

Lezione 14– Dinamica del punto materiale

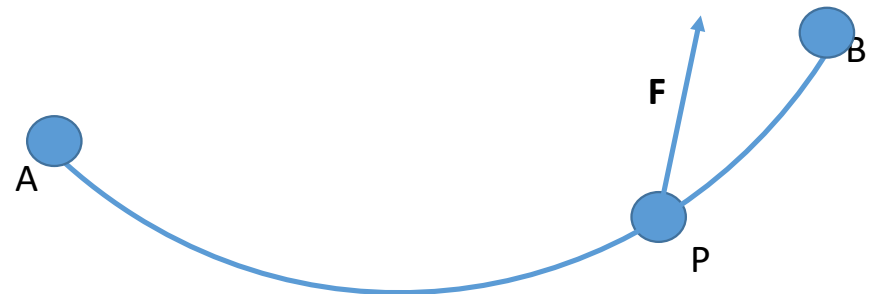
Lavoro di una forza

Consideriamo un punto materiale P di massa m che si muove lungo una traiettoria curvilinea, partendo dal punto A e arrivando al punto B , sia $\mathbf{F}$ la risultante delle forze agenti su di esso.

Si definisce lavoro della forza $\mathbf{F}$ durante lo spostamento del punto da A a B il risultato della seguente operazione:

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Il lavoro dipende dalla forza e dal percorso del punto materiale in un determinato intervallo.



Lavoro di una forza – lavoro infinitesimo

Analizziamo meglio l'integrale e consideriamo uno spostamento infinitesimo $d\mathbf{s}$.

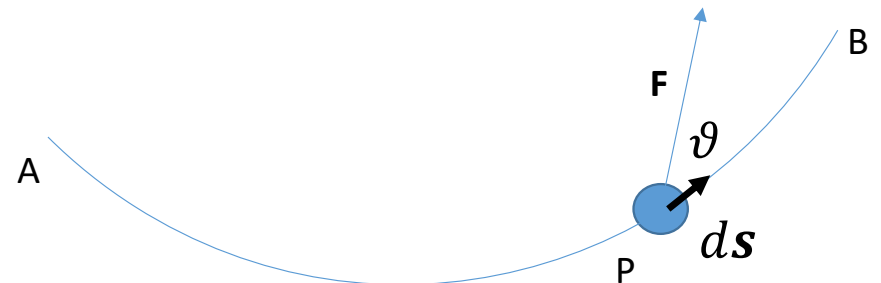
Sia la forza che lo spostamento infinitesimo sono due vettori. Si definisce il lavoro infinitesimo:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Che per la definizione di prodotto scalare risulta

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F ds \cos \vartheta$$

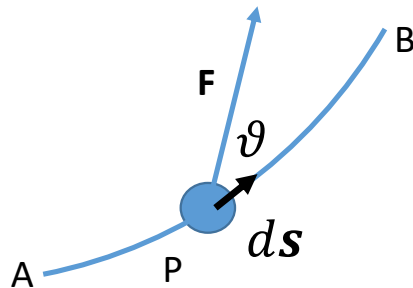
L'angolo ϑ è l'angolo che la forza $\mathbf{F}$ forma con lo spostamento $d\mathbf{s}$ (e quindi con la tangente alla traiettoria).



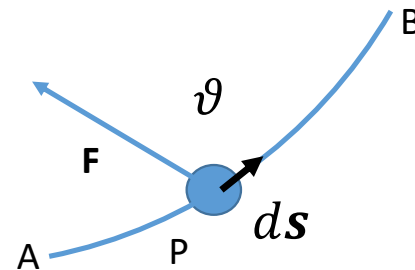
Lavoro di una forza – lavoro infinitesimo

A seconda del valore dell'angolo ϑ , il lavoro infinitesimo può essere positivo (se $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, $\cos \vartheta > 0$), negativo (se $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$, $\cos \vartheta < 0$) o nullo (se $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\cos \vartheta = 0$)

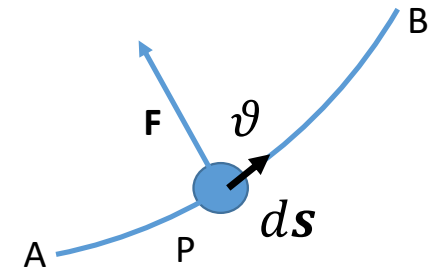
$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = Fds \cos \vartheta$$



$$dW > 0$$



$$dW < 0$$



$$dW = 0$$

Lavoro di più forze applicate nello stesso punto

Lavoro

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n$$

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_A^B (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n) \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_A^B \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s} + \cdots + \int_A^B \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{s} \\ &= W_1 + W_2 + \cdots + W_n \end{aligned}$$

Lavoro di più forze applicate nello stesso punto

Supponiamo che sul punto materiale siano applicate più forze, calcoliamo la risultante $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n$$

Il lavoro della risultante $\mathbf{F}$ è dato da:

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Che possiamo sviluppare:

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n) \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s} + \cdots + \int_A^B \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{s} \\ &= W_1 + W_2 + \cdots + W_n \end{aligned}$$

Otteniamo quindi che:

$$W = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$$

Il lavoro della risultante è pari alla somma dei lavori delle singole forze.

Lavoro, potenza, unità di misura

Abbiamo definite il lavoro di una forza applicate a un punto che percorre una traiettoria dal punto A al punto B come:

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Si definisce la potenza come la derivata del lavoro rispetto al tempo:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Analizziamo le unità di misura:

Lavoro:

- Dimensioni: $[W] = [F]L$
- Unità di misura nel sistema internazionali: $Nm = J$ (Joule)

Potenza

- Dimensioni $[P] = [W]/T = [F]L/T = [F][v]$
- Unità di misura (SI): $Nm/s = J/s = W$ (Watt)

Lavoro, potenza, unità di misura

Analizziamo di nuovo la definizione di potenza, considerando uno spostamento infinitesimo:

Abbiamo visto che

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Sostituendo nell'espressione della potenza otteniamo

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Punto per punto, la potenza si ottiene calcolando il prodotto scalare tra forza e velocità.

Energia cinetica

Energia cinetica. Consideriamo nuovamente il punto materiale di massa m che si muove lungo una data traiettoria. Indichiamo con $\boldsymbol{v}$ la sua velocità in un determinato istante e con v il modulo della velocità, si definisce energia cinetica del punto materiale la quantità:

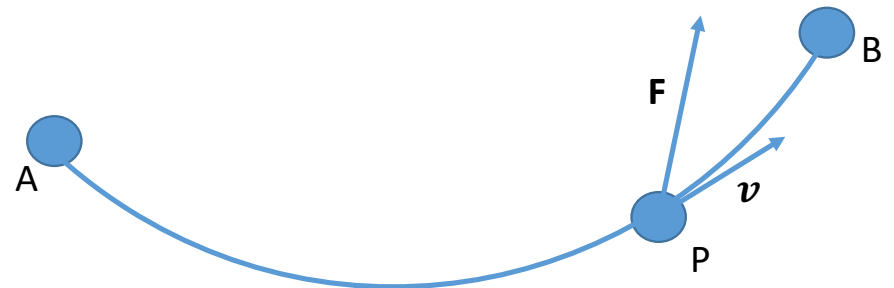
$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Analisi dimensionale:

$$[E_k] = M(L/v)^2 = ML/v^2 L = M[a]L = [F]L = [W]$$

L'energia cinetica ha le stesse dimensioni del lavoro.

Nel sistema internazionale, anche per l'energia cinetica l'unità di misura è il J (Joule).



Lavoro ed energia cinetica #1

Consideriamo nuovamente il lavoro di una forza lungo un dato percorso. Punto per punto possiamo scomporre la forza nella componente normale e tangenziale alla traiettoria:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n$$

Sostituendo nell'espressione del lavoro si ottiene:

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B (\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n) \cdot d\mathbf{s}$$

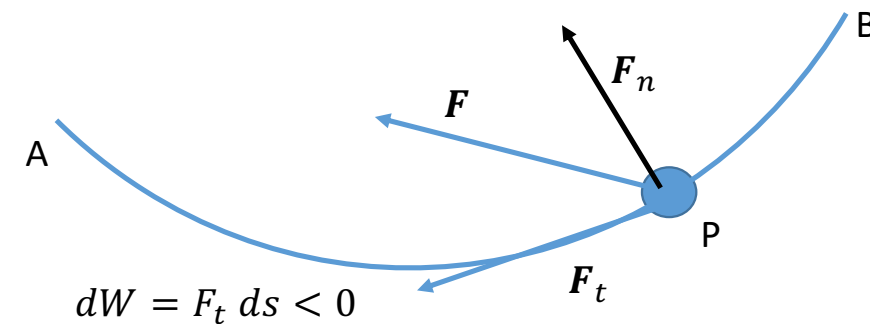
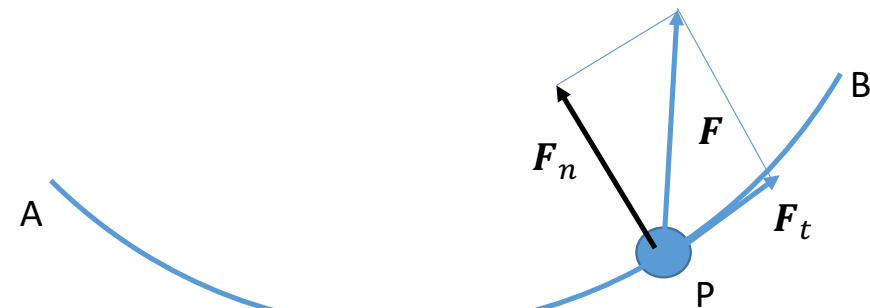
Analizziamo il lavoro infinitesimo:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n) \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} + \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{s}$$

Ma $\mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{s} = 0$ dato che per definizione $\mathbf{F}_n$ e $d\mathbf{s}$ sono tra loro perpendicolari, risulta quindi

$$dW = \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} = F_t ds$$

Essendo F_t la componente (scalare) di $\mathbf{F}$ in direzione tangenziale.



Lavoro ed energia cinetica #2

Abbiamo espresso il lavoro infinitesimo come:

$$dW = F_t ds$$

Dal secondo principio della dinamica, abbiamo visto che

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Considerando solo le componenti di forza e accelerazione in direzione tangenziale, risulta

$$F_t = ma_t = m \frac{dv}{dt}$$

Ma dall'analisi cinematica abbiamo visto che la componente tangenziale dell'accelerazione è data da

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Sostituendo nell'espressione del lavoro infinitesimo si ottiene:

$$dW = F_t ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = mvdv$$



Lavoro ed energia cinetica #3

Nella slide precedente, utilizzando la definizione di lavoro, la scomposizione del vettore forza in direzione normale e tangenziale, il secondo principio della dinamica e la definizione di accelerazione tangenziale, abbiamo espresso il lavoro infinitesimo come:

$$dW = mv dv$$

Consideriamo adesso uno spostamento finito, dal punto A al punto B e calcoliamo il lavoro, utilizzando i risultati appena trovati

$$\begin{aligned} W &= \int_{W_A}^{W_B} dW = \int_{v_A}^{v_B} mv dv = \frac{1}{2} mv^2 \Big|_{v_A}^{v_B} \\ &= \frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2 = E_{kB} - E_{kA} \end{aligned}$$



$$W = E_{kB} - E_{kA}$$

Lavoro ed energia cinetica #4

Abbiamo dimostrato quindi che

$$W = E_{kB} - E_{kA}$$

Il lavoro della risultante delle forze applicate a un punto materiale nel percorso dal punto A al punto B è pari alla variazione dell'energia cinetica.

(Teorema dell'energia cinetica).

Questo risultato ci permette di analizzare la dinamica di un sistema considerando che cosa succede nel passaggio da una configurazione A a una configurazione B.



Lavoro della forza peso #1

Calcoliamo il lavoro della forza peso applicata a un corpo che passa dalla posizione A alla posizione B

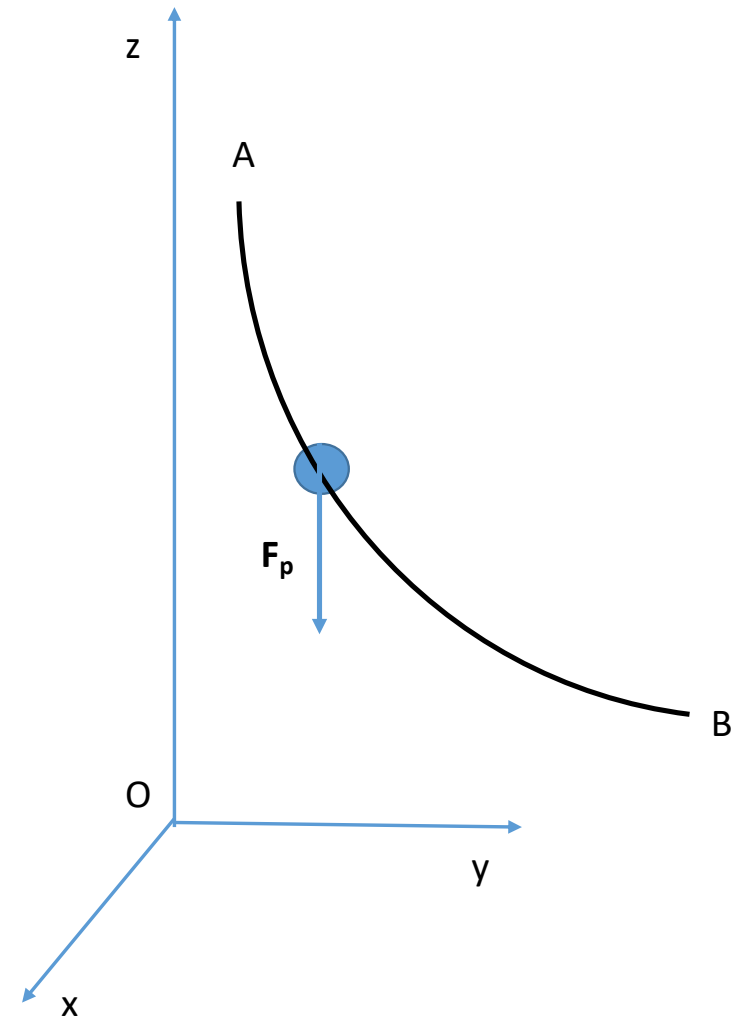
$$W = \int_A^B \mathbf{F}_p \cdot d\mathbf{s}$$
$$\mathbf{F}_p = m\mathbf{g}$$

$$W = \int_A^B m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{s}$$

Prendiamo un Sistema di riferimento con asse z verticale ascendente

$$d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$$

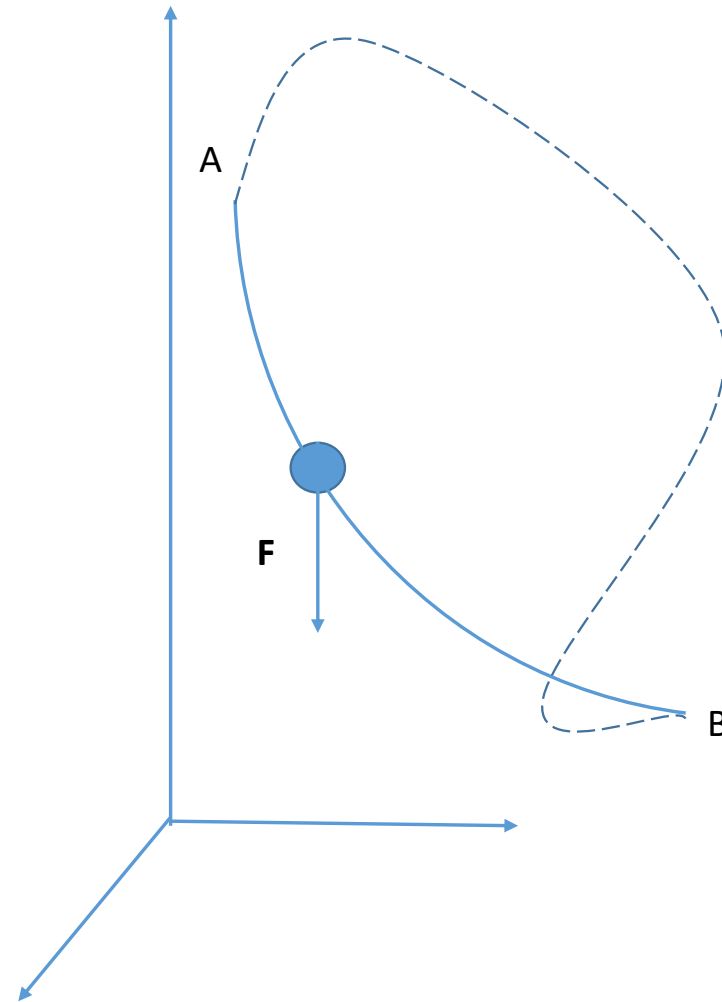


Lavoro della forza peso #2

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B -mg\mathbf{k} \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = \\ &= \int_{z_A}^{z_B} -mgdz = -mg(z_B - z_A) \end{aligned}$$

Si osserva che:

- Il lavoro dipende soltanto dalla posizione iniziale e finale del punto materiale e non dal percorso seguito.
- Il lavoro dipende solo dalla quota verticale del punto iniziale e finale (in questo caso indicata con z)

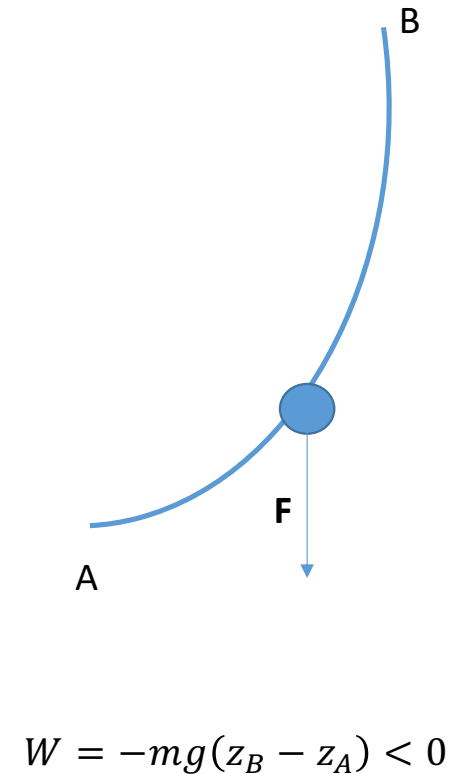
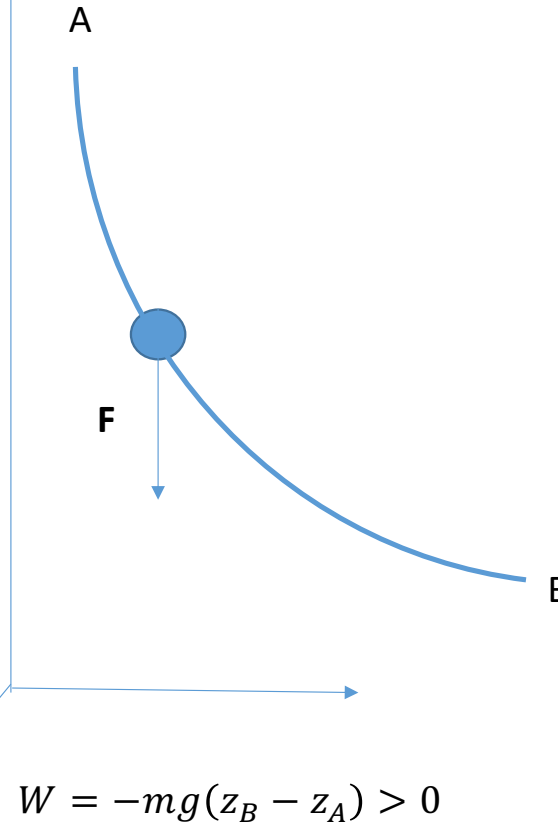


Lavoro della forza peso #3

$$W = -mg(z_B - z_A)$$

Si osserva anche che:

- Se la quota del punto materiale diminuisce tra il punto di partenza e quello di arrivo (cioè se il punto scende verso il basso) il lavoro della forza peso è positivo.
- Se la quota del punto materiale aumenta tra il punto di partenza e quello di arrivo (cioè se il punto sale verso l'alto) il lavoro della forza peso è negativo.



Lavoro della forza peso #4, energia potenziale

Definiamo una funzione

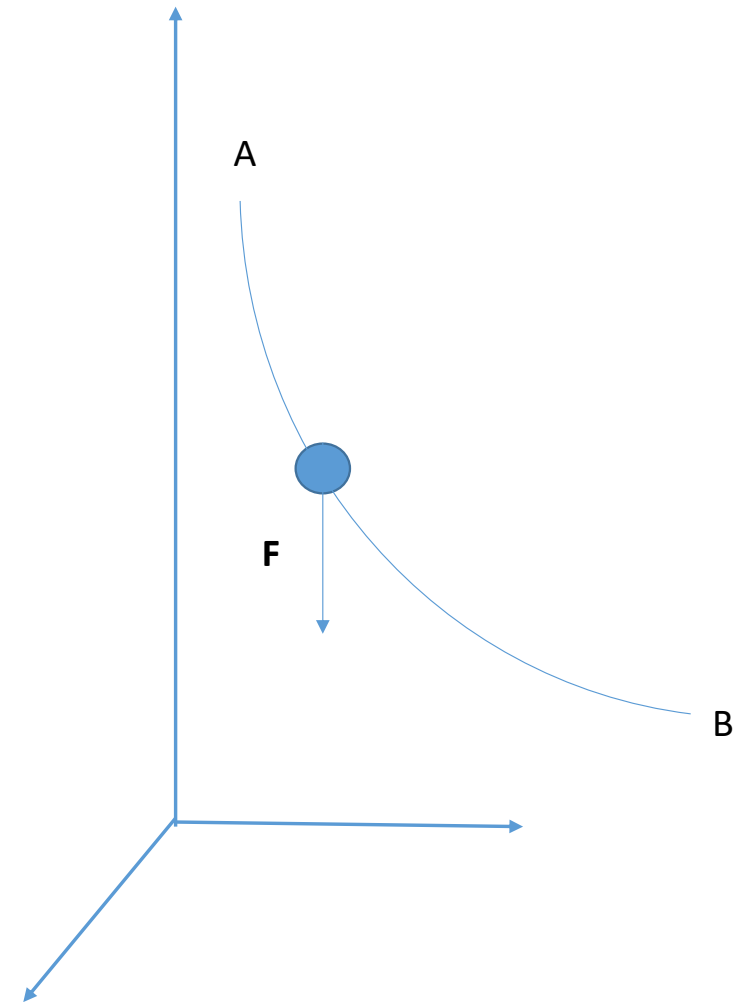
$$E_p(z) = mgz$$

Che chiamiamo energia potenziale della forza peso.

Il lavoro della forza peso nel passaggio dal punto A al punto B è pari a:

$$\begin{aligned} W &= -mg(z_B - z_A) = -(E_p(z_B) - E_p(z_A)) \\ &= -\Delta E_p \end{aligned}$$

Il lavoro della forza peso tra A è opposto alla variazione di energia potenziale tra A e B.



Lavoro ed energia cinetica - esempio

Come possiamo utilizzare i risultati appena visti per l'analisi della dinamica del punto materiale?

Un esempio:

Un punto materiale è lanciato verso l'alto con velocità iniziale v_0 , quale sarà la massima altezza raggiunta?

.

Lavoro ed energia cinetica - esempio

Possiamo analizzare il moto applicando la seconda legge di Newton, calcolando l'accelerazione e tramite integrazione calcolare la velocità e lo spostamento:

$$v(t) = v_0 - gt$$
$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

Nel punto in cui si raggiunge la quota più alta la velocità si annulla

$$0 = v_0 - gt_M$$

Da cui ricaviamo

$$t_M = \frac{v_0}{g}$$

Sostituendo nell'espressione dello spostamento troviamo

$$y_M = v_0 t_M - \frac{1}{2} gt_M^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$

Lavoro ed energia cinetica - esempio

Analizziamo il problema con considerazioni sul lavoro e la variazione di energia cinetica.

Energia cinetica iniziale:

$$E_{k0} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Energia cinetica finale (quando raggiungo la massima altezza la velocità si annulla):

$$E_{kf} = 0$$

Variazione di energia cinetica dall'istante iniziale all'istante in cui il punto raggiunge la massima altezza

$$\Delta E_k = E_{kf} - E_{k0} = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

Lavoro ed energia cinetica - esempio

Lavoro della forza peso durante il volo

$$W = \int_0^{y_M} -mg dy = -mg(y_M - y_0) = -mgy_M$$

Dato che per il teorema dell'energia cinetica risulta

$$W = \Delta E_k$$

Sostituendo i valori calcolati in precedenza si ottiene

$$-mgy_M = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

Da cui possiamo ricavare

$$y_M = \frac{v_0^2}{2g}$$

Lavoro di una forza costante #1

Supponiamo che sul punto materiale agisca una forza $\mathbf{F}_c$ costante in modulo, direzione e verso. Supponiamo per semplicità che la sua direzione sia parallela all'asse x e il suo verso sia opposto:

$$\mathbf{F}_c = -F\mathbf{i}$$

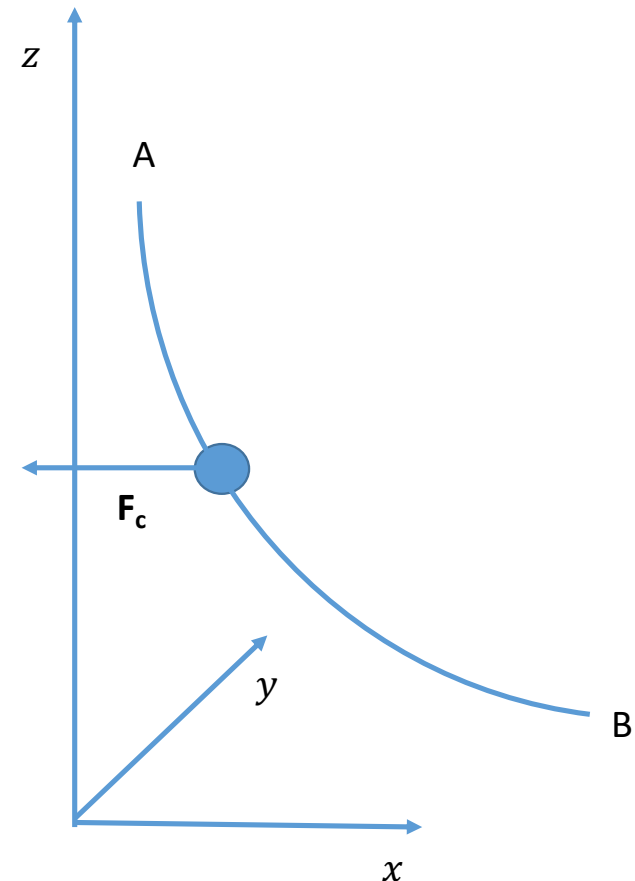
Calcoliamo il lavoro in corrispondenza del passaggio dal punto A al punto B lungo una traiettoria generica:

$$W = \int_A^B \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s}$$

Sostituendo l'espressione della forza e esprimendo lo spostamento infinitesimo $d\mathbf{s}$ come:

$$d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

Si ottiene...



Lavoro di una forza costante #2

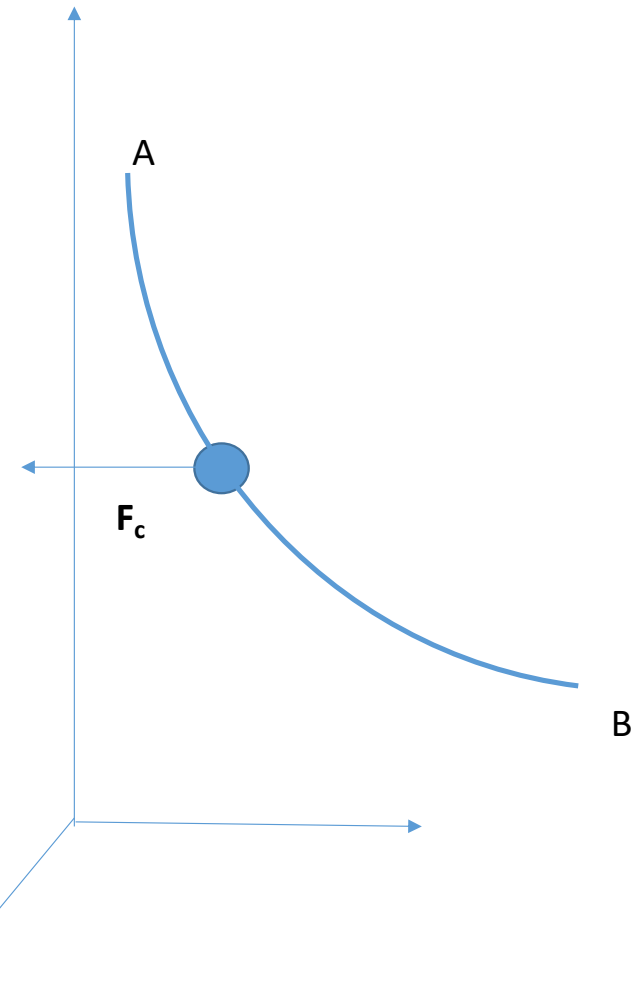
$$\begin{aligned} W &= \int_A^B -F\mathbf{i} \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = \\ &= \int_{x_A}^{x_B} -Fdx = -F(x_B - x_A) \end{aligned}$$

Anche in questo caso il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale e finale e non dal percorso. Possiamo definire una funzione (energia potenziale per la forza costante diretta come l'asse x)

$$E_p(x) = Fx$$

Tale che:

$$W = -F(x_B - x_A) == -\left(E_p(x_B) - E_p(x_A)\right) = -\Delta E_p$$



Lavoro di una forza costante #3

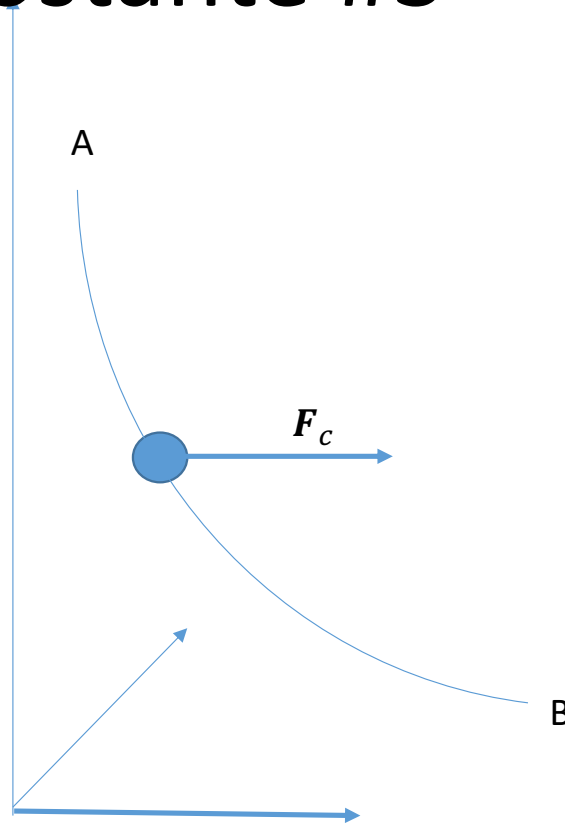
Se il verso della forza $\mathbf{F}_c$ è concorde con l'asse x si ha:

$$W = \int_A^B \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s}$$

$$\mathbf{F}_c = F\mathbf{i}$$

$$W = \int_A^B F\mathbf{i} \cdot d\mathbf{s}$$

$$d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$



Lavoro di una forza costante #4

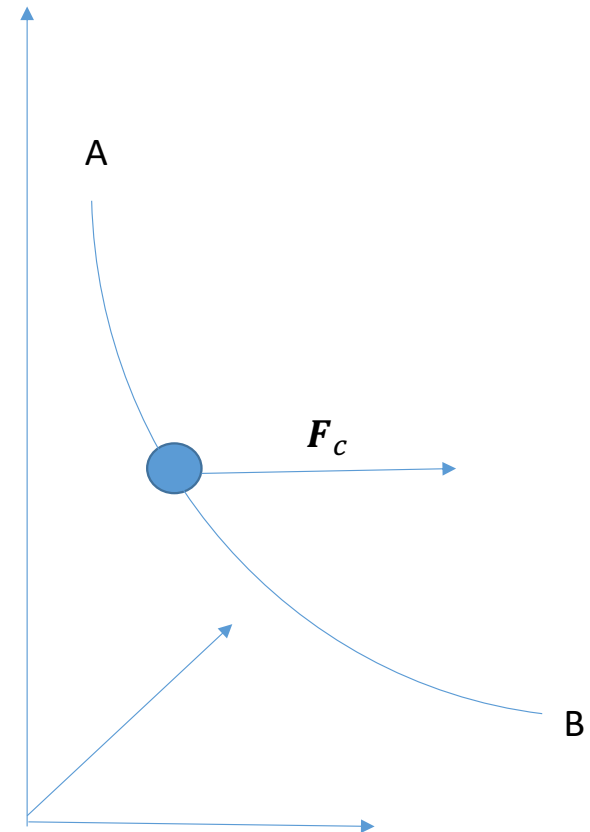
$$\begin{aligned} W &= \int_A^B F \mathbf{i} \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) = \\ &= \int_{x_B}^{x_A} F dx = F(x_B - x_A) \end{aligned}$$

Anche in questo caso possiamo definire una funzione energia potenziale, che in questo caso vale:

$$E_p(x) = -Fx$$

Tale che

$$W = F(x_B - x_A) = -\left(E_p(x_B) - E_p(x_A)\right) = -\Delta E_p$$



Lavoro di una forza elastica #1

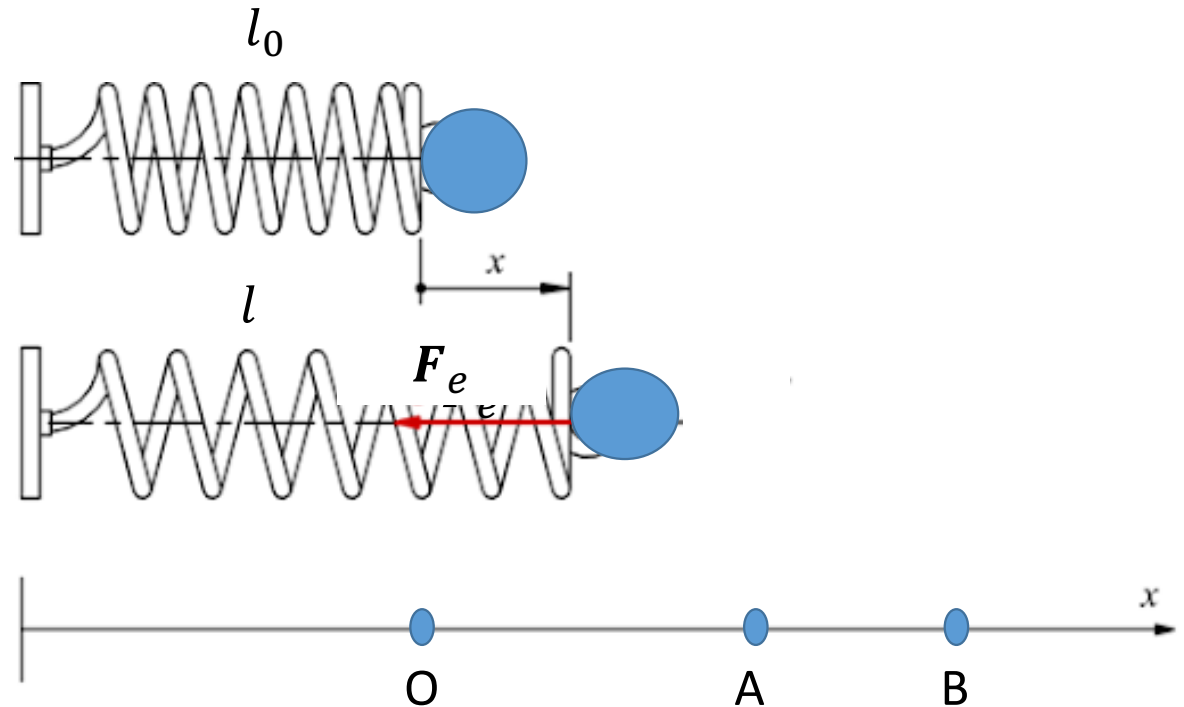
Consideriamo un elemento elastico ideale allineato con l'asse x , scegliamo l'origine del sistema di riferimento nella posizione indeformata dell'elemento, la variazione di lunghezza sarà quindi:

$$x = l - l_0$$

E la forza elastica:

$$\mathbf{F}_e = -kx\mathbf{i}$$

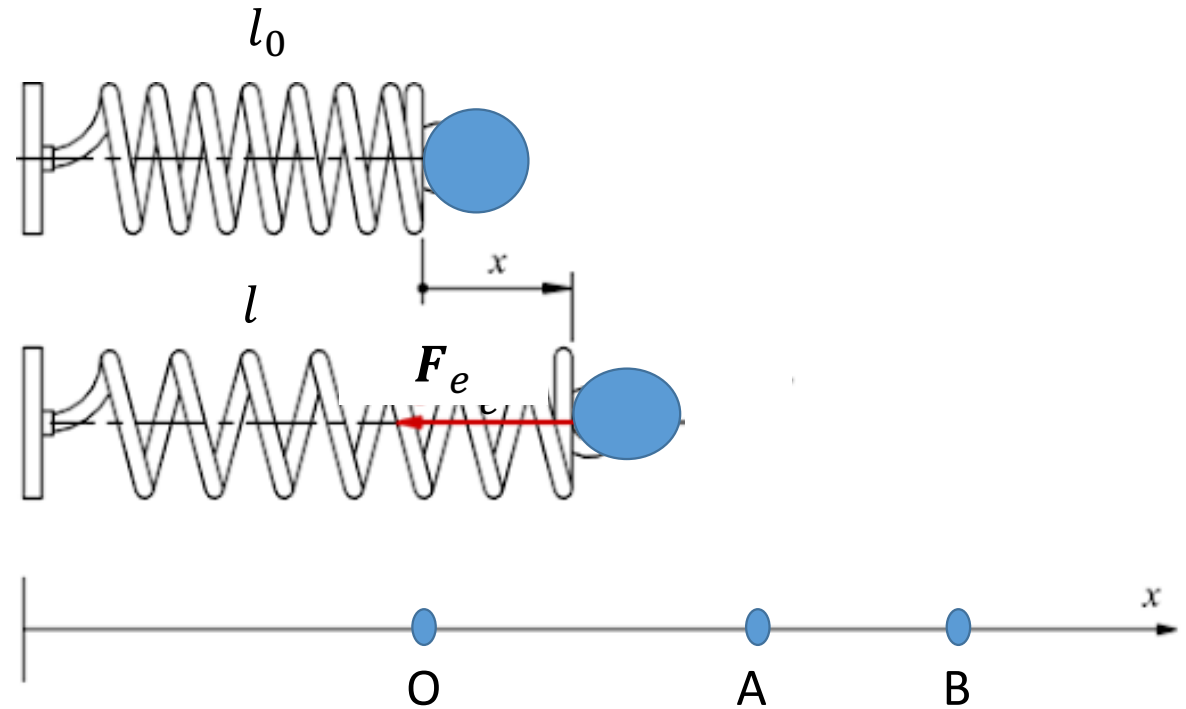
Calcoliamo il lavoro della forza elastica nel passaggio dalla posizione A (ascissa x_A) alla posizione B (ascissa x_B).



Lavoro di una forza elastica #2

Calcoliamo il lavoro:

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{s} = \int_{x_A}^{x_B} -kx dx \\ &= -k \int_{x_A}^{x_B} x dx = -\frac{1}{2} kx^2 \Big|_{x_A}^{x_B} \\ &= -\frac{k}{2} (x_B^2 - x_A^2) \end{aligned}$$



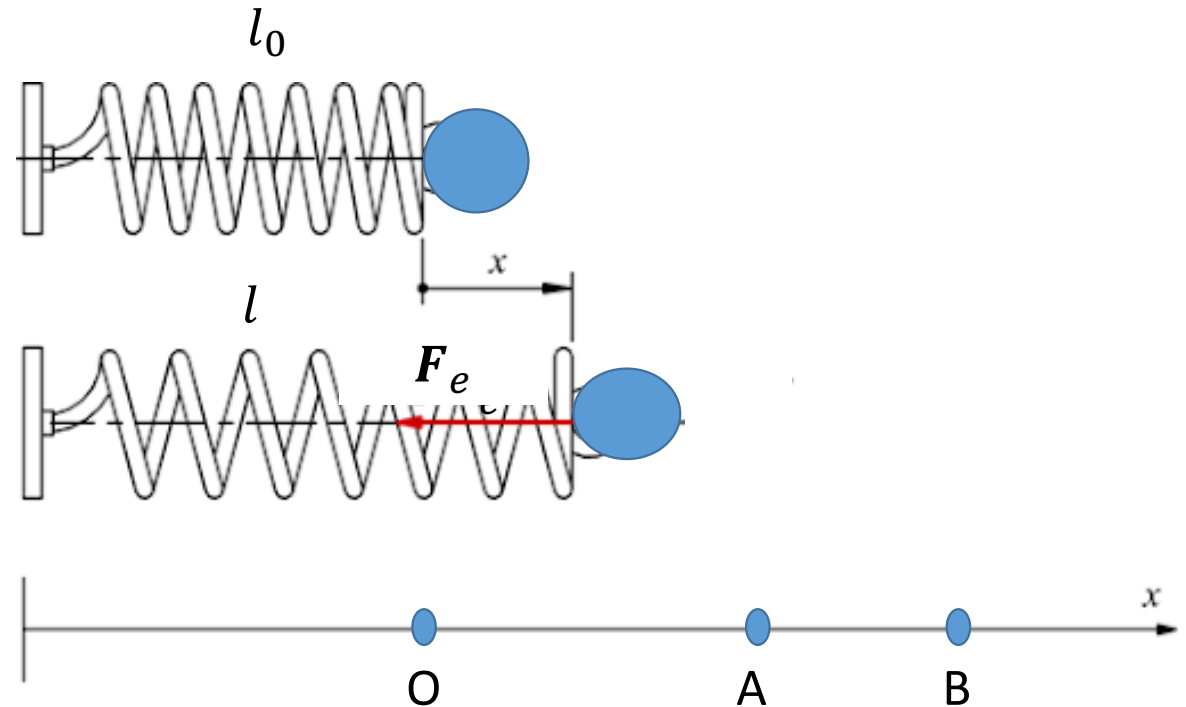
Lavoro di una forza elastica #3

Anche in questo caso il lavoro dipende solo dalle configurazioni iniziale e finale e non dal percorso. Possiamo definire una funzione energia potenziale della forza elastica come:

$$E_P(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

Ottenendo:

$$\begin{aligned} W &= -(E_P(x_B) - E_P(x_A)) \\ &= -\Delta E_P \end{aligned}$$



Lavoro ed energia potenziale

Nei casi analizzati finora abbiamo visto che il lavoro dipende solo dalla configurazione iniziale e finale e non dal percorso e abbiamo definito una funzione della posizione energia potenziale tale che:

$$W = -\Delta E_p$$

Questo risultato vale sempre, per qualsiasi forza?

Abbiamo verificato che vale per

- Forza peso
- Forza costante
- Forza elastica

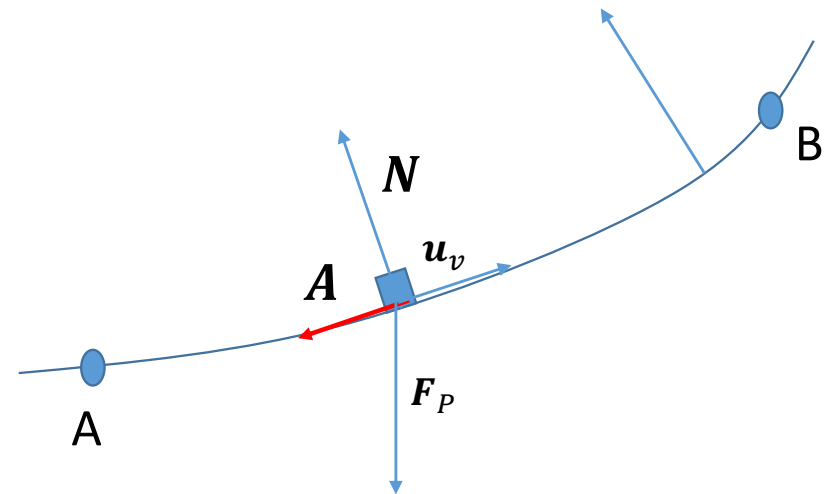
Analizziamo un altro esempio – forza di attrito

Lavoro della forza di attrito #1

La forza di attrito dinamico ha modulo pari a $\mu_D N$, essendo N la componente della reazione vincolare perpendicolare alla traiettoria e μ_D il coefficiente di attrito dinamico. La direzione della forza di attrito è tangente alla traiettoria, il verso opposto alla velocità. Possiamo quindi scrivere la forza di attrito come:

$$\mathbf{A} = -\mu_D N \mathbf{u}_v$$

Essendo $\mathbf{u}_v$ il versore che identifica la direzione della velocità (è uguale al versore tangente alla traiettoria $\mathbf{u}_t$ se il punto percorre la traiettoria in senso concorde con l'ascissa curvilinea).



Lavoro della forza di attrito #2

Se conosco la velocità lo posso scrivere come:

$$\mathbf{u}_v = \frac{\mathbf{v}}{v}$$

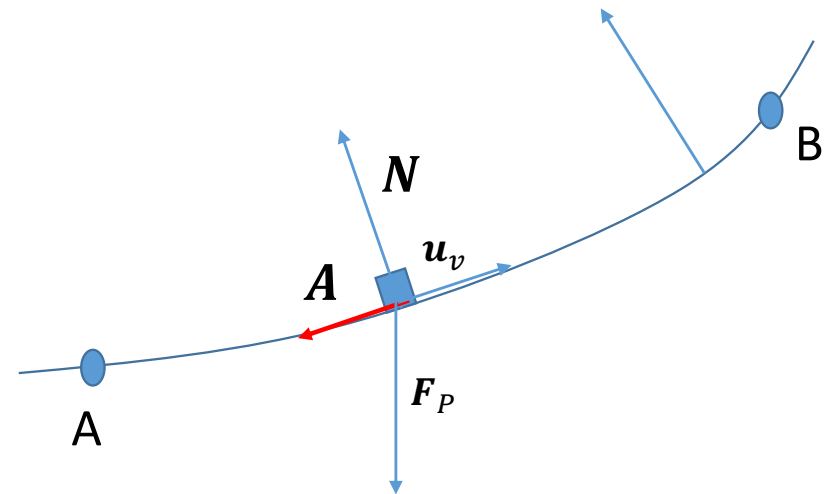
Calcoliamo il lavoro tra A e B

$$W = \int_A^B \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} == \int_A^B -\mu_D N \mathbf{u}_v \cdot d\mathbf{s}$$

Si osserva che $\mathbf{u}_v \cdot d\mathbf{s} = ds$ quindi risulta

$$W = \int_A^B -\mu_D N ds$$

Per risolvere questo integrale dobbiamo conoscere il percorso effettivo.



Lavoro della forza di attrito #3

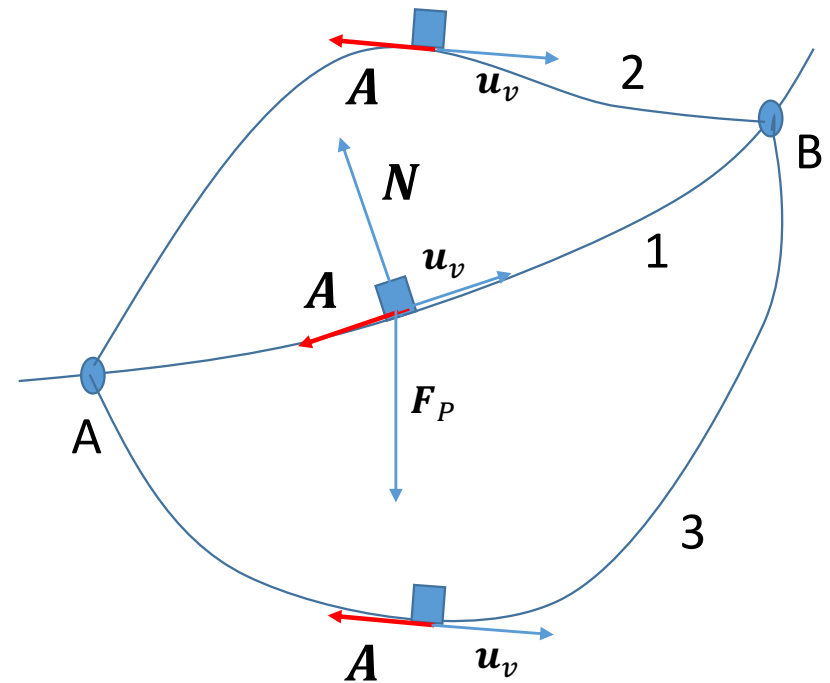
Abbiamo verificato quindi che il lavoro della forza di attrito:

$$\mathbf{A} = -\mu_D N \mathbf{u}_v$$

$$W = \int_A^B -\mu_D N ds$$

Dipende dal percorso, quindi se definisco tre diversi percorsi, 1, 2 e 3 per andare da A a B, ottengo tre valori diversi di lavoro:

$$W_1 \neq W_2 \neq W_3$$



Lavoro ed energia potenziale

Torniamo alla domanda delle slide precedente, la relazione tra lavoro ed energia potenziale

$$W = -\Delta E_p$$

Vale sempre?

Risposta: NO

Abbiamo verificato che vale per

- Forza peso
- Forza costante
- Forza elastica

Ma **non vale** per la forza di attrito.

Forze conservative

Definizioni:

- Una forza si dice **conservativa** se per essa il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale e finale e non dal percorso.
- Per le forze conservative è possibile definire **l'energia potenziale**, una grandezza scalare $E_p(\mathbf{r})$ funzione solo della posizione (identificata nel caso generale dal vettore $\mathbf{r}$ definito rispetto a un dato sistema di riferimento) tale che

$$W = -\Delta E_p$$

- Una forza in cui il lavoro dipende dalla posizione iniziale e finale, ma anche dal percorso (ad esempio la forza di attrito) si dice **non conservativa**.

Forze conservative e non conservative

Riassumendo, abbiamo definito il lavoro di una forza applicata a un punto materiale che passa dalla posizione A alla posizione B come:

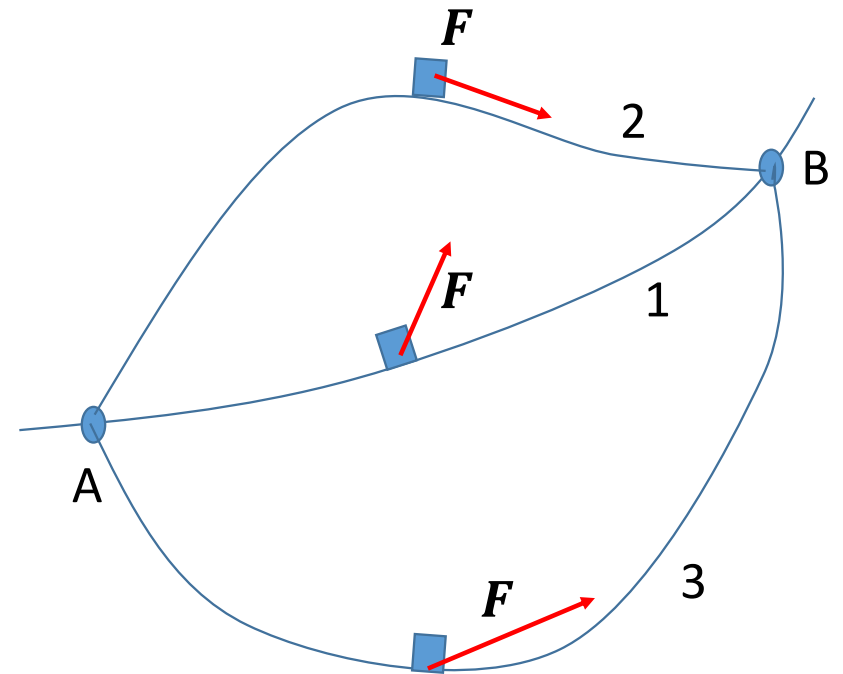
$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

se la forza $\mathbf{F}$ è conservativa il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale e finale ma non dal percorso

$$W_1 = W_2 = W_3$$

Se la forza $\mathbf{F}$ non è conservativa il lavoro dipende anche dal percorso quindi:

$$W_1 \neq W_2 \neq W_3$$



Lavoro, percorso diretto e inverso

Consideriamo un percorso tra due punti A e B. Il lavoro per andare da A a B (percorso diretto) vale:

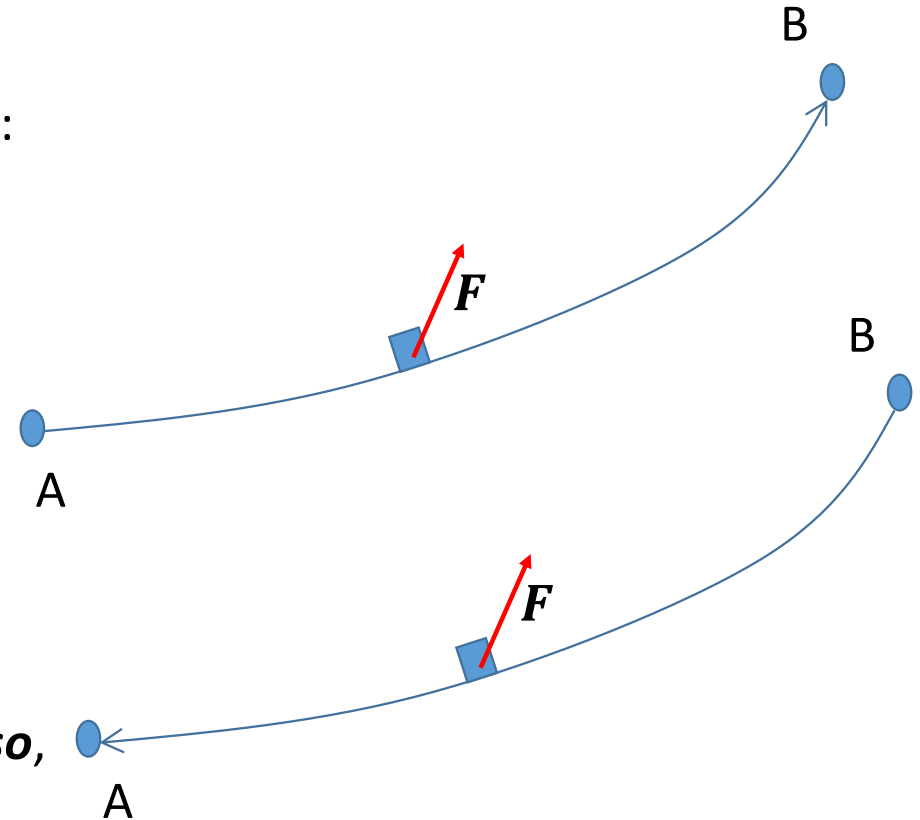
$$W_d = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Il lavoro per passare da B ad A (percorso inverso) vale:

$$W_i = \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Se percorriamo **lo stesso percorso in senso inverso**, sia che nel caso di forza conservativa che non conservativa risulta

$$W_i = -W_d$$



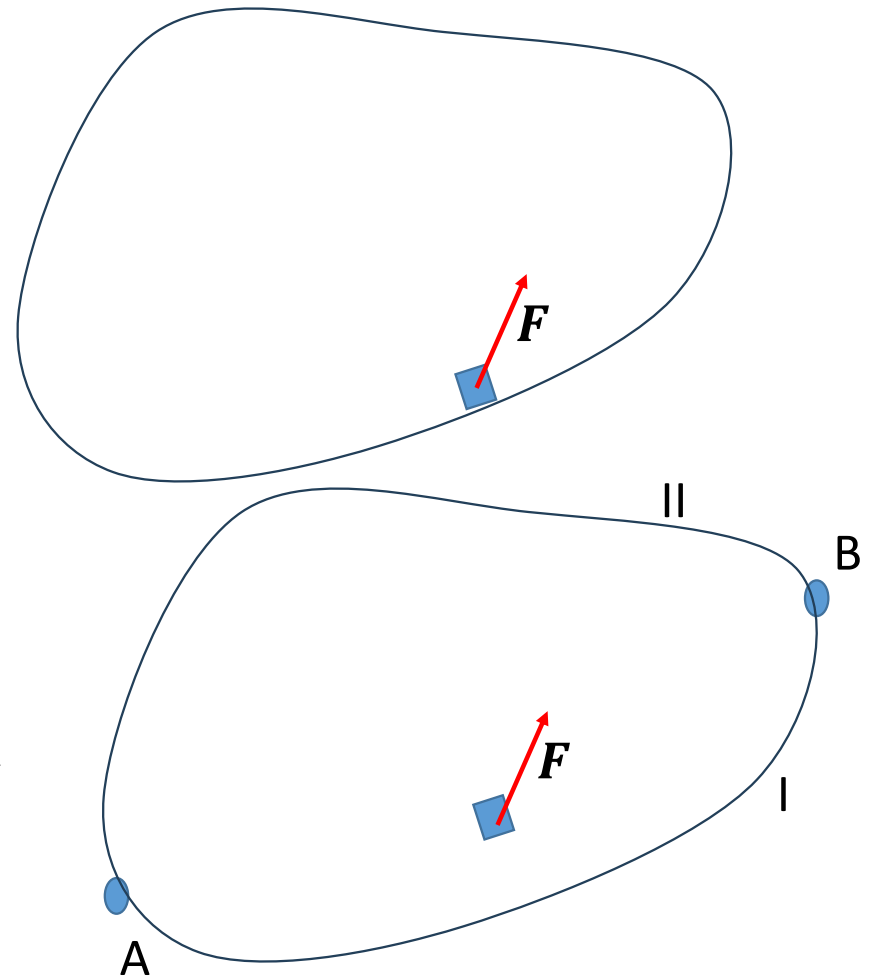
Lavoro, percorso chiuso

Calcoliamo il lavoro di una forza applicata a un punto che percorre un percorso chiuso

$$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Possiamo definire due punti arbitrari sul A e B percorso e dividere il percorso in due tratti I e II.

$$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_I + \int_B^A (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{II}$$



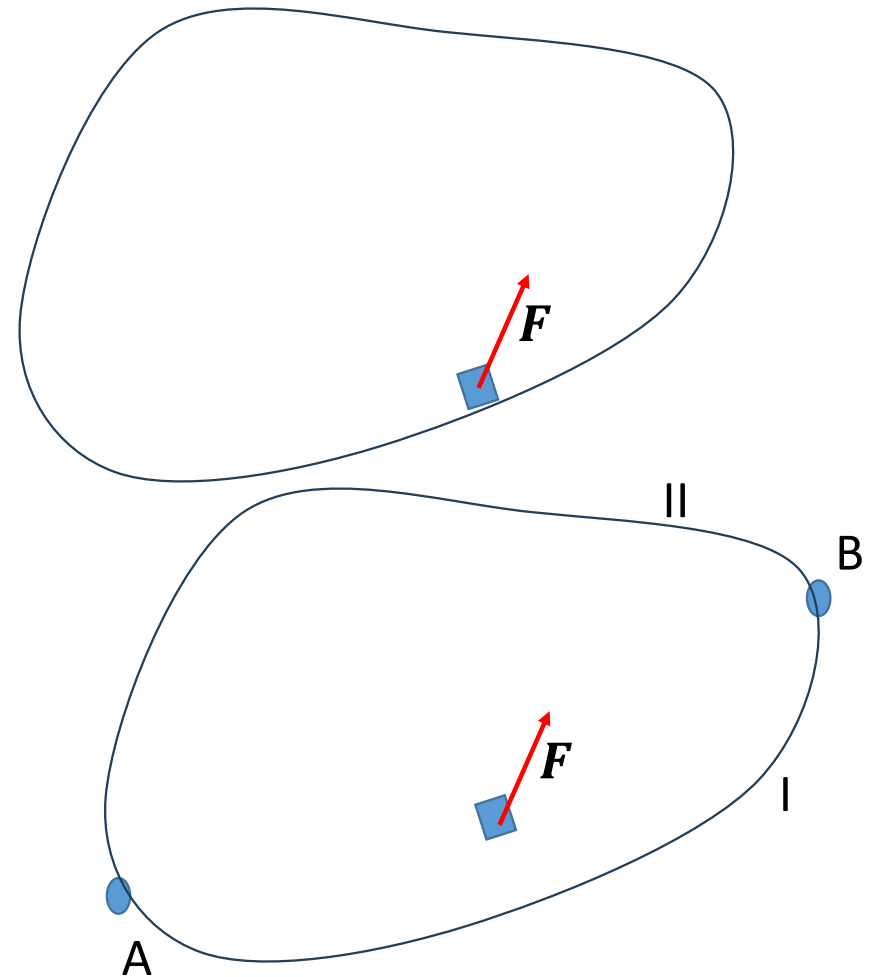
Lavoro, percorso chiuso

Se la forza è conservativa il lavoro è indipendente dal percorso e quindi

$$\begin{aligned} W &= \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_I + \int_B^A (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{II} \\ &= -(E_P(\mathbf{r}_B) - E_P(\mathbf{r}_A)) - (E_P(\mathbf{r}_A) - E_P(\mathbf{r}_B)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se invece la forza è non conservativa

$$\begin{aligned} W &= \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_I + \int_B^A (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{II} \\ &= \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_I - \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{II} \neq 0 \end{aligned}$$

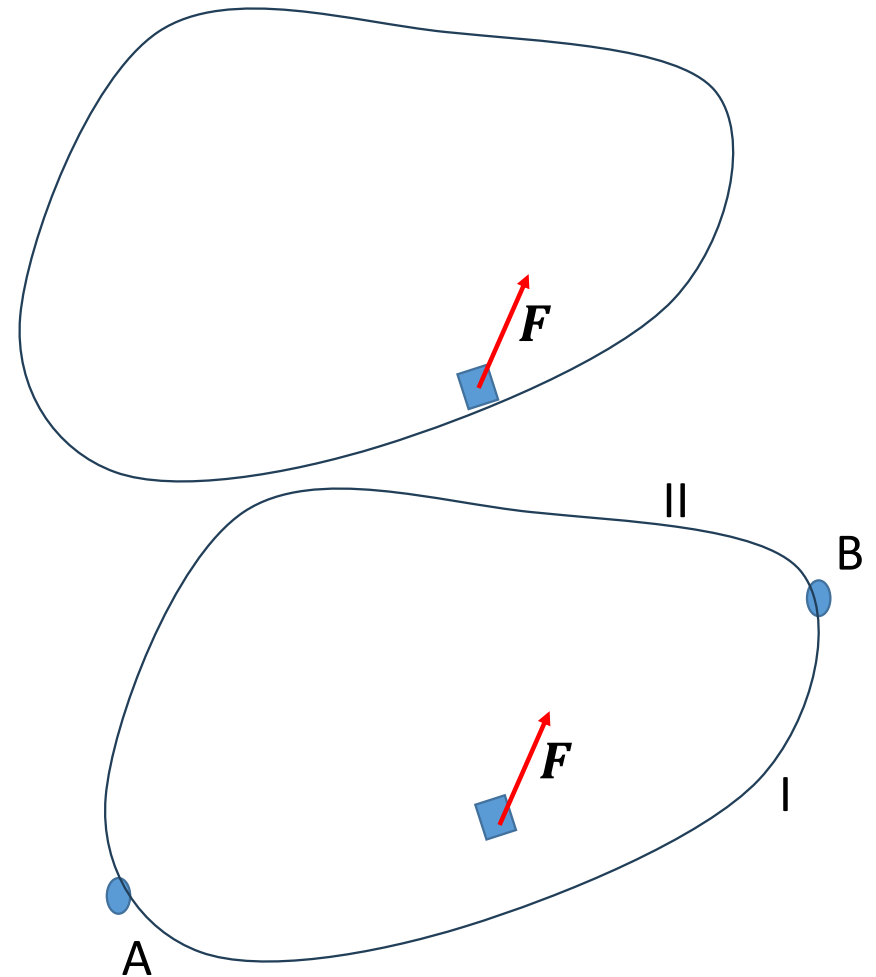


Lavoro, percorso chiuso

Se la forza è conservativa, per qualunque percorso chiuso risulta

$$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Questa è un'altra definizione di forza conservativa.



Energia potenziale

Energia potenziale

- Per le forze conservative è possibile definire ***l'energia potenziale***, una grandezza scalare $E_P(\mathbf{r})$ funzione solo della posizione (identificata nel caso generale dal vettore $\mathbf{r}$ definito rispetto a un dato sistema di riferimento) tale che

$$W = -\Delta E_P$$

Per un percorso dal punto A al punto B abbiamo

$$\Delta E_P = E_P(\mathbf{r}_B) - E_P(\mathbf{r}_A)$$

$E_P(\mathbf{r})$ è una funzione della posizione che dipende dal tipo di forza

Energia potenziale

$E_P(\mathbf{r})$ è una funzione della posizione che dipende dal tipo di forza.

Per la forza peso

$$E_P(\mathbf{r}) = E_P(z) = mgz$$

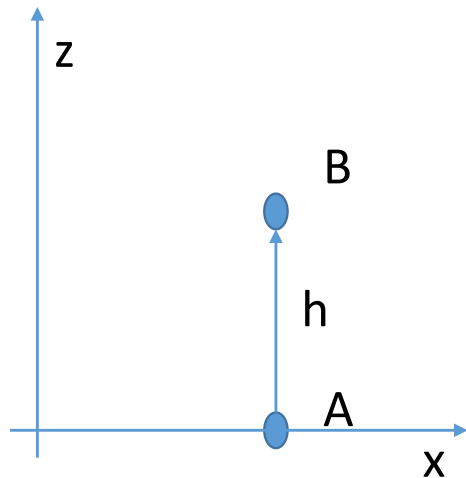
Per una forza elastica che agisce lungo la direzione x

$$E_P(\mathbf{r}) = E_P(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

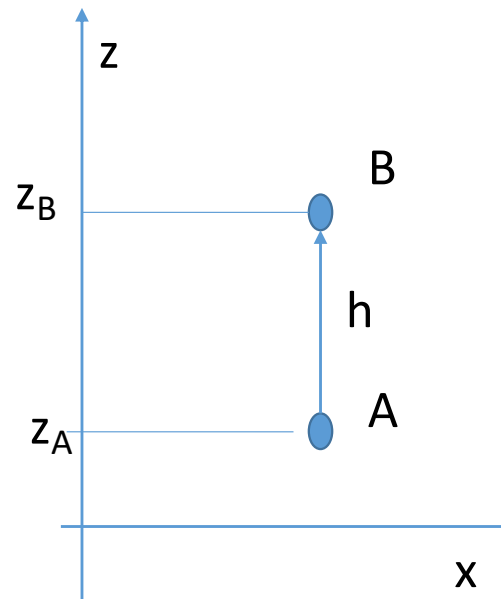
Ecc.

Energia potenziale

Osserviamo che la posizione $\mathbf{r}$ è espressa rispetto a un dato sistema di riferimento, se cambia il sistema di riferimento cambiano i valori di $E_P(\mathbf{r})$ nei singoli punti, ma non la variazione. Per la forza peso ad esempio



$$\begin{aligned}E_P(z_A) &= mgz_A = 0 \\E_P(z_B) &= mgz_B = mgh \\ \Delta E_P &= E_P(z_B) - E_P(z_A) = mgh\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}E_P(z_A) &= mgz_A \\E_P(z_B) &= mgz_B \\ \Delta E_P &= E_P(z_B) - E_P(z_A) = mgh\end{aligned}$$

Energia potenziale

La posizione $\mathbf{r}$ è espressa rispetto a un dato sistema di riferimento, se cambia il sistema di riferimento cambiano i valori di $E_P(\mathbf{r})$ nei singoli punti, ma non la variazione.

In altri termini, se cambia il sistema di riferimento e la posizione è espressa dal vettore $\mathbf{r}'$, $E_P(\mathbf{r}')$ cambia rispetto a $E_P(\mathbf{r})$ di un valore costante che dipende dalla posizione relativa del nuovo sistema di riferimento rispetto al primo.

Quando utilizzo l'energia potenziale per il calcolo del lavoro di una forza conservativa, ne considero la variazione (= differenza tra il valore finale e iniziale) e quindi il termine costante si elimina.

Energia potenziale

Per le forze conservative il lavoro è dato da

$$W = -\Delta E_p$$

- Se $\Delta E_p > 0$, $W < 0 \rightarrow$ quando la variazione di energia potenziale è positiva, il lavoro è negativo: devo "spendere" lavoro per aumentare l'energia potenziale.
- Se $\Delta E_p < 0$, $W > 0 \rightarrow$ quando la variazione di energia potenziale è negativa, il lavoro è positivo: posso "sfruttare" la diminuzione di energia potenziale per ottenere lavoro (che posso utilizzare ad esempio per azionare una macchina...)

Energia cinetica e potenziale

Abbiamo visto che il lavoro delle forze applicate su un punto materiale è pari alla variazione di energia cinetica

$$W = \Delta E_k$$

Ricordiamo che l'energia cinetica per un punto materiale è definita come

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Se sul punto materiale agiscono solo forze conservative il lavoro è opposto alla variazione di energia potenziale:

$$W = -\Delta E_P = -(E_{PB} - E_{PA})$$

Quindi

$$\Delta E_k = -\Delta E_P$$

Esplicitando le variazioni tra il punto A e il punto B di energia cinetica e potenziale:

$$E_{kB} - E_{kA} = -(E_{PB} - E_{PA})$$

Energia meccanica

Lavoro, energia cinetica ed energia potenziale

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$
$$E_{kB} - E_{kA} = -(E_{pB} - E_{pA})$$

$$E_{kB} + E_{pB} = E_{pA} + E_{kA}$$

Se sul punto materiale agiscono solo forze conservative la quantità

$$E_m = E_k + E_p$$

Rimane costante (**si conserva**). Definiamo

$$E_m = E_k + E_p$$

Energia meccanica del sistema

Energia meccanica

Energia meccanica del sistema

$$E_m = E_k + E_p$$

Se su un punto materiale agiscono solo forze conservative l'energia meccanica si conserva (**principio di conservazione dell'energia meccanica**)