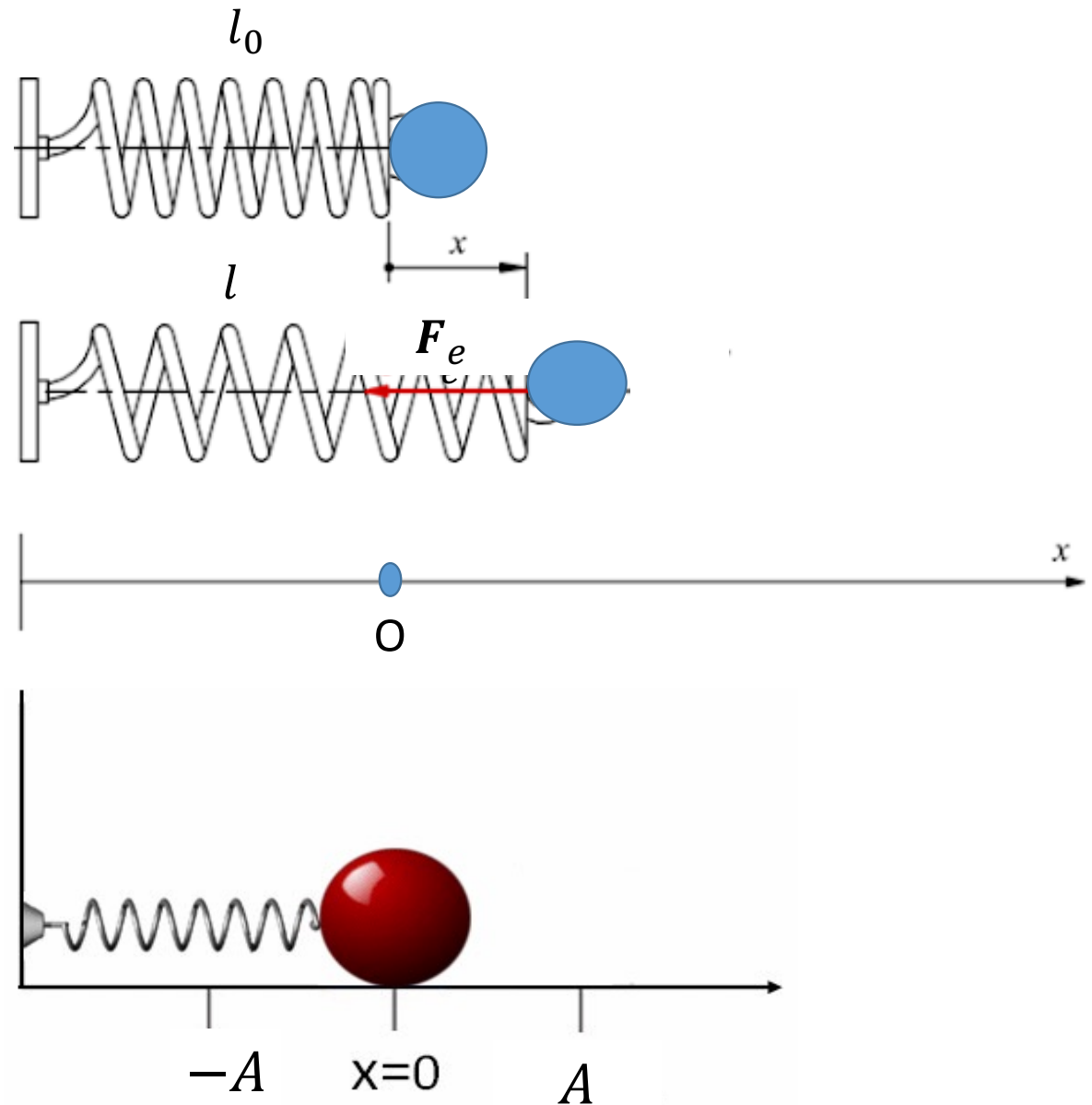
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

Hanno la stessa struttura, quindi anche in questo caso la soluzione è

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Moto armonico con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Forza elastica

Caratteristiche del moto:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

Pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Frequenza

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

L'ampiezza A e la fase φ dipendono dalle condizioni iniziali

$$x(0) = x_0$$

$$v(0) = v_0$$

Ad esempio se il punto parte da una configurazione in cui la molla è deformata, con velocità nulla

$$x(0) = x_0$$

$$v(0) = 0$$

Sostituendo nelle espressioni di $x(t)$ e $v(t)$ i valori noti si ottengono due equazioni da cui possiamo ricavare A e φ

$$x_0 = A \sin(\varphi)$$

$$0 = A\omega \cos(\varphi)$$

Risolvendo si ottiene

$$\varphi = 0$$

$$A = x_0$$

Elementi flessibili (fili, funi, ecc.)

Per modellare elementi flessibili come fili, cavi, funi, catene, tendini, ecc., in meccanica solitamente si fanno le seguenti ipotesi. Gli elementi flessibili sono:

- Inestensibili (la sua lunghezza non varia)
- Perfettamente flessibili (possono applicare forze soltanto se sono tesi)
- Massa trascurabile



Elementi flessibili (fili, funi, ecc.)

Consideriamo un elemento flessibile mantenuto teso grazie all'applicazione di due forze di trazione $\mathbf{F}_A$ ed $\mathbf{F}_B$



Consideriamo due tratti infinitesimi di filo all'inizio e alla fine.

Indichiamo con $\mathbf{T}$ la tensione della fune.

Nel tratto iniziale

$$\mathbf{F}_A + \mathbf{T} = m_f \mathbf{a}$$

Ma abbiamo detto che la massa è trascurabile, quindi:

$$\mathbf{F}_A = -\mathbf{T}$$

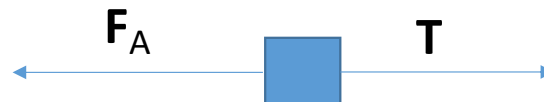
Analogamente nel tratto finale si ottiene

$$\mathbf{F}_B - \mathbf{T} = \mathbf{0}$$

Risulta quindi

$$\mathbf{F}_B = -\mathbf{F}_A = \mathbf{T}$$

La tensione nella fune è costante.



$$\mathbf{F}_A = -\mathbf{T}$$



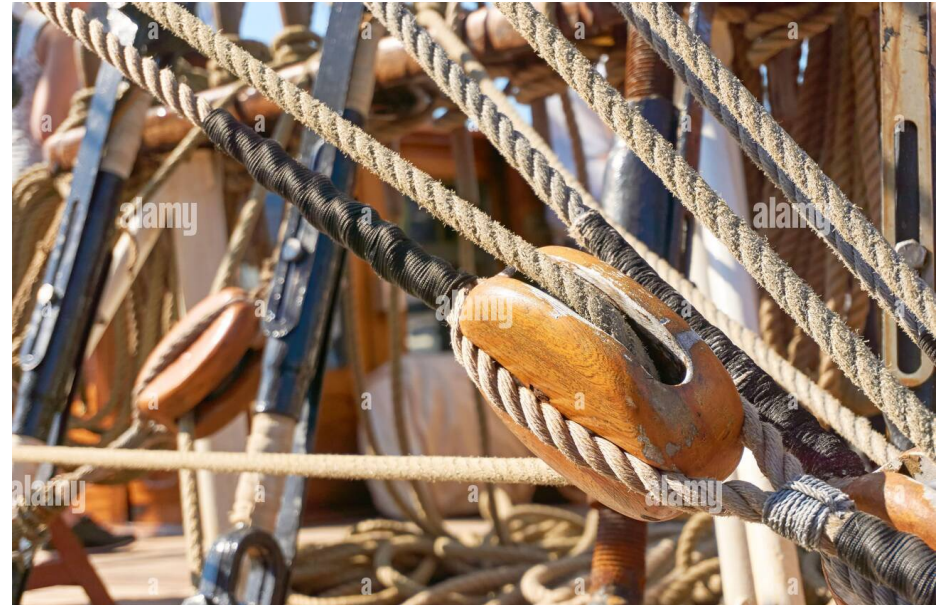
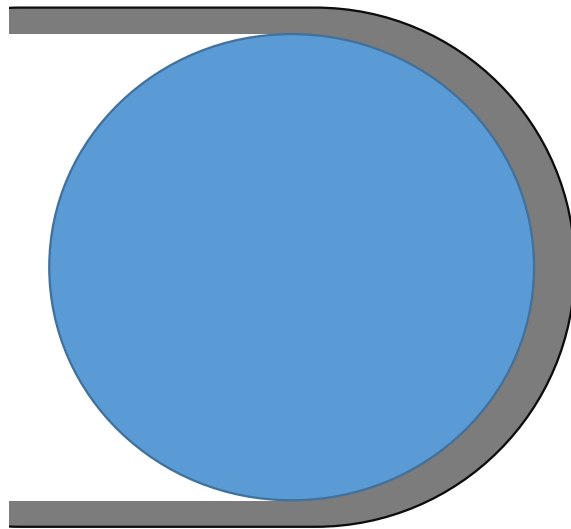
$$\mathbf{F}_B = \mathbf{T} = -\mathbf{F}_A$$

Elementi flessibili (fili, funi, ecc.)

Gli elementi flessibili sono spesso avvolti intorno a supporti rigidi, utilizzati per variarne la direzione.

Questi elementi possono essere ad esempio carrucole, pulegge, perni ecc.

Supponiamo che il supporto sia fisso e che la fune possa scivolare senza attrito su di esso.



Elementi flessibili (fili, funi, ecc.)

Analizziamo un tratto di fune infinitesimo lungo il tratto in cui è a contatto con la carrucola.

Supponiamo che la carrucola sia circolare e che il tratto infinitesimo sia un arco di circonferenza con angolo al centro α . Indichiamo con T_1 e T_2 le tensioni ai capi del tratto infinitesimo, con N la reazione vincolare della carrucola.

Applichiamo la seconda legge di Newton al tratto infinitesimo, considerando le componenti delle forze in direzione tangente alla circonferenza

$$ma_t = T_2 \cos(\alpha/2) - T_1 \cos(\alpha/2)$$

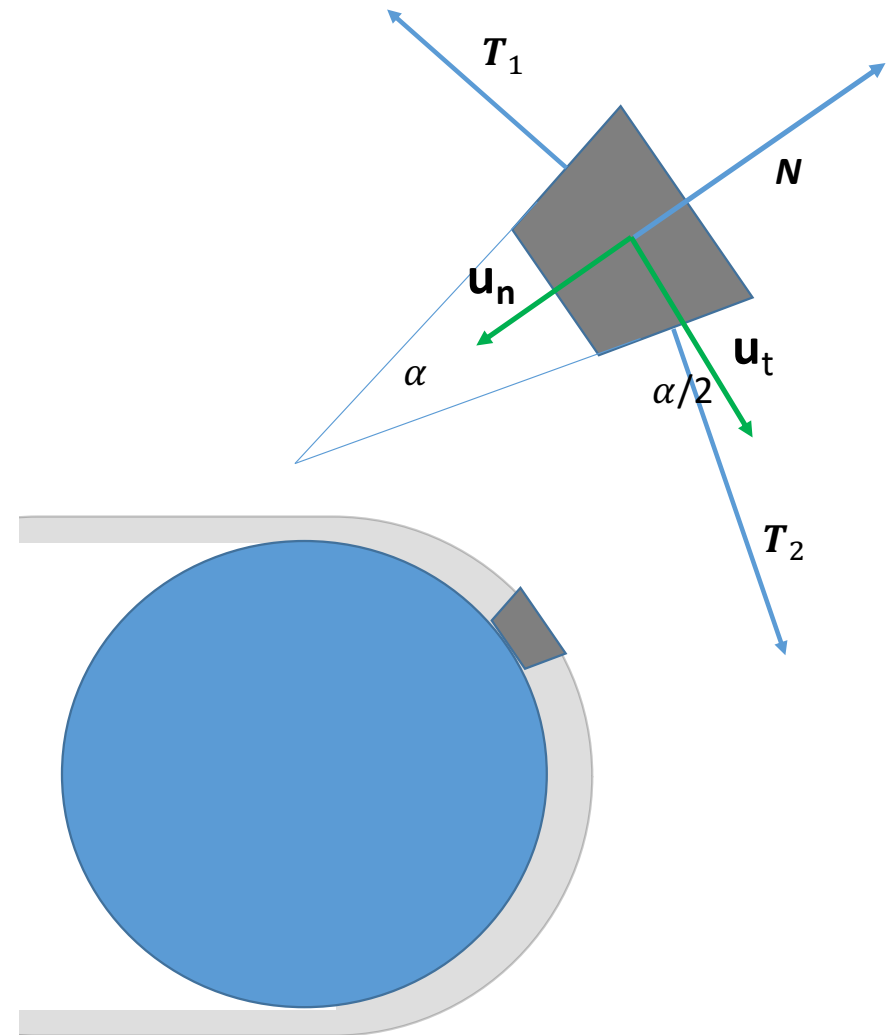
Dato che la massa è trascurabile

$$0 = T_2 \cos(\alpha/2) - T_1 \cos(\alpha/2)$$

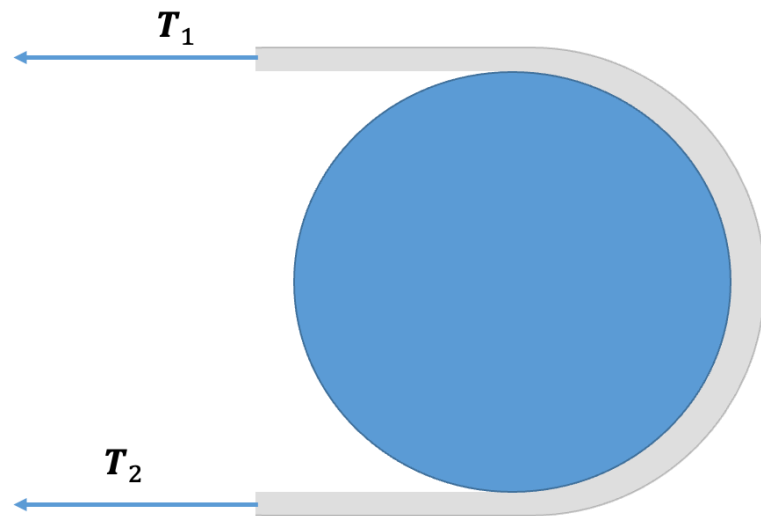
Da cui si ottiene

$$T_2 = T_1 = T$$

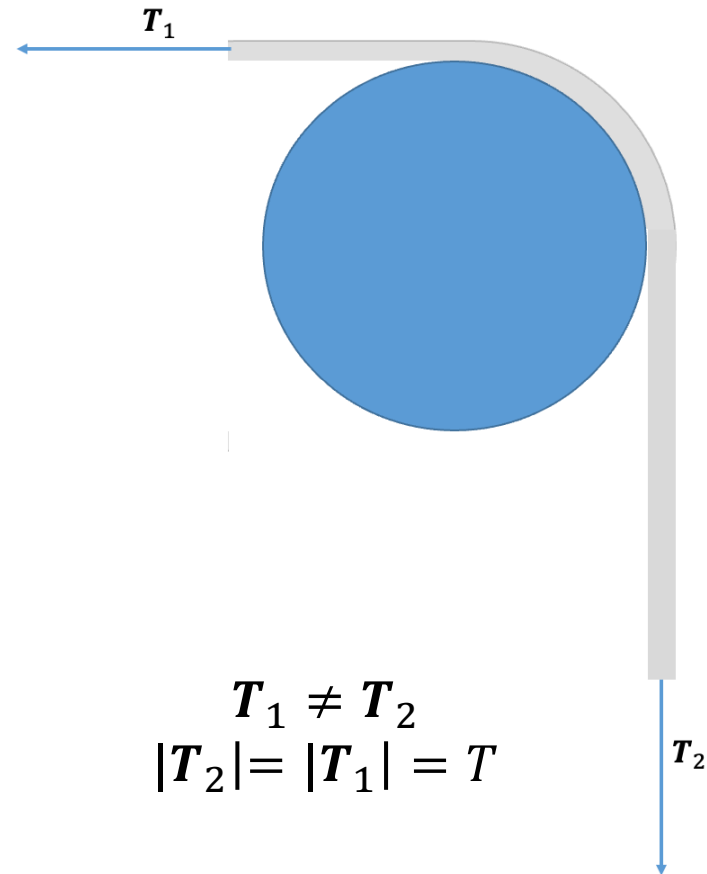
Il modulo della tensione non varia lungo l'arco di contatto, cambia solo la direzione, che è tangente alla carrucola.



Esempi



$$T_1 = T_2$$

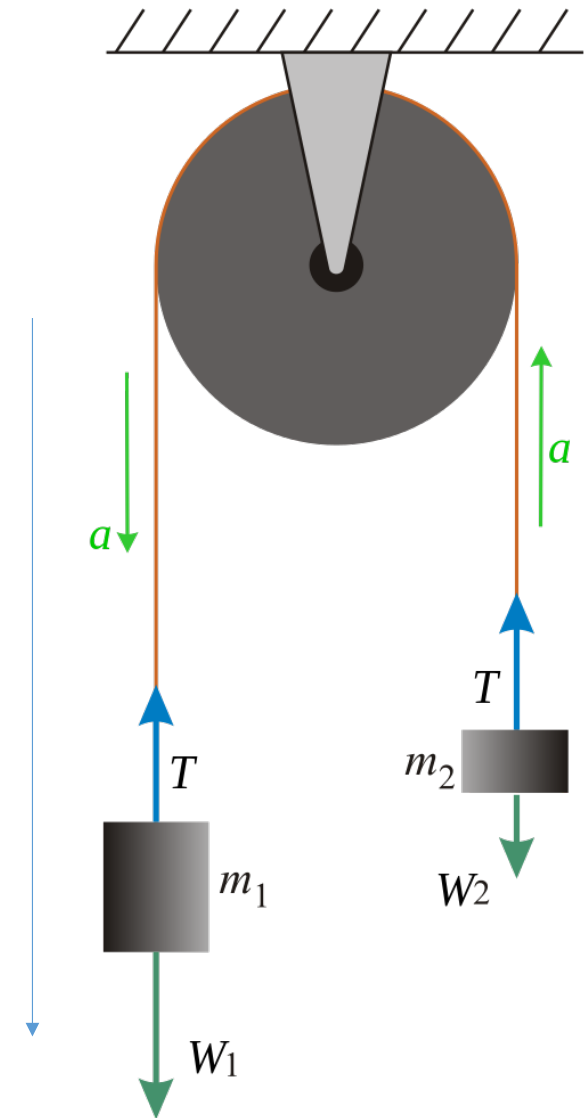


$$T_1 \neq T_2$$
$$|T_2| = |T_1| = T$$

Esempio #1, la macchina di Atwood

Consideriamo due masse sospese tramite un'unica fune ideale, che passa attraverso una carrucola di massa trascurabile.

Determiniamo l'accelerazione delle due masse e la tensione nella fune.



Esempio #1, la macchina di Atwood

Applichiamo la seconda legge di Newton alle due masse

$$m_1 a_1 = m_1 g - T,$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T,$$

Dato che la fune è inestensibile, risulta necessariamente che

$$a_2 = -a_1 = -a$$

Sostituendo otteniamo:

$$m_1 a = m_1 g - T$$

$$-m_2 a = m_2 g - T$$

Sottraendo membro a membro:

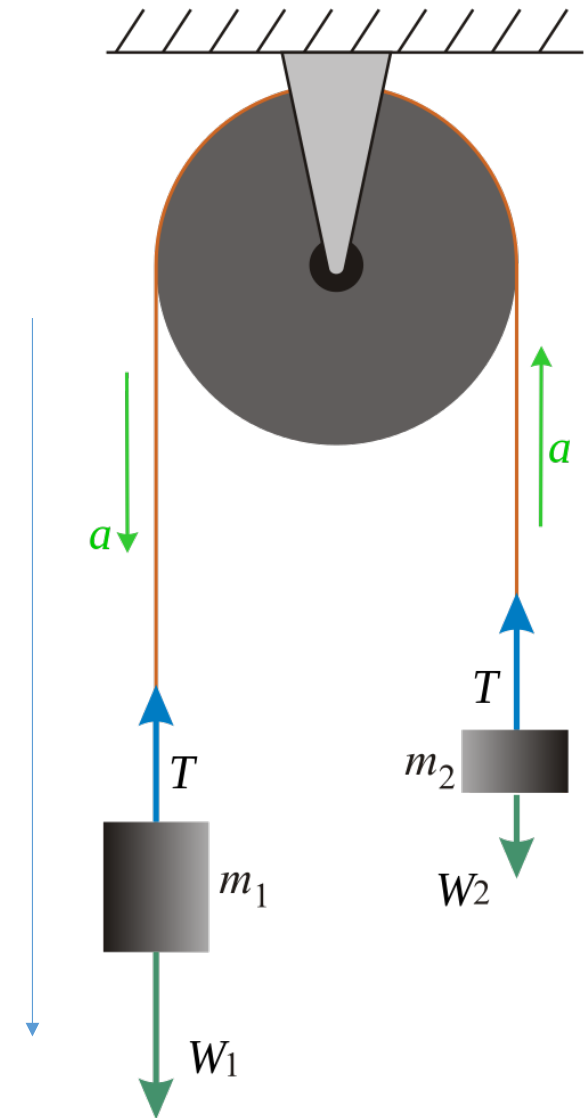
$$(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g$$

Da cui ricaviamo l'accelerazione

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

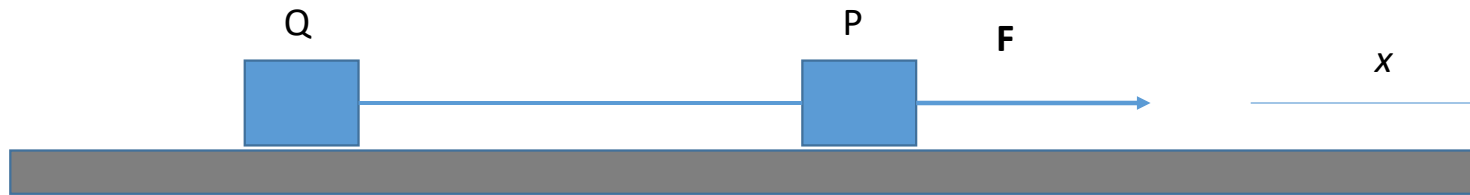
Possiamo quindi determinare la tensione nella fune, che vale:

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

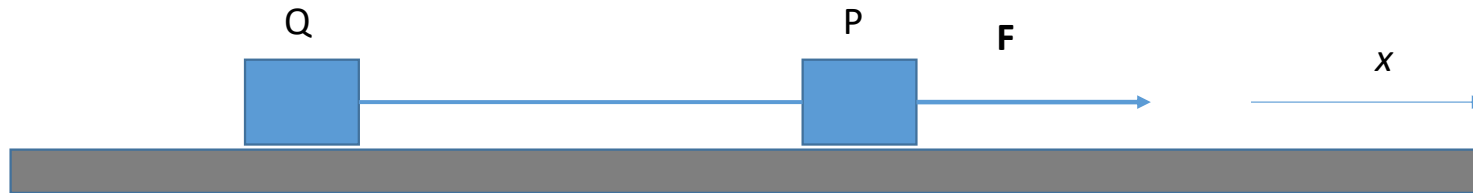


Esempio #2

Due punti materiali di massa m_P ed m_Q rispettivamente sono collegati da un filo e vincolati a scorrere su una superficie priva di attrito. Al punto P è applicata una forza $\mathbf{F} = F\mathbf{i}$. Calcoliamo l'accelerazione dei due punti e la tensione nel filo



Esempio #2



Applichiamo la seconda legge di Newton alle due masse

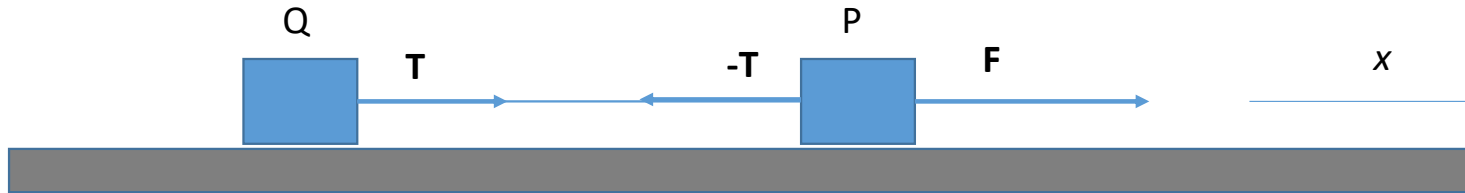
$$m_P a_P = F - T$$

$$m_Q a_Q = T$$

Dato che il filo è inestensibile, risulta

$$a_P = a_Q = a$$

Esempio #2



$$m_P a = F - T$$

$$m_Q a = T$$

Sommando membro a membro ottengo

$$(m_P + m_Q) a = F$$

Da cui posso ricavare l'accelerazione

$$a = \frac{F}{m_P + m_Q}$$

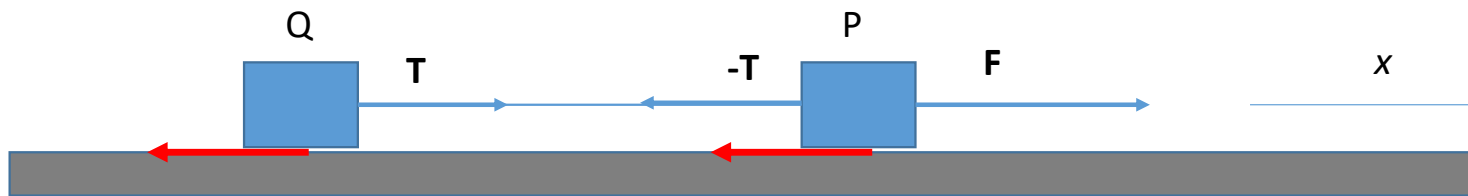
Sostituisco nell'equazione di moto di Q e trovo T

$$m_Q a = T$$

$$T = \frac{m_Q}{m_P + m_Q} F$$

Esempio #3

Analizziamo lo stesso problema supponendo che tra le superfici dei due corpi e il piano sia presente attrito, caratterizzato da coefficienti di attrito dinamico μ_P e μ_Q , rispettivamente



Applichiamo di nuovo la seconda legge di Newton alle due masse, considerando in questo caso le forze di attrito. Dato che la superficie è orizzontale, $\mathbf{F}_{aP} = -\mu_P m_P g \mathbf{i}$ e $\mathbf{F}_{aQ} = -\mu_Q m_Q g \mathbf{i}$

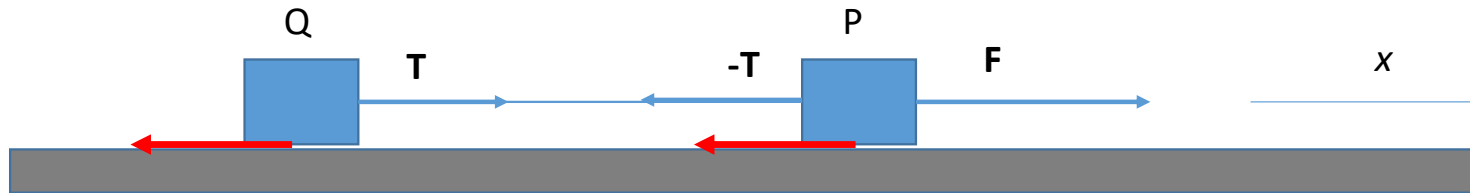
$$m_P a_P = F - T - \mu_P m_P g$$

$$m_Q a_Q = T - \mu_Q m_Q g$$

Dato che il filo è inestensibile, risulta

$$a_P = a_Q = a$$

Esempio #3



Sostituendo e sviluppando i calcoli si ottiene:

$$m_P a = F - T - \mu_P m_P g$$

$$m_Q a = T - \mu_Q m_Q g$$

$$(m_P + m_Q) a = F - (\mu_P m_P + \mu_Q m_Q) g$$

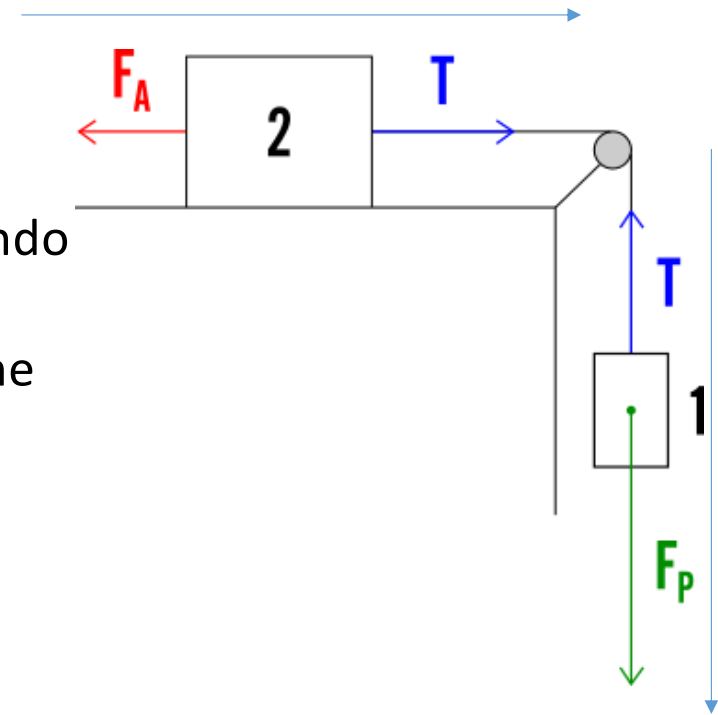
$$a = (F - (\mu_P m_P + \mu_Q m_Q) g) \frac{1}{m_P + m_Q}$$

Ricordiamo che senza attrito avevamo trovato

$$a = \frac{F}{m_P + m_Q}$$

Esempio #4

Due punti materiali sono collegati da una fune inestensibile che passa su una carrucola di massa trascurabile, il primo è sospeso verticalmente, il secondo scorre su una superficie orizzontale priva di attrito. Determinare l'accelerazione dei due punti e la tensione nella fune.



Esempio #4

Applichiamo la seconda legge di Newton ai due corpi, considerando per il primo la componente in direzione verticale e per il secondo quella in direzione orizzontale.

$$m_1 a_1 = m_1 g - T$$

$$m_2 a_2 = T - F_A$$

Dato che il filo è inestensibile, anche in questo caso risulta

$$a_1 = a_2 = a$$

Sostituendo si ottiene

$$m_1 a = m_1 g - T$$

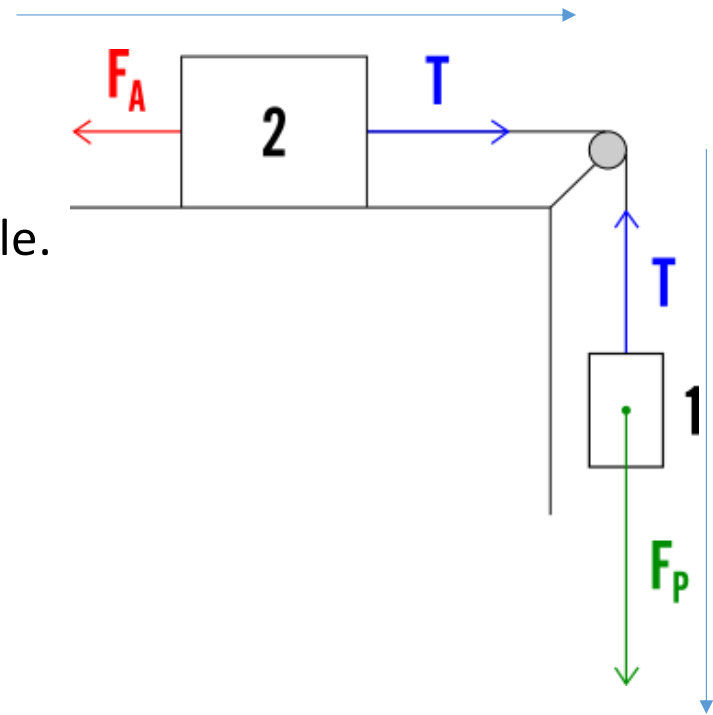
$$m_2 a = T - F_A$$

Sommando membro a membro:

$$(m_1 + m_2) a = m_1 g$$

Da cui si ottiene

$$a = m_1 g / (m_1 + m_2)$$



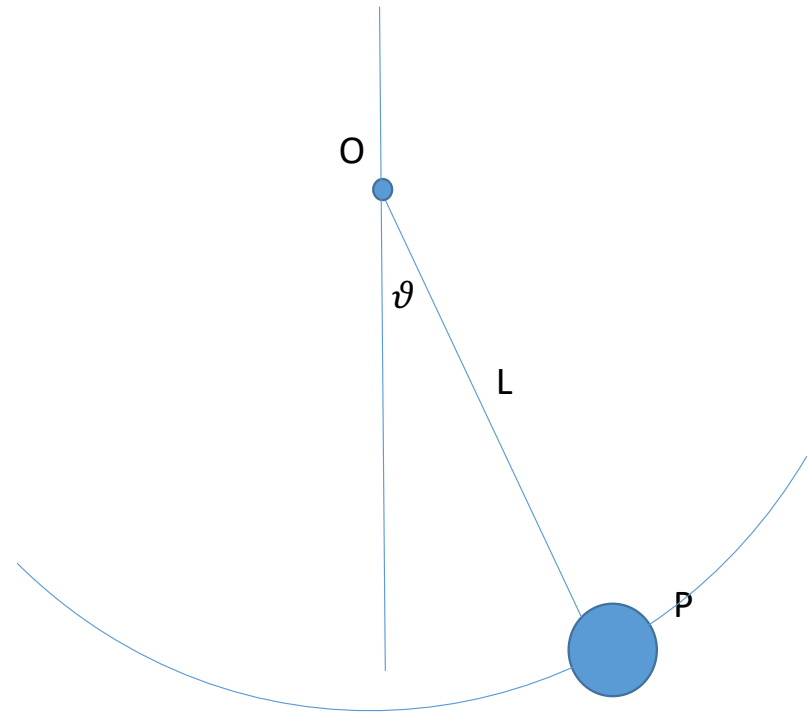


Pendolo semplice

Consideriamo un punto materiale P di massa m sospeso con un filo inestensibile di lunghezza L fissato in un punto O .

Indichiamo con ϑ l'angolo che il filo forma con la verticale in una generica configurazione.

Dato che il filo è inestensibile ed è fissato in O , il punto P si muove lungo un arco di circonferenza di centro O e raggio L .



Pendolo semplice

Sul punto agiscono due forze:

La forza peso $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$

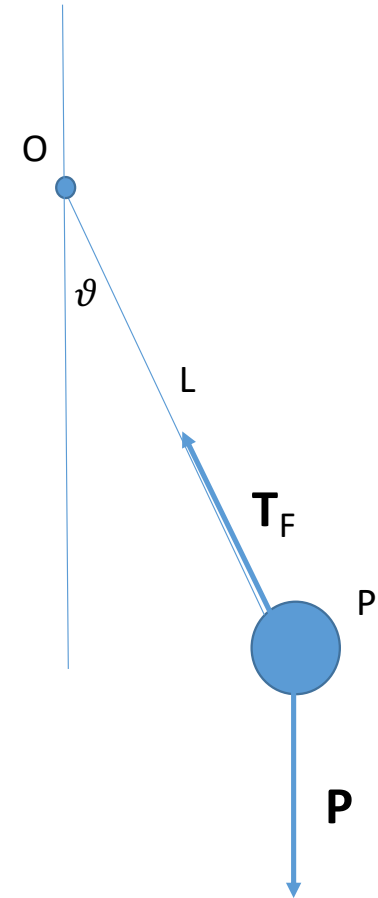
La tensione del filo $\mathbf{T}_F$

La risultante delle forze è quindi

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{T}_F$$

E applicando la seconda legge di Newton
risulta

$$m\mathbf{a} = \mathbf{R}$$



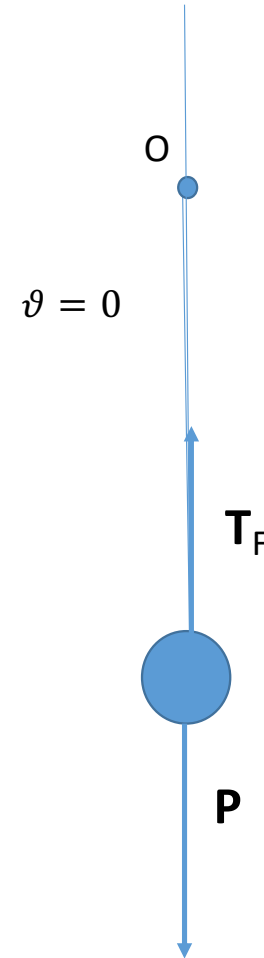
Pendolo semplice, posizione di equilibrio

Se il pendolo è nella configurazione in cui il filo è verticale $\vartheta = 0$, $\mathbf{P}$ e $\mathbf{T}_F$ hanno la stessa direzione, risulta quindi

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{P} + \mathbf{T}_F = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{T}_F = -\mathbf{P}$$



Pendolo semplice, posizione di equilibrio

Anche per $\vartheta = \pi$ le due forze hanno la stessa direzione, quindi

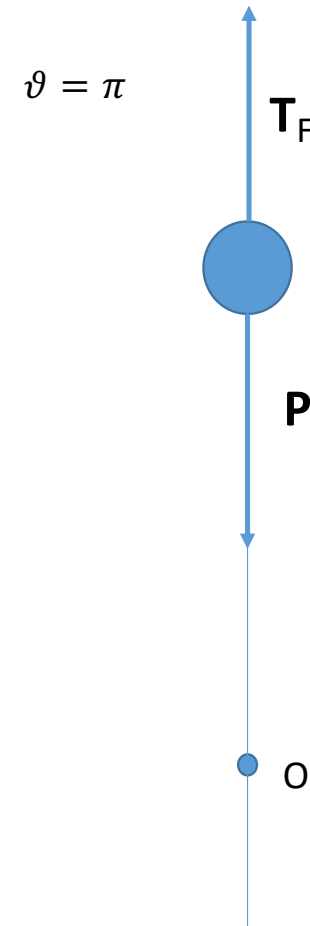
$$\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{P} + \mathbf{T}_F = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{T}_F = -\mathbf{P}$$

Ma in questo caso sulla fune per il principio di azione e reazione sarebbe applicata una forza di compressione, che non può resistere.

Questa configurazione non può essere assunta dal pendolo in condizioni statiche (a meno di sostituire la fune con un elemento rigido, ad esempio un'asticella, in grado di sostenere una forza di compressione).



Pendolo semplice, configurazione generica

Per una configurazione generica del pendolo, identificata dall'angolo ϑ , applicando il secondo principio della dinamica si ottiene

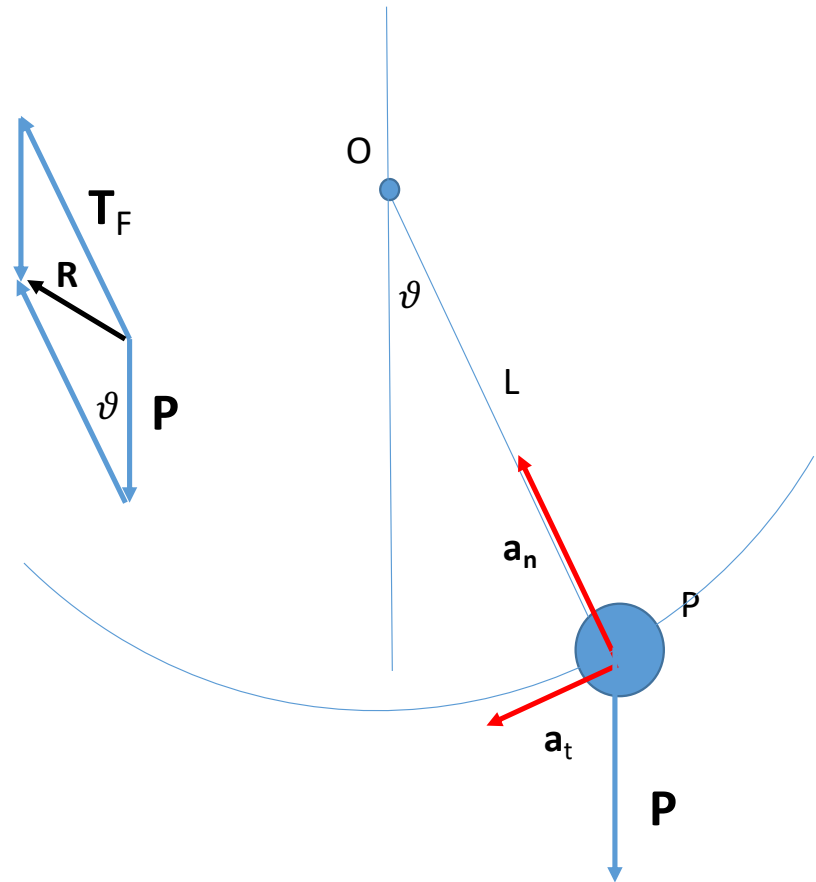
$$m\mathbf{a} = \mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{T}_F = m\mathbf{g} + \mathbf{T}_F$$

Ricordiamo che l'accelerazione in un moto bidimensionale generico può essere scritta come

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$$

$\mathbf{a}_t$ è la componente tangenziale, tangente all'arco di circonferenza percorso dal punto materiale;

$\mathbf{a}_n$ è la componente normale, diretta come il filo.



Pendolo semplice, configurazione generica

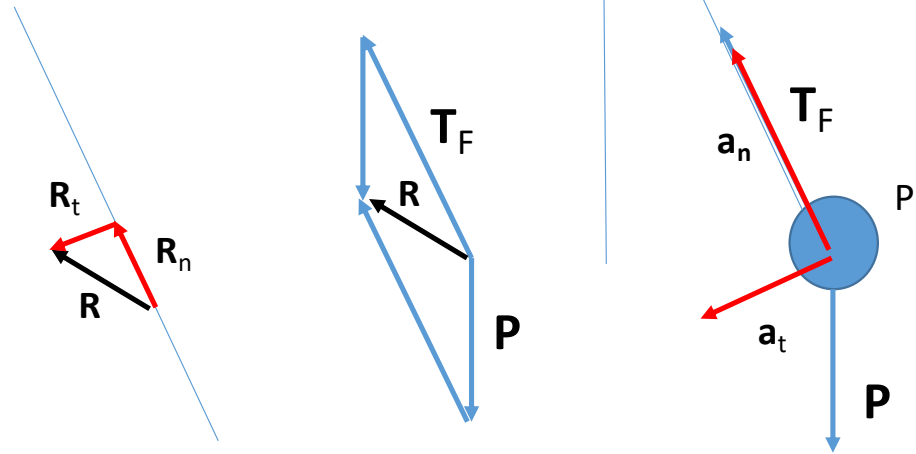
Possiamo scomporre anche la risultante delle forze $\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{T}_F$ nelle stesse direzioni:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_t + \mathbf{R}_n$$

Per cui possiamo scrivere

$$m\mathbf{a}_t = \mathbf{R}_t$$

$$m\mathbf{a}_n = \mathbf{R}_n$$



Pendolo semplice, configurazione generica

Osservando le relazioni geometriche tra i vettori e sviluppando i calcoli si ottiene

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_t + \mathbf{R}_n$$

$$R_n = T_F - mg \cos \vartheta$$

$$R_t = -mg \sin \vartheta$$

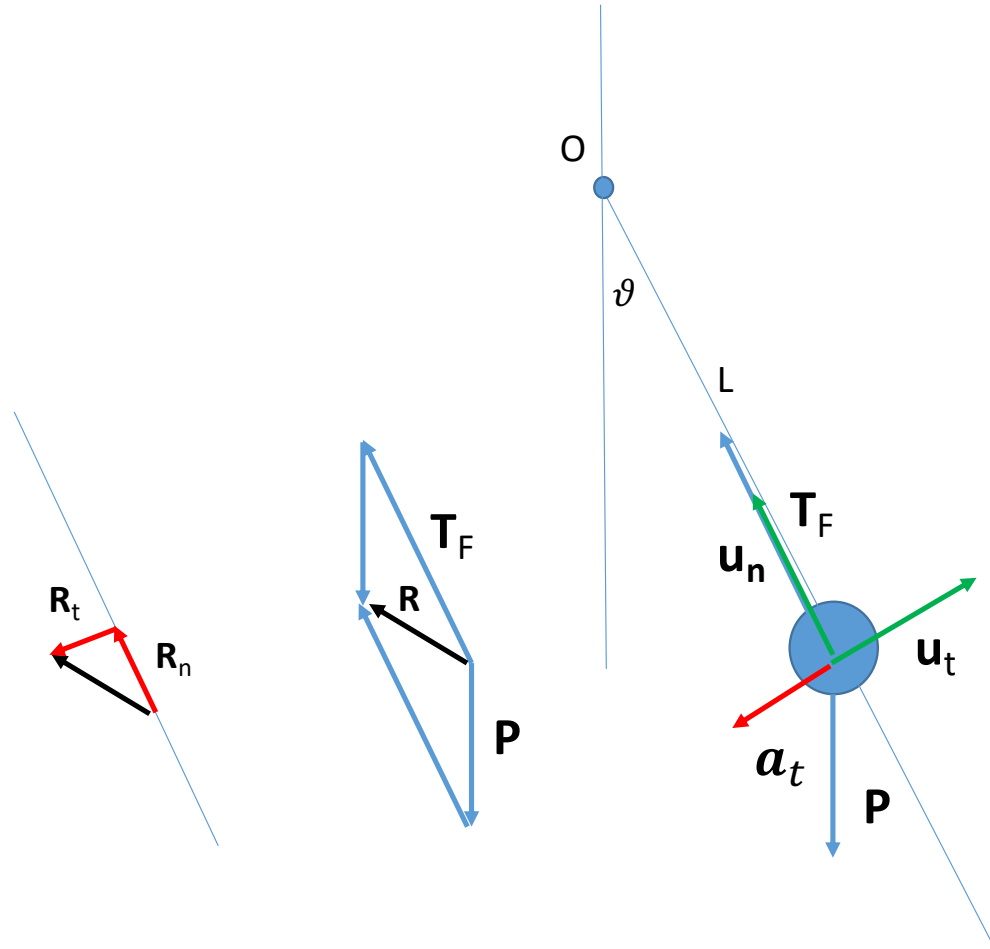
$$m\mathbf{a}_t = \mathbf{R}_t$$

$$m\mathbf{a}_n = \mathbf{R}_n$$

$$ma_n = T_F - mg \cos \vartheta$$

$$ma_t = -mg \sin \vartheta$$

$$a_t = -g \sin \vartheta$$

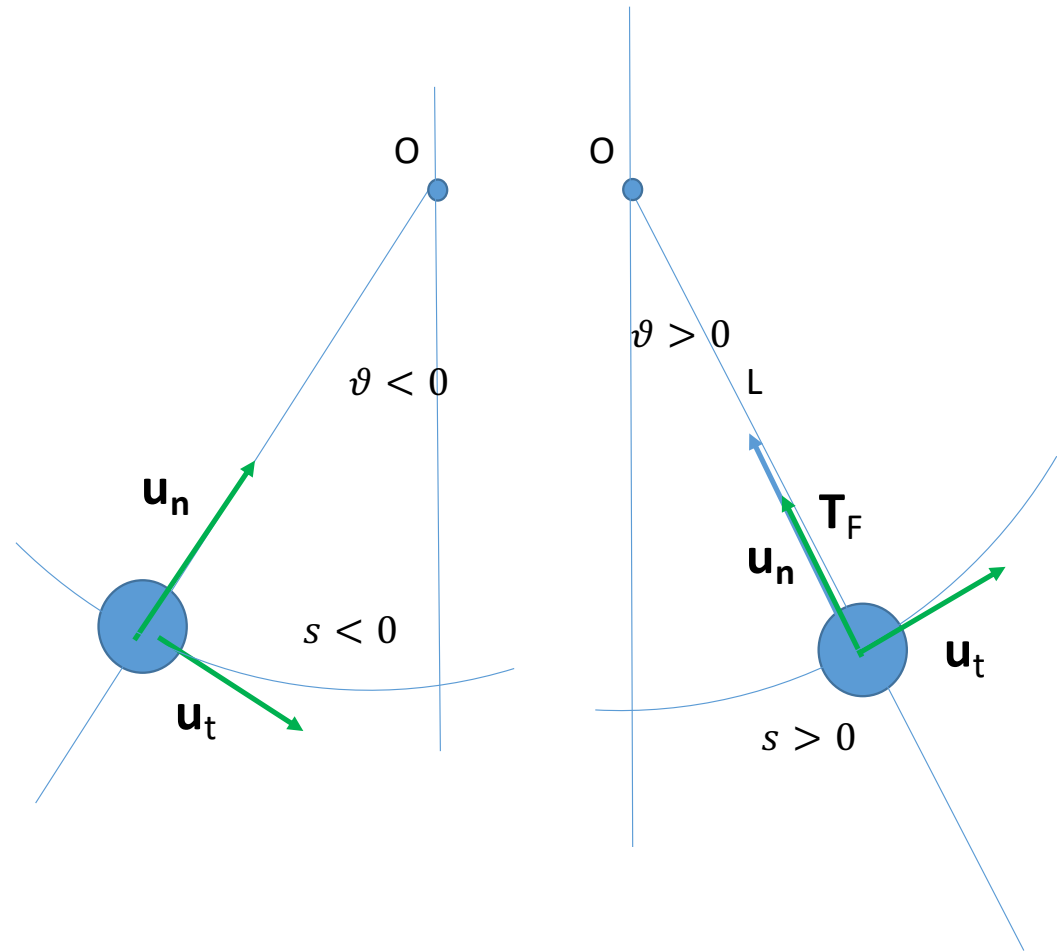


Pendolo semplice, configurazione generica

Dato che la traiettoria del punto materiale è un arco di circonferenza, l'angolo ϑ è legato all'ascissa curvilinea dalla relazione

$$s = L\theta$$

Le direzioni normale e tangenziale sono individuate dai versori $\mathbf{u}_n$ e $\mathbf{u}_t$. Il verso di $\mathbf{u}_t$ in particolare è convenzionalmente definito secondo la direzione in cui l'ascissa curvilinea s aumenta, quindi verso destra.



Pendolo semplice, configurazione generica

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_t + \mathbf{R}_n$$

$$R_n = T_F - mg \cos \vartheta$$

$$R_t = -mg \sin \vartheta$$

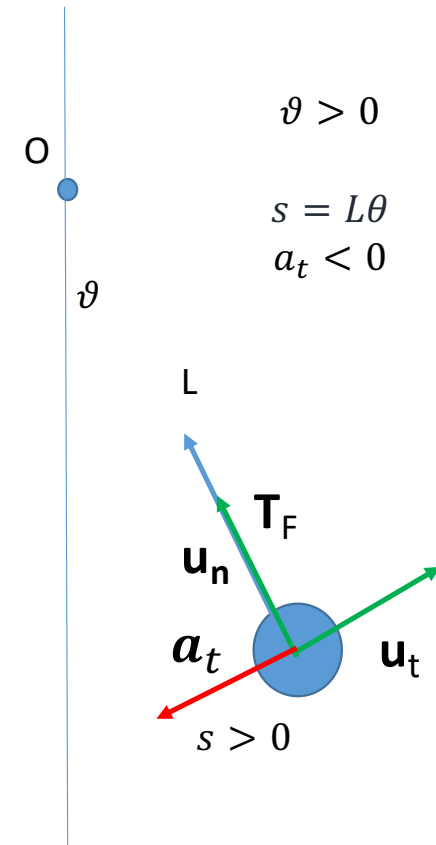
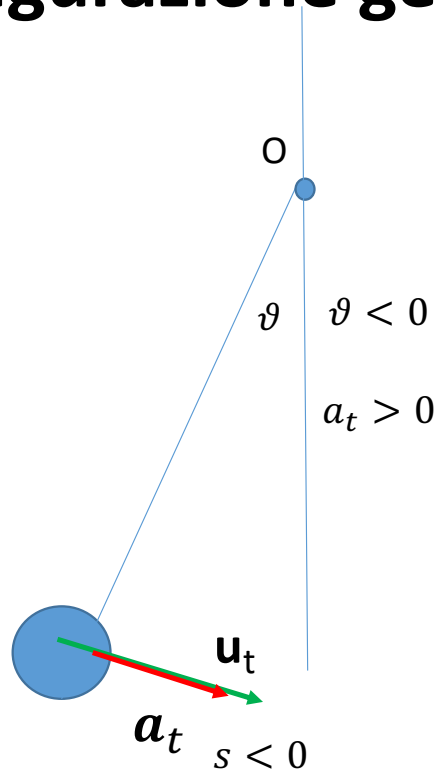
$$m\mathbf{a}_t = \mathbf{R}_t$$

$$m\mathbf{a}_n = \mathbf{R}_n$$

$$ma_n = T_F - mg \cos \vartheta$$

$$ma_t = -mg \sin \vartheta$$

$$a_t = -g \sin \vartheta$$



Pendolo semplice, equazione differenziale

$$\begin{aligned}ma_n &= T_F - mg \cos \vartheta \\ma_t &= -mg \sin \vartheta\end{aligned}$$

Consideriamo la componente tangenziale:

$$\mathbf{a}_t = -g \sin \vartheta \mathbf{u}_t$$

Ricordiamo anche che

$$\mathbf{a}_t = \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{u}_t$$

E che $s = L\theta$, si ottiene:

$$\mathbf{a}_t = L \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} \mathbf{u}_t$$

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{L} \mathbf{u}_n$$

Sostituendo nell'equazione di moto si ottiene:

$$L \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -g \sin \vartheta$$

Equazione differenziale del pendolo, risolvendola posso determinare l'incognita $\vartheta(t)$

La seconda equazione, in direzione normale

$$m \frac{v^2}{L} = T_F - mg \cos \vartheta$$

Può essere utilizzata per calcolare la tensione del filo.

Pendolo semplice, ipotesi delle piccole oscillazioni

Equazione differenziale del pendolo, non è facilmente risolvibile, dato che è non lineare per la presenza del termine $\sin \vartheta$

$$L \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -g \sin \vartheta$$

Approssimazione delle **piccole oscillazioni**. Se le oscillazioni sono piccole (pochi gradi) possiamo approssimare $\sin \vartheta \cong \vartheta$. Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$L \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -g \vartheta$$

Che possiamo riscrivere come:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{g}{L} \vartheta = 0$$

Equazione differenziale di un moto armonico $\vartheta = A \sin(\omega t + \phi)$ con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Pendolo semplice, ipotesi delle piccole oscillazioni

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{L}\vartheta = 0$$

Equazione differenziale di un moto armonico con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

La soluzione è

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

ϑ_0 , φ dipendono dalle condizioni iniziali.

Il periodo delle oscillazioni del pendolo (piccole oscillazioni) è

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Pendolo semplice, ipotesi delle piccole oscillazioni

Riassumendo, nell'ipotesi delle piccole oscillazioni, la rotazione del pendolo varia nel tempo secondo la legge:

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

L'ascissa curvilinea quindi è data da:

$$s(t) = L\theta(t) = L\vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

La velocità è pari a:

$$v = \frac{ds}{dt} = L\omega\vartheta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

E la velocità angolare:

$$\Omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \omega\vartheta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Pendolo semplice, riepilogo sulle fasi del moto

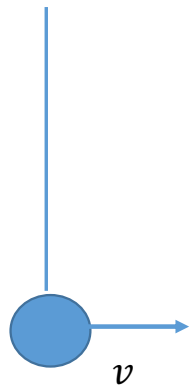
$$\vartheta = \vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\vartheta = 0$$

$$s = 0$$

$$v = L\omega\vartheta_0$$

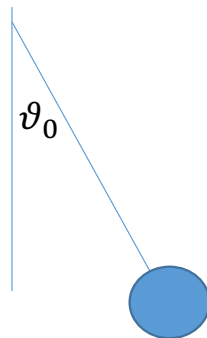


$$(\omega t + \varphi) = \frac{\pi}{2}$$

$$\vartheta = \vartheta_0$$

$$s = L\vartheta_0$$

$$v = 0$$



$$(\omega t + \varphi) = \pi$$

$$\vartheta = 0$$

$$s = 0$$

$$v = -L\omega\vartheta_0$$

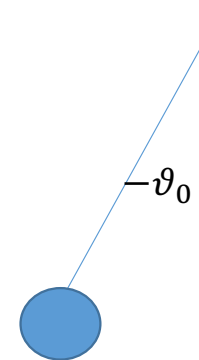


$$(\omega t + \varphi) = 3/2\pi$$

$$\vartheta = -\vartheta_0$$

$$s = -L\vartheta_0$$

$$v = 0$$



Pendolo semplice, ipotesi delle piccole oscillazioni

Una volta determinato l'angolo di rotazione del pendolo

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

l'ascissa curvilinea

$$s = L\vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

e la velocità

$$v = \frac{ds}{dt} = L\omega\vartheta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Ricordando che la risultante delle forze in direzione normale al moto è pari a:

$$ma_n = T_F - mg \cos \vartheta$$

e che l'accelerazione normale è pari a:

$$a_n = m \frac{v^2}{L}$$

Possiamo calcolare la tensione del del filo:

$$T_F = m \frac{v^2}{L} + mg \cos \vartheta$$

Momento polare

Ricordiamo la definizione di momento polare di un vettore applicato, che abbiamo visto nella parte del corso relativa ai vettori.

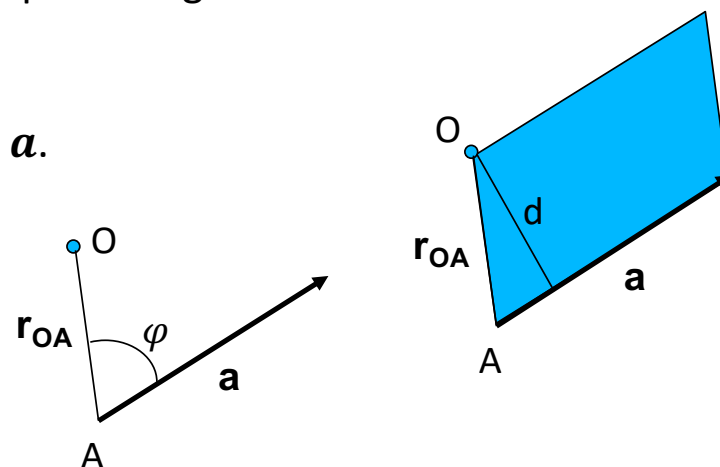
Momento polare: si definisce momento di un vettore applicato $\mathbf{a}$ con punto di applicazione A ($A, \mathbf{a}$), rispetto ad un punto generico O , il vettore $\mathbf{M}(O)$ così definito:

$$\mathbf{M}(O) = \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{a}$$

Il modulo del momento è $|\mathbf{M}(O)| = |\mathbf{r}_{OA}| |\mathbf{a}| \sin \varphi$ dove φ è l'angolo formato dai vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{r}_{OA}$, direzione ortogonale al piano definito da $\mathbf{r}_{OA}$ ed $\mathbf{a}$ e verso definito secondo la regola della mano destra.

Il modulo del momento $\mathbf{M}(O)$ indicato con $|\mathbf{M}(O)|$ è pari all'area del parallelogramma individuato dai vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{r}_{OA}$, che può essere espressa come $|\mathbf{a}|d$

$d = |\mathbf{r}| \sin \varphi$ indica il **braccio** o distanza di O dalla retta d'azione di $\mathbf{a}$.

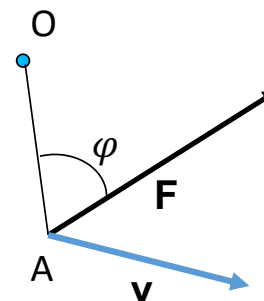


Momento polare

Questa definizione e le proprietà dei momenti che abbiamo visto nelle lezioni scorse valgono per un generico vettore applicato $\mathbf{a}$.

Nello studio della meccanica ci interessano due casi significativi

- Momento di una forza $\mathbf{F}$
- Momento della quantità di moto $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$



Momento di una forza

Momento di una forza

$$\mathbf{M}(O) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Modulo $M = r F \sin \varphi = F d$

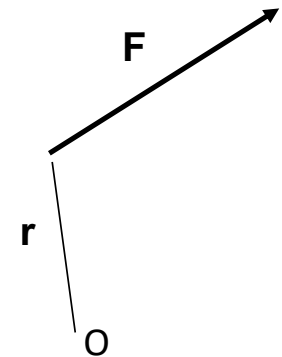
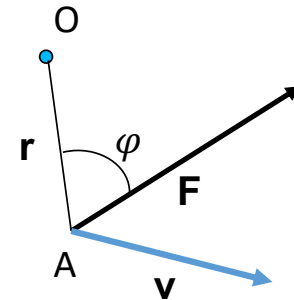
Essendo $d = r \sin \varphi$ il braccio del momento.

Dimensioni $[M] = [F]L$

unità di misura nel SI: Nm

Direzione $\rightarrow$ perpendicolare al piano che contiene $\mathbf{F}$ ed $\mathbf{r}$

Verso $\rightarrow$ con la regola della mano destra (come per il prodotto vettoriale)



Momento di una forza

Se sul punto materiale agiscono più forze

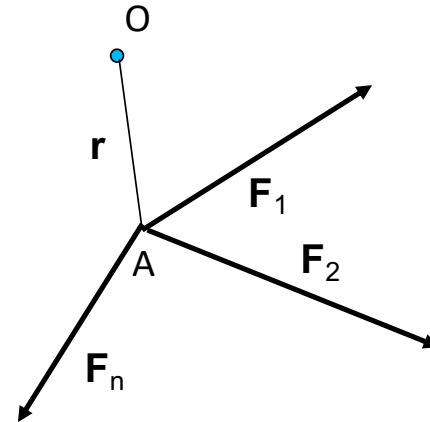
$$M(O) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_3 + \dots = \\ \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots) = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$$

Essendo

$$\mathbf{R} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots)$$

la risultante delle forze applicate in A.

Attenzione: questo risultato vale solo se le forze sono applicate tutte nello stesso punto!



Momento della quantità di moto (momento angolare)

Dato un punto materiale A che si muove con velocità $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, la sua quantità di moto è definita come:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Si definisce momento angolare o momento della quantità di moto del punto A rispetto a un dato polo O il vettore

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Il momento angolare $\mathbf{L}$ è un vettore caratterizzato da:

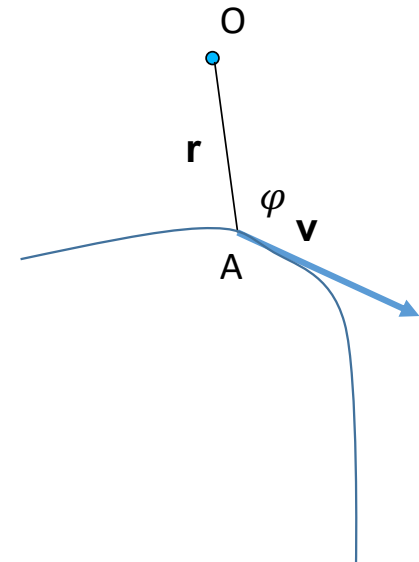
Modulo $L = mvr \sin \varphi$

Dimensioni $[L] = M[v]L = M L^2/T$

Unità di misura nel SI $\rightarrow \text{kg m}^2/\text{s}$

Direzione perpendicolare al piano che contiene $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$

Verso definito con la regola della mano destra.



Teorema del momento angolare

Consideriamo la definizione di momento angolare appena vista:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

Deriviamo rispetto al tempo (assumiamo la massa costante per semplicità)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Osserviamo che

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$$

(il prodotto vettoriale tra vettori paralleli è nullo).

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}$$

Otteniamo quindi

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$$

Teorema del momento angolare

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$$

Ma per il secondo principio della dinamica

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

Abbiamo dimostrato il teorema del momento angolare: la derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto (momento angolare) calcolata rispetto a un generico polo O è pari al momento della forza risultante $\mathbf{F}$ applicata al punto materiale rispetto ad O .