

Corso di FISICA 1



Capitolo 8 – Sistemi di punti materiali

Monica Malvezzi, Università degli
Studi di Siena



Sistemi di punti materiali - introduzione

Finora abbiamo studiato la dinamica di un singolo punto materiale.

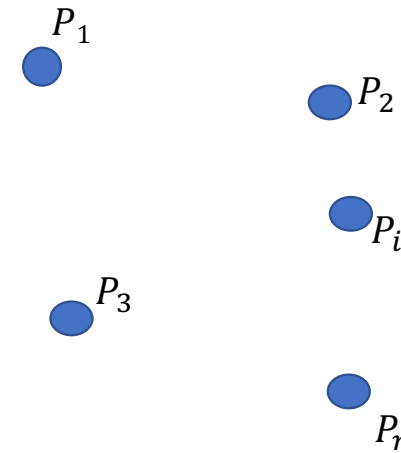
Consideriamo adesso un sistema costituito da n punti materiali, con $n > 1$.

Indichiamo con P_i il generico punto ($i = 1, \dots, n$).

Sul punto i agiranno delle forze, indichiamo con $\mathbf{F}_i$ la risultante.

Suddividiamo le forze agenti su P_i in due gruppi e calcoliamo due distinte risultanti

- Forze dovute all'interazione con l'ambiente esterno (forze esterne) $\mathbf{F}_i^{(E)}$
- Forze di interazione con altri punti (forze interne) $\mathbf{F}^{(I)}$



Per ogni punto da 1 a n possiamo scrivere

$$\mathbf{F}_i = m\mathbf{a}_i$$

$\mathbf{F}_i$ risultante delle forze agenti sul punto

Forze esterne e interne

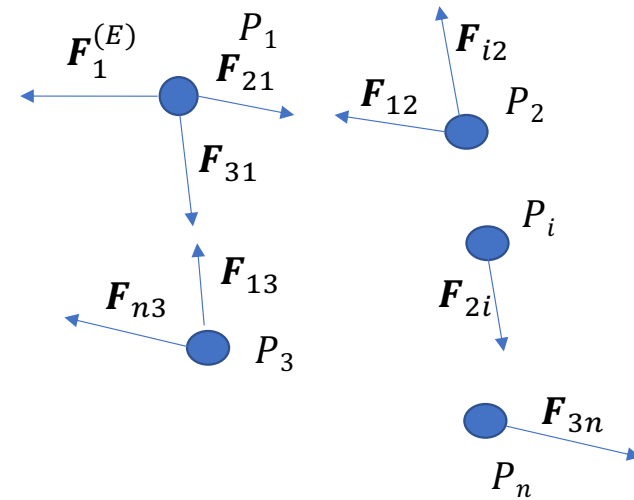
Per ogni punto da 1 a n possiamo scrivere

$$\mathbf{F}_i = m\mathbf{a}_i$$

$\mathbf{F}_i$ risultante delle forze agenti sul punto

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_i &= \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)} \\ \mathbf{F}_i^{(I)} &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{F}_{ji}\end{aligned}$$

$\mathbf{F}_{ji}$ è la forza che il punto j esercita sul punto i



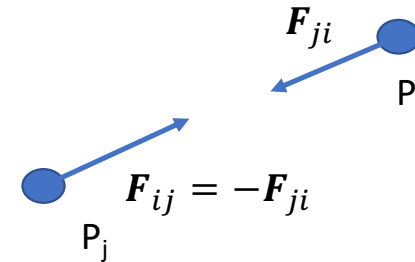
Forze interne – terzo principio della dinamica

$$\mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{F}_{ji}$$

$\mathbf{F}_{ji}$ è la forza che il punto j esercita sul punto i

Alle forze interne si applica la terza legge di Newton (principio di azione e reazione)

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$$



Forze interne – terzo principio della dinamica

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$$

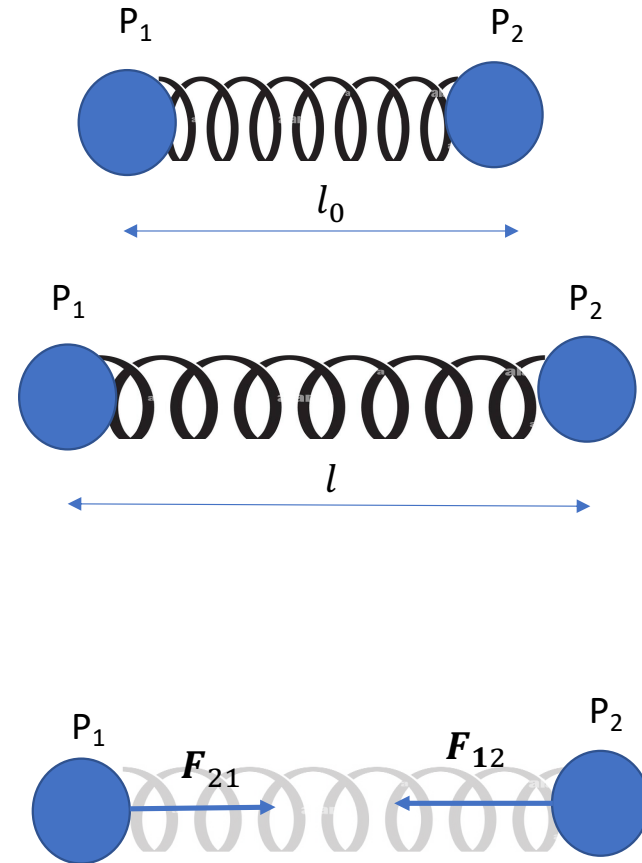
Esempio: consideriamo due punti materiali collegati da un elemento elastico (molla)

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$$

$$|\mathbf{F}_{21}| = |\mathbf{F}_{12}| = kx$$

Deformazione della molla

$$x = l - l_0$$

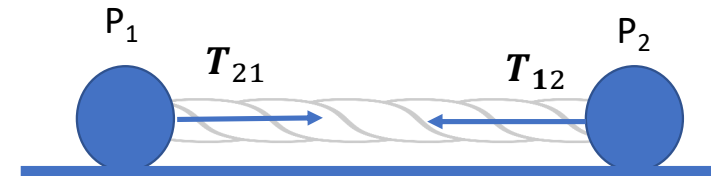
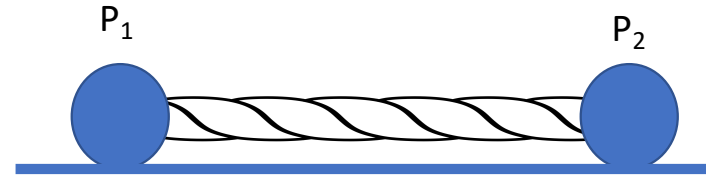


Forze interne – terzo principio della dinamica

$$\mathbf{T}_{12} = -\mathbf{T}_{21}$$

Esempio: due punti materiali collegati da una fune

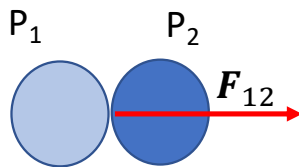
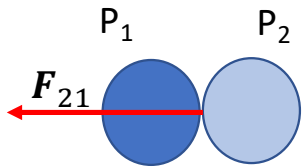
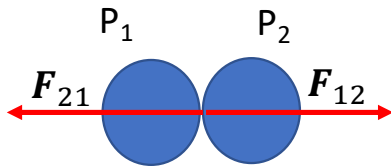
$$\mathbf{T}_{12} = -\mathbf{T}_{21}$$



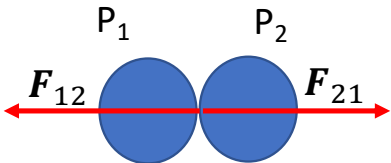
Se il filo è flessibile non è possibile avere questa configurazione



Forze interne – terzo principio della dinamica



Non e' possibile avere questa configurazione
(la forza non può essere attrattiva)



Esempio: due punti materiali a
contatto tra loro

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

Esempio: contatto con attrito

Consideriamo due corpi a contatto tra loro lungo una superficie comune.

In assenza di attrito la forza di contatto ha direzione perpendicolare alle superfici e per il principio di azione e reazione risulta:

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{ji}$$

In presenza di attrito la forza di contatto ha una componente normale alle superfici e una componente tangenziale

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{N}_{ij} + \mathbf{A}_{ij}$$

In condizioni statiche

$$A_{ij} \leq \mu_s N_{ij}$$

In condizioni dinamiche

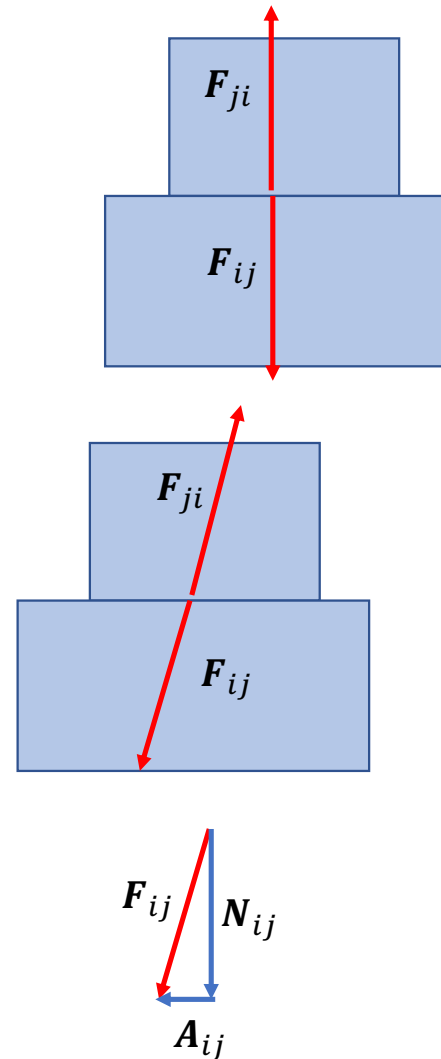
$$A_{ij} = \mu_d N_{ij}$$

In entrambi i casi risulta

$$\mathbf{N}_{ij} = -\mathbf{N}_{ji}$$

$$\mathbf{A}_{ij} = -\mathbf{A}_{ji}$$

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$$



Forze esterne e interne

Le forze interne possono essere sia conservative che non conservative.

Se il numero di punti materiali che costituiscono il sistema aumenta, aumentano anche le possibili interazioni e quindi le forze interne.

Ad esempio, consideriamo un sistema con tre punti materiali, in cui tra P_1 e P_2 agiscono forze attrattive, mentre tra P_2 e P_3 agiscono forze repulsive (applicate ad esempio da una molla). Sui tre punti agiscono anche tre forze esterne.

$$m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1^{(E)} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31}$$

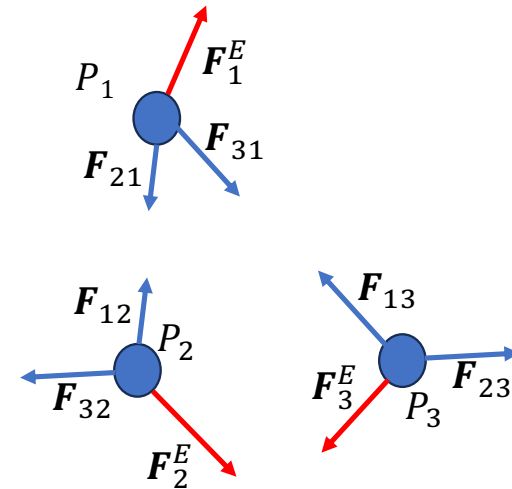
$$m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_2^{(E)} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32}$$

$$m_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{F}_3^{(E)} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23}$$

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$$

$$\mathbf{F}_{23} = -\mathbf{F}_{32}$$

$$\mathbf{F}_{31} = -\mathbf{F}_{13}$$



Forze esterne e interne

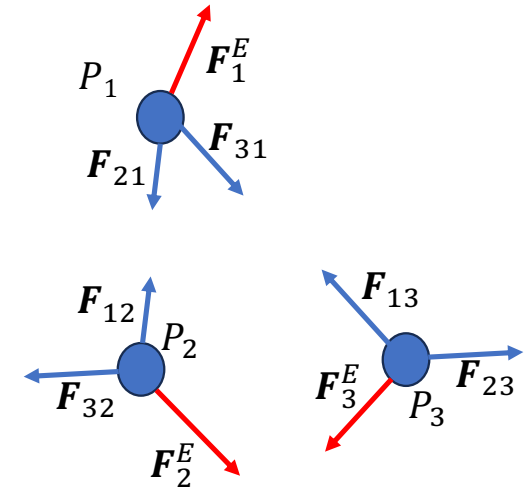
Per ciascuno dei punti che costituiscono il sistema, non è detto che la risultante delle forze interne sia nulla,

$$\mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{F}_{ji}$$

Può essere nulla o non nulla a seconda dei casi.

Ma se calcoliamo la risultante di tutte le forze interne che agiscono sul sistema, essa sarà sicuramente nulla dato che le forze interne sono a coppie di forze opposte tra loro

$$\mathbf{R}^{(I)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{F}_{ji} \right) = \mathbf{0}$$

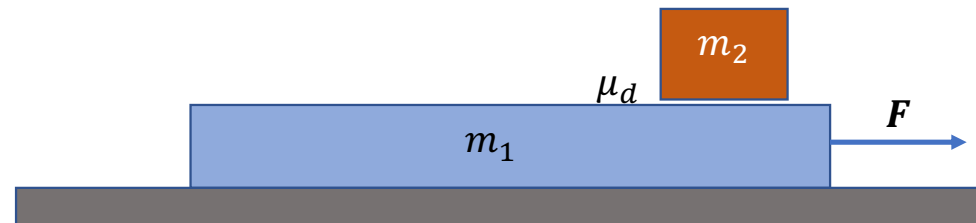


Sistemi di punti materiali, esempio

Per studiare la dinamica dei sistemi di punti materiali possiamo analizzare i singoli punti e applicare i principi della dinamica considerando sia le forze interne che quelle esterne.

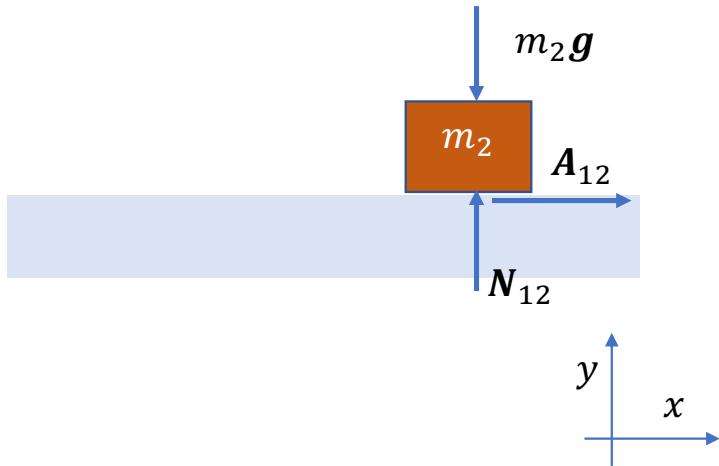
Esempio

Consideriamo due corpi di massa m_1 ed m_2 a contatto tra loro e con una superficie piana fissa come nello schema in figura e in moto uno rispetto all'altro con una forza di attrito sulla superficie di contatto. Tra il corpo di massa m_1 e la superficie piana non è presente attrito.



Sistemi di punti materiali, esempio

Analizziamo le forze agenti sui due corpi



$$m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F} + \mathbf{N}_{21} + \mathbf{A}_{21} + m_1 \mathbf{g} + \mathbf{N}_{01}$$

$$m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{N}_{12} + \mathbf{A}_{12} + m_2 \mathbf{g}$$

Componenti in direzione x

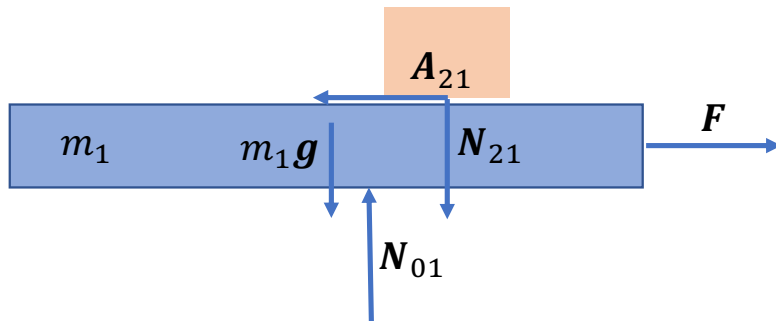
$$m_1 a_1 = F + A_{21}$$

$$m_2 a_2 = A_{12}$$

Componenti in direzione y

$$0 = -N_{21} - m_1 g + N_{01}$$

$$0 = N_{12} - m_2 g$$



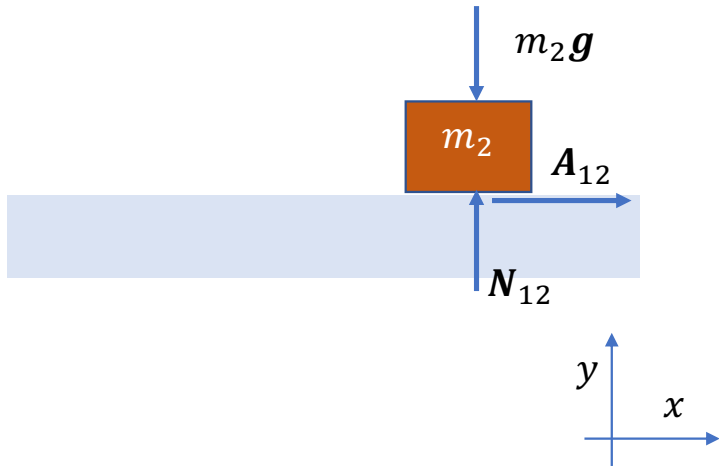
Dalle seconde ottengo

$$N_{12} = m_2 g$$

$$N_{21} = -N_{12} = -m_2 g$$

$$N_{01} = (m_1 + m_2)g$$

Sistemi di punti materiali, esempio



Analizziamo le componenti in direzione x

$$m_1 a_1 = F + A_{21}$$

$$m_2 a_2 = A_{12}$$

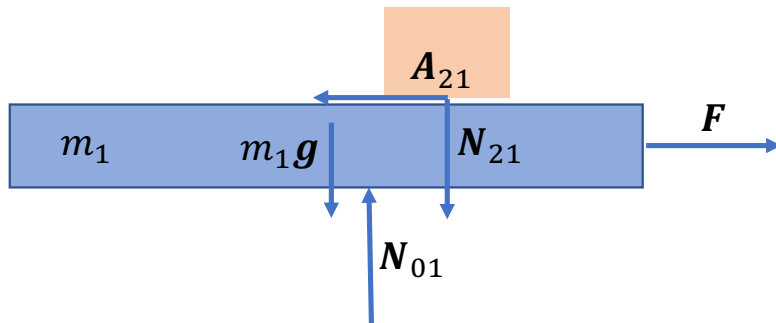
Dal modello di attrito di Coulomb

$$A_{12} = \mu_d N_{12} = \mu_d m_2 g$$

Da cui si ottiene

$$m_2 a_2 = \mu_d m_2 g$$

$$a_2 = \mu_d g$$



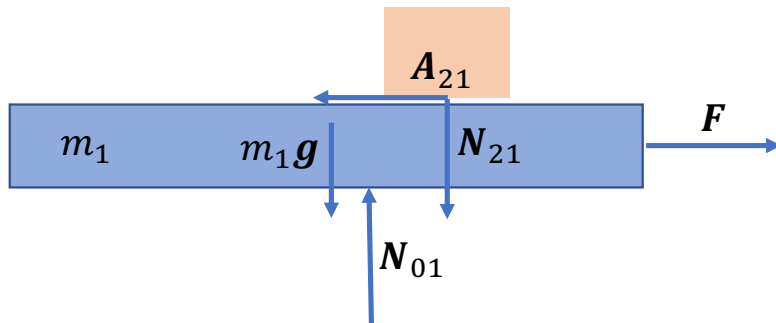
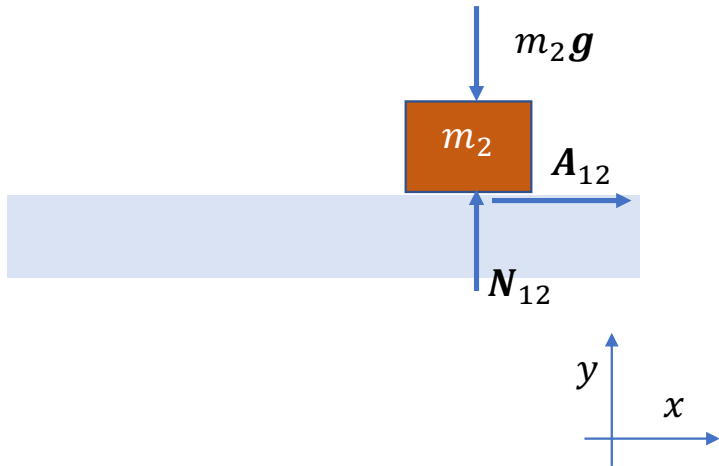
Sostituendo nella prima si ottiene

$$m_1 a_1 = F - A_{12}$$

$$m_1 a_1 = F - \mu_d m_2 g$$

$$a_1 = \frac{1}{m_1} (F - \mu_d m_2 g)$$

Sistemi di punti materiali, esempio



In conclusione, i due corpi si muovono con accelerazione pari a:

$$a_2 = \mu_d g$$

$$a_1 = \frac{1}{m_1} (F - \mu_d m_2 g)$$

Si osserva come la forza di attrito appare nell'espressione dell'accelerazione a_1 come forza resistente (si oppone al moto) mentre nell'espressione dell'accelerazione a_2 appare come forza motrice (concorde con il verso del moto).

Sistemi di punti materiali

- Se i punti che costituiscono il sistema sono molti applicare direttamente le leggi della dinamica considerando le forze interne e esterne può diventare complicato.
- Cerchiamo quindi di individuare grandezze e proprietà che ci permettono di rappresentare il sistema nel suo insieme.

Sistemi di punti materiali

Ricordiamo le grandezze che caratterizzano la dinamica di ciascun punto:

- Posizione $\mathbf{r}_i$
- Velocità $\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$
- Accelerazione $\mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$
- Quantità di moto $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$
- Momento angolare (rispetto a O) $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$
- Risultante delle forze $\mathbf{F}_i$
- Momento delle forze rispetto ad O $\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$
- Energia cinetica $E_{k,i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Tutte queste grandezze sono espresse rispetto a un sistema di riferimento con origine nel punto O che per semplicità consideriamo inerziale.

Sistemi di punti materiali

Per il sistema complessivo possiamo definire inoltre:

- Quantità di moto totale $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i$
- Momento angolare totale (rispetto a O) $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$
- Energia cinetica totale $E_k = \sum_{i=1}^n E_{k,i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$

Anche queste grandezze sono espresse rispetto a un sistema di riferimento con origine nel punto O che per semplicità consideriamo inerziale.

I momenti angolari devono essere calcolati tutti rispetto allo stesso polo, che in questo caso abbiamo preso coincidente con l'origine del sistema di riferimento, anche se in generale può essere anche un altro punto.

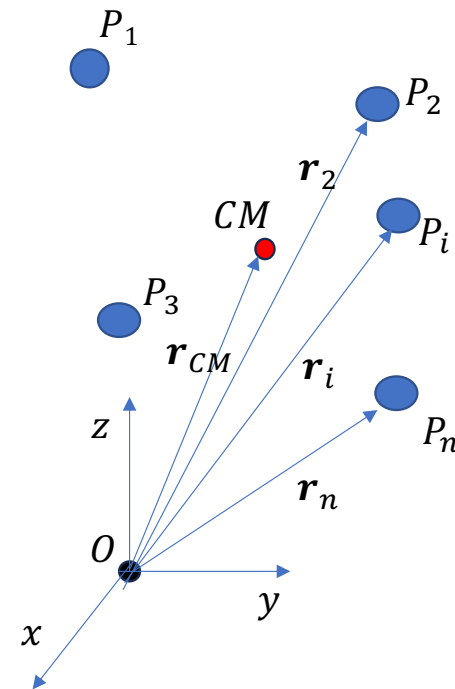
Centro di massa

Dato un sistema costituito da n punti materiali P_i di massa m_i e coordinate x_i, y_i, z_i , rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano di origine O e assi x, y, z , si definisce **centro di massa** degli n punti materiali assegnati, il punto CM la cui posizione è identificata rispetto all'origine dal vettore $\mathbf{r}_{CM}$ tale che:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{m}$$

Essendo m la massa totale del sistema:

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$



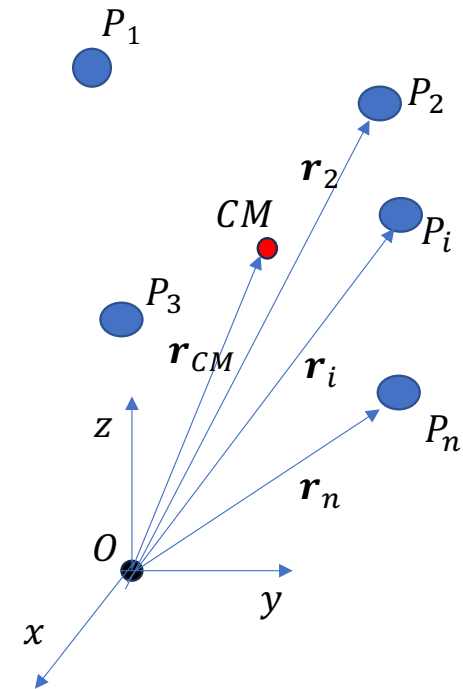
Centro di massa

Le coordinate del centro di massa rispetto al suddetto Sistema di riferimento risultano:

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m}$$

$$z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m}$$

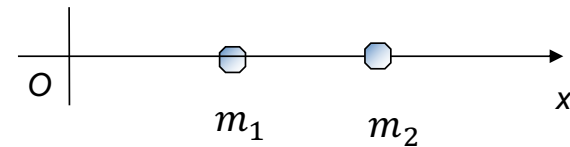


Per semplificare, indichiamo con $m = \sum_{i=1}^n m_i$ la massa totale del sistema

Centro di massa

Esempio – 1D

Calcoliamo il centro di massa del sistema costituito da due punti posizionati su una generica retta identificata come asse x



1D		
punto	massa (kg)	x (m)
1	1	1
2	1	2
	xCM	1,5

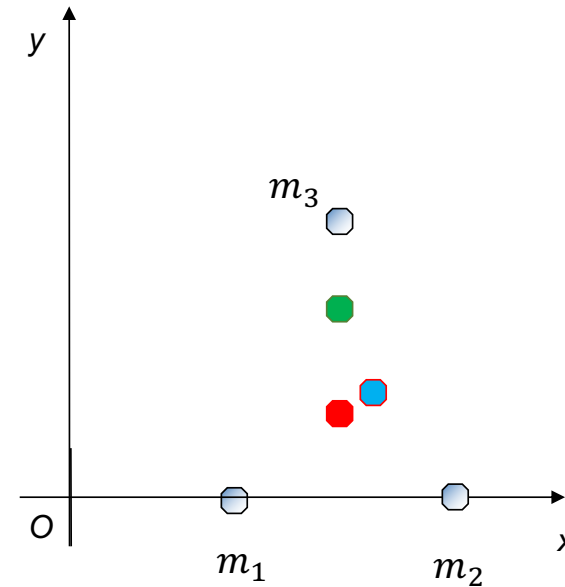
1D		
punto	massa (kg)	x (m)
1	1	1
2	3	2
	xCM	1,75

1D		
punto	massa (kg)	x (m)
1	4	1
2	1	2
	xCM	1,2

Centro di massa

Esempio – 2D

Calcoliamo il centro di massa del sistema costituito da tre punti sul piano xy



2D

punto	massa (kg)	x (m)	y (m)
1	1	1	0
2	1	2	0
3	1	1,5	1,5
	xCM	1,5	
	yCM	0,5	

2D

punto	massa (kg)	x (m)	y (m)
1	1	1	0
2	1	2	0
3	3	1,5	1,5
	xCM	1,5	
	yCM	0,9	

2D

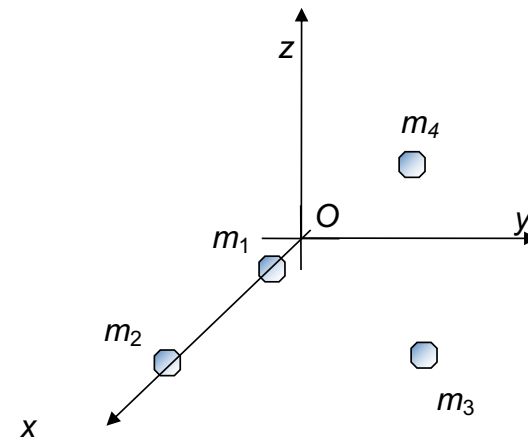
punto	massa (kg)	x (m)	y (m)
1	1	1	0
2	3	2	0
3	3	1,5	1,5
	xCM	1,64285714	
	yCM	0,64285714	

Centro di massa

Esempio - 3D

Calcolare il centro di massa di un sistema costituito da quattro punti aventi coordinate:

3D					
punto	massa (kg)	x (m)	y (m)	z(m)	
1	1	1	1	0	0
2	1	1	2	0	0
3	1	1,5	1,5	1,5	0
4	1	1,5	1,5	1,5	3
	xCM	1,5			
	yCM	0,75			
	zCM	0,75			



Centro di massa- proprietà

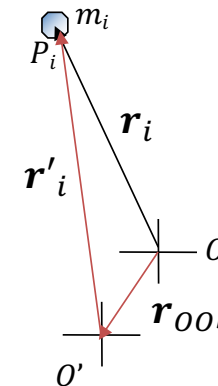
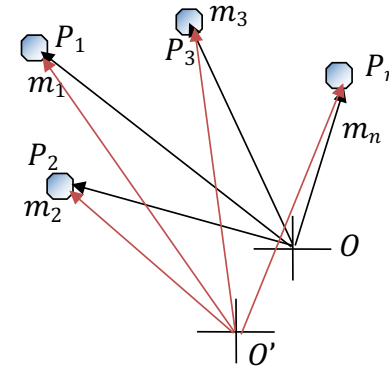
Verifichiamo che il **centro di massa** è una **proprietà del sistema e non del sistema di riferimento**.

Sia il punto CM il centro di massa di un sistema di punti materiali localizzati nelle posizioni P_i e aventi massa m_i , indichiamo con m la massa totale.

Verifichiamo che il punto CM così come è definito è indipendente dal sistema di riferimento scelto.

Preso in considerazione un diverso sistema di riferimento di origine O' si ha:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{m}$$
$$\mathbf{r}'_{CM'} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i}{m}$$



Centro di massa- proprietà

Sottraendo membro a membro ottengo

$$\mathbf{r}_{CM} - \mathbf{r}'_{CM'} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{m} - \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i}{m}$$

$$\mathbf{r}_{CM} - \mathbf{r}'_{CM'} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i)}{m}$$

Ma per ogni i risulta

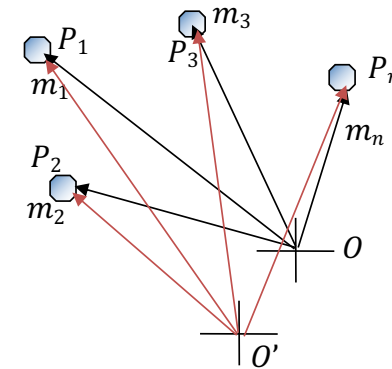
$$\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_{OO'}$$

$$\mathbf{r}_{CM} - \mathbf{r}'_{CM'} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{m} \mathbf{r}_{OO'} = \mathbf{r}_{OO'}$$

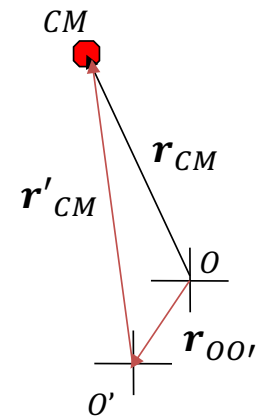
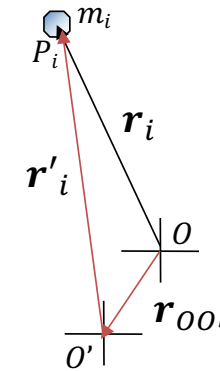
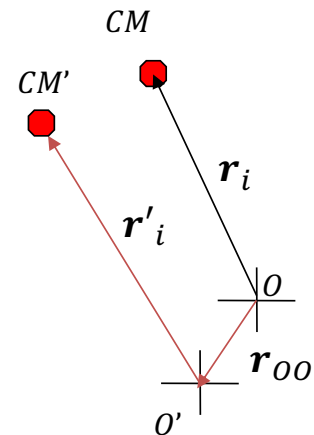
Quindi si ottiene:

$$\mathbf{r}_{CM} - \mathbf{r}'_{CM'} = \mathbf{r}_{OO'}$$

E questo è possibile solo se $CM \equiv CM'$



Non e' possibile!



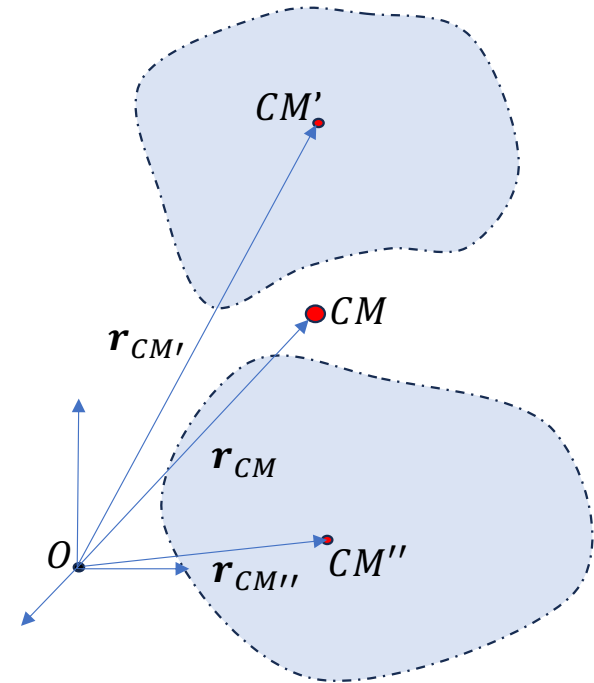
Centro di massa- proprietà

Se un sistema può essere scomposto in più parti, ciascuna caratterizzata da una massa m' , m'' , ..., il suo centro di massa coincide con il centro di massa dei centri di massa parziali CM' , CM'' , ... nei quali si suppone di concentrare le masse m' , m'' , ...

Ad esempio, si considerino gli n punti P_i del sistema divisi in due gruppi di punti costituiti da n' e n'' punti, con massa rispettivamente m' e m'' . I centri di massa dei due gruppi (CM' e CM'') sono definiti come:

$$\mathbf{r}_{CM'} = \frac{\sum_{i=1}^{n'} m'_i \mathbf{r}'_i}{m'}$$

$$\mathbf{r}_{CM''} = \frac{\sum_{i=1}^{n''} m''_i \mathbf{r}''_i}{m''}$$

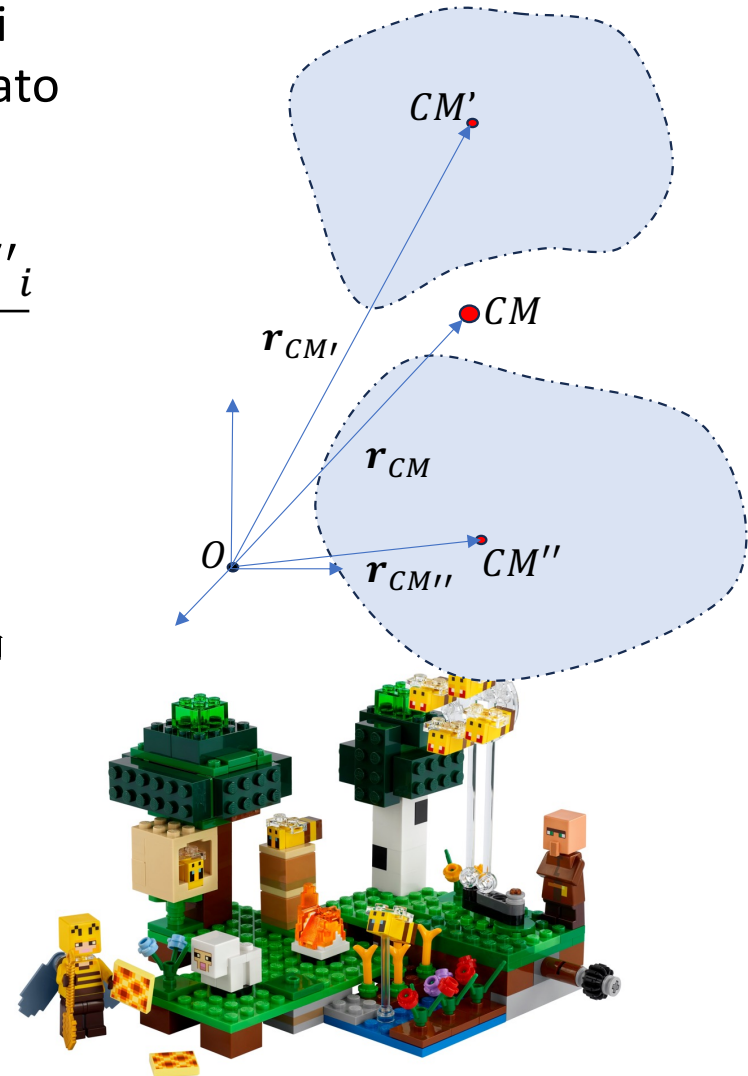


Centro di massa- proprietà

Calcoliamo adesso il centro di massa dei due punti CM' e CM'' nei quali si suppone di avere concentrato le masse m' e m'' :

$$\frac{m' \mathbf{r}_{CM'} + m'' \mathbf{r}_{CM''}}{m' + m''} = \frac{\sum_{i=1}^{n'} m'_i \mathbf{r}'_i + \sum_{i=1}^{n''} m''_i \mathbf{r}''_i}{m' + m''} \\ = \mathbf{r}_{CM}$$

A cosa serve? Possiamo utilizzare questa proprietà per calcolare il centro di massa di un sistema «complicato» scomponendolo in sottosistemi più semplici.

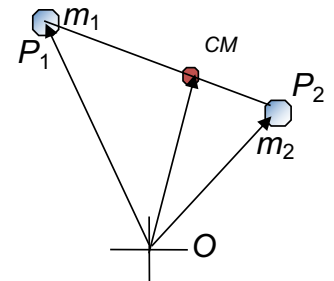


Centro di massa- esempio

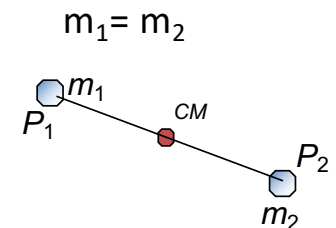
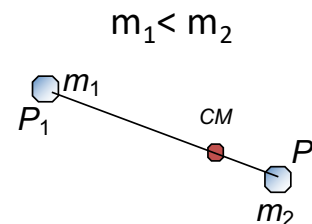
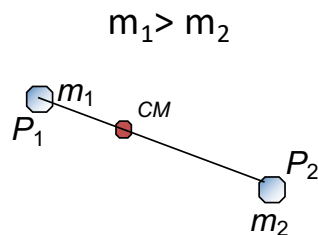
Centro di massa di due punti P_1 di massa m_1 e P_2 di massa m_2 .

Nel caso due punti materiali P_1 e P_2 aventi massa concentrate m_1 e m_2 il centro di massa CM è identificato rispetto all'origine del sistema di riferimento dal vettore:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$



Si può verificare che il centro di massa appartiene al segmento P_1P_2 . Inoltre, CM divide il segmento P_1P_2 in due parti con lunghezze inversamente proporzionali alle masse dei punti P_1 e P_2 .



Centro di massa- velocità

Riprendiamo la definizione di centro di massa per un sistema costituito da n punti materiali P_i (di massa m_i e coordinate x_i, y_i, z_i), le cui coordinate sono riferite rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano di origine O e assi x, y, z :

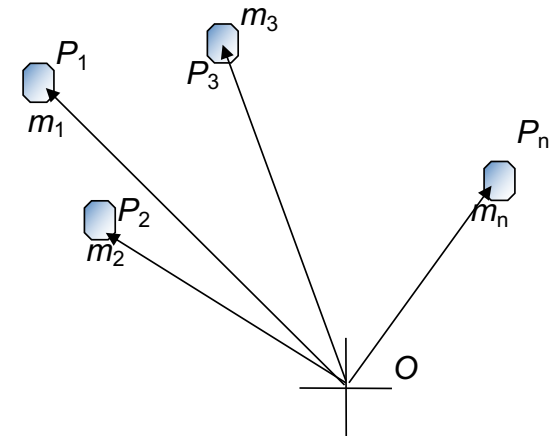
$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{m}$$

Deriviamo rispetto al tempo (supponiamo le masse costanti)

$$\frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}{m}$$

Possiamo quindi definire la velocità del centro di massa come:

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i}{m}$$



Centro di massa- velocità

Ricordiamo che la quantità di moto di ciascun punto materiale è definita come:

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$$

E la quantità di moto totale del sistema $\mathbf{P}$ è pari a:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i}{m} = \frac{\mathbf{P}}{m}$$

E infine:

$$\mathbf{P} = m \mathbf{v}_{CM}$$

Centro di massa- velocità

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}_{CM}$$

Dal punto di vista della quantità di moto totale, posso rappresentare il sistema di punti materiali come un unico punto materiale con massa m pari alla massa totale del sistema.

Centro di massa- accelerazione

Riprendiamo l'espressione della velocità del centro di massa:

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i}{m}$$

E deriviamo nuovamente rispetto al tempo:

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i}{m}$$

Quindi abbiamo:

$$m \mathbf{a}_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i$$

Osserviamo inoltre che $\mathbf{P} = m \mathbf{v}_{CM}$

$$m \mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

Centro di massa- seconda legge di Newton

Per ciascun punto materiale risulta

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i$$

Abbiamo visto anche che possiamo suddividere le forze in esterne e interne

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)}$$

Quindi abbiamo:

$$m \mathbf{a}_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(E)} + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(I)}$$

Centro di massa- seconda legge di Newton

$$m\mathbf{a}_{CM} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(E)} + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(I)}$$

Ma abbiamo visto anche che per un sistema di punti materiali la somma delle forze interne è nulla per il terzo principio della dinamica

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(I)} = 0$$

Quindi si ottiene:

$$m\mathbf{a}_{CM} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{R}^{(E)}$$

Dove $\mathbf{R}^{(E)}$ è la risultante delle forze esterne applicate al sistema

$$\mathbf{R}^{(E)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(E)}$$

Centro di massa- seconda legge di Newton

Abbiamo trovato quindi un risultato importante: la derivata della quantità di moto totale del sistema è pari alla risultante delle forze esterne applicate al sistema.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}^{(E)}$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{R}^{(E)}$$

In particolare, se la risultante delle forze esterne è nulla, la derivata della quantità di moto totale è nulla, quindi la quantità di moto del sistema è costante.

$$\mathbf{R}^{(E)} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0$$

Centro di massa- seconda legge di Newton

Risultato importante

$$\mathbf{R}^{(E)} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0, \mathbf{P} = \textit{costante}$$

In componenti cartesiane

$$R_x^{(E)} = 0, P_x = \textit{costante}$$

$$R_y^{(E)} = 0, P_y = \textit{costante}$$

$$R_z^{(E)} = 0, P_z = \textit{costante}$$

Sistema isolato

Un sistema di punti materiali si dice ***isolato*** quando

$$\mathbf{R}^{(E)} = 0$$

In questo caso risulta

$$\mathbf{a}_{CM} = 0$$

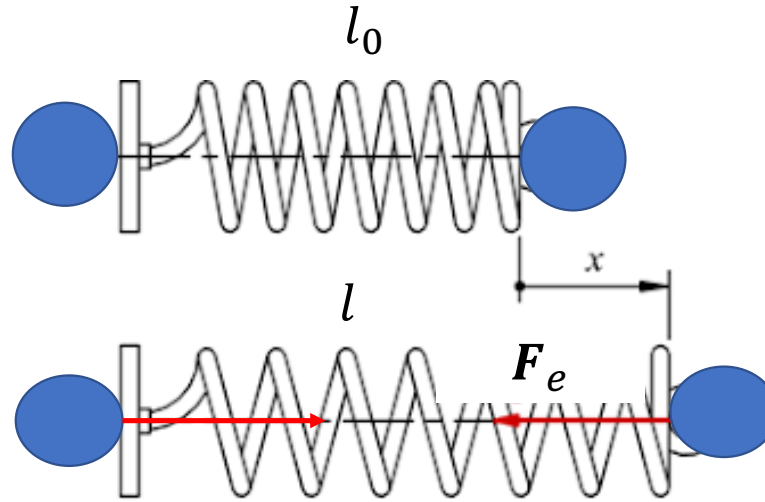
$$\mathbf{v}_{CM} \text{ costante}$$

$$\mathbf{P} \text{ costante}$$

In un sistema di punti materiali isolati la quantità di moto totale del sistema si conserva.

Importante: si conserva la quantità di moto totale, ma non è detto che si conservi la quantità di moto dei singoli punti!

Sistema isolato - esempio



In questo caso risulta

$$\mathbf{R}^{(E)} = 0$$

$$\mathbf{a}_{CM} = 0$$

$\mathbf{v}_{CM}$ costante

$\mathbf{P}$ costante

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i}{m}$$

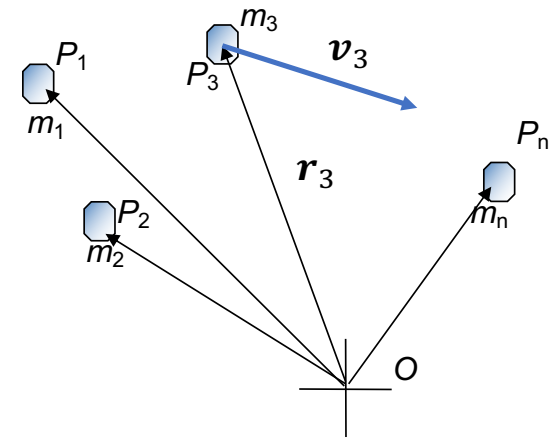
Momento angolare

Riprendiamo la definizione del momento della quantità di moto o momento angolare totale del sistema

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

Deriviamo rispetto al tempo:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times m_i \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right)$$



Momento angolare

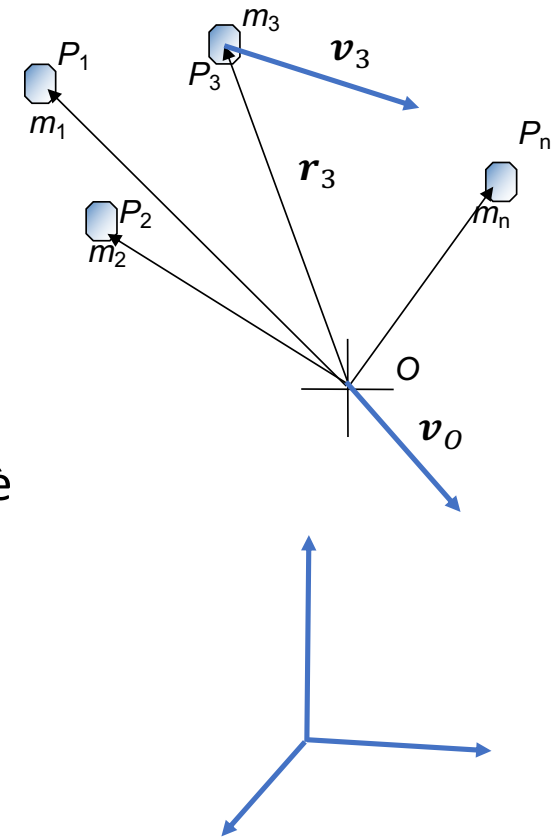
$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times m_i \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right)$$

Se il polo rispetto a cui calcolo il momento non è fisso (caso più generale), ricordiamo che:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_O$$

Se il sistema di riferimento da cui stiamo osservando il sistema è inerziale inoltre, per il secondo principio della dinamica abbiamo:

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)}$$



Momento angolare

Dalla slide precedente...

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_O$$

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)}$$

Quindi con qualche passaggio matematico:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times m_i \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left((\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_O) \times m_i \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left((\mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_O \times m_i \mathbf{v}_i) + \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(-\mathbf{v}_O \times m_i \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)}) \right) \end{aligned}$$

Momento angolare

Ricordiamo la definizione di momento di una forza

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_i^{(E)} &= \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(E)} \\ \mathbf{M}_i^{(I)} &= \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(I)}\end{aligned}$$

Definiamo il momento totale

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i^{(E)} &= \mathbf{M}^{(E)} \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i^{(I)} &= \mathbf{M}^{(I)}\end{aligned}$$

Ricordiamo inoltre che

$$\sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{v}_i) = m \mathbf{v}_{CM}$$

otteniamo

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\mathbf{v}_O \times m \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{M}^{(E)} + \mathbf{M}^{(I)}$$

Consideriamo il termine

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i^{(I)} = \mathbf{M}^{(I)}$$

Consideriamo una generica coppia di punti i e j

$$\mathbf{M}_{ij}^{(I)} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij}$$

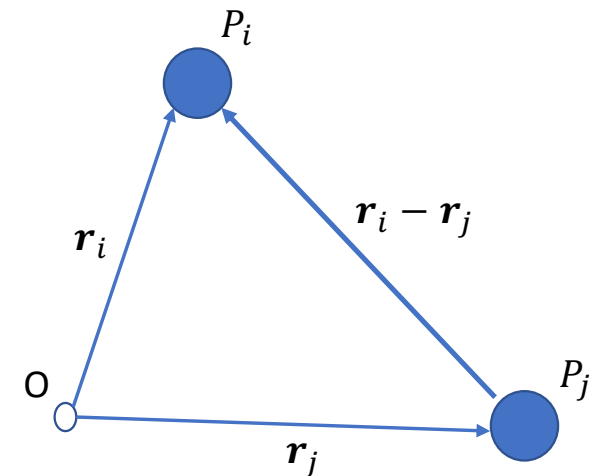
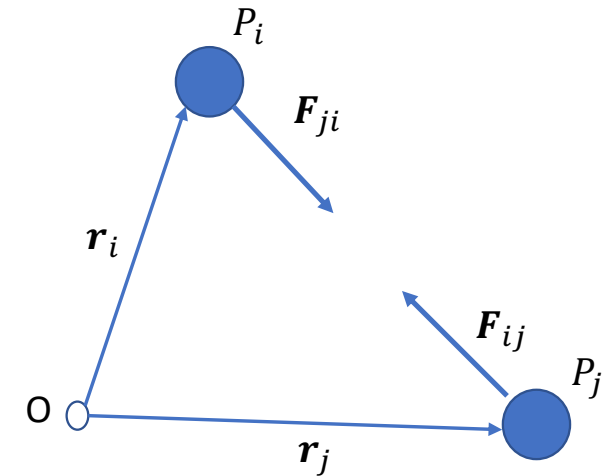
Ricordiamo che $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$

$$\mathbf{M}_{ij}^{(I)} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} - \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji} = 0$$

Dato che $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ e $\mathbf{F}_{ji}$ sono paralleli (qualunque sia O)

Quindi $\mathbf{M}_{ij}^{(I)} = 0$ per tutte le coppie di punti i,j e di conseguenza

$$\mathbf{M}^{(I)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i^{(I)} = 0$$



Momento angolare

Eravamo arrivati a questa espressione

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\mathbf{v}_O \times m\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{M}^{(E)} + \mathbf{M}^{(I)}$$

Che possiamo ulteriormente semplificare in

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\mathbf{v}_O \times m\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{M}^{(E)}$$

Il termine $\mathbf{v}_O \times m\mathbf{v}_{CM}$ si annulla se

- Il polo per il calcolo dei momenti e' fisso $\mathbf{v}_O = 0$
- Il polo coincide con il centro di massa, quindi $\mathbf{v}_{CM} \times m\mathbf{v}_{CM} = 0$
- $\mathbf{v}_O$ e $\mathbf{v}_{CM}$ sono paralleli.

In questi tre casi vale

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(E)}$$

(teorema del momento angolare).

Momento angolare

Supponendo di aver calcolato il momento angolare rispetto a un punto fisso:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(E)}$$

Se calcoliamo il momento delle forze esterne applicate al nostro sistema rispetto allo stesso polo, abbiamo:

$$\mathbf{M}^{(E)} = 0$$

Abbiamo:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \mathbf{L} = \textit{costante}$$

(quando il momento risultante delle forze esterne è nullo e $\mathbf{v}_O \times m\mathbf{v}_{CM} = 0$, il momento angolare si conserva)

Sistemi di punti materiali

Riepilogo: abbiamo verificato che per un sistema di punti materiali risulta:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{R}^{(E)}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(E)}$$

In particolare

$$\mathbf{R}^{(E)} = 0 \rightarrow \mathbf{P} = \textit{costante}$$

$$\mathbf{M}^{(E)} = 0 \rightarrow \mathbf{L} = \textit{costante}$$

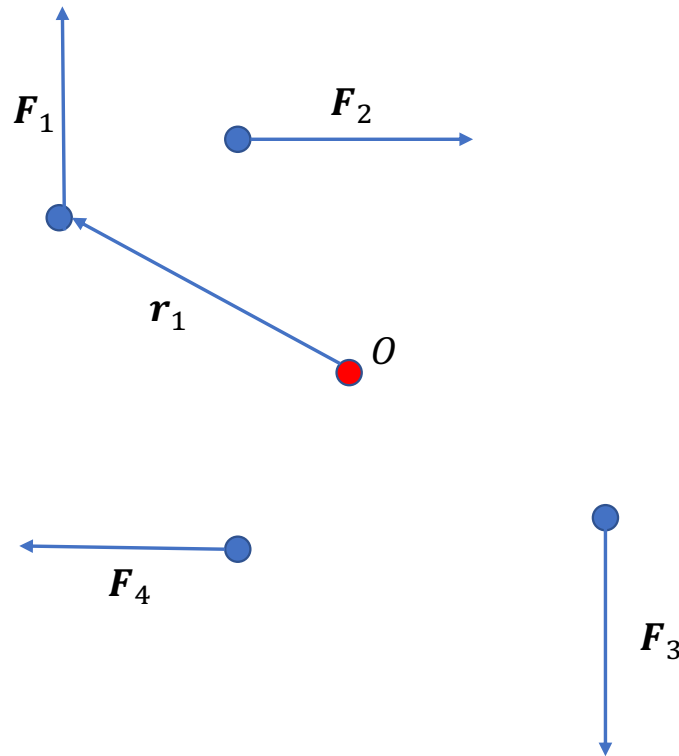
Sistemi di punti materiali

Esempio, sistema costituito da quattro punti materiali

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{(E)} &= 0 \\ \mathbf{M}^{(E)} &\neq 0\end{aligned}$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{R}^{(E)}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(E)}$$



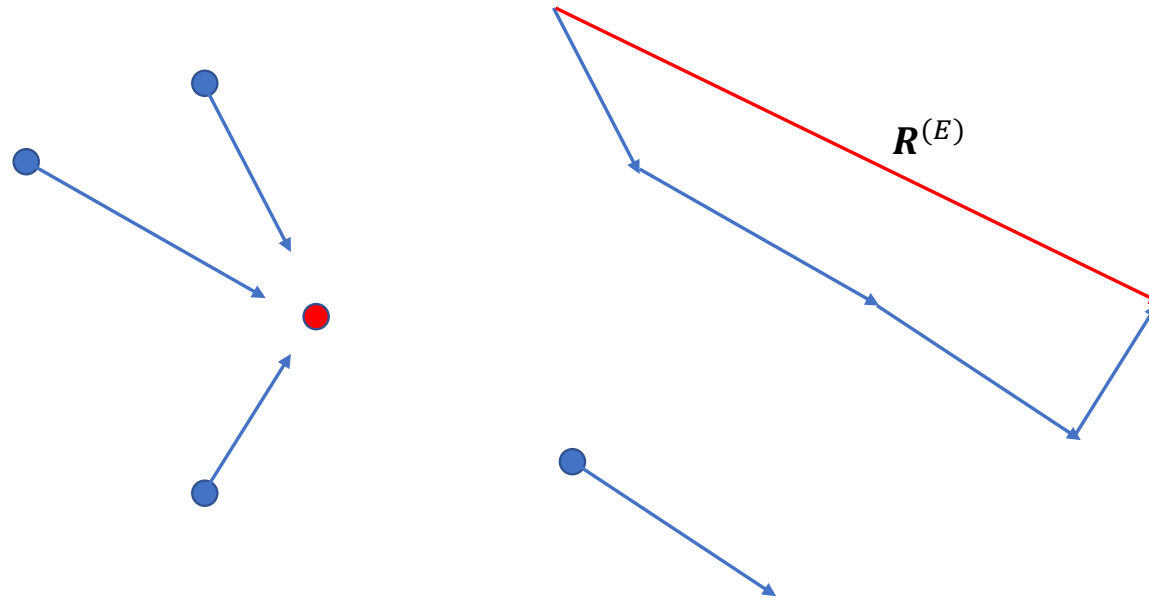
Sistemi di punti materiali

Esempio

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{(E)} &\neq 0 \\ \mathbf{M}^{(E)} &= 0\end{aligned}$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{R}^{(E)} \neq 0$$

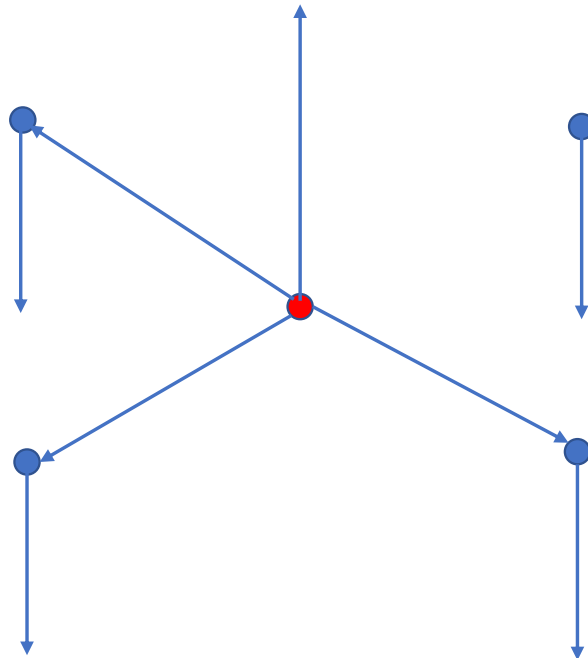
$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(E)} = 0$$



Sistemi di punti materiali

Esempio

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{(E)} &\neq 0 \\ \mathbf{M}^{(E)} &= 0\end{aligned}$$



Sistemi di punti materiali - esempio

Due punti materiali di uguale massa m sono collegati tra loro da una sbarretta di massa trascurabile di lunghezza $2R_1$ e ruotano senza attrito su un piano orizzontale rispetto al centro della sbarretta con velocità angolare ω_1 . Supponiamo che la sbarretta sia telescopica e durante il moto la lunghezza venga aumentata a $2R_2$, con $R_2 > R_1$. Calcoliamo il valore della velocità angolare finale.

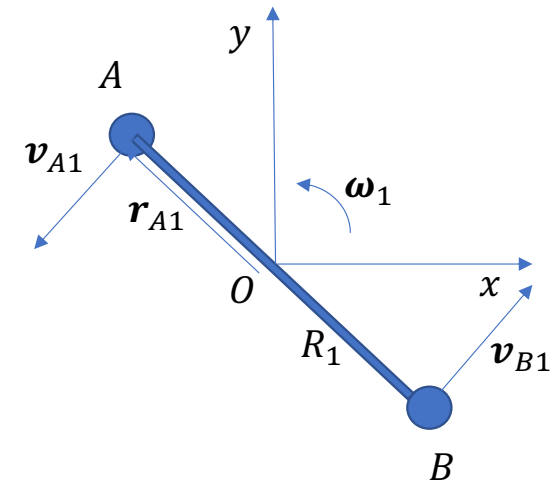
$$\mathbf{v}_{A1} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{A1} \rightarrow v_{A1} = \omega_1 R_1$$

$$\mathbf{v}_{B1} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{B1} \rightarrow v_{B1} = \omega_1 R_1$$

$$\mathbf{L}_{A1} = \mathbf{r}_{A1} \times m \mathbf{v}_{A1} \rightarrow L_{A1} = m R_1 v_{A1} = m R_1^2 \omega_1$$

$$\mathbf{L}_{B1} = \mathbf{r}_{B1} \times m \mathbf{v}_{B1} \rightarrow L_{B1} = m R_1 v_{B1} = m R_1^2 \omega_1$$

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_{A1} + \mathbf{L}_{B1} \rightarrow L_1 = 2m R_1^2 \omega_1 \rightarrow L_1 = 2m R_1^2 \omega_1 \mathbf{k}$$



Sistemi di punti materiali - esempio

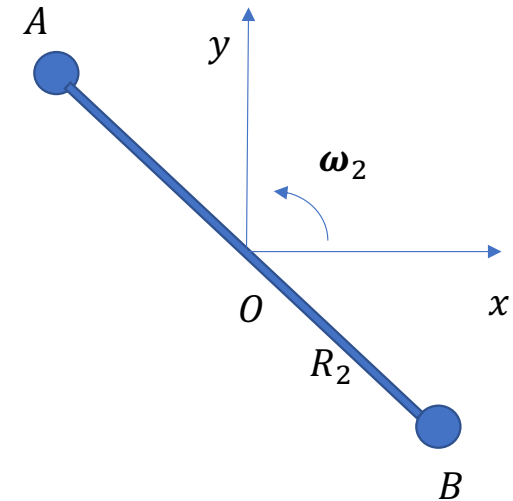
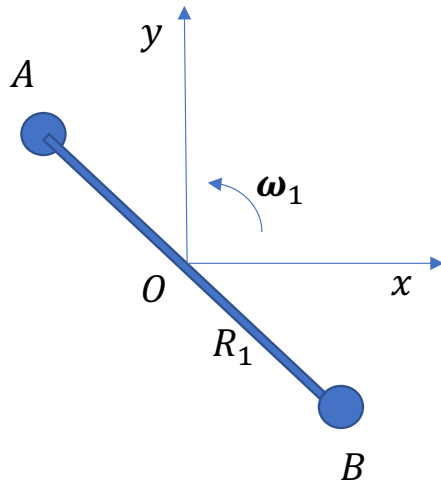
$$\mathbf{v}_{A2} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{A2} \rightarrow v_{A2} = \omega_2 R_2$$

$$\mathbf{v}_{B2} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{B2} \rightarrow v_{B2} = \omega_2 R_2$$

$$\mathbf{L}_{A2} = \mathbf{r}_{A2} \times m \mathbf{v}_{A2}$$

$$\mathbf{L}_{B2} = \mathbf{r}_{B2} \times m \mathbf{v}_{B2}$$

$$\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_{A2} + \mathbf{L}_{B2}$$



Sistemi di punti materiali - esempio

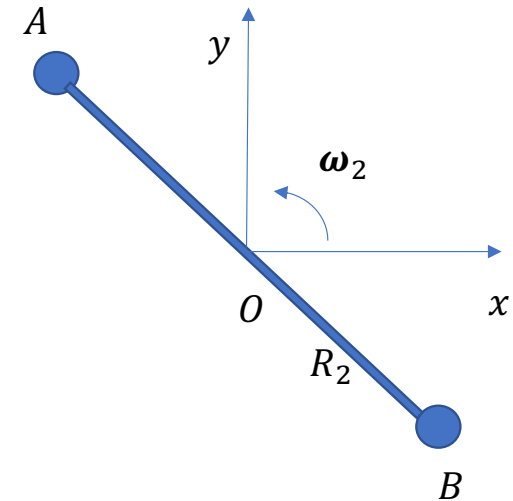
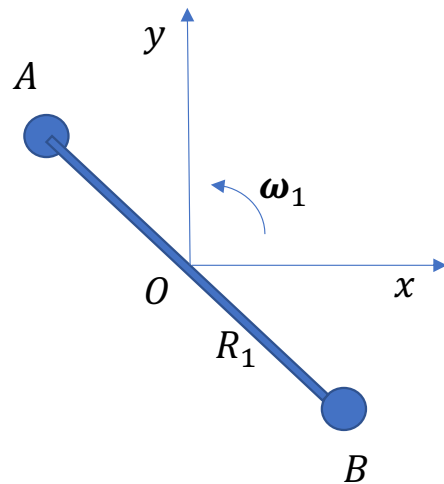
$$L_1 = L_2$$

$$L_1 = 2mr_1^2\omega_1\mathbf{k}$$

$$L_2 = 2mr_2^2\omega_2\mathbf{k}$$

$$2mr_1^2\omega_1 = 2mr_2^2\omega_2$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$



Lavoro ed energia cinetica

Calcoliamo il lavoro delle forze applicate sui punti del sistema per uno spostamento infinitesimo.

Per l'i-mo punto, considerando uno spostamento infinitesimo risulta

$$dW_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i$$

Ricordiamo la distinzione tra forze interne ed esterne:

$$dW_i = \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_i^{(I)} \cdot d\mathbf{r}_i = \\ dW_i^{(E)} + dW_i^{(I)}$$

$$dW_i^{(E)} = \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot d\mathbf{r}_i \text{ lavoro delle forze esterne}$$

$$dW_i^{(I)} = \mathbf{F}_i^{(I)} \cdot d\mathbf{r}_i \text{ lavoro delle forze interne}$$

Lavoro delle forze interne

Calcoliamo il lavoro delle forze interne per la generica coppia di forze $\mathbf{F}_{ij}$ ed $\mathbf{F}_{ji}$

$$dW_{ij}^{(I)} = \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_j$$

Ricordiamo che le forze interne sono a due a due opposte tra loro: $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$

Quindi risulta:

$$dW_{ij}^{(I)} = \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_j - \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i = \mathbf{F}_{ij} \cdot (d\mathbf{r}_j - d\mathbf{r}_i) = \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}$$

Essendo $d\mathbf{r}_{ij} = d\mathbf{r}_j - d\mathbf{r}_i$ lo spostamento (relativo) tra i punti i e j:

$$dW_{ij}^{(I)} = \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}$$

Lavoro delle forze interne

$$dW_{ij}^{(I)} = \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}$$

Quindi, in generale dato che può essere $d\mathbf{r}_{ij} \neq 0$, $dW_{ij}^{(I)} \neq 0$ e di conseguenza $dW_i^{(I)} \neq 0$.

Per l'intero sistema risulta:

$$dW^{(I)} = \sum_{i=1}^n dW_i^{(I)} \neq 0$$

E considerando uno spostamento finito dalla posizione A alla posizione B:

$$W^{(I)} = \int_A^B dW^{(I)} \neq 0$$

Lavoro delle forze interne

In particolare osserviamo che

$$dW_{ij}^{(I)} = \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}$$

Il lavoro delle forze interne dipende da $d\mathbf{r}_{ij}$ cioè da quanto si spostano i punti uno rispetto all'altro.

Se i punti rimangono alla stessa distanza tra loro $d\mathbf{r}_{ij} = 0$ e quindi $dW_{ij}^{(I)} = 0$. Il lavoro delle forze interne si annulla anche se $d\mathbf{r}_{ij}$ è perpendicolare a $\mathbf{F}_{ij}$.

Lavoro ed energia cinetica

Per ciascun punto abbiamo visto inoltre che il lavoro è pari alla variazione di energia cinetica.

[Ricordiamo infatti che $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$

$$dW_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = m_i \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{v}_i \rightarrow dW_i = m_i \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{v}_i$$

$$W_{i,AB} = \int_{\mathbf{v}_{i,A}}^{\mathbf{v}_{i,B}} m_i \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{v}_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{iB}^2 - \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{iA}^2$$

]

Lavoro ed energia cinetica

Sommando per tutti i punti del sistema e integrando tra una configurazione A e una configurazione B otteniamo

$$W_{AB} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_{iB}^2 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_{iA}^2 = E_{kB} - E_{kA}$$

In particolare, se consideriamo i contributi delle forze interne ed esterne

$$W_{AB}^{(E)} + W_{AB}^{(I)} = E_{kB} - E_{kA}$$

(teorema dell'energia cinetica per i sistemi di punti materiali).

Forze conservative

Se le forze interne sono conservative

$$W_{AB}^{(I)} = -\Delta E_P^{(I)} = -\left(E_{P,B}^{(I)} - E_{P,A}^{(I)}\right)$$

Analogamente, se le forze esterne sono conservative abbiamo

$$W_{AB}^{(E)} = -\Delta E_P^{(E)} = -\left(E_{P,B}^{(E)} - E_{P,A}^{(E)}\right)$$

Quindi, se nel sistema agiscono solo forze conservative (esterne ed interne) possiamo scrivere ($W_{AB}^{(E)} + W_{AB}^{(I)} = E_{kB} - E_{kA}$)

$$-\left(E_{P,B}^{(I)} - E_{P,A}^{(I)}\right) - \left(E_{P,B}^{(E)} - E_{P,A}^{(E)}\right) = E_{kB} - E_{kA}$$

Quindi

$$E_{P,B}^{(I)} + E_{P,B}^{(E)} + E_{kB} = E_{P,A}^{(I)} + E_{P,A}^{(E)} + E_{kA}$$

Si **conserva l'energia meccanica totale** del sistema

Energia meccanica, forze non conservative

Quindi, se nel sistema agiscono solo forze conservative (esterne ed interne)

Si conserva l'energia meccanica totale del sistema $E_m = E_p + E_k$

$$E_{m,B} = E_{m,A}$$

Se invece nel sistema agiscono sia forze conservative che non conservative abbiamo

$$E_{m,B} - E_{m,A} = W_{nc}$$

W_{nc} è il lavoro di tutte le forze non conservative agenti sul sistema, esterne ed interne.

Energia potenziale della forza peso

Calcoliamo l'energia potenziale della forza peso di un sistema di punti.

Per ciascun punto ricordiamo che:

$$E_{Pi} = m_i g z_i$$

Quindi, per il sistema abbiamo:

$$E_P = \sum_{i=1}^n E_{Pi} = \sum_{i=1}^n m_i g z_i = g \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

Ricordiamo che:

$$z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m}$$

Quindi:

$$E_P = m g z_{CM}$$

Corrisponde all'energia potenziale di un unico punto materiale avente massa pari alla massa totale del sistema, posizionato nel suo centro di massa.

Energia cinetica

Alcune considerazioni sull'energia cinetica. Abbiamo visto che alcune grandezze del sistema possono essere calcolate considerando il sistema come un unico punto materiale di massa pari alla massa totale del sistema, posizionato nel centro di massa.

Abbiamo visto infatti che per la quantità di moto abbiamo:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}_{CM}$$

E per l'energia potenziale della forza peso abbiamo:

$$E_P = mgz_{CM}$$

Possiamo dire lo stesso di tutte le grandezze? Purtroppo no.

Ad esempio questo risultato non vale per l'energia cinetica del sistema E_k e per il momento angolare $\mathbf{L}$

Energia cinetica

Per l'energia cinetica, in particolare, possiamo vedere che:

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2 \neq \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}_{CM}^2$$

Ricordando le relazioni della cinematica dei moti relativi e considerando un sistema di riferimento coincidente con il centro di massa con assi paralleli a quello fisso, per ogni punto i scriviamo:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{CM} + \boldsymbol{v}'_i$$

Con $\boldsymbol{v}'_i$ velocità del punto i rispetto al centro di massa ($\boldsymbol{v}'_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_{CM}$)

Energia cinetica

E' possibile dimostrare (secondo teorema di Konig) che

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{CM}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}'_i{}^2$$

O, più brevemente:

$$E_k = E_{kCM} + E'_k$$

Avendo definito l'energia cinetica del centro di massa:

$$E_{kCM} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{CM}^2$$

E l'energia cinetica relativa al centro di massa:

$$E'_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}'_i{}^2$$

Energia cinetica

Riepilogo delle relazioni fondamentali che descrivono la dinamica dei punti materiali

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}^{(E)}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(E)}$$

Queste relazioni ci permettono di capire come variano $\mathbf{P}$ ed $\mathbf{L}$ nel tempo

- Relazioni vettoriali
- Dipendono dalle forze esterne e dai rispettivi momenti
- Permettono di studiare il comportamento complessivo del sistema ma non quello dei singoli punti.

$$W_{AB}^{(E)} + W_{AB}^{(I)} = E_{kB} - E_{kA}$$

Urti



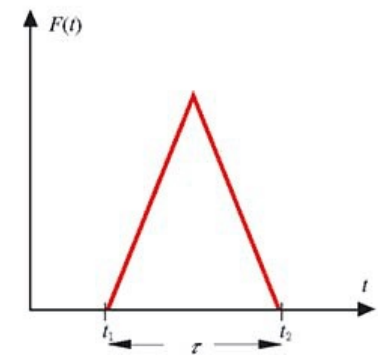
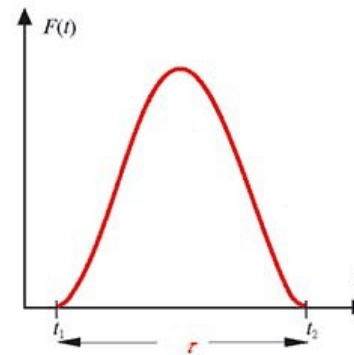
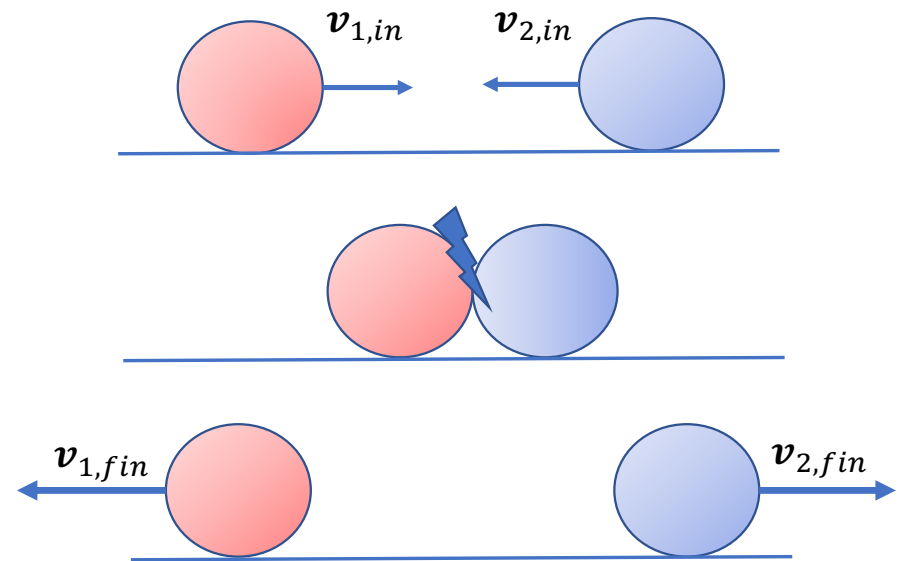
Urti

Analizziamo un sistema costituito da due punti materiali che durante il loro moto urtano tra loro. Analizziamo in particolare quello che succede durante l'urto stesso.

- Durante l'urto possiamo assumere che i punti non si muovano uno rispetto all'altro.
- Nel contatto si sviluppano forze molto elevate che agiscono in un tempo molto breve.

Ricordiamo la definizione di impulso di una forza e il teorema dell'impulso per un singolo punto materiale:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F dt \rightarrow J = \Delta p$$



Urti

La quantità di moto del sistema prima dell'urto è:

$$\mathbf{P}_{in} = m_1 \mathbf{v}_{1,in} + m_2 \mathbf{v}_{2,in}$$

La quantità di moto del sistema dopo l'urto è:

$$\mathbf{P}_{fin} = m_1 \mathbf{v}_{1,fin} + m_2 \mathbf{v}_{2,fin}$$

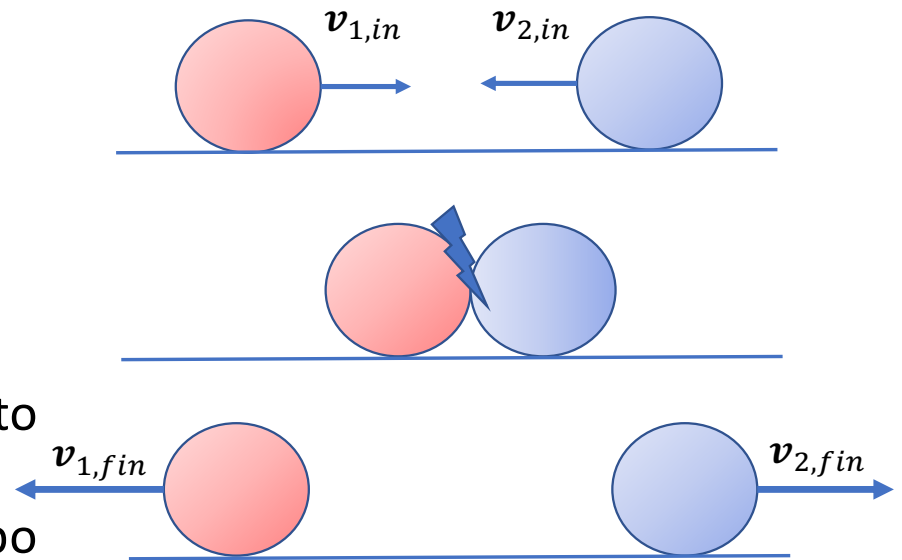
Le forze di interazione che si sviluppano durante l'urto sono interne e sono di tipo impulsivo.

Una forza si dice impulsiva quando agisce in un tempo limitato con modulo molto elevato, in modo da produrre un impulso finito in un tempo molto piccolo.

Ricordiamo che:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{R}^{(E)}$$

Le altre forze esterne in genere sono non impulsive e quindi se consideriamo un tempo molto piccolo il loro impulso è molto piccolo.



Urti

Con queste considerazioni possiamo assumere che durante l'urto la quantità di moto totale si conserva:

$$\mathbf{P}_{in} = \mathbf{P}_{fin}$$

Che possiamo riscrivere evidenziando le quantità di moto dei singoli punti:

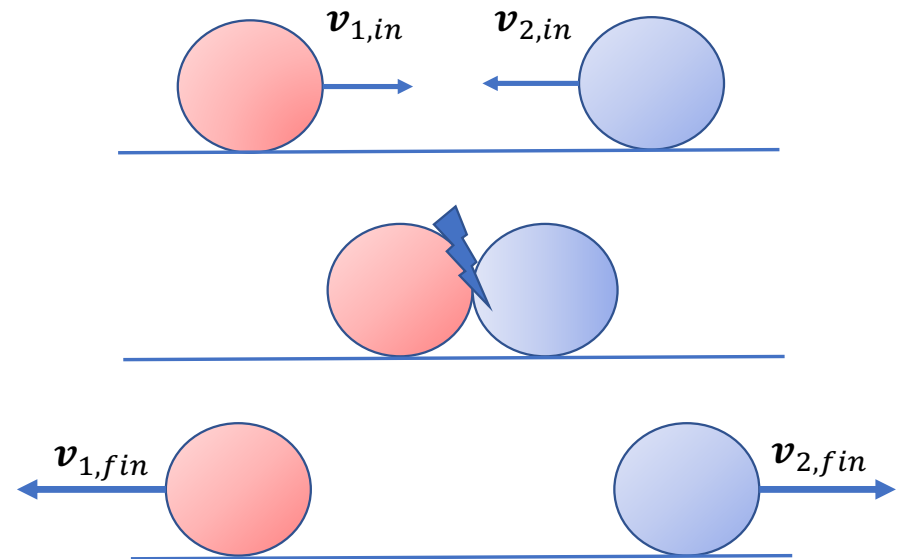
$$m_1 \mathbf{v}_{1,in} + m_2 \mathbf{v}_{2,in} = m_1 \mathbf{v}_{1,fin} + m_2 \mathbf{v}_{2,fin}$$

Ricordiamo la definizione di velocità del centro di massa:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM}$$

Vediamo quindi che durante l'urto la velocità del centro di massa rimane costante:

$$(m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM,in} = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM,fin}$$
$$\mathbf{v}_{CM,in} = \mathbf{v}_{CM,fin}$$



Urti

La velocità del centro di massa rimane costante durante l'urto:

$(m_1 + m_2)\mathbf{v}_{CM,in} = (m_1 + m_2)\mathbf{v}_{CM,fin}$
e la quantità di moto totale rimane costante

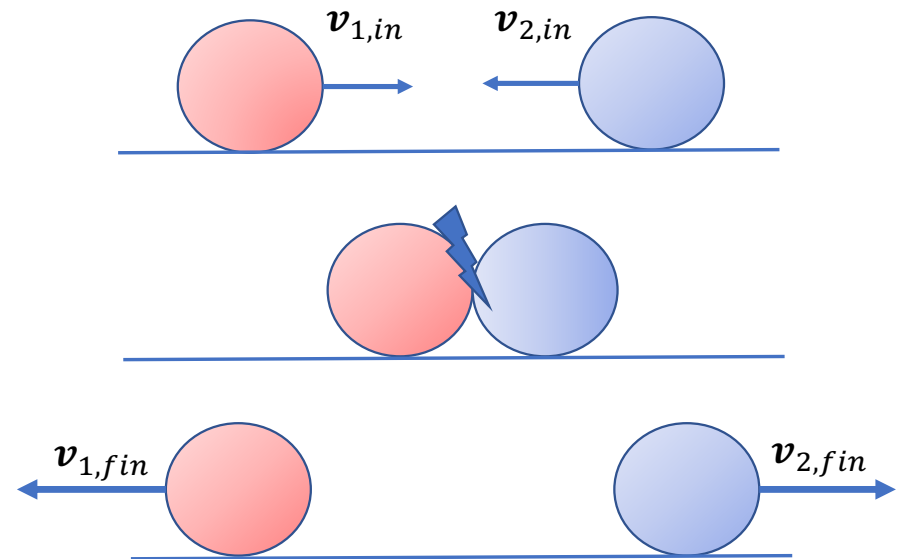
$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{P}_{fin} - \mathbf{P}_{in} = \Delta \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_2 = 0$$

Ma variano le quantità di moto dei singoli punti!

$$\Delta \mathbf{p}_1 = m_1 \mathbf{v}_{1,fin} - m_1 \mathbf{v}_{1,in}$$

$$\Delta \mathbf{p}_2 = m_2 \mathbf{v}_{2,fin} - m_2 \mathbf{v}_{2,in}$$

$$\Delta \mathbf{p}_1 = -\Delta \mathbf{p}_2$$



Urti

$$\Delta \mathbf{p}_1 = -\Delta \mathbf{p}_2$$

Applicando il teorema dell'impulso ai singoli punti si ottiene:

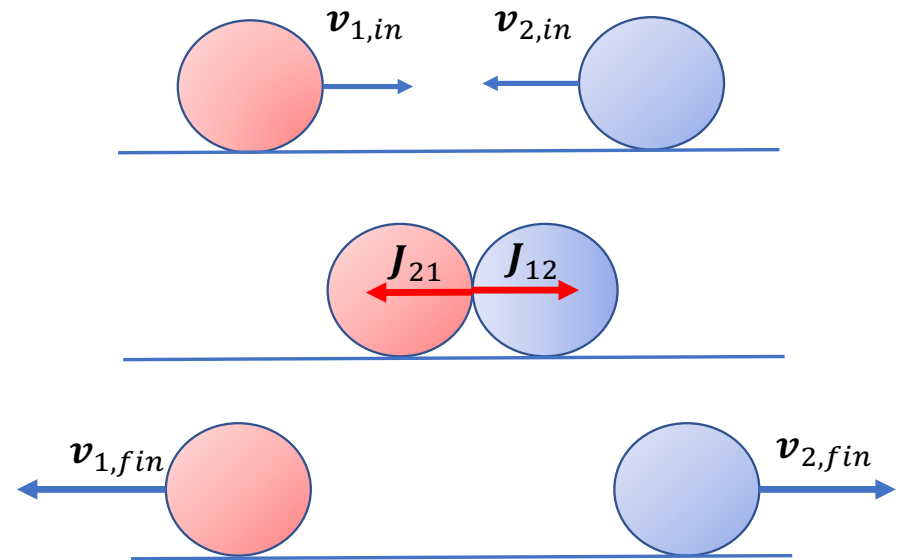
$$\Delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{J}_{21} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{21} dt$$

$$\Delta \mathbf{p}_2 = \mathbf{J}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{12} dt$$

Risulta ovviamente:

$$\mathbf{J}_{21} = -\mathbf{J}_{12}$$

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$$



Urti

Se ci sono altre forze esterne?

→ La durata dell'urto è molto breve, se le altre forze non sono di tipo impulsivo il loro impulso:

$$\mathbf{J}^{(E)} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}^{(E)} dt$$

è trascurabile rispetto a quello delle forze dell'urto

$$|\mathbf{J}_{21}| \gg |\mathbf{J}^{(E)}|$$

E anche la conseguente variazione della quantità di moto è trascurabile.

Urti

Abbiamo visto che durante l'urto si conserva la quantità di moto $\mathbf{P}$, cosa succede al momento angolare $\mathbf{L}$? Ricordiamo la definizione di momento angolare di ciascun punto:

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{L}_2 = \mathbf{r}_2 \times m_2 \mathbf{v}_2$$

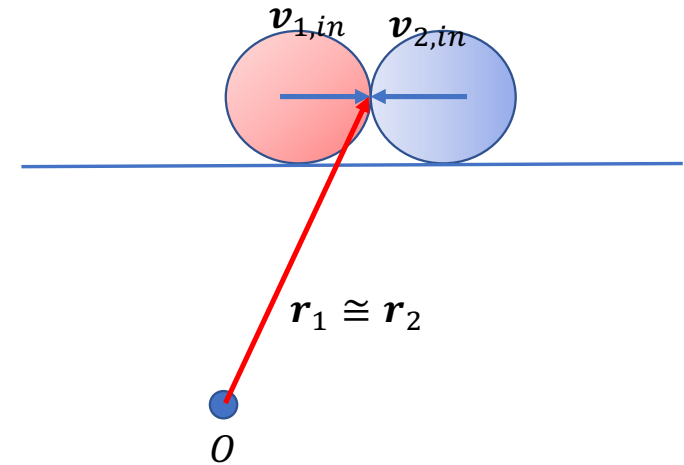
Il momento angolare totale vale:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2 \mathbf{v}_2$$

Dato che in prossimità dell'urto $\mathbf{r}_1 \cong \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, risulta

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

Dato che durante l'urto $\mathbf{r}$ è circa costante e abbiamo visto che $\mathbf{P}$ si conserva, allora anche $\mathbf{L}$ si conserva.



Urti

Abbiamo visto che durante l'urto si conservano la quantità di moto $\mathbf{P}$ e il momento angolare $\mathbf{L}$, che cosa succede all'energia cinetica?

Non possiamo ancora dire niente, perché non abbiamo fatto ipotesi sulle forze di interazione, non abbiamo definito se sono conservative o no...

La variazione di energia meccanica durante l'urto è pari al lavoro delle forze interne:

$$W_{urto}^{(I)} = E_{k,fin} - E_{k,in}$$

Se le forze interne sono conservative (urto perfettamente elastico)

$$W_{urto}^{(I)} = -\Delta E_p$$

Ma ricordando che l'energia potenziale dipende dalla posizione $E_p = E_p(\mathbf{r})$ e supponendo di analizzare l'urto in un intervallo di tempo in cui $\mathbf{r}$ non varia, risulta $\Delta E_p = 0$ e quindi:

$$E_{k,fin} = E_{k,in}$$

Ma se le forze interne non sono conservative (urto anelastico)

$$W_{urto}^{(I)} \neq 0$$

Urti

Abbiamo visto che durante l'urto si conservano la quantità di moto $\mathbf{P}$ e il momento angolare $\mathbf{L}$, che cosa succede all'energia cinetica?

Non possiamo ancora dire niente, perché non abbiamo fatto ipotesi sulle forze di interazione, non abbiamo definito se sono conservative o no...

La variazione di energia meccanica durante l'urto è pari al lavoro delle forze interne:

$$W_{urto}^{(I)} = E_{k,fin} - E_{k,in}$$

Se le forze interne sono conservative (urto perfettamente elastico)

$$W_{urto}^{(I)} = -\Delta E_p$$

Ma ricordando che l'energia potenziale dipende dalla posizione $E_p = E_p(\mathbf{r})$ e supponendo di analizzare l'urto in un intervallo di tempo in cui $\mathbf{r}$ non varia, risulta $\Delta E_p = 0$ e quindi:

$$E_{k,fin} = E_{k,in}$$

Urti

Ma se le forze interne non sono conservative (urto anelastico)

$$W_{urto}^{(I)} \neq 0$$

In particolare nella maggior parte dei casi, se nell'urto si considera solo l'interazione (contatto) tra i corpi, risulta:

$$W_{urto}^{(I)} < 0$$

Quindi, dato che abbiamo visto che:

$$W_{urto}^{(I)} = E_{k,fin} - E_{k,in} < 0$$

L'energia cinetica del sistema durante l'urto diminuisce.

Energia cinetica durante l'urto

Per quanto riguarda l'energia cinetica ricordiamo che;

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \neq \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{CM}^2$$

In particolare, se per ogni punto i scriviamo:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i$$

Con $\mathbf{v}'_i$ velocità del punto i rispetto al centro di massa ($\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{CM}$)

$$\begin{aligned} E_k &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{CM}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}'_i^2 = \\ &= E_{k,CM} + E'_k \end{aligned}$$

Energia cinetica durante l'urto

$$E_k = E_{k,CM} + E'_k$$

Cosa succede a questi due termini durante l'urto?

$E_{k,CM} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{CM}^2 \rightarrow$ abbiamo visto che $\mathbf{v}_{CM}$ si conserva, quindi anche il termine anche $E_{k,CM}$ si conserva durante l'urto.

$E'_k \rightarrow$ questo termine può variare o meno a seconda che le forze scambiate durante l'urto siano conservative o meno.

A questo punto possiamo distinguere e classificare diversi tipi di urto

1-Urto elastico: le forze scambiate durante l'urto sono conservative, l'energia cinetica si conserva $\rightarrow E'_k$ si conserva

$$E'_{k,fin} = E'_{k,in}$$

$$E_{k,fin} = E_{k,in}$$

Energia cinetica durante l'urto

$$E_k = E_{k,CM} + E'_k$$

1-Urto elastico: le forze scambiate durante l'urto sono conservative, l'energia cinetica si conserva $\rightarrow E'_k$ si conserva

$$E'_{k,fin} = E'_{k,in}$$

$$E_{k,fin} = E_{k,in}$$

2- Urto perfettamente anelastico: tutta l'energia cinetica dei punti rispetto al centro di massa, E'_k viene dissipata

$$E'_{k,fin} = 0$$

$$E_{k,fin} = E_{k,CM}$$

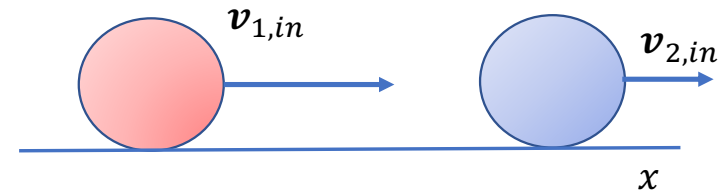
3- Urto anelastico: una parte dell'energia cinetica dei punti rispetto al centro di massa, E'_k viene dissipata

$$E'_{k,fin} \neq E'_{k,in}$$

$$E_{k,fin} = E_{k,CM} + E'_{k,fin} \neq E'_{in}$$

Urto elastico

Consideriamo un caso semplificato monodimensionale



Consideriamo le componenti scalari della velocità in direzione x . Se l'urto è elastico

- La quantità di moto si conserva

$$m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in} = m_1 v_{1,fin} + m_2 v_{2,fin}$$

- L'energia cinetica si conserva

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,in}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,in}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2$$

Urto elastico

Supponiamo di conoscere le velocità iniziali e voler trovare quelle finali, dalla conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica otteniamo due equazioni in due incognite:

$$\begin{aligned} m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in} &= m_1 v_{1,fin} + m_2 v_{2,fin} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1,in}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,in}^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2 \end{aligned}$$

Risolviamo...

$$v_{1,fin} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,in} + 2m_2 v_{2,in}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2,fin} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2,in} + 2m_1 v_{1,in}}{m_1 + m_2}$$

Urto elastico

Possiamo risolvere il sistema in un altro modo, consideriamo il moto rispetto al centro di massa

$$0 = m_1 v'_{1,fin} + m_2 v'_{2,fin}$$
$$\frac{1}{2} m_1 v'^2_{1,in} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2,in} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1,fin} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2,fin}$$

Risolviamo...

$$v'_{1,fin} = -v'_{1,in}$$

Questo è sicuramente più semplice da ricordare!

$$v'_{2,fin} = -v'_{2,in}$$

Se poi devo calcolare le velocità nel sistema di riferimento inerziale,

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in}}{m_1 + m_2}$$
$$v_{1,fin} = v'_{1,fin} + v_{CM}$$
$$v_{2,fin} = v'_{2,fin} + v_{CM}$$

Urto elastico (opzionale)

Verifico il risultato precedente:

$$\begin{aligned} v'_{1,fin} &= v_{1,fin} - v_{CM} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,in} + 2m_2v_{2,in}}{m_1 + m_2} - \frac{m_1v_{1,in} + m_2v_{2,in}}{m_1 + m_2} = \dots \\ &= -v'_{1,in} \end{aligned}$$

$$v'_{2,fin} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2,in} + 2m_1v_{1,in}}{m_1 + m_2} - \frac{m_1v_{1,in} + m_2v_{2,in}}{m_1 + m_2} = \dots = -v'_{2,in}$$

$$v'_{1,fin} = -v'_{1,in}$$

$$v'_{2,fin} = -v'_{2,in}$$

Urto elastico - esempi

Masse uguali $m_1 = m_2 = m$

$$v_{1,fin} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,in} + 2m_2v_{2,in}}{m_1 + m_2} = v_{2,in}$$

$$v_{2,fin} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2,in} + 2m_1v_{1,in}}{m_1 + m_2} = v_{1,in}$$

Le velocità si scambiano.

Urto elastico - esempi

Masse uguali $m_1 = m_2 = m$, punto 2 inizialmente fermo $v_{2,in} = 0$

$$v_{1,fin} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,in} + 2m_2v_{2,in}}{m_1 + m_2} = 0$$

$$v_{2,fin} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2,in} + 2m_1v_{1,in}}{m_1 + m_2} = v_{1,in}$$

Il punto 1 si ferma, il punto 2 si muove alla velocità $v_{1,in}$

Urto elastico - esempi

Masse diverse, velocità iniziali opposte $v_{2,in} = -v_{1,in}$

$$v_{1,fin} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,in} + 2m_2v_{2,in}}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - m_2) - 2m_2}{m_1 + m_2} v_{1,in} = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} v_{1,in}$$

$$v_{2,fin} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2,in} + 2m_1v_{1,in}}{m_1 + m_2} = \frac{-(m_2 - m_1) + 2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,in} = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,in}$$

Urto elastico - esempi

Masse uguali, velocità iniziali opposte $v_{2,in} = -v_{1,in}$

$$\begin{aligned} v_{1,fin} &= \frac{(m_1 - m_2)v_{1,in} + 2m_2v_{2,in}}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - m_2) - 2m_2}{m_1 + m_2} v_{1,in} = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} v_{1,in} \\ &= -v_{1,in} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{2,fin} &= \frac{(m_2 - m_1)v_{2,in} + 2m_1v_{1,in}}{m_1 + m_2} = \frac{-(m_2 - m_1) + 2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,in} = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,in} \\ &= v_{1,in} \end{aligned}$$

Urto elastico - esempi

Una massa è molto più grande dell'altra $m_2 \gg m_1$

$$v_{1,fin} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,in} + 2m_2v_{2,in}}{m_1 + m_2} = \frac{-m_2v_{1,in} + 2m_2v_{2,in}}{m_2} = -v_{1,in} + 2v_{2,in}$$

$$v_{2,fin} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2,in} + 2m_1v_{1,in}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2v_{2,in}}{m_2} = v_{2,in}$$

La massa m_2 non risente dell'urto.

Urto elastico - esempi

Una massa è molto più grande dell'altra $m_2 \gg m_1$, la massa 2 è ferma

$$v_{1,fin} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,in} + 2m_2v_{2,in}}{m_1 + m_2} = \frac{-m_2v_{1,in} + 2m_2v_{2,in}}{m_2} = -v_{1,in}$$

$$v_{2,fin} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2,in} + 2m_1v_{1,in}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2v_{2,in}}{m_2} = v_{2,in} = 0$$

La massa 2 rimane ferma, la massa 1 rimbalza indietro con velocità opposta.

Urto perfettamente anelastico

In un urto perfettamente anelastico tutta l'energia cinetica dei punti rispetto al centro di massa, E'_k viene dissipata

$$\begin{aligned}E'_{k,fin} &= 0 \\ E_{k,fin} &= E_{k,CM}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1,fin}'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,fin}'^2 = 0$$

$$\begin{aligned}v_{1,fin}' &= 0 \\ v_{2,fin}' &= 0\end{aligned}$$

Le velocità finali dei due punti sono uguali tra loro, uguali alla velocità del centro di massa.

$$v_{1,fin} = v_{2,fin} = v_{CM}$$

I due punti materiali rimangono attaccati tra loro dopo l'urto.

Urto anelastico

Una parte dell'energia cinetica dei punti rispetto al centro di massa, E'_k viene dissipata, ma non tutta

$$E'_{k,fin} \neq E'_{k,in}$$

$$E_{k,fin} = E_{k,CM} + E'_{k,fin} \neq E'_{in}$$

Consideriamo il moto dei punti rispetto al centro di massa
Abbiamo visto che:

→ Per l'urto elastico

$$v'_{1,fin} = -v'_{1,in}$$

$$v'_{2,fin} = -v'_{2,in}$$

→ Per l'urto perfettamente anelastico

$$v'_{1,fin} = 0$$

$$v'_{2,fin} = 0$$

Urto anelastico

Nel caso di urto anelastico generico

$$\begin{aligned}v'_{1,fin} &= -e_r v'_{1,in} \\ v'_{2,fin} &= -e_r v'_{2,in}\end{aligned}$$

Dove e_r è una costante che prende il nome di coefficiente di restituzione.

$$e_r = -\frac{v'_{1,fin}}{v'_{1,in}} = -\frac{v'_{2,fin}}{v'_{2,in}}$$

Osserviamo che

$$0 \leq e_r \leq 1$$

$e_r = 1 \rightarrow$ urto perfettamente elastico

$e_r = 0 \rightarrow$ urto perfettamente anelastico

Urto anelastico

Dopo l'urto l'energia cinetica dei due punti rispetto al centro di massa è

$$E'_{k,fin} = \frac{1}{2} m_1 v'_{1,fin}{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v'_{2,fin}{}^2 = \frac{1}{2} m_1 e_r^2 v'_{1,in}{}^2 + \frac{1}{2} m_2 e_r^2 v'_{2,in}{}^2 = e_r^2 E'_{k,in}$$

$$E'_{k,fin} = e_r^2 E'_{k,in}$$

Quanto vale la variazione relativa di energia cinetica?

$$\delta = \frac{E'_{k,fin} - E'_{k,in}}{E'_{k,in}} = e_r^2 - 1$$

Quindi

→ Urto perfettamente elastico $e_r = 1$, $\delta = 0$

→ Urto perfettamente anelastico $e_r = 0$, $\delta = -1$

Urto anelastico

Quali sono le velocità dei due punti dopo l'urto?

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}'^2 = \frac{1}{2} m_1 e_r^2 v_{1,in}'^2 + \frac{1}{2} m_2 e_r^2 v_{2,in}'^2$$

$$m_1 v_{1,fin}' + m_2 v_{2,fin}' = 0$$

Risolvendo otteniamo

$$v_{1,fin} = \frac{(m_1 - e_r m_2) v_{1,in} + m_2 (1 + e_r) v_{2,in}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2,fin} = \frac{(m_2 - (1 + e_r) m_1) v_{2,in} + m_1 (1 + e_r) v_{1,in}}{m_1 + m_2}$$

Per provare

<https://phet.colorado.edu/en/simulation/collision-lab>

Appendice: Momento polare

Il concetto di momento riguarda esclusivamente i vettori applicati.

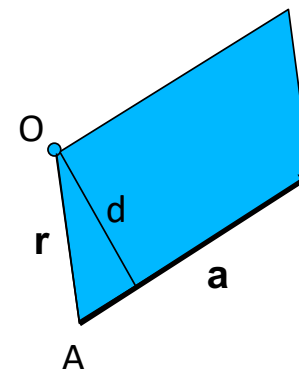
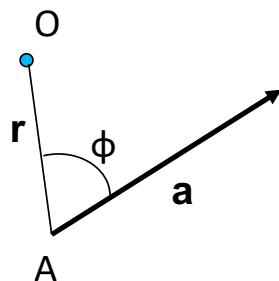
Momento polare: si definisce momento di un vettore applicato $\mathbf{a}$ con punto di applicazione A (A, $\mathbf{a}$), rispetto ad un punto generico O, il vettore $\mathbf{M}(O)$ così definito:

$$\mathbf{M}(O) = \mathbf{r} \times \mathbf{a}$$

avente modulo: $|\mathbf{M}(O)| = |\mathbf{r}||\mathbf{a}| \sin\phi$ dove ϕ è l'angolo formato dai vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{r}$, direzione ortogonale al piano definito da $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{a}$ e verso definito secondo la regola della mano destra.

Il modulo del momento $\mathbf{M}(O)$ indicato con $|\mathbf{M}(O)|$ è pari all'area del parallelogramma individuato dai vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{r}$, che può essere espressa come $|\mathbf{a}|d$

$d = |\mathbf{r}| \sin\phi$ indica il **braccio** o distanza di O dalla retta d'azione di $\mathbf{a}$.

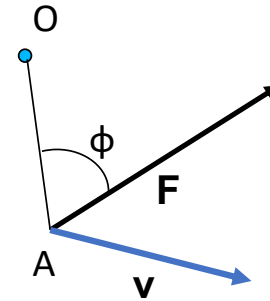


Momento polare

Queste proprietà valgono per un generico vettore applicato **a**.

Nello studio della meccanica ci interessano due casi significativi

- Momento di una forza
- Momento della quantità di moto



Momento polare

- Momento di una forza

$$\mathbf{M}(O) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

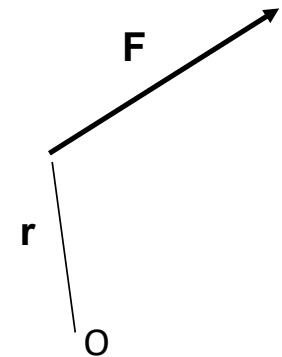
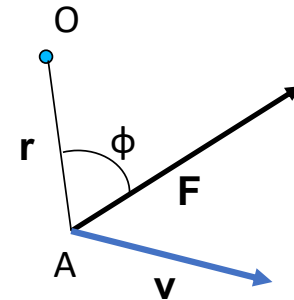
Modulo $M = r F \sin \phi = F d$
 $d = r \sin \phi$ (braccio del momento)

Dimensioni $[M] = [F]L$

unita` di misura Nm

Direzione $\rightarrow$ perpendicolare al piano che contiene $\mathbf{F}$ ed $\mathbf{r}$

Verso $\rightarrow$ con la regola della mano destra (come per il prodotto vettoriale)



Momento di una forza

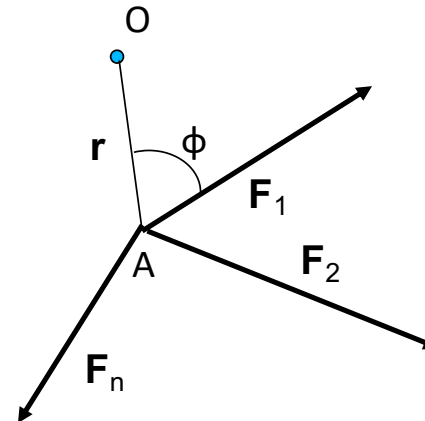
- Se sul punto materiale agiscono piu` forze

$$\mathbf{M}(O) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_3 + \dots = \\ \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots) = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots)$$

$\mathbf{R}$ risultante delle forze applicate in A.

Attenzione: questo risultato vale solo se le forze sono applicate tutte nello stesso punto!



Momento angolare

Momento angolare o momento della quantità di moto

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Ricordiamo che la quantità di moto è definita come

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

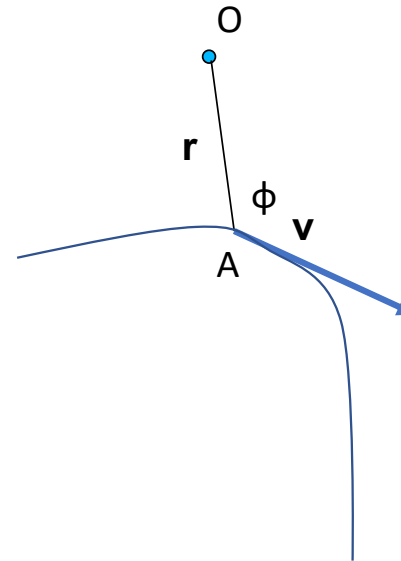
Modulo $L = mvr \sin \phi$

Dimensioni $[L] = M[v]L = M L^2/T$

Unità di misura nel SI $\rightarrow \text{kg m}^2/\text{s}$

Direzione

Verso



Teorema del momento angolare

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

Deriviamo rispetto al tempo (assumiamo la massa costante per semplicità)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$$

Teorema del momento angolare

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$$

Ma per il secondo principio della dinamica

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

La derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto (momento angolare) calcolata rispetto a un generico polo O è pari al momento della forza risultante $\mathbf{F}$ applicata al punto materiale rispetto ad O.

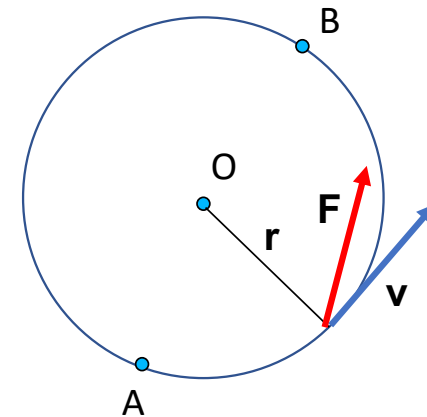
Lavoro e momento di una forza

Punto materiale che si muove di moto circolare, a cui e' applicata una forza $\mathbf{F}$

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \\ &= \int_A^B (\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n) \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_A^B F_t ds = \int_{\theta_A}^{\theta_B} F_t r d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M d\theta \end{aligned}$$

Altro risultato interessante: se M e' costante

$$P = \frac{dW}{dt} = M\omega$$



Lavoro e momento di una forza, unita` di misura

Lavoro $[W] = [F]L$

Nel SI si misura con l'unita` di misura
derivate J (Joule) $\rightarrow J = N m$

Momento $[M] = [F]L$

Ma non si usa il J! Si misura in Nm

Sistema di vettori applicati

Si definisce un *sistema di vettori applicati* un insieme di n vettori applicati $(A_i, \mathbf{a}_i)$.

Per i sistemi di vettori applicati è possibile definire:

- la *risultante*
- Il *momento risultante* rispetto ad un generico punto O .

La **risultante** di un sistema di vettori applicati ($\mathbf{R}$) è un vettore pari alla somma vettoriale degli n vettori del sistema:

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{a}_i$$

Il **momento risultante** rispetto ad un generico punto O è pari alla somma dei momenti polari dei singoli vettori, $\mathbf{M}_i(O)$, rispetto al punto O :

$$\mathbf{M}(O) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_i$$

Sistema di vettori applicati

Considerando un secondo polo O' per il calcolo del momento risultante del sistema di vettori applicati $(A_i, \underline{a}_i)$ è possibile verificare che:

$$\mathbf{M}(O') = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{OO'}) \times \mathbf{a}_i = \mathbf{M}(O) + \mathbf{r}_{OO'} \times \mathbf{R}$$

Questa relazione è detta anche **formula di trasposizione dei momenti**

$$\mathbf{M}(O') = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{OO'}) \times \mathbf{a}_i = \mathbf{M}(O) + \mathbf{r}_{OO'} \times \mathbf{R}$$

Dalla **formula di trasposizione dei momenti** derivano i seguenti risultati:

- il momento risultante è indipendente da O se la risultante è nulla: si annulla infatti il termine $\mathbf{r}_{OO'} \times \mathbf{R}$;
- il momento risultante non varia se si sposta il punto O lungo una retta parallela a $\mathbf{R}$ (in questo caso risulta infatti $\mathbf{r}_{OO'} \times \mathbf{R} = 0$)