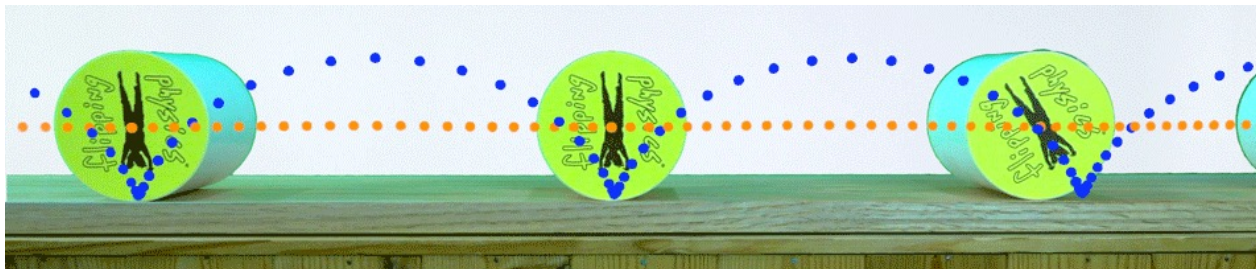
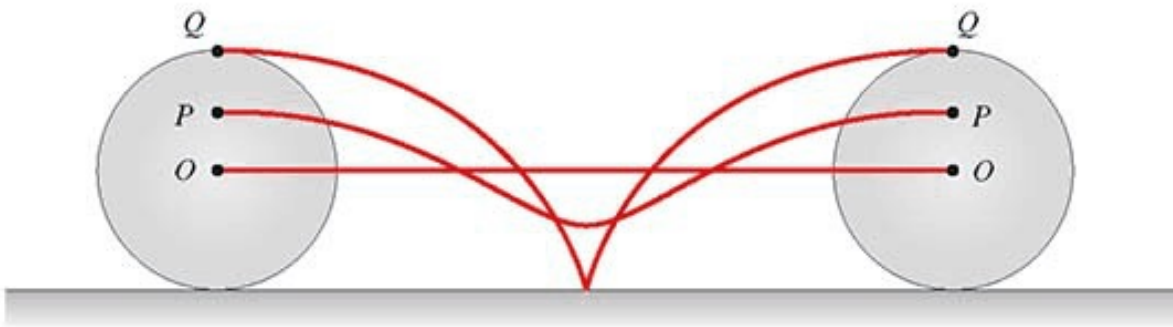


Moto di rotolamento



Moto di rotolamento

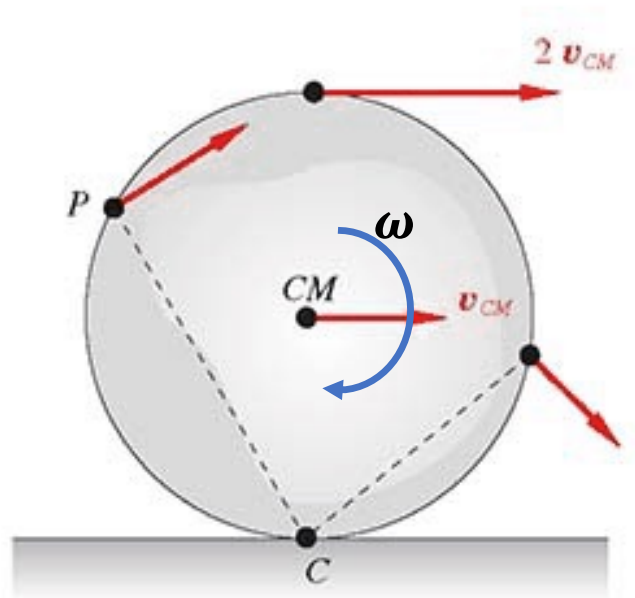


Moto di traslazione e rotazione caratterizzato da avere, istante per istante, un punto con velocità nulla (punto di contatto con il tracciato).

Il centro di massa del disco trasla in direzione orizzontale con velocità v_{CM} , mentre il disco ruota con velocità angolare ω .

Nel punto di contatto la velocità è istantaneamente nulla.

Moto di rotolamento - cinematica



Se il punto di contatto ha velocità nulla, la velocità di un generico punto può essere scritta, istante per istante, come

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CP}$$

E in particolare, per il centro di massa, risulta

$$\mathbf{v}_{CM} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CM}$$

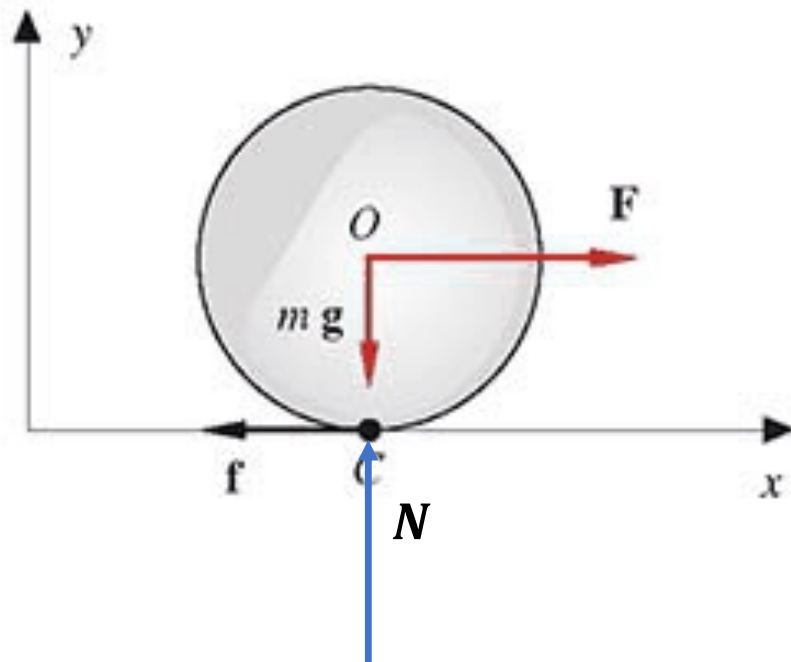
Se CM si muove verso destra, ω “entra” nel foglio.

Possiamo scrivere quindi le seguenti relazioni cinematiche tra le velocità e le accelerazioni del disco:

$$v_{CM} = \omega R$$

$$a_{CM} = \alpha R$$

Moto di rotolamento - dinamica



Analizziamo quindi la dinamica del disco. Supponiamo che sul centro di massa sia applicata una forza $\mathbf{F}$ orizzontale che trascina il disco lungo il piano.

Scriviamo le equazioni di moto:

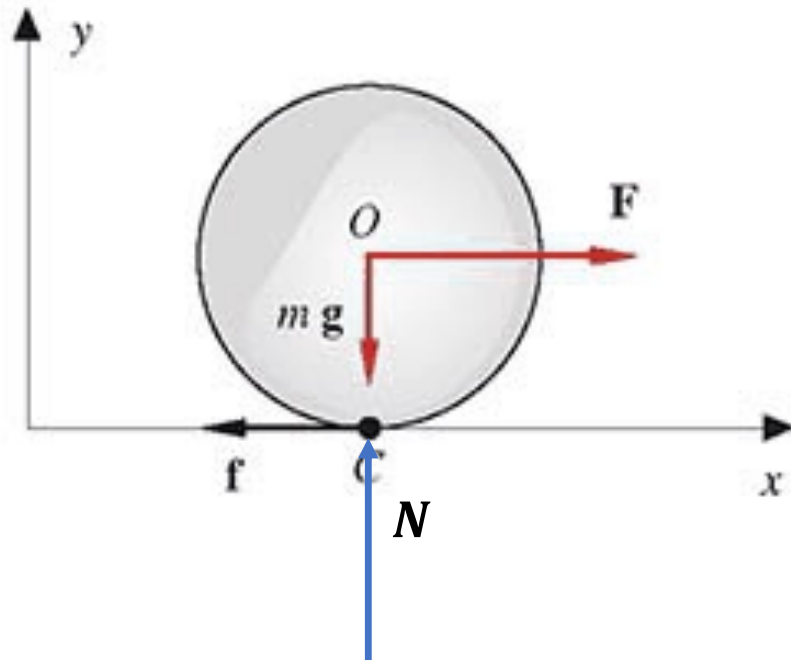
Accelerazione del centro di massa:

$$m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}$$

Momento angolare:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

Moto di rotolamento - dinamica



Analizziamo la prima equazione

$$m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}$$

La risultante delle forze è data da:

$$m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{f} + m\mathbf{g}$$

f è la forza generata dall'attrito tra disco e tracciato, che consente il moto di rotolamento (forza di aderenza).

Consideriamo le componenti orizzontali e verticali delle forze:

In direzione orizzontale abbiamo:

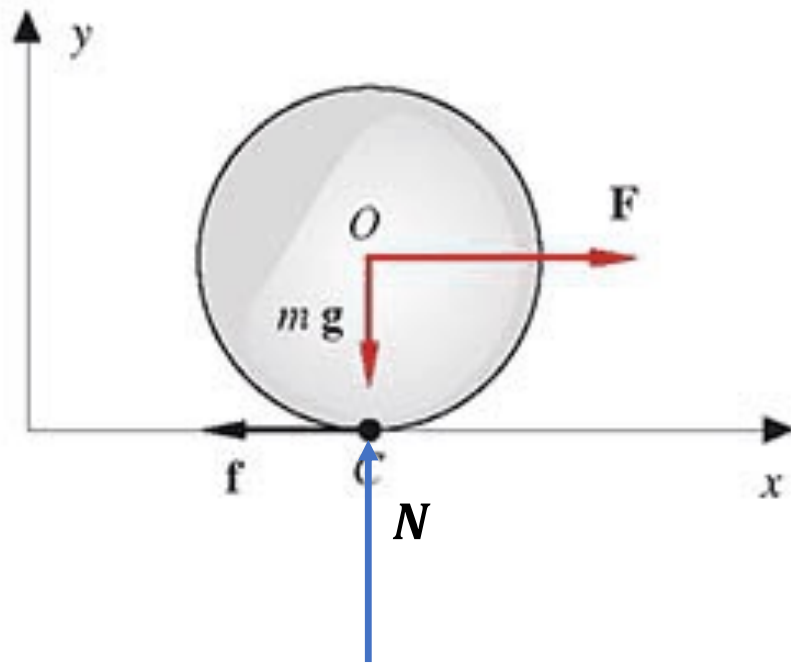
$$ma_{CM} = F - f$$

Mentre in direzione verticale:

$$N - mg = 0$$

$$N = mg$$

Moto di rotolamento - dinamica



Consideriamo i momenti

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

Calcoliamo il momento rispetto ad O

$$I_z \alpha = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$$

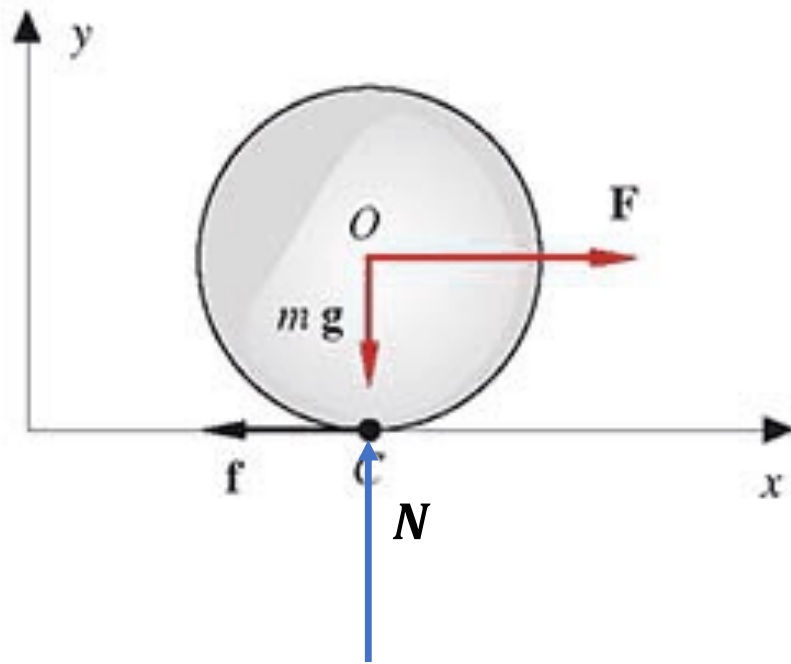
Possiamo considerare solo la componente in direzione perpendicolare al piano (z):

$$I_z \alpha = f R$$

Da cui ricaviamo:

$$f = \frac{I_z \alpha}{R}$$

Moto di rotolamento - dinamica



Possiamo adesso riprendere l'espressione dell'accelerazione

$$ma_{CM} = F - f$$

E sostituire l'espressione di f appena trovata

$$f = \frac{I_z \alpha}{R} = \frac{I_z a_{CM}}{R^2}$$

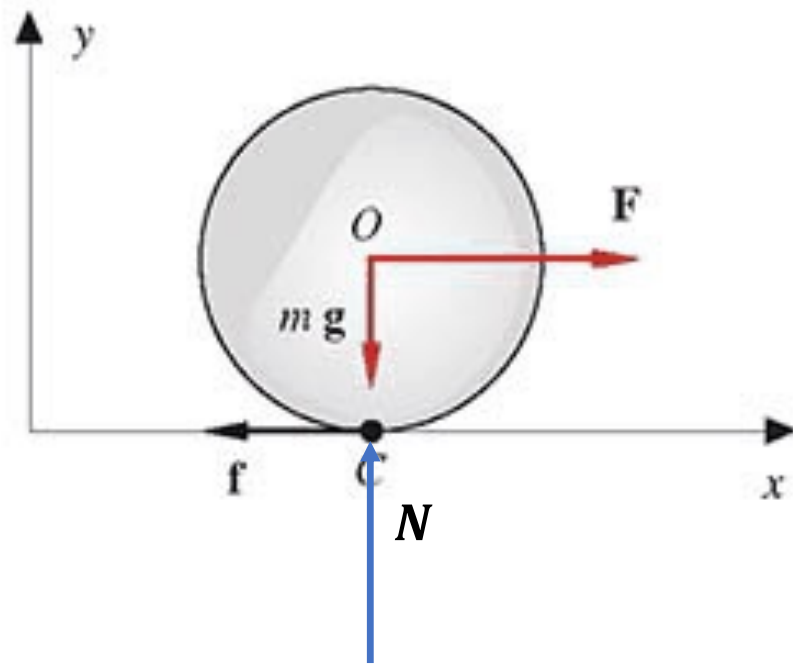
Ottenendo:

$$ma_{CM} = F - \frac{I_z a_{CM}}{R^2}$$

Da cui possiamo ricavare l'accelerazione

$$(mR^2 + I_z)a_{CM} = FR^2$$

Moto di rotolamento - dinamica



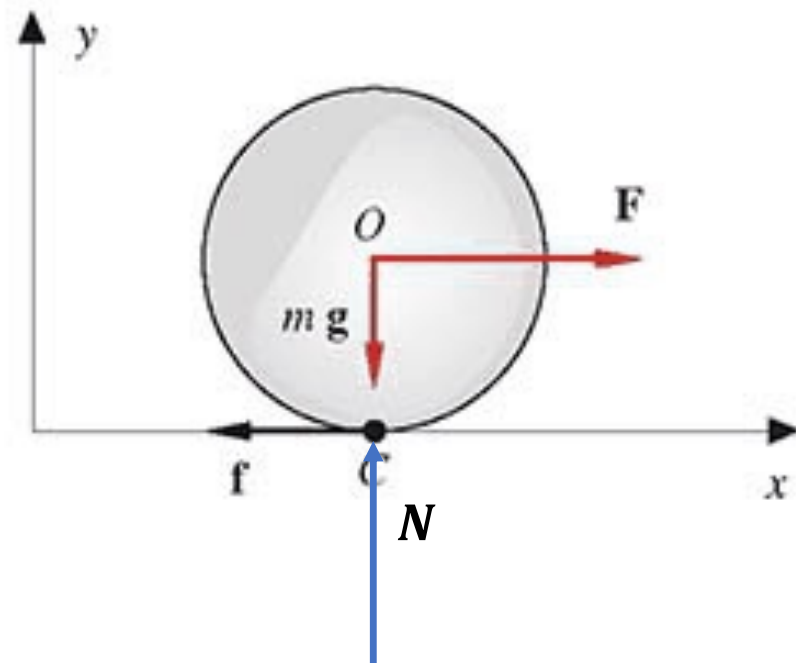
L'accelerazione risulta quindi pari a:

$$a_{CM} = \frac{F}{m + \frac{I_z}{R^2}}$$

Sostituendo, possiamo determinare la forza di aderenza, che risulta pari a:

$$f = \frac{I_z a_{CM}}{R^2} = \frac{I_z}{R^2} \frac{F}{m + \frac{I_z}{R^2}} = \frac{F}{1 + \frac{mR^2}{I_z}}$$

Moto di rotolamento - dinamica



Analizziamo il valore di f . Osserviamo che all'aumentare della forza di trazione F la forza f aumenta.

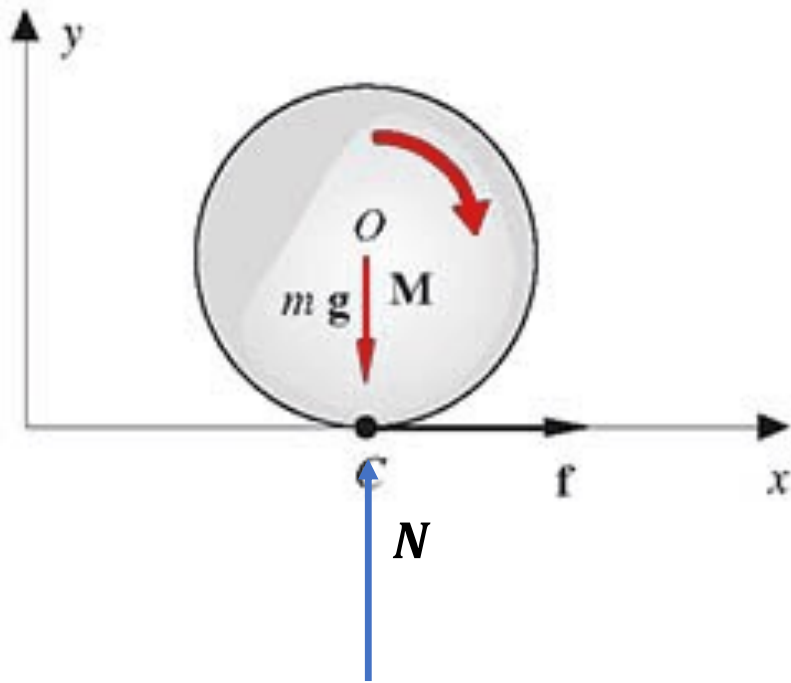
$$f = \frac{F}{1 + \frac{mR^2}{I_z}}$$

Può aumentare in modo indefinito? No! Oltre a un certo limite (limite di aderenza) la forza f non può aumentare ulteriormente. Il limite è dato dalla relazione dell'attrito coulombiano:

$$f \leq \mu_s N$$

Se questo limite non è soddisfatto, la condizione di rotolamento non può essere soddisfatta e la ruota slitta.

Moto di rotolamento - dinamica



Analizziamo un altro caso, in cui alla ruota è applicata una coppia di forze con momento pari a M .

Impostiamo le equazioni di moto.

Accelerazione del centro di massa:

$$m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}$$

Esplicitiamo le forze agenti sul disco. Le forze che costituiscono la coppia non sono considerate perché sono opposte e quindi la loro somma è nulla

$$m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{N} + \mathbf{f} + m\mathbf{g}$$

Componente in direzione orizzontale

$$ma_{CM} = f$$

Componente in direzione verticale

$$N - mg = 0$$

Da cui otteniamo

$$N = mg$$

Ripasso: Coppia di vettori applicati

Definizione: Si definisce come **coppia di vettori applicati**, un sistema di vettori applicati costituito da due vettori opposti ($A_1, \mathbf{a}$) e ($A_2, -\mathbf{a}$).

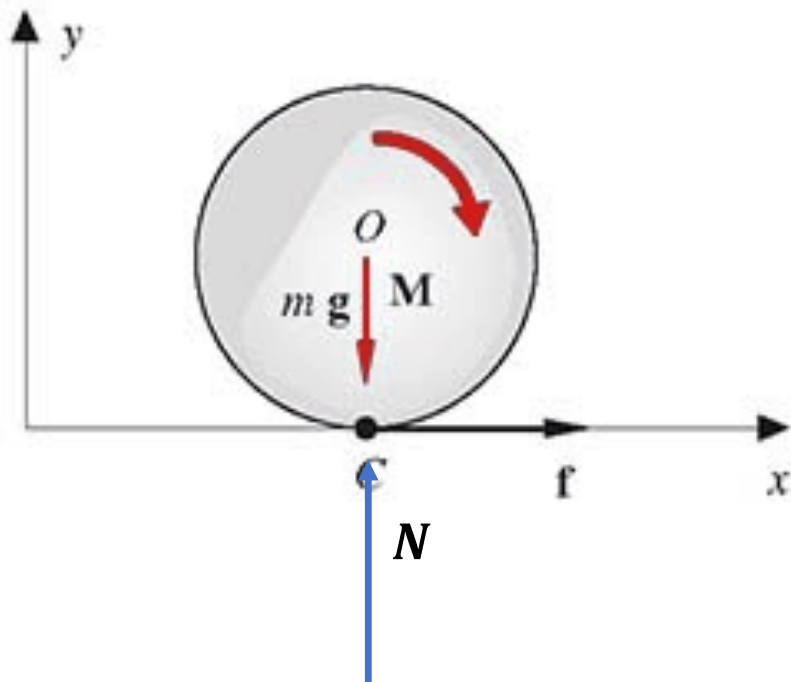


Essendo la risultante di tale sistema nullo, il momento risultante (**momento della coppia**) è invariante rispetto al punto O scelto come polo per il calcolo del momento risultante.

Si definisce quindi momento della coppia ($\mathbf{M}$) un vettore avente:

- modulo uguale al prodotto del modulo di uno dei due vettori, $|\mathbf{a}|$, per la distanza tra le rette d'azione dei due vettori d (braccio) $|\mathbf{M}| = |\mathbf{a}|d$
- direzione ortogonale al piano di appartenenza dei due vettori (piano della coppia)
- verso determinato in modo tale che il vettore (A_1-A_2), $\mathbf{a}$ ed $\mathbf{M}$ formino una terna destrorsa.

Moto di rotolamento - dinamica



Consideriamo l'equazione dei momenti

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{tot}$$

Calcolo del momento risultante rispetto ad O .

$$I_z \alpha = \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \mathbf{M}$$

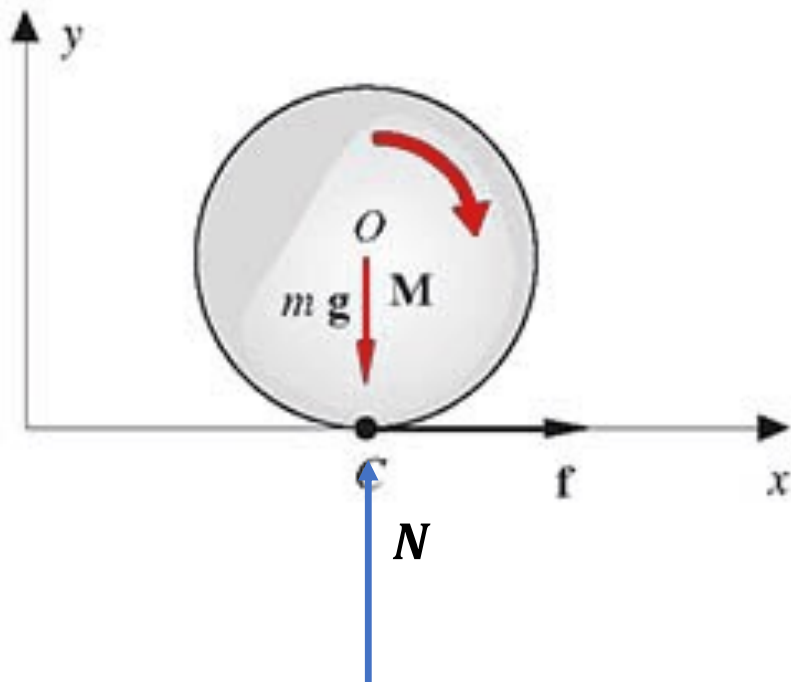
Consideriamo la componente in direzione perpendicolare al piano:

$$I_z \alpha = -fR + M$$

Da cui possiamo esplicitare la forza di aderenza

$$f = \frac{M - I_z \alpha}{R}$$

Moto di rotolamento - dinamica



Si sostituisce l'espressione della forza di aderenza appena definita

$$f = \frac{M - I_z \alpha}{R}$$

Nell'equazione dell'accelerazione

$$ma_{CM} = f$$

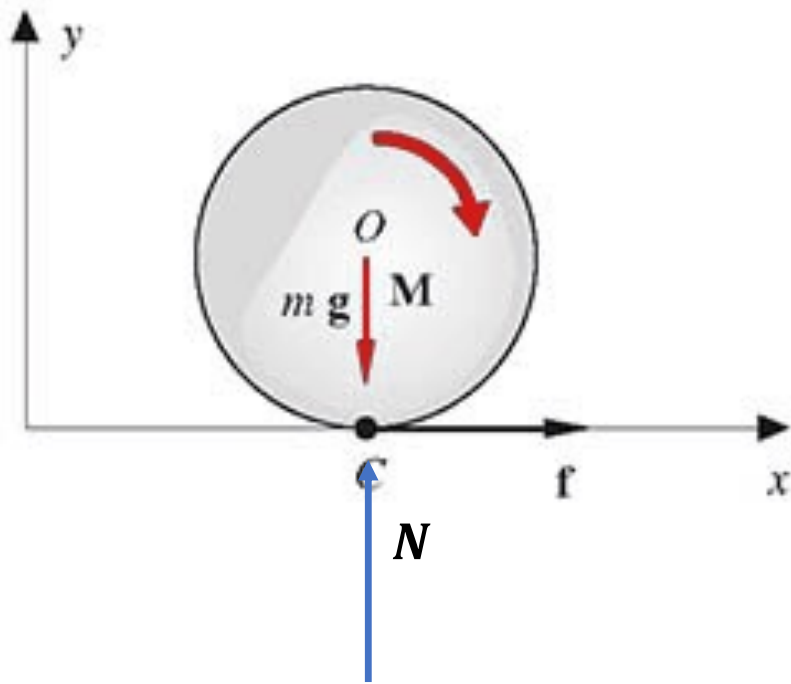
Ricordando che $a_{CM} = R\alpha$ si ottiene

$$mR\alpha = \frac{M - I_z \alpha}{R}$$

Da cui possiamo esplicitare α

$$(mR^2 + I_z)\alpha = M$$

Moto di rotolamento - dinamica



L'accelerazione angolare del disco è quindi pari a:

$$\alpha = \frac{M}{mR^2 + I_z}$$

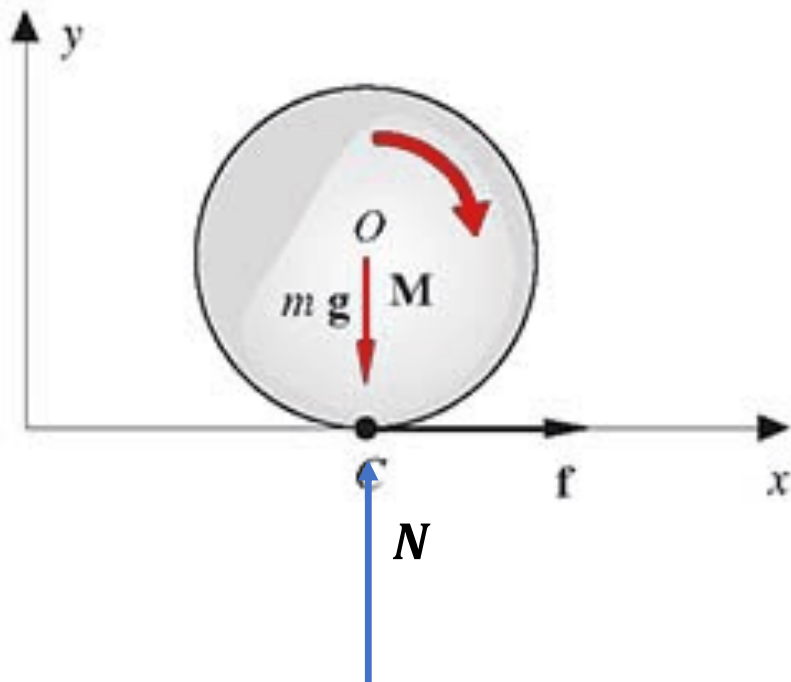
E quindi l'accelerazione del centro di massa sarà pari a

$$a_{CM} = \frac{MR}{mR^2 + I_z}$$

Sostituendo si ottiene il valore della forza di aderenza.

$$f = m \frac{MR}{mR^2 + I_z} = \frac{M}{R \left(1 + \frac{I_z}{mR^2} \right)}$$

Moto di rotolamento - dinamica



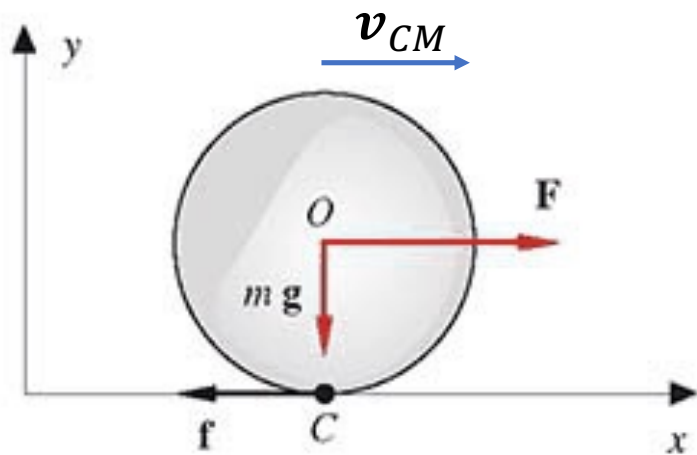
La forza di aderenza dipende dal momento della coppia applicata

$$f = ma_{CM} = m \frac{MR}{mR^2 + I_z}$$
$$= \frac{M}{R \left(1 + \frac{I_z}{mR^2} \right)}$$

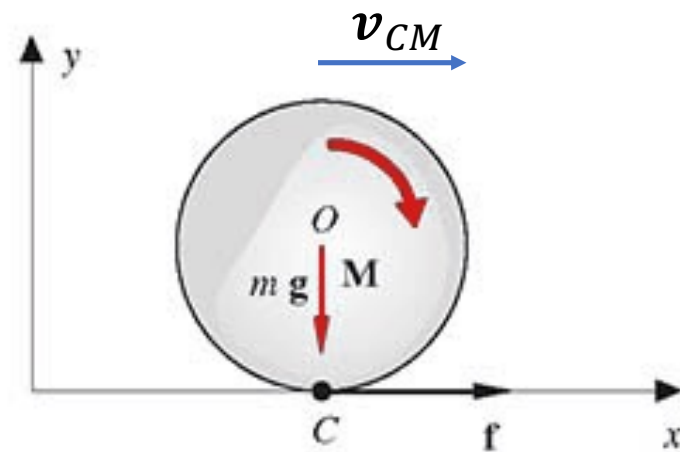
Ma anche in questo caso, deve rispettare il vincolo di aderenza

$$f \leq \mu_s N$$

Moto di rotolamento e forza di aderenza

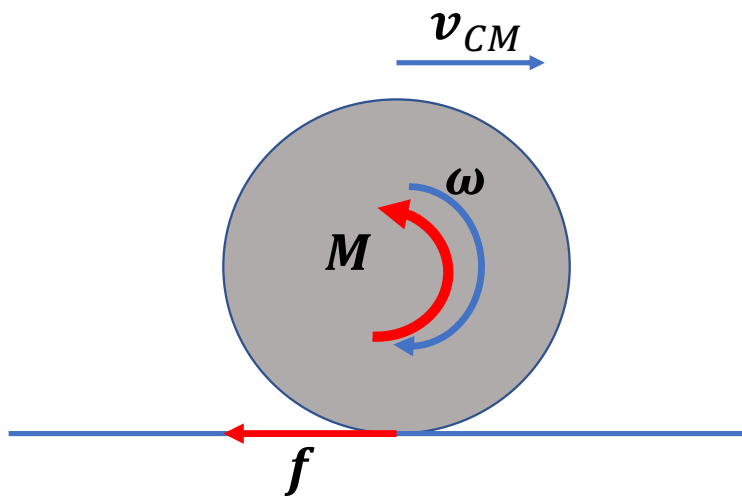


Ruota trascinata

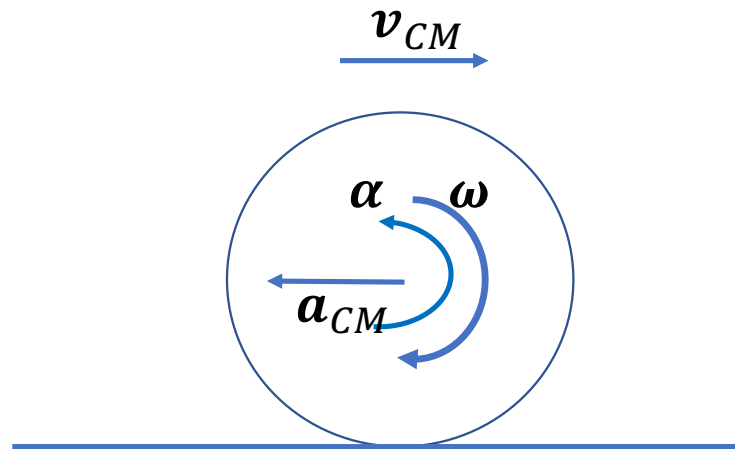


Ruota motrice

Moto di rotolamento e forza di aderenza



Ruota frenata



Ruota frenata, cinematica

A cosa serve e come funziona il sistema ABS?

Sensori misurano velocità angolare ruote

$$\omega$$

$$v_{CM}$$

$$v_{CM} = \omega R?$$

$$\text{Se } v_{CM} \neq \omega R$$

Energia cinetica in un moto generico

L'energia cinetica, in un moto generico, può essere scritta come:

$$E_k = E_{kt} + E_{kr}$$

$E_{kr} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}$ tiene conto della parte di rotazione del moto, nel caso generale dipende dalla velocità angolare e dalla matrice di inerzia.

$E_{kt} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$ tiene conto della parte di traslazione del moto generico.

Maggiori dettagli nei corsi di robotica e sistemi meccanici...

Energia cinetica in un moto di rotolamento

Anche in un moto di rotolamento abbiamo:

$$E_k = E_{kt} + E_{kr}$$

In questo caso in particolare

$E_{kr} = \frac{1}{2} I \omega^2$ tiene conto della parte di rotazione del moto.

$E_{kt} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$ tiene conto della parte di traslazione del moto generico.

Sapendo però che nel moto di rotolamento

$$v_{CM} = R\omega$$

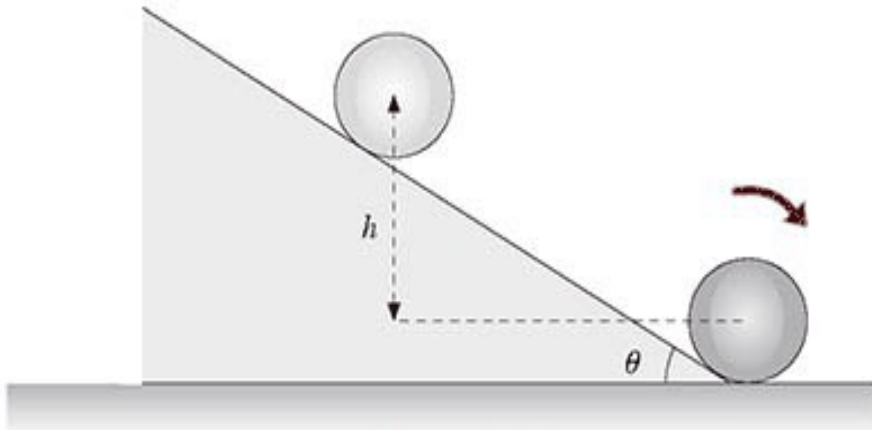
Possiamo scrivere l'energia cinetica in funzione della velocità angolare

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = \frac{1}{2} (I_z + mR^2) \omega^2$$

Oppure in funzione della velocità del centro di massa

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{I_z}{R^2} + m \right) v_{CM}^2$$

Esempio



Problema: un disco parte da fermo da un'altezza h su un piano inclinato, voglio determinare la velocità del corpo alla fine della discesa.

Sul corpo rigido agisce la forza peso, che è conservativa e la reazione del piano di appoggio inclinato, che non compie lavoro dato che il punto di contatto istante per istante è fermo.

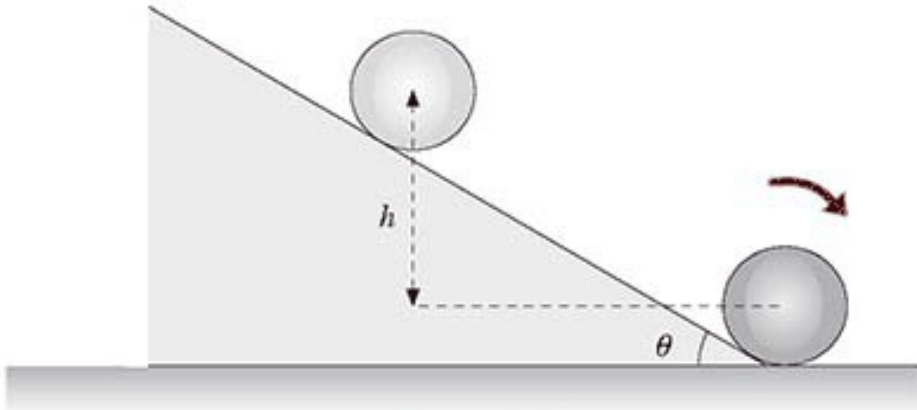
Possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica.

$$mgh = \frac{1}{2} (I_z + mR^2) \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgh}{I_z + mR^2}}$$

$$v_{CM} = \omega R = R \sqrt{\frac{2mgh}{I_z + mR^2}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I_z}{mR^2}}}$$

Esempio



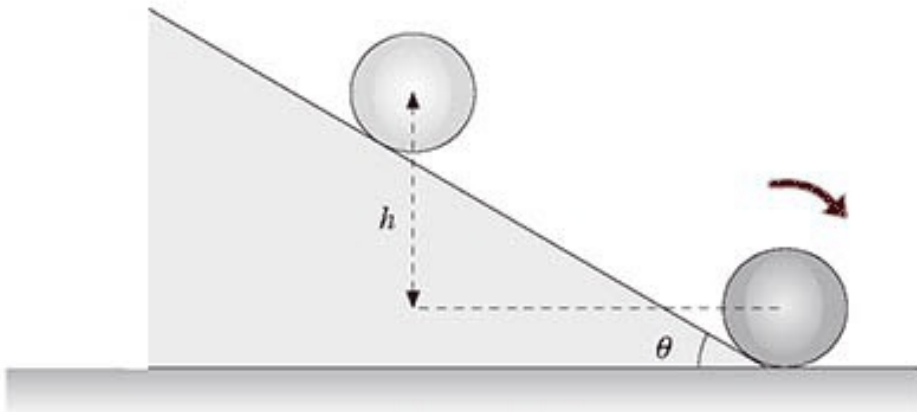
Approfondimento: anche nel moto di rotolamento esistono fenomeni dissipativi dell'energia meccanica, dovuti alla deformazione locale dei materiali e alla loro non perfetta elasticità.

In condizioni reali quindi l'energia meccanica non si conserva nel moto di rotolamento, ma tende a diminuire.

Questi fenomeni possono essere rappresentati introducendo il concetto di attrito di rotolamento o volvente.

→ Maggiori dettagli nel corso di sistemi meccanici.

Stesso esempio, utilizzando le equazioni di moto



Risultante delle forze in direzione parallela al piano

$$mg \sin \vartheta - f = ma_{CM}$$

Equazione dei momenti

$$I_z \alpha = fR$$

Relazione cinematica

$$a_{CM} = R\alpha$$

Dall'equazione dei momenti ricaviamo la forza di aderenza

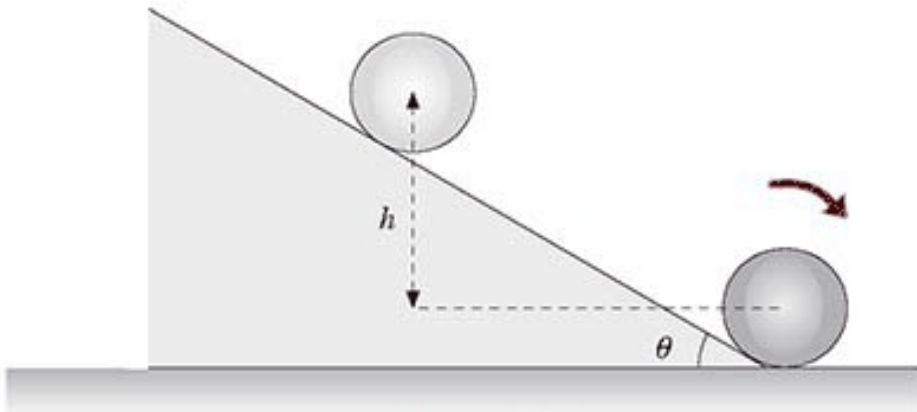
$$f = \frac{I_z \alpha}{R}$$

Risolvendo, si ricava l'accelerazione del centro di massa

$$mg \sin \vartheta - \frac{I_z a_{CM}}{R^2} = ma_{CM}$$

$$a_{CM} = \frac{mg \sin \vartheta}{m + \frac{I_z}{R^2}} = \frac{g \sin \vartheta}{1 + \frac{I_z}{mR^2}}$$

Stesso esempio, utilizzando le equazioni di moto



Accelerazione del centro di massa

$$a_{CM} = \frac{mg \sin \vartheta}{m + \frac{I_z}{R^2}} = \frac{g \sin \vartheta}{1 + \frac{I_z}{mR^2}}$$

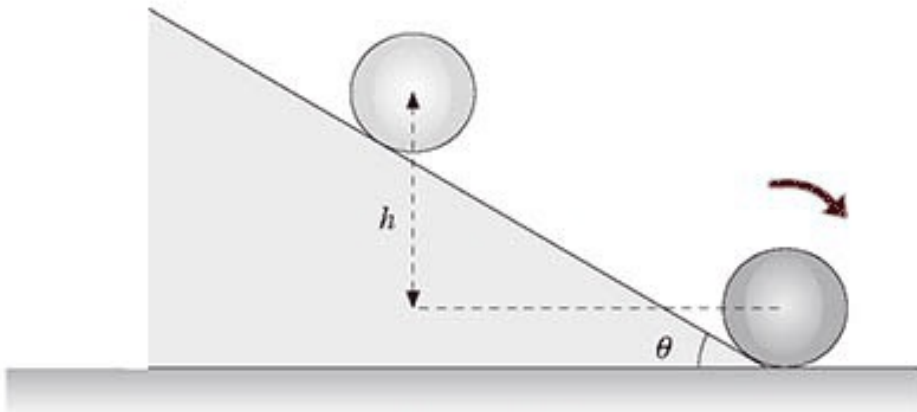
Accelerazione angolare

$$\alpha = \frac{a_{CM}}{R} = \frac{g \sin \vartheta}{R \left(1 + \frac{I_z}{mR^2}\right)}$$

Forza di aderenza

$$\begin{aligned} f &= \frac{I_z \alpha}{R} = \frac{I_z}{R^2} \frac{g \sin \vartheta}{\left(1 + \frac{I_z}{mR^2}\right)} = \frac{I_z m g \sin \vartheta}{(mR^2 + I_z)} \\ &= \frac{mg \sin \vartheta}{\left(\frac{mR^2}{I_z} + 1\right)} \end{aligned}$$

Stesso esempio, utilizzando le equazioni di moto



La forza di aderenza deve soddisfare il vincolo coulombiano.

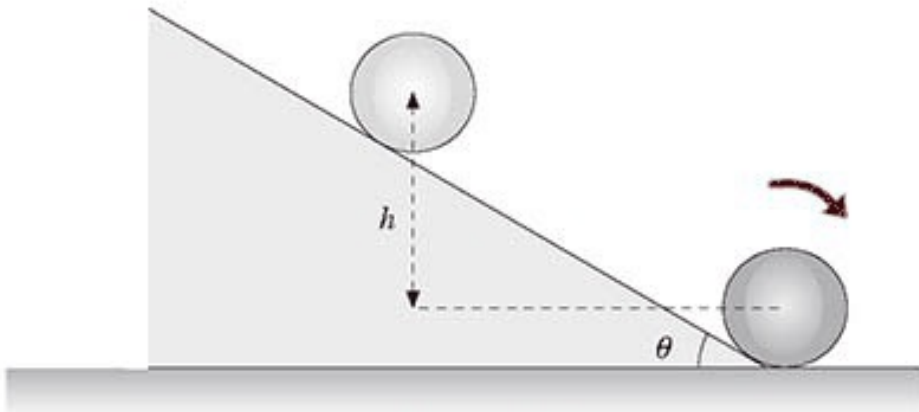
$$N = mg \cos \vartheta$$

$$f = \frac{mg \sin \vartheta}{\left(\frac{mR^2}{I_z} + 1\right)}$$

$$f \leq \mu_s N$$

$$\frac{mg \sin \vartheta}{\left(\frac{mR^2}{I_z} + 1\right)} \leq \mu_s mg \cos \vartheta$$

Stesso esempio, utilizzando le equazioni di moto



$$\frac{mg \sin \vartheta}{\left(\frac{mR^2}{I_z} + 1\right) \sin \vartheta} \leq \mu_s mg \cos \vartheta$$

$$\frac{\left(\frac{mR^2}{I_z} + 1\right)}{\sin \vartheta} \leq \mu_s \cos \vartheta$$

$$\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \leq \mu_s \left(\frac{mR^2}{I_z} + 1\right)$$

$$\tan \vartheta \leq \mu_s \left(\frac{mR^2}{I_z} + 1\right)$$