

Corso di FISICA 1



Capitolo 9 – Corpi rigidi

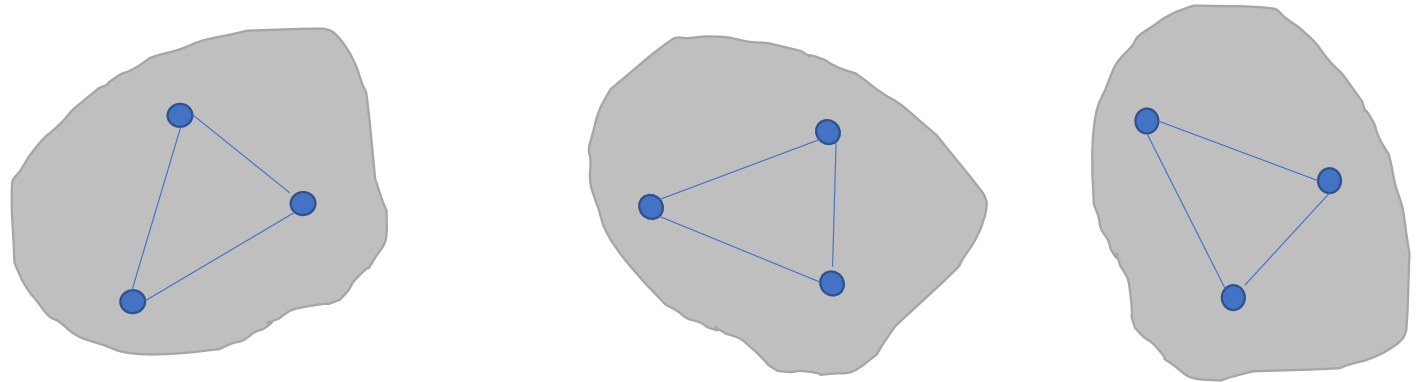
Monica Malvezzi, Università degli
Studi di Siena



Corpo rigido - definizione

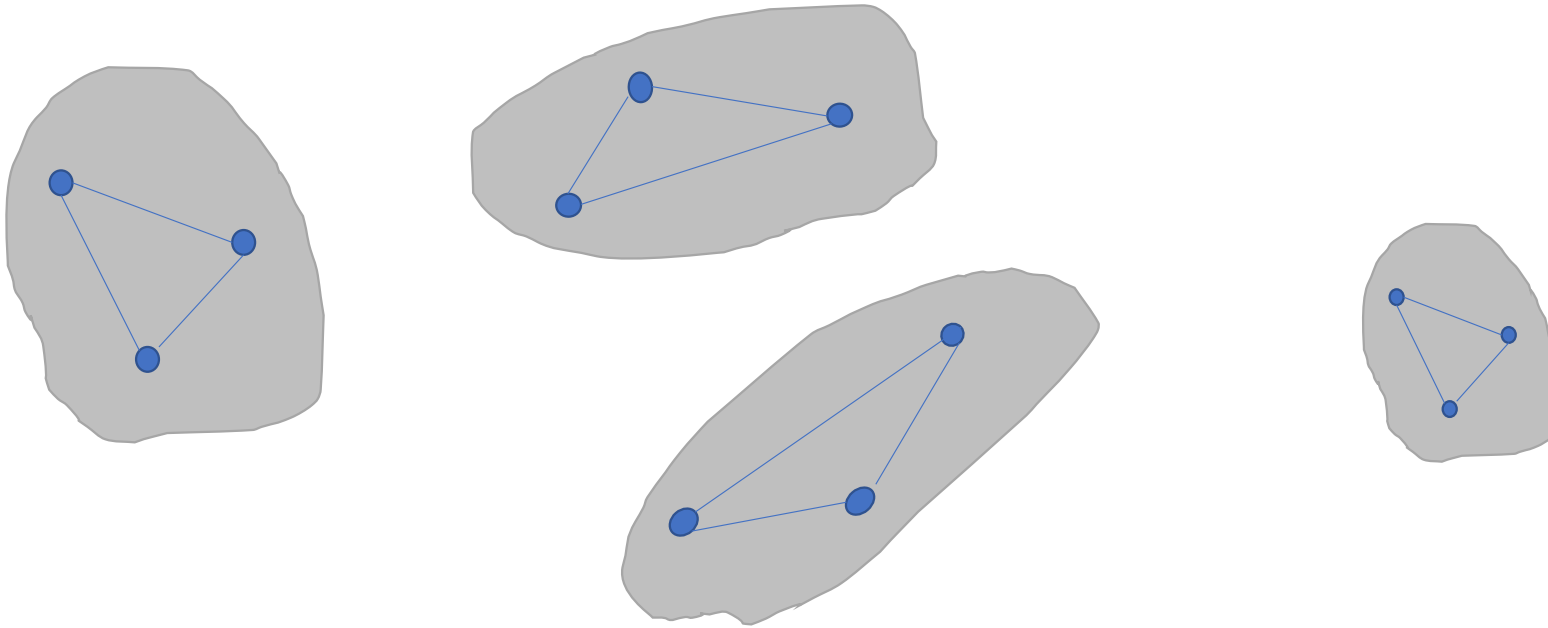
- Un corpo rigido e` un sistema di punti materiali in cui la distanza tra una qualsiasi coppia di punti che lo costituiscono rimane costante.
- Essendo un sistema di punti possiamo applicare le definizioni e i risultati ottenuti nelle lezioni precedenti sui sistemi di punti.

Esempio di corpo rigido



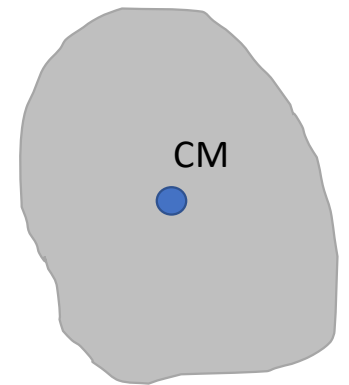
Corpo rigido - definizione

- Esempi di corpo non rigido



Corpo rigido - definizione

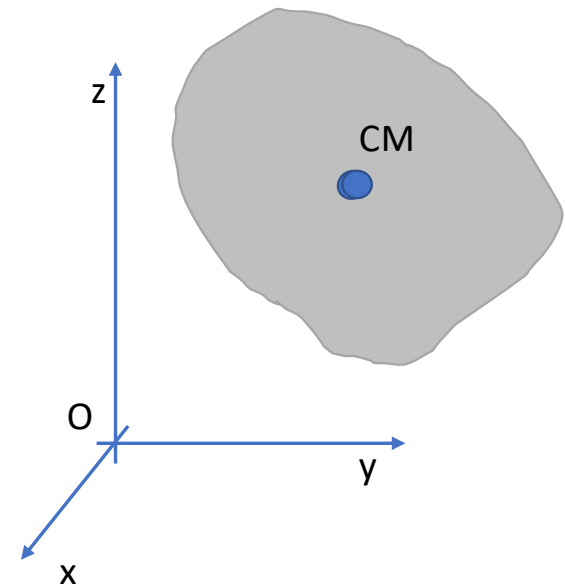
- Essendo un sistema di punti possiamo applicare le definizioni e i risultati ottenuti nelle lezioni precedenti sui sistemi di punti.
- Possiamo ad esempio calcolare la posizione del centro di massa CM.



Corpo rigido – sistemi di riferimento

Per lo studio del moto di un corpo rigido possiamo definire diversi sistemi di riferimento.

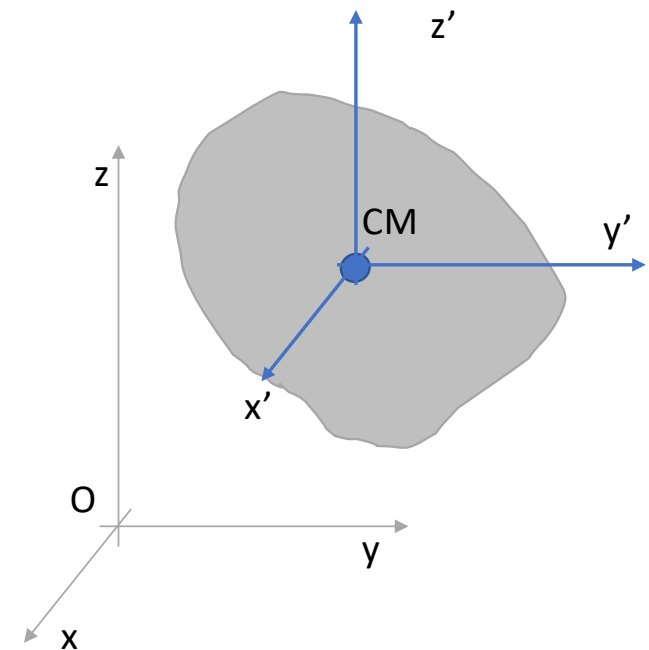
- **Sistema di riferimento inerziale**
- Sistema di riferimento con origine nel centro di massa e assi paralleli a quelli del sistema inerziale
- Sistema di riferimento con origine nel centro di massa e assi che ruotano insieme al corpo rigido



Corpo rigido – sistemi di riferimento

Per lo studio del moto di un corpo rigido possiamo definire diversi sistemi di riferimento.

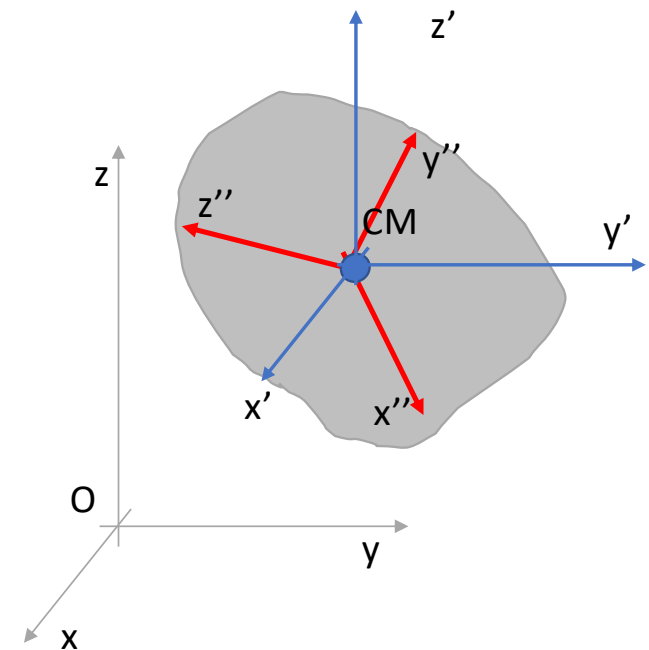
- Sistema di riferimento inerziale
- **Sistema di riferimento con origine nel centro di massa e assi paralleli a quelli del sistema inerziale**
- Sistema di riferimento con origine nel centro di massa e assi che ruotano insieme al corpo rigido



Corpo rigido – sistemi di riferimento

Per lo studio del moto di un corpo rigido possiamo definire diversi sistemi di riferimento.

- Sistema di riferimento inerziale
- Sistema di riferimento con origine nel centro di massa e assi paralleli a quelli del sistema inerziale
- **Sistema di riferimento con origine nel centro di massa e assi che ruotano insieme al corpo rigido**



Corpo rigido – dinamica

Riepilogo delle relazioni fondamentali che descrivono la dinamica dei punti materiali: sono alla base dello studio della dinamica del corpo rigido.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}^{(E)}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(E)}$$

Queste relazioni ci permettono di capire come variano $\mathbf{P}$ ed $\mathbf{L}$ nel tempo

- Relazioni vettoriali
- Dipendono dalle forze esterne e dai rispettivi momenti
- Permettono di studiare il comportamento complessivo del sistema ma non quello dei singoli punti.

Lavoro e variazione dell'energia cinetica

$$W_{AB}^{(E)} + W_{AB}^{(I)} = E_{kB} - E_{kA}$$

Corpo rigido – dinamica

Per le forze interne, abbiamo trovato che per una generica coppia di punti

$$dW_{ij}^{(I)} = \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}$$

Il lavoro delle forze interne dipende da $d\mathbf{r}_{ij}$ cioè da quanto si spostano i punti uno rispetto all'altro.

Se i punti rimangono alla stessa distanza tra loro $d\mathbf{r}_{ij} = 0$ oppure $d\mathbf{r}_{ij}$ è perpendicolare a $\mathbf{F}_{ij}$ e quindi $dW_{ij}^{(I)} = 0$

Nei corpi rigidi risulta quindi $dW_{ij}^{(I)} = 0$

Possiamo riscrivere il teorema dell'energia cinetica come

$$W_{AB}^{(E)} + \cancel{W_{AB}^{(I)}} = E_{kB} - E_{kA}$$
$$W_{AB}^{(E)} = E_{kB} - E_{kA}$$

Considerando per il calcolo del lavoro soltanto le forze esterne

Corpo rigido – dinamica

Per i corpi rigidi abbiamo quindi

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}$$

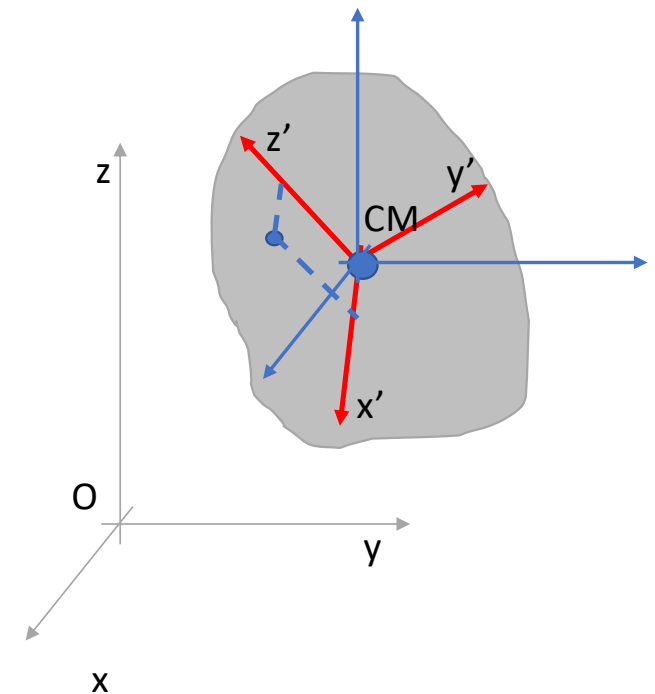
$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

$$W_{AB} = E_{kB} - E_{kA}$$

Possiamo omettere l'apice (E), è sottointeso che le forze da prendere in considerazione sono esterne.

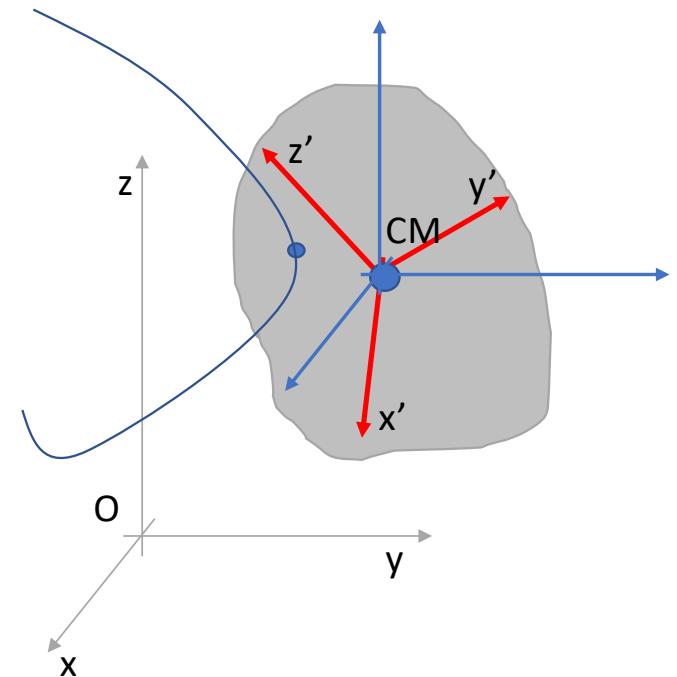
Corpo rigido – rappresentazione del moto

- Quante informazioni devo specificare per identificare la posizione di un corpo rigido nello spazio?
- In un corpo rigido le coordinate di un qualsiasi punto ad esso solidale rispetto al sistema di riferimento con origine in CM e assi solidali al corpo sono fisse



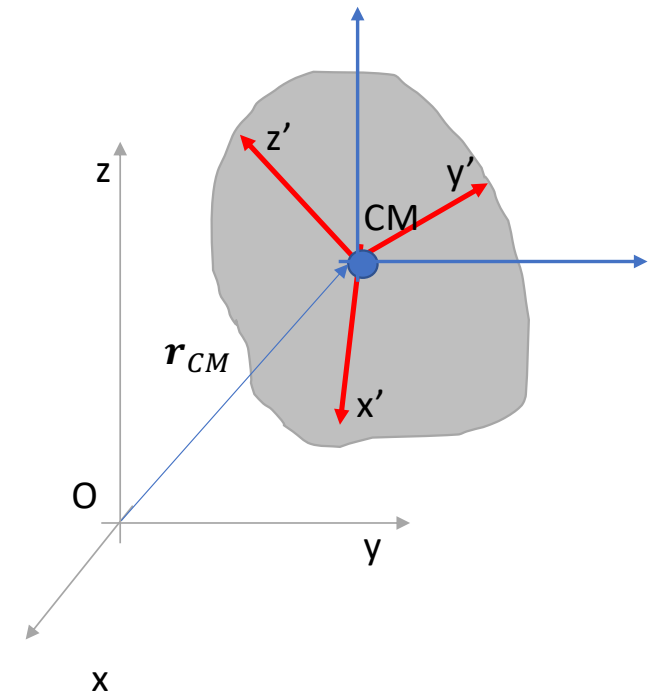
Corpo rigido – rappresentazione del moto

- Quante informazioni devo specificare per identificare la posizione di un corpo rigido nello spazio?
- Per conoscere la posizione di qualsiasi punto solidale al corpo basta conoscere le sue coordinate nel sistema mobile e la configurazione del sistema mobile rispetto a quello fisso



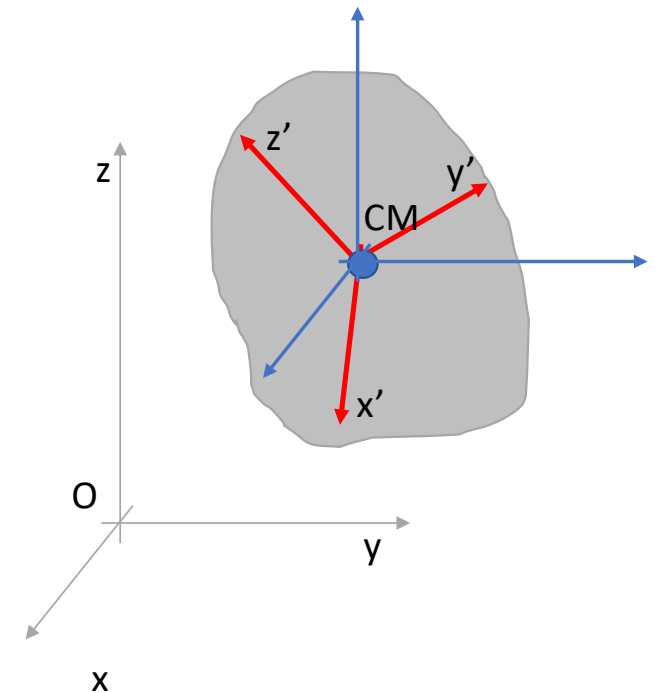
Corpo rigido – rappresentazione del moto

- Quante informazioni devo specificare per identificare la posizione di un corpo rigido nello spazio?
- Il sistema di riferimento e' definito dalla posizione del centro di massa $\mathbf{r}_{CM}$ e dai versori $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$
- Per definire $\mathbf{r}_{CM}$ devo specificare 3 parametri (le componenti cartesiane)



Corpo rigido – rappresentazione del moto

- Possiamo definire anche le componenti dei versori $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ rispetto al sistema inerziale
- $\mathbf{i}' = i'_x \mathbf{i} + i'_y \mathbf{j} + i'_z \mathbf{k}$
- $\mathbf{j}' = j'_x \mathbf{i} + j'_y \mathbf{j} + j'_z \mathbf{k}$
- $\mathbf{k}' = k'_x \mathbf{i} + k'_y \mathbf{j} + k'_z \mathbf{k}$
- Per poterli rappresentare ho bisogno di 9 valori ma...



Corpo rigido – rappresentazione del moto

- $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ sono versori, quindi devono avere modulo unitario
- $i'^2_x + i'^2_y + i'^2_z = 1$
- $j'^2_x + j'^2_y + j'^2_z = 1$
- $k'^2_x + k'^2_y + k'^2_z = 1$
- $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ sono ortogonali tra loro, quindi
- $i'_x j'_x + i'_y j'_y + i'_z j'_z = 0$
- $j'_x k'_x + j'_y k'_y + j'_z k'_z = 0$
- $i'_x k'_x + i'_y k'_y + i'_z k'_z = 0$

Corpo rigido – rappresentazione del moto

- Per rappresentare $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ abbiamo bisogno di 9 parametri, legati tra loro da 6 relazioni. Quindi soltanto $9-6=3$ di loro sono indipendenti.
- Ricordiamo che servono altri 3 parametri per identificare $\mathbf{r}_{CM}$

Torniamo alla domanda di partenza

Quante informazioni devo specificare per identificare la posizione di un corpo rigido nello spazio?

Possiamo rispondere adesso: le informazioni che dobbiamo specificare sono $3 + 3 = 6$

Si dice anche che **un corpo rigido nello spazio ha 6 gradi di liberta`.**

Gradi di libertà

Più in generale, in un sistema dinamico, cosa rappresenta il ***numero di gradi di libertà?***

Il numero di gradi di libertà è il minimo numero di informazioni che devo specificare per identificare la configurazione del sistema.

Gradi di libertà

Esempi:

- Un punto che si muove su una retta ha 1 grado di libertà
- Un punto nel piano ha 2 gradi di libertà
- Un punto nello spazio ha 3 gradi di libertà
- Un sistema di n punti materiali nello spazio ha $3n$ gradi di libertà
- Un sistema di n punti materiali nel piano ha $2n$ gradi di libertà

.. Abbiamo verificato che un corpo rigido nello spazio ha 6 gradi di libertà indipendentemente dal numero di punti che lo compongono

Corpi continui

I corpi continui sono sistemi costituiti da un numero molto elevato di punti di massa infinitesima.

In un sistema discreto le quantità che caratterizzano l'intero sistema si calcolano con un'operazione di sommatoria. Ad esempio, per la massa:

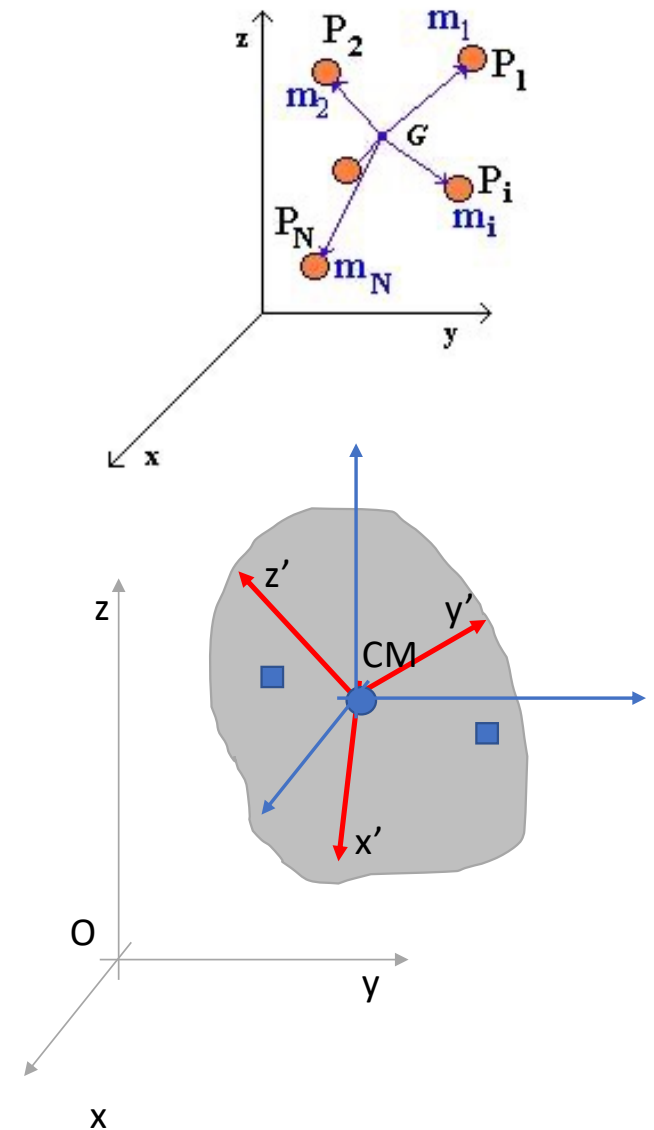
$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

E per il centro di massa:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

In un sistema continuo l'operazione di sommatoria si sostituisce con un integrale, la massa del sistema sarà quindi data da:

$$m = \int dm$$



Corpi continui

Per calcolare le grandezze del sistema come integrali nelle variabili dello spazio è utile introdurre il concetto di densità. Per un corpo tridimensionale, si definisce la densità di volume come:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \rightarrow dm = \rho dV$$

Dimensionalmente la densità è definita massa/lunghezza³ (M/L^3)

Una volta definita la densità, posso calcolare la massa totale del corpo continuo come

$$m = \int_V \rho dV$$

Se la densità è costante il corpo si dice **omogeneo** e vale la relazione

$$m = \rho V$$

Corpi continui

Casi particolari: corpi bidimensionali, sono corpi in cui due dimensioni sono prevalenti rispetto alla terza (ad esempio piastre, gusci, membrane, lamiere, ecc.). In questo caso conviene definire una densità di area o di superficie.

$$\rho_A = \frac{dm}{dA}$$

Dimensionalmente la densità di area si calcola come massa/superficie=massa/lunghezza²

In questo caso posso calcolare la massa come:

$$m = \int_A \rho_A dA$$

Se la densità di superficie è costante, il corpo bidimensionale si dice omogeneo e posso calcolare la massa come:

$$m = \rho A$$

Corpi continui

Infine, consideriamo il caso particolare di un corpo monodimensionale, vale a dire un corpo in cui una dimensione è prevalente rispetto alle altre due, ad esempio cavi, aste, tubi, funi, catene, ecc. Si definisce in questo caso una densità lineare:

$$\rho_l = \frac{dm}{dl}$$

La densità lineare, dimensionalmente si calcola come massa/lunghezza.

In questo caso posso calcolare la massa come

$$m = \int_l \rho_l dl$$

Se la densità lineare è costante il corpo si dice omogeneo e posso calcolare la massa come:

$$m = \rho l$$

Corpi continui, centro di massa

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Torniamo al caso generale tridimensionale, consideriamo un corpo continuo, la posizione del centro di massa è definita come:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} = \frac{\int_V \mathbf{r} \rho dV}{m}$$

Possiamo calcolare le coordinate del centro di massa rispetto a un dato sistema di riferimento:

$$x_{CM} = \frac{\int_V \rho x dV}{m}$$

$$y_{CM} = \frac{\int_V \rho y dV}{m}$$

$$z_{CM} = \frac{\int_V \rho z dV}{m}$$

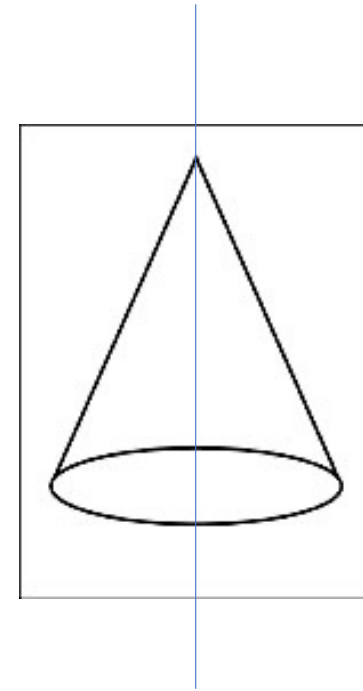
Centro di massa, alcune proprietà

Se un corpo è omogeneo e ha un centro di simmetria, il centro di massa coincide con il centro di simmetria



Centro di massa, alcune proprietà`

Se un corpo ha un asse di simmetria, il centro di massa si trova su quell'asse



Centro di massa, esempio di calcolo

Consideriamo ad esempio un cono omogeneo, calcoliamo la posizione del centro di massa. Dato che il cono ha un asse di simmetria, il centro di massa si trova sull'asse del cono. Calcoliamo la distanza z_{CM} tra la base del cono e il centro di massa.

Il volume del cono è dato da:

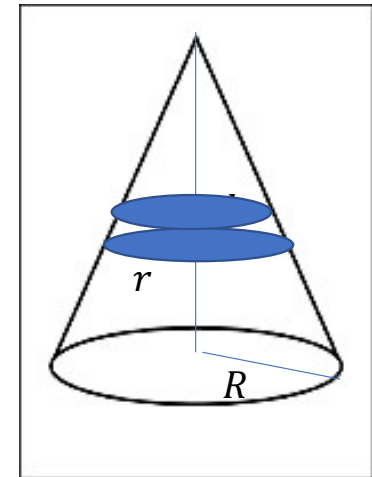
$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

Se il cono è omogeneo e la sua densità è ρ , la sua massa sarà

$$m = \rho V = \rho \frac{\pi R^2 h}{3}$$

Calcoliamo la posizione del centro di massa. Ricordiamo che

$$z_{CM} = \frac{\int_V \rho z dV}{m}$$



Centro di massa, esempio di calcolo

$$z_{CM} = \frac{\int_V \rho z dV}{m}$$

Per calcolare l'integrale di volume, possiamo dividere il cono in fette infinitesime parallele alla base, possiamo scrivere in questo caso

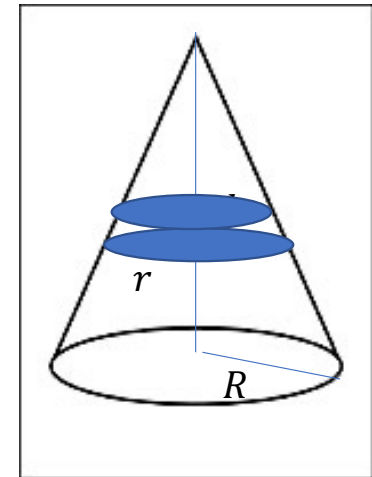
$$dV = \pi r^2 dz$$

Per le proprietà dei triangoli simili risulta inoltre

$$\begin{aligned} r:R &= (h-z):h \\ r &= \frac{(h-z)}{h} R \end{aligned}$$

Sostituendo nell'integrale si ottiene:

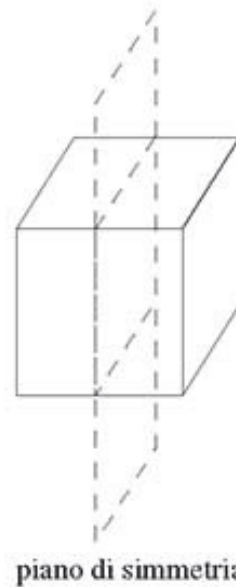
$$\begin{aligned} z_{CM} &= \frac{\int_V \rho z dV}{m} = \frac{\int_0^h \rho \pi r^2 z dz}{\rho \frac{\pi R^2 h}{3}} = \frac{\int_0^h \pi \left(\frac{(h-z)}{h} R \right)^2 dz}{\frac{\pi R^2 h}{3}} = \frac{\frac{\pi R^2 h^2}{12}}{\frac{\pi R^2 h}{3}} \\ &= \frac{h}{4} \end{aligned}$$



Centro di massa, alcune proprietà`

Se un corpo omogeneo ha un piano di simmetria, il centro di massa si trova su quel piano.

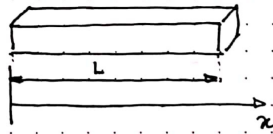
Se un corpo ha due o più piani di simmetria, il centro di massa si trova nell'intersezione tra i piani



Centro di massa, esempio di calcolo

ESEMPI DI CALCOLO DEL CENTRO DI MASSA
DI ALCUNI CORPI RIGIDI

① BARRETTA OMogenea RETTILINEA DI
LUNGHEZZA l e MASSA m



CORPO MONODIMENSIONALE, È SUFFICIENTE CALCOLARE
LA COORDINATA x_{cm}

$$x_{cm} = \frac{\int x dm}{\int dm}$$

dm $\rightarrow$ posso pensare di
dividere la barretta
in "fette" infinitesime
di spessore dx



LA MASSA DELLA FETTA INFINITESIMA

$$\begin{aligned} \text{è: } dm &= \rho dV = \rho \underbrace{A dx}_{\text{volume della "fetta"}} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{densità del materiale} \\ &= \rho \underbrace{A dx}_{dV} \end{aligned}$$

QUINDI

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{\int_0^l \rho A x dx}{m} = \frac{\rho A \int_0^l x dx}{m} = \\ &= \frac{\rho A \frac{x^2}{2} \Big|_0^l}{m} = \frac{\rho A \frac{l^2}{2}}{m} \end{aligned}$$

ma la massa m è pari a

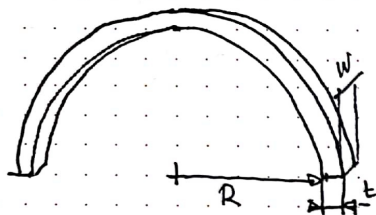
$$m = \rho V = \rho A l$$

QUINDI

$$x_{cm} = \frac{\rho A \frac{l^2}{2}}{\rho A l} = \frac{l}{2} \rightarrow \text{OVVIO! LA BARRETTA È SIMMETRICA}$$



SEMANELLO OMOGENEO DI MASSA m e
RAGGIO R



SUPPONIAMO CHE LA SEZIONE SIA RETTANGOLARE
CON SPESSORE t (thickness) E LARGHEZZA
 w (width)

UTILIZZIAMO LA DEFINIZIONE

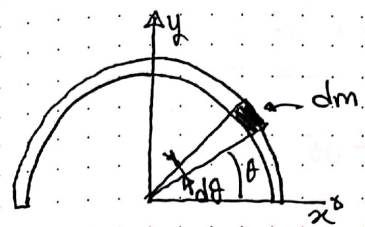
$$\underline{r}_{cm} = \frac{\int \underline{r} dm}{m}$$

SVILUPPIAMO L'INTEGRALE A NUMERATORE

→ COME POSSO SCRIVERE dm IN QUESTO
CASO?

POSSO PENSARE NUOVAMENTE DI
DIVIDERE L'ANELLO A "FETTE",

MA QUESTA VOLTA CONVIENE FARLO IN
DIREZIONE RADIALE



$$dm = \rho dv = \rho \underbrace{ds}_{\text{ARCO INFINITESIMO}} t w$$

$$ds = R d\theta$$

$$dm = \rho t w R d\theta$$

QUINDI

$$\underline{r}_{cm} = \frac{\int \underline{r} dm}{m} = \frac{\int_0^\pi \underline{r} \rho t w R d\theta}{m}$$

COMPONENTI DEL VETTORE $\underline{r}$

$$\underline{r} = x \underline{i} + y \underline{j}$$

$$x = R \cos \theta$$

$$y = R \sin \theta$$

QUINDI

→

$$x_{cm} = \frac{\int_0^\pi \rho t \omega R \cdot R \cos \theta d\theta}{m} =$$

$$= \frac{\rho t \omega R^2 \int_0^\pi \cos \theta d\theta}{m} =$$

$$= \frac{\rho t \omega R^2 (\sin \theta) \Big|_0^\pi}{m} = 0$$

↑
OVVIO! L'ASSE y
E' ASSE DI SIMMETRIA
QUINDI $x_{cm} = 0$

$$y_{cm} = \frac{\rho t \omega R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta}{m} =$$

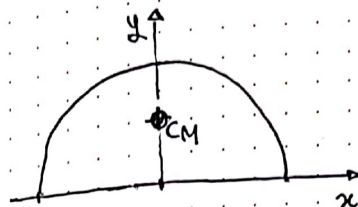
$$= \frac{\rho t \omega R^2 (-\cos \theta) \Big|_0^\pi}{m} = \frac{2 \rho t \omega R^2}{m}$$

MA LA MASSA m È PARIA A

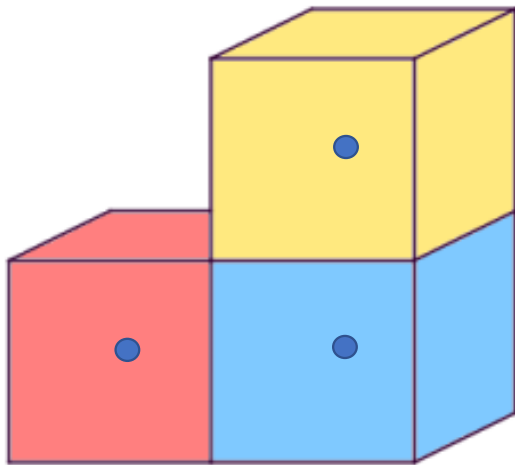
$$m = \underbrace{\rho \pi R t \omega}_{\text{SEZIONE TRASVERSALE}} \cdot \underbrace{L}_{\text{LUNGHEZZA ARCO}}$$

QUINDI

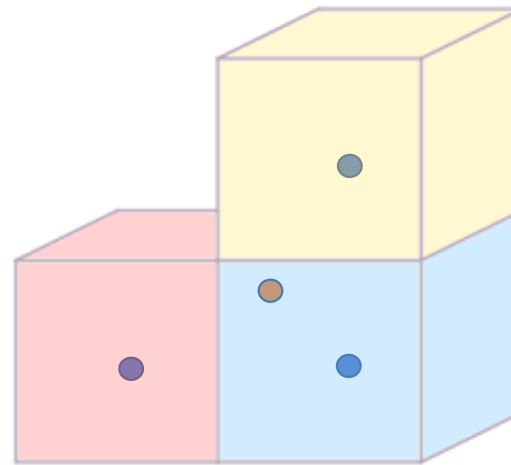
$$y_{cm} = \frac{2 \rho t \omega R^2}{\rho \pi R t \omega} = \frac{2}{\pi} R \approx 0.637 R$$



Solidi composti da più forme “semplici”



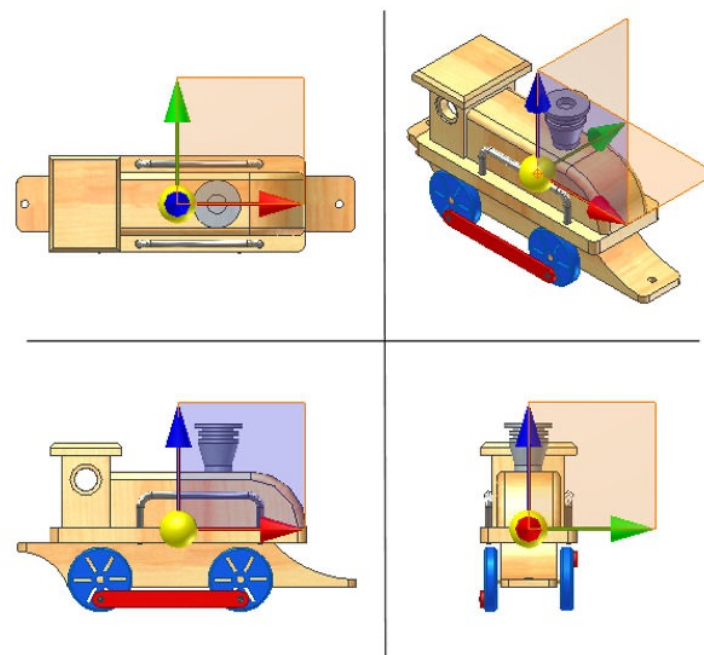
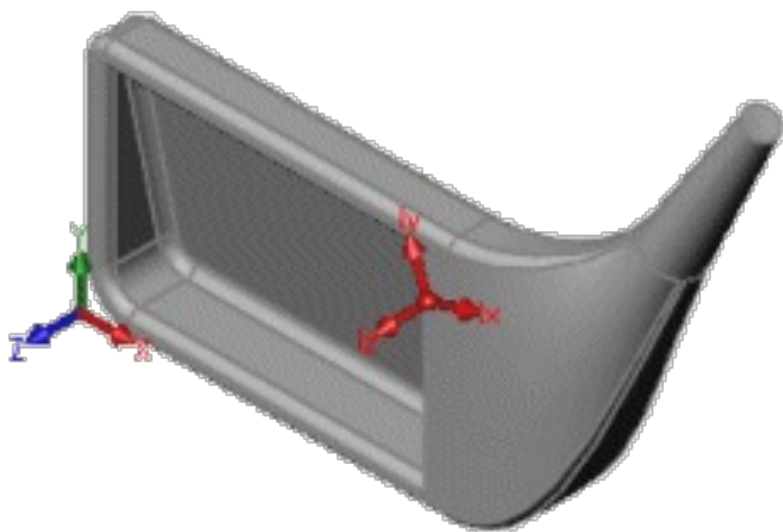
GiftedMathematics.com



GiftedMathematics.com

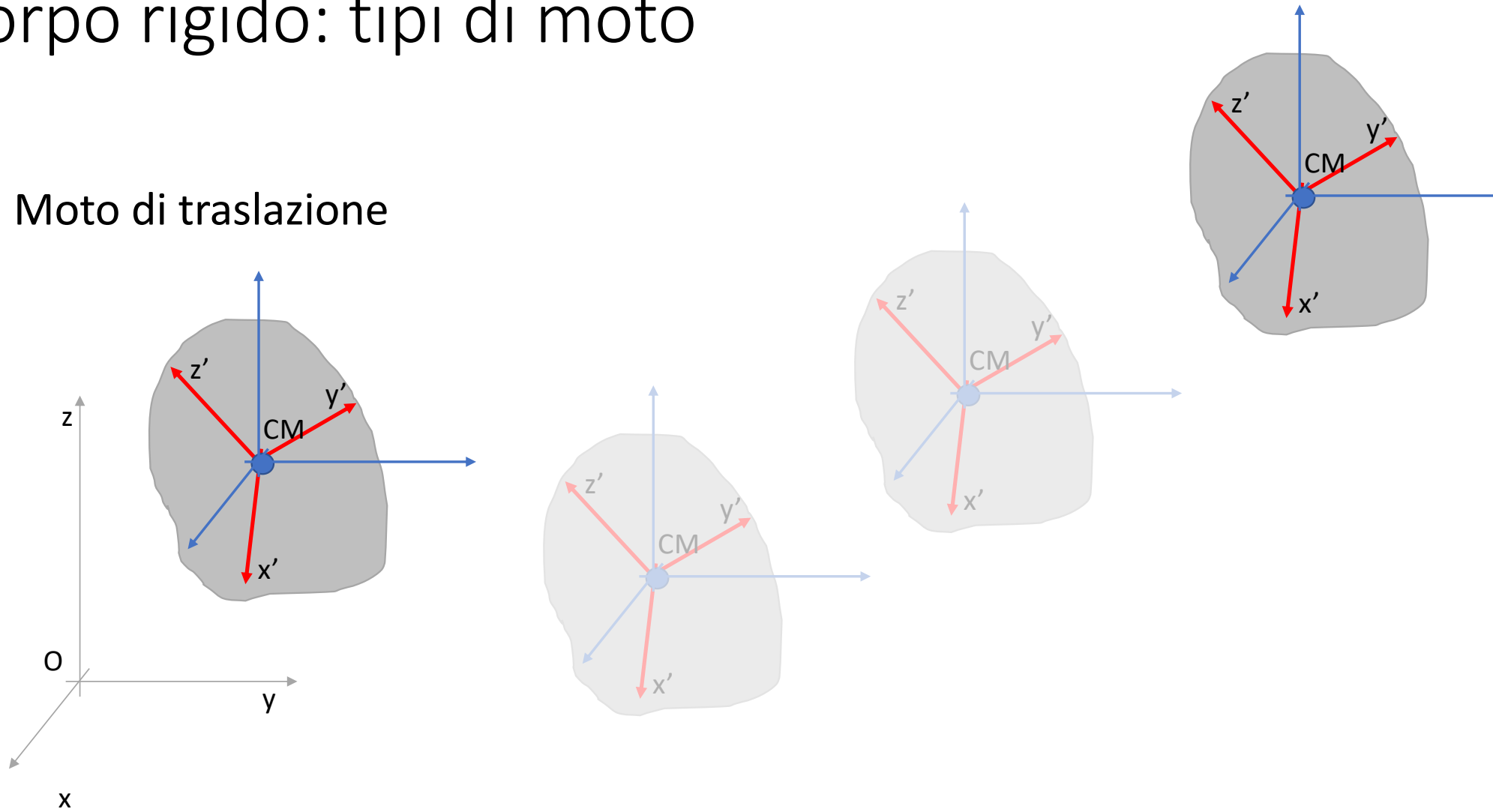
Possiamo determinare i centri di massa degli elementi più semplici e poi calcolare il centro di massa complessivo sfruttando le proprietà dei sistemi discreti

Solidi complessi



Corpo rigido: tipi di moto

- Moto di traslazione



Corpo rigido: tipi di moto

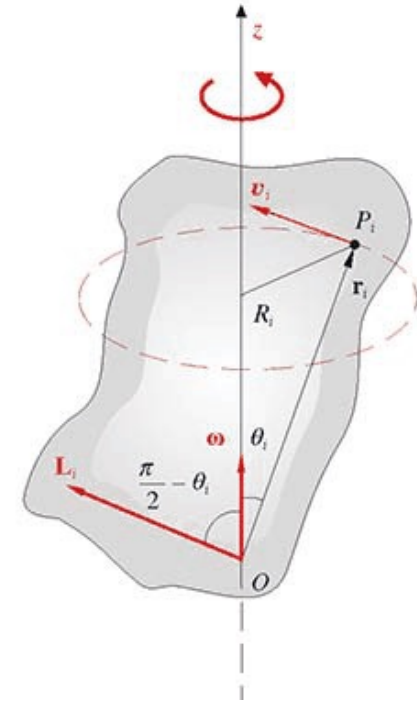
Moto di traslazione

- I punti seguono traiettorie parallele tra loro.
- Gli assi del Sistema di riferimento solidale al corpo rimangono paralleli (non ruotano).
- Le traiettorie dei punti possono essere rettilinee o curvilinee.

Corpo rigido: tipi di moto

Moto di rotazione

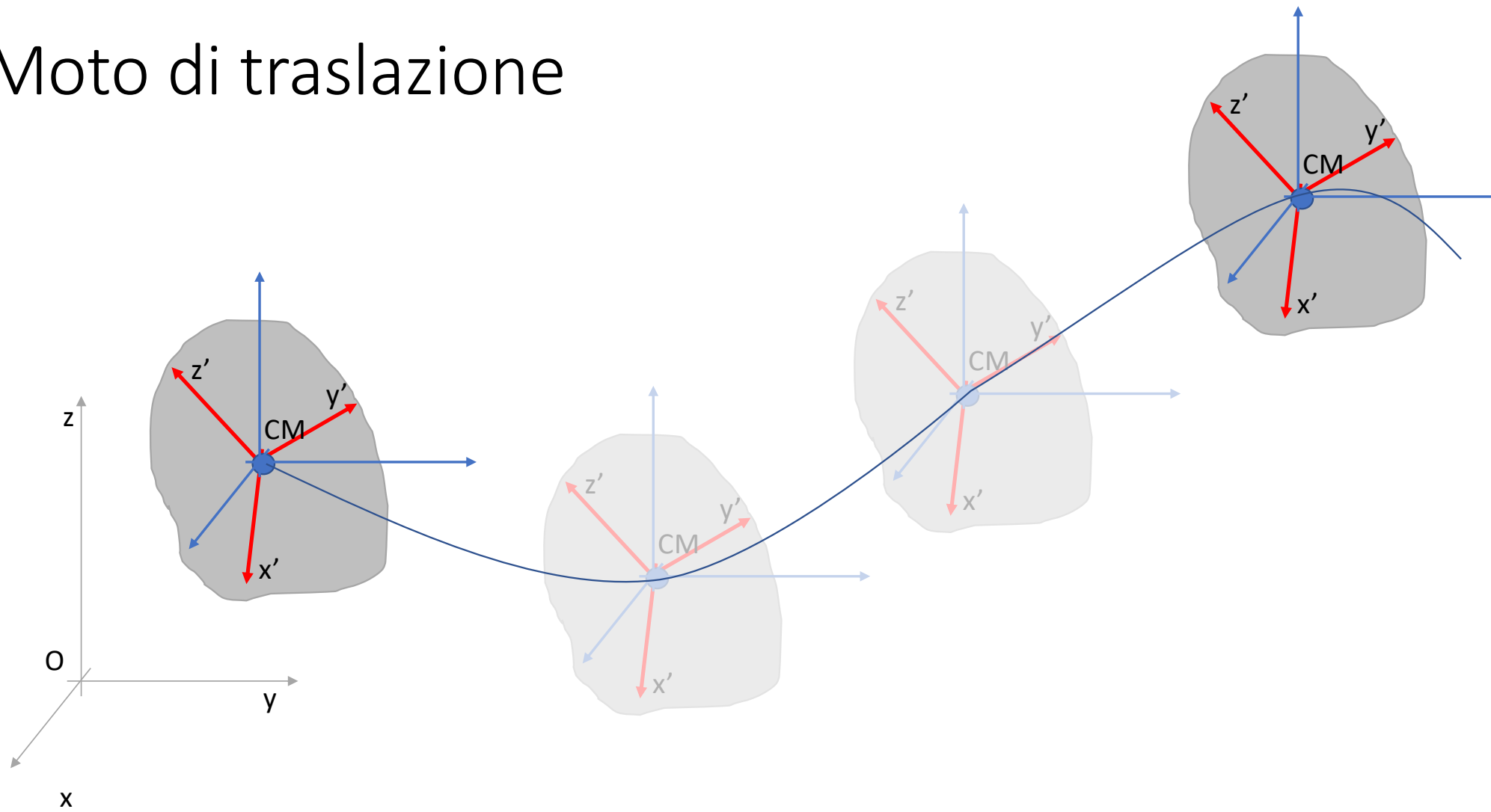
- Tutti i punti si muovono di moto circolare con la stessa velocità angolare ω
- La direzione di ω è quella dell'asse di rotazione



Corpo rigido: tipi di moto

- Moto generico
- Istante per istante è possibile rappresentarlo come la combinazione di una rotazione e una traslazione.

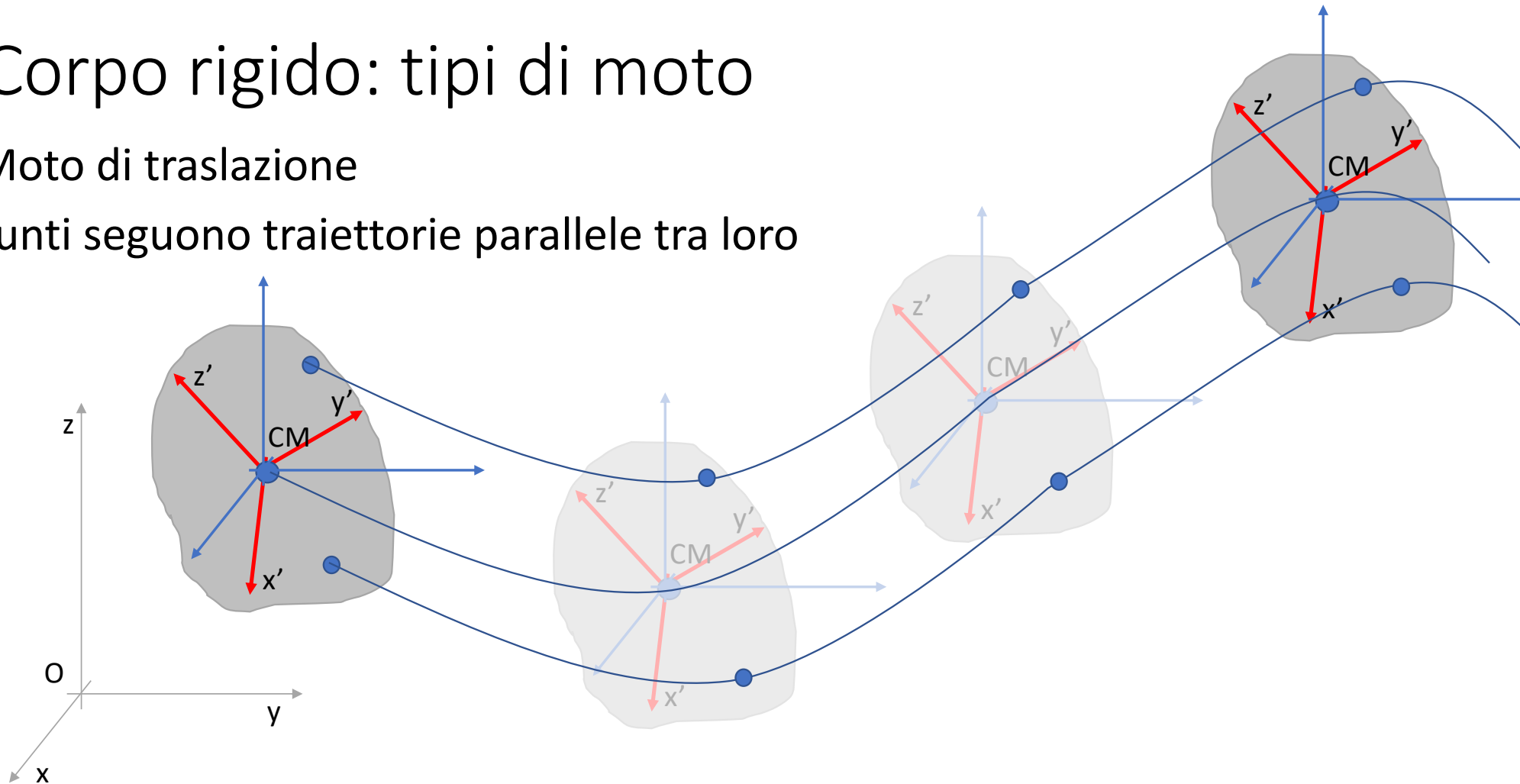
Moto di traslazione



Corpo rigido: tipi di moto

- Moto di traslazione

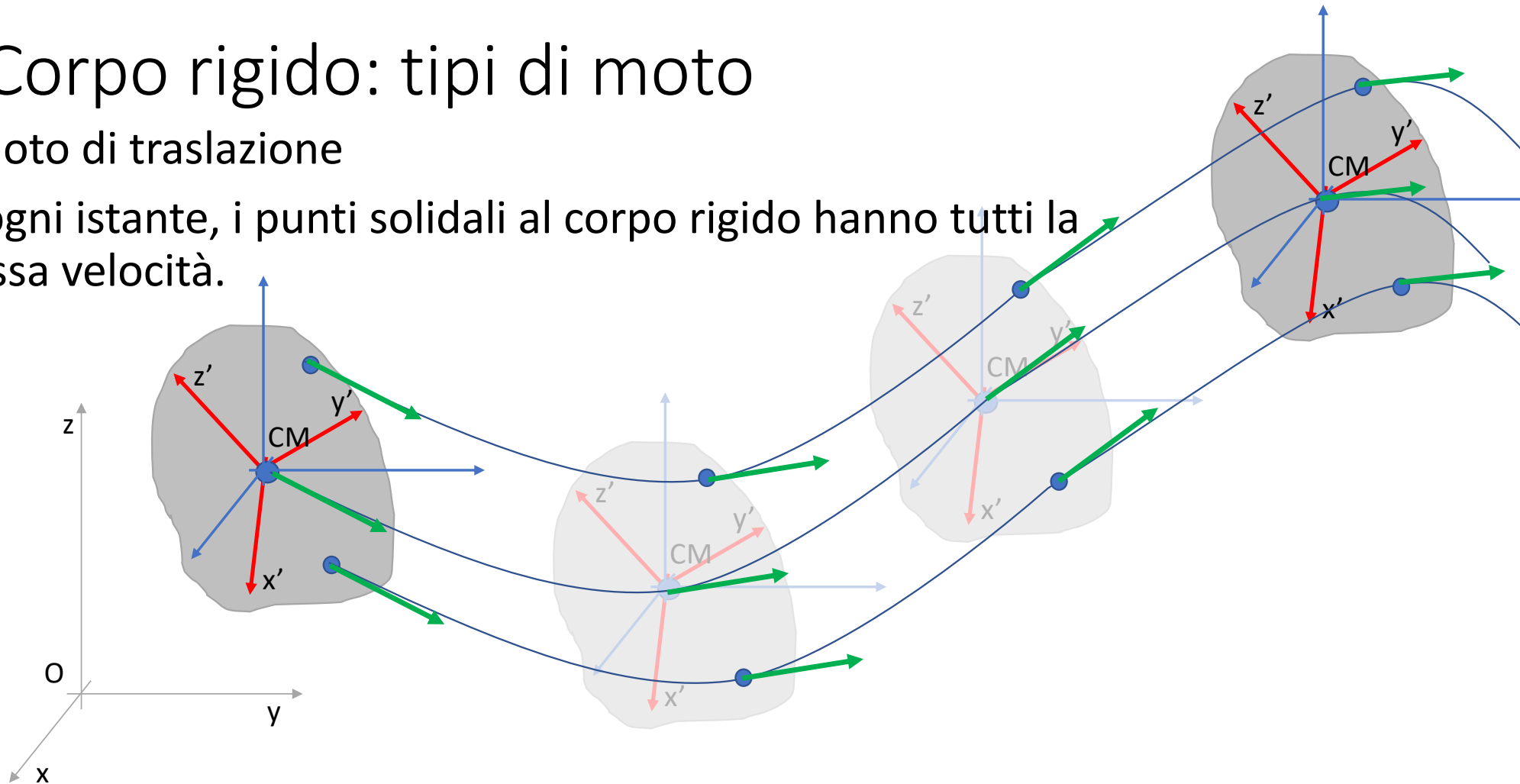
I punti seguono traiettorie parallele tra loro



Corpo rigido: tipi di moto

- Moto di traslazione

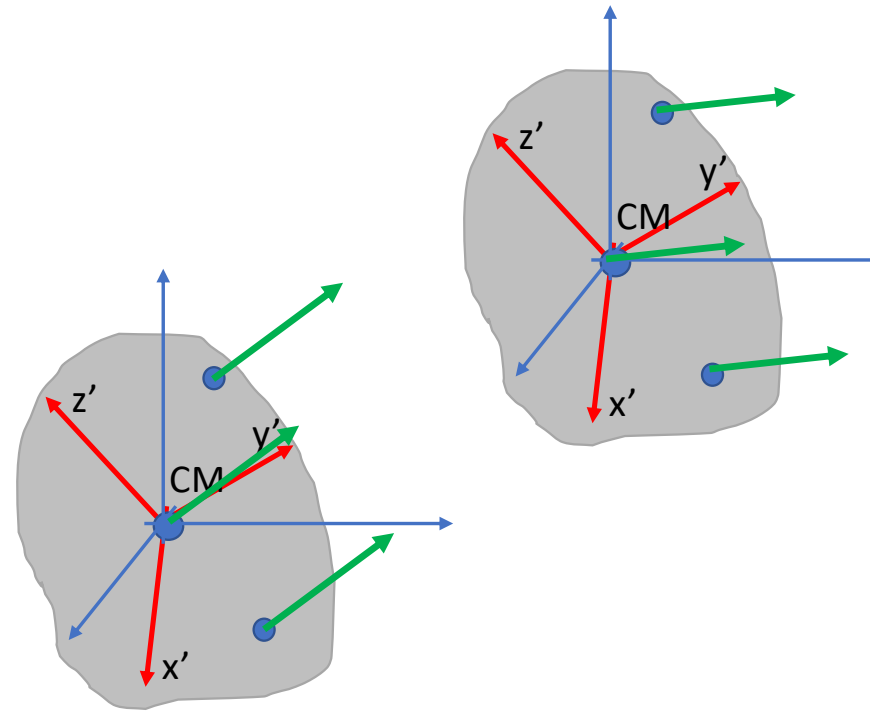
In ogni istante, i punti solidali al corpo rigido hanno tutti la stessa velocità.



Corpo rigido: tipi di moto

- Moto di traslazione
- In ogni istante, i punti solidali al corpo rigido hanno tutti la stessa velocità
- Istante per istante, la velocità può variare in modulo, direzione e verso.
- La velocità di un generico punto $\boldsymbol{v}$ è uguale alla velocità del centro di massa $\boldsymbol{v}_{CM}$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{CM}$$



Moto di traslazione

- La velocità di un generico punto $\boldsymbol{v}$ è uguale alla velocità del centro di massa $\boldsymbol{v}_{CM}$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{CM}$$

Per un generico moto e un generico punto abbiamo visto che possiamo scrivere

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{CM} + \boldsymbol{v}'$$

Essendo $\boldsymbol{v}'$ la velocità del generico punto rispetto al centro di massa.

→ Nel moto di traslazione risulta $\boldsymbol{v}' = 0$

Moto di traslazione

- La velocità di un generico punto $\mathbf{v}$ è uguale alla velocità del centro di massa $\mathbf{v}_{CM}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{CM}$$

Energia cinetica del corpo rigido in moto di traslazione

- Abbiamo visto che per un sistema di n punti

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

- Per un corpo continuo abbiamo

$$E_k = \int \frac{1}{2} v^2 dm = \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV$$

- Per un corpo continuo che ha moto traslatorio $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{CM}$

$$E_k = \frac{1}{2} v_{CM}^2 \int_V \rho dV = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

Moto di traslazione

Torniamo un attimo ai sistemi di punti materiali...

Momento della quantità di moto, in caso di moto generico, per un sistema discreto di punti, si può dimostrare un risultato analogo a quello visto per l'energia cinetica (primo teorema di Konig), possiamo cioè scrivere il centro di massa totale come:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} + \mathbf{L}'$$

Dove $\mathbf{L}_{CM}$ è il momento angolare del centro di massa

$$\mathbf{L}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P}$$

Mentre $\mathbf{L}'$ è il momento angolare dei singoli punti rispetto al centro di massa:

$$\mathbf{L}' = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i$$

Moto di traslazione

Nel caso di corpo rigido e moto di traslazione, il secondo termine si annulla, dato che $\boldsymbol{v}'_i = 0$

$$\boldsymbol{L}' = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i = 0$$

E quindi

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_{CM}$$

Dove, come abbiamo visto:

$$\boldsymbol{L}_{CM} = \boldsymbol{r}_{CM} \times m \boldsymbol{v}_{CM} = \boldsymbol{r}_{CM} \times \boldsymbol{P}$$

Moto di traslazione

Riepilogando, abbiamo visto che le grandezze significative per un Sistema di punti materiali o un Sistema continuo, in caso di moto di traslazione sono pari a:

Quantità di moto

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}_{CM}$$

Energia cinetica

$$E_k = \frac{1}{2}mv_{CM}^2$$

Momento della quantità di moto

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P}$$

Moto di traslazione

Equazione di moto del centro di massa

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}$$

In questo caso, dato che

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P}$$

L'equazione dei momenti

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

Non aggiunge ulteriori informazioni nello studio del problema.

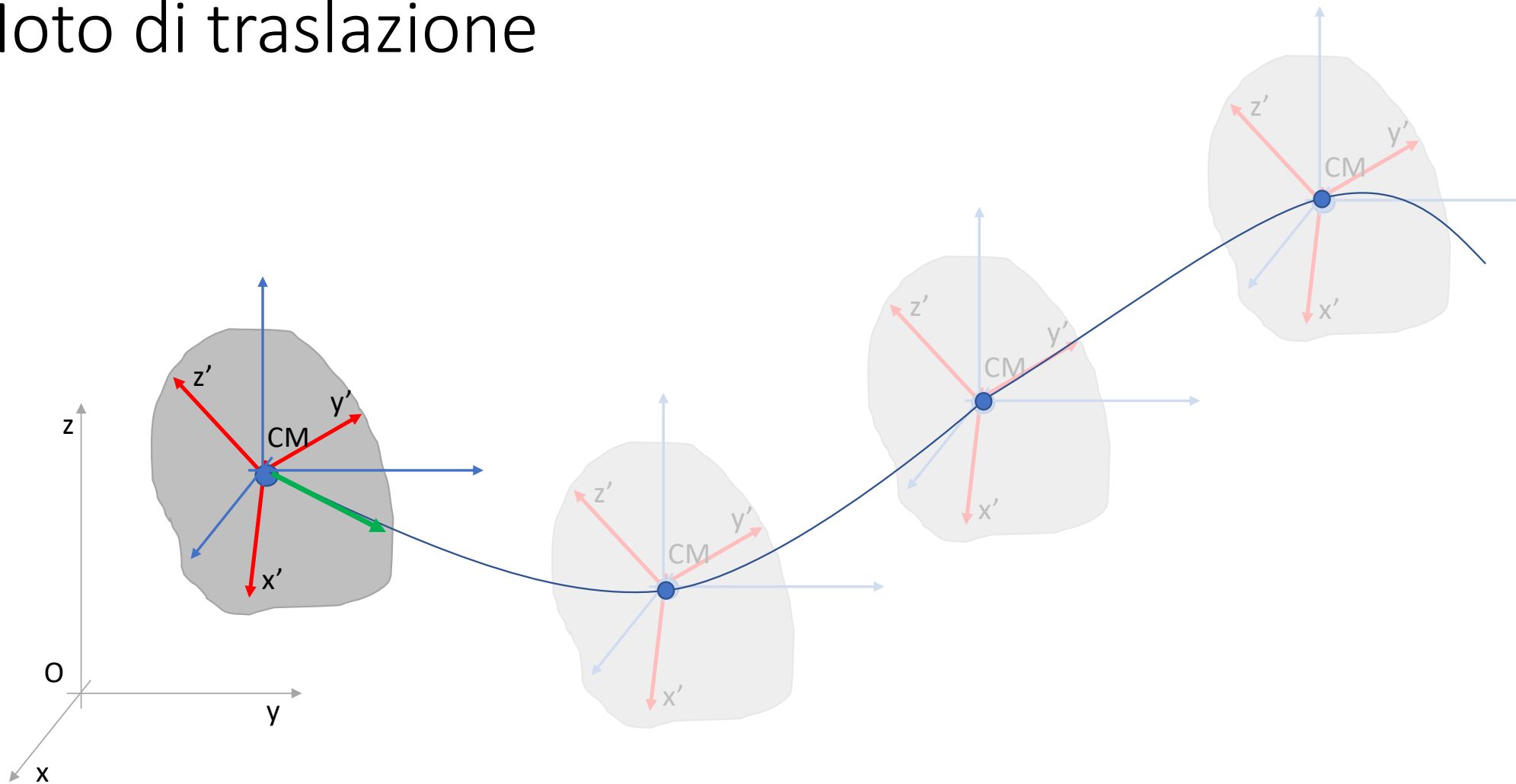
Moto di traslazione

Per studiare il moto di un corpo rigido che si muove di moto traslatorio e' sufficiente studiare l'equazione

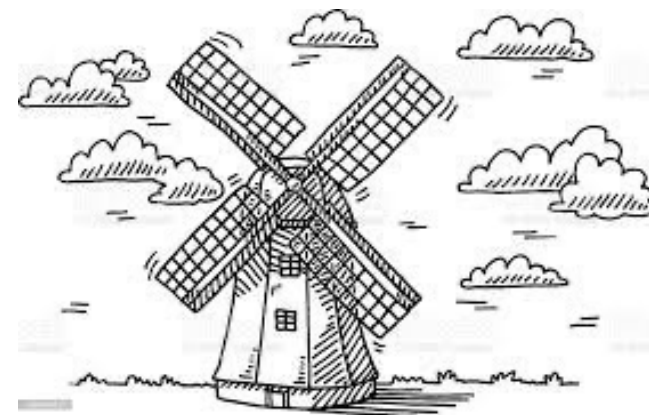
$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}$$

(in altri termini, possiamo studiare il moto del corpo come se fosse un punto materiale di massa pari alla massa m del corpo rigido, concentrata nel suo centro di massa)

Moto di traslazione



Moto di rotazione



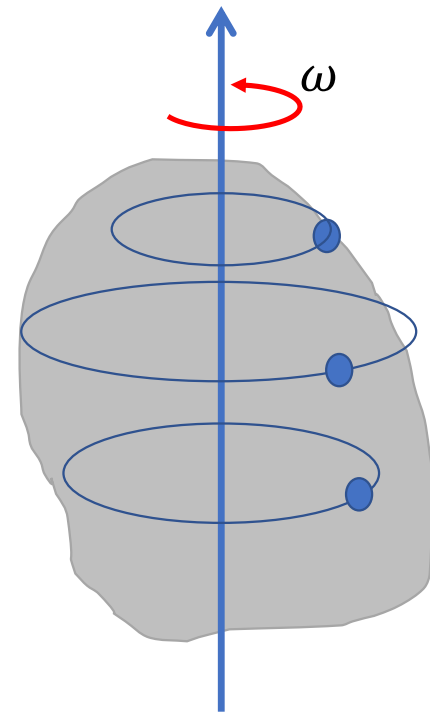
Moto di rotazione



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

- Il corpo ruota intorno a un asse fisso
- Tutti i punti solidali al corpo si muovono di moto circolare su un piano perpendicolare all'asse
- Le velocità dei punti sono diverse, ma la velocità angolare $\omega = \frac{v}{R}$ è la stessa per tutti i punti

La direzione di ω è quella dell'asse di rotazione.



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

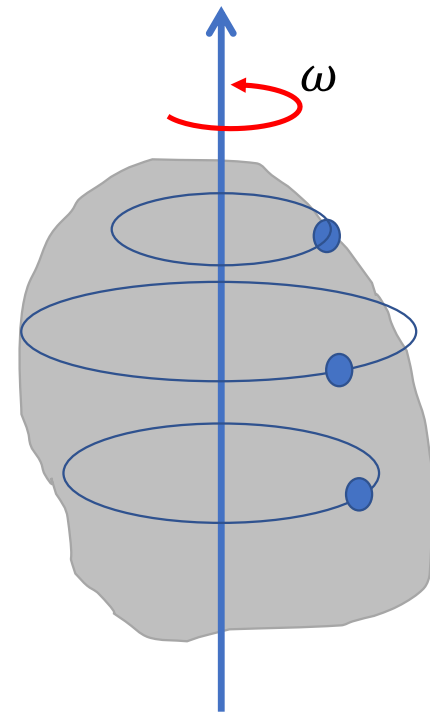
Per studiare il moto di rotazione ci concentriamo sull'equazione:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

$\mathbf{M}$ è il momento delle forze esterne calcolato rispetto a un determinato polo (conviene prenderlo per semplicità sull'asse di rotazione).

$\mathbf{L}$ è il momento angolare del corpo, calcolato rispetto allo stesso polo che abbiamo scelto per $\mathbf{M}$

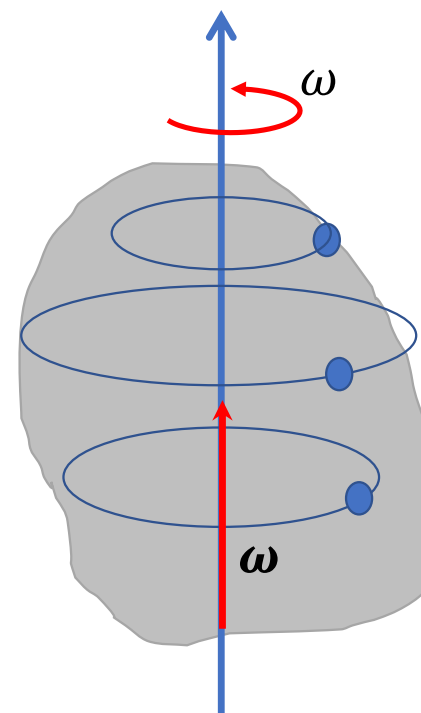
Cerchiamo di studiare il vettore $\mathbf{L}$ e la sua derivata rispetto al tempo.



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Utilizziamo la definizione vettoriale della velocità angolare, definiamo quindi il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$.

- La direzione di $\boldsymbol{\omega}$ è quella dell'asse di rotazione.
- Il modulo è pari alla velocità angolare ω , tale che per un generico punto $v = \omega R$.
- Il verso è definito in modo tale che $\boldsymbol{\omega}$ vede il corpo ruotare in senso antiorario.



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Altre ipotesi:

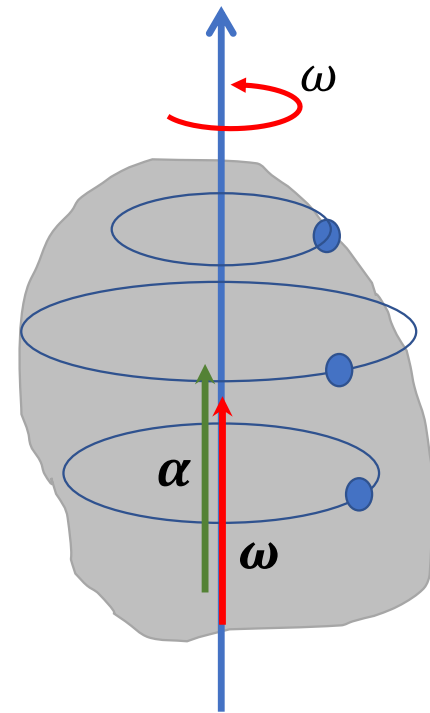
La direzione di ω è fissa (asse di rotazione fisso), ma il suo modulo può variare.

Se il modulo di ω varia, posso definire il vettore accelerazione angolare:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Che ha la stessa direzione di ω , il suo modulo è pari alla derivata della velocità angolare $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ e si misura in rad/s^2 .

Non è detto che il centro di massa si trovi lungo l'asse di rotazione.



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Fissiamo un sistema di riferimento inerziale con origine sull'asse di rotazione e asse z diretto come il vettore $\boldsymbol{\omega}$.

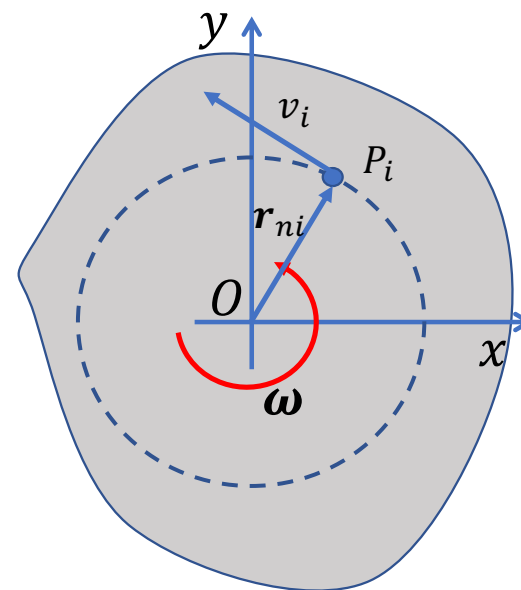
Analizziamo il moto del generico punto P_i solidale al corpo.

Il punto si muove con moto circolare di raggio R_i

La sua velocità è pari a:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{ni}$$

$\boldsymbol{r}_{ni}$ raggio vettore che identifica P_i sulla circonferenza, il suo modulo è R_i



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

L'accelerazione del generico punto P_i solidale al corpo vale:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{ni} + \mathbf{a}_{ti}$$

Dove la componente normale (centripeta) è pari a:

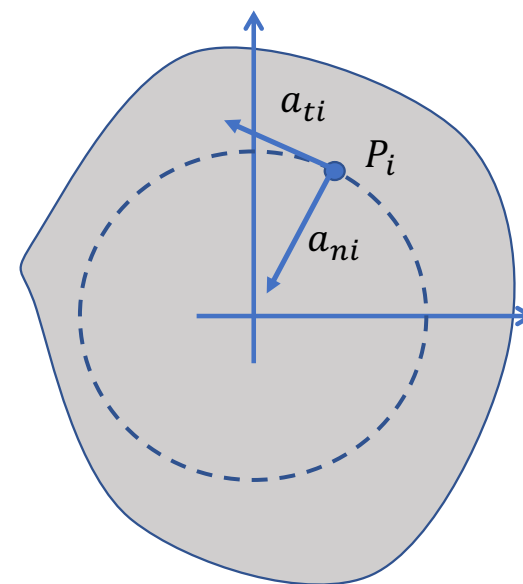
$$\mathbf{a}_{ni} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{ni} = -\omega^2 \mathbf{r}_{ni}$$

Mentre la componente tangenziale è pari a:

$$\mathbf{a}_{ti} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{ni}$$

Ricordando che l'accelerazione angolare è definita come:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

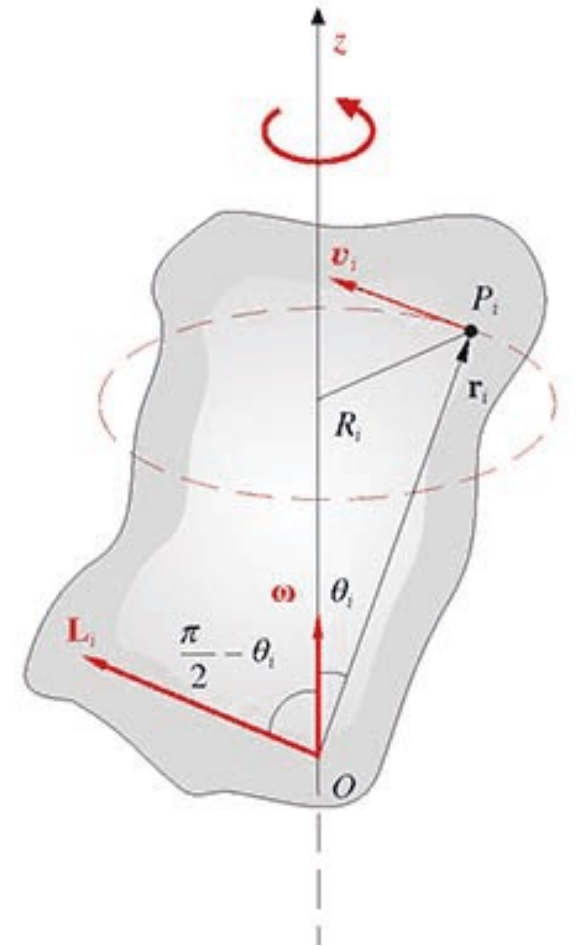


Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Abbiamo visto che l'asse di rotazione coincide con l'asse z del sistema inerziale

Polo per il calcolo dei momenti $\rightarrow$ punto O generico sull'asse di rotazione, ad esempio l'origine del sistema di riferimento.

Non è detto che O si trovi sulla circonferenza percorsa da P_i .



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Alcune definizioni:

$\mathbf{r}_i \rightarrow$ vettore che congiunge O con P_i

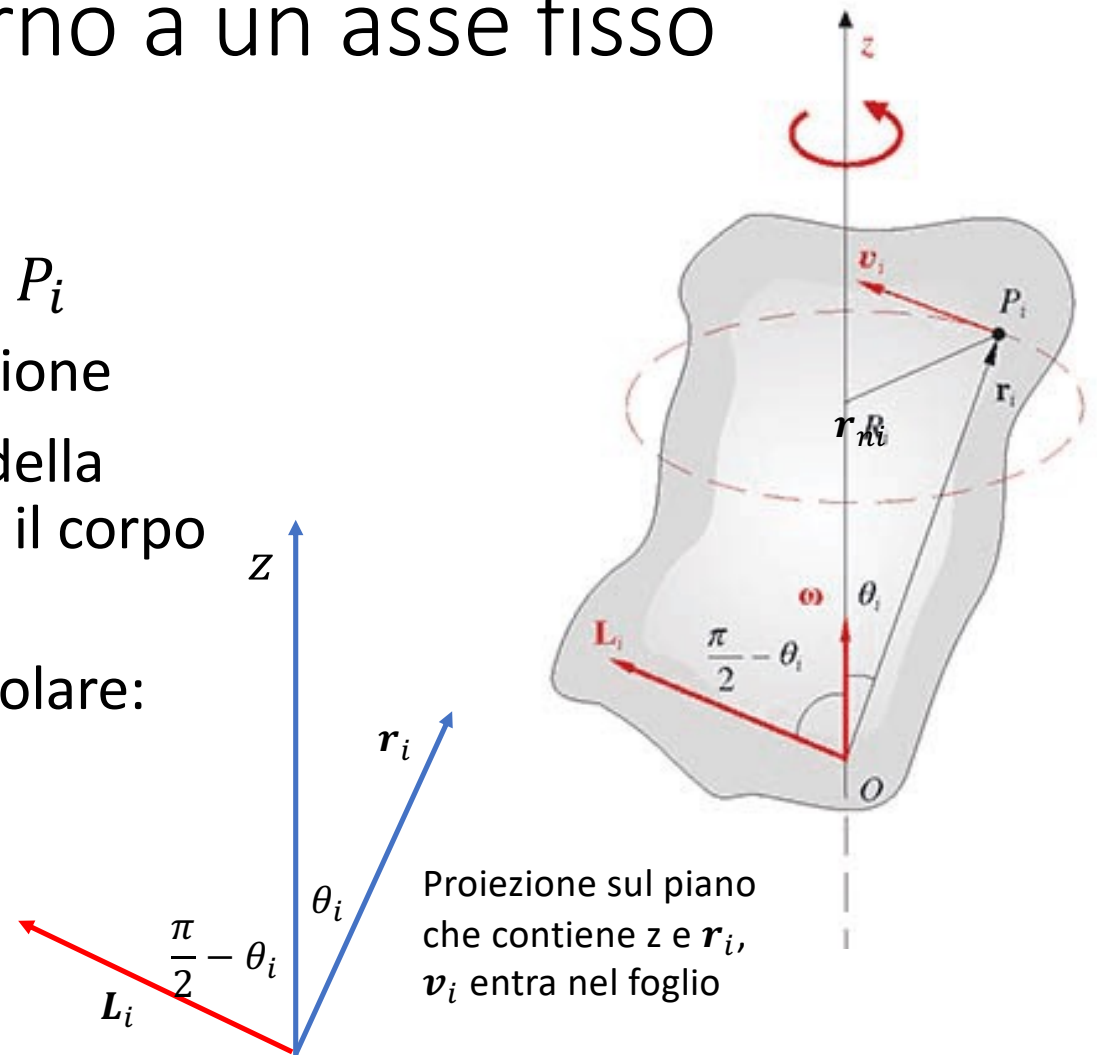
$\theta_i \rightarrow$ angolo tra $\mathbf{r}_i$ e l'asse di rotazione

Calcoliamo il momento angolare della generica particella che costituisce il corpo rigido

Dalla definizione di momento angolare:

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

$\mathbf{L}_i$ è perpendicolare a $\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{v}_i$



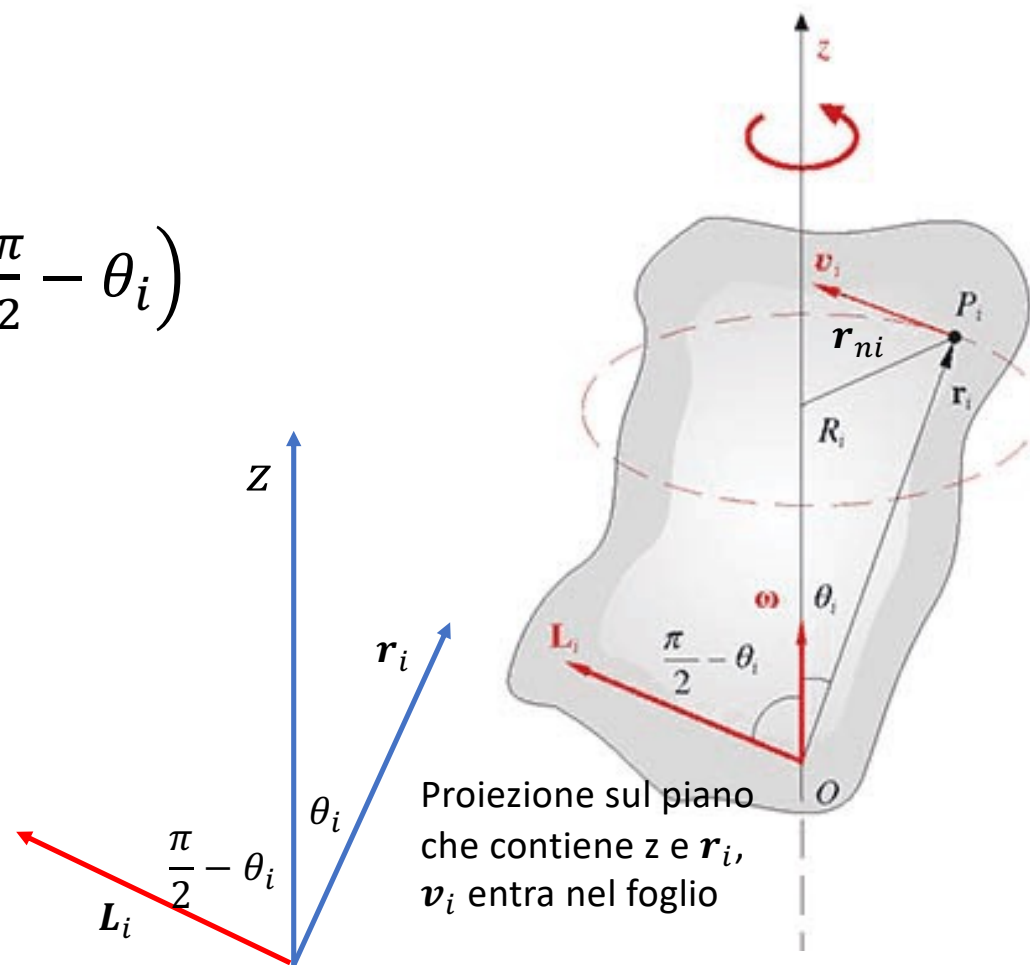
Moto di rotazione intorno a un asse fisso

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

$\mathbf{L}_i$ forma con l'asse z un angolo $\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right)$

Modulo di $\mathbf{L}_i$

$$L_i = r_i m_i v_i = r_i m_i R_i \omega$$



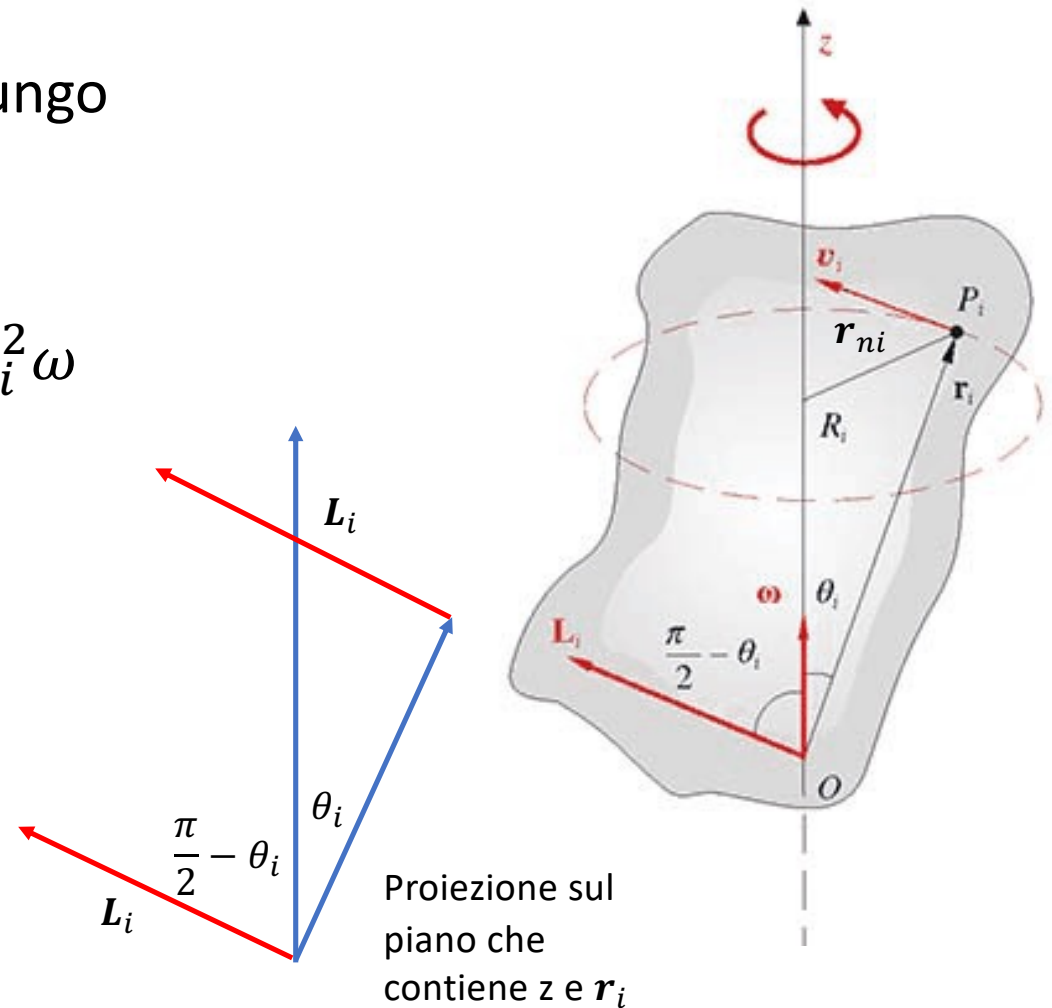
Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Calcoliamo la componente di $\mathbf{L}_i$ lungo l'asse z

$$L_{iz} = \mathbf{L}_i \cdot \mathbf{k} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = L_i \sin \theta_i = r_i m_i R_i \omega \sin \theta_i = m_i R_i^2 \omega$$

Otteniamo quindi:

$$L_{iz} = m_i R_i^2 \omega$$



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Per l'intero corpo rigido, supponendo che sia costituito da n punti discreti,

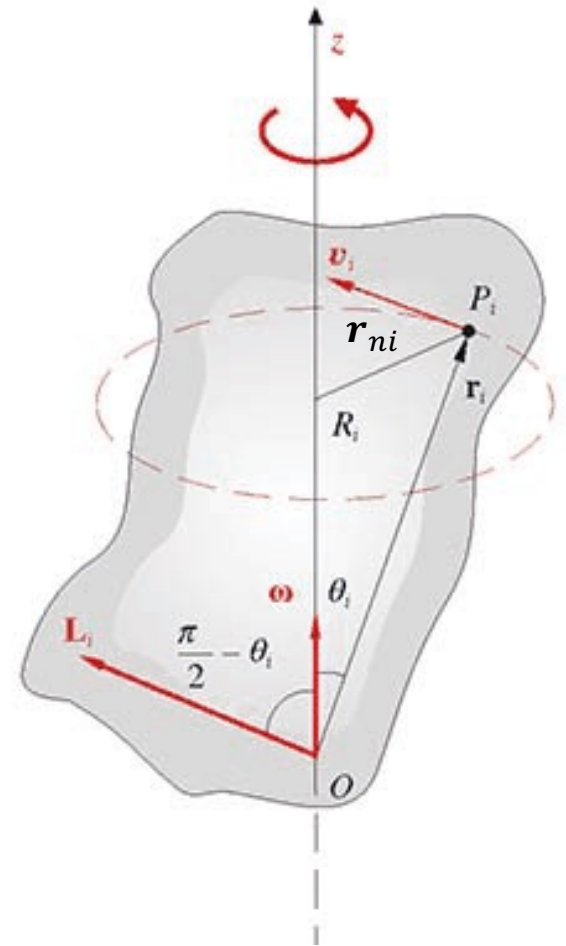
$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

In generale $\mathbf{L}$ non è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$.

Se calcoliamo la componente di $\mathbf{L}$ lungo l'asse di rotazione otteniamo

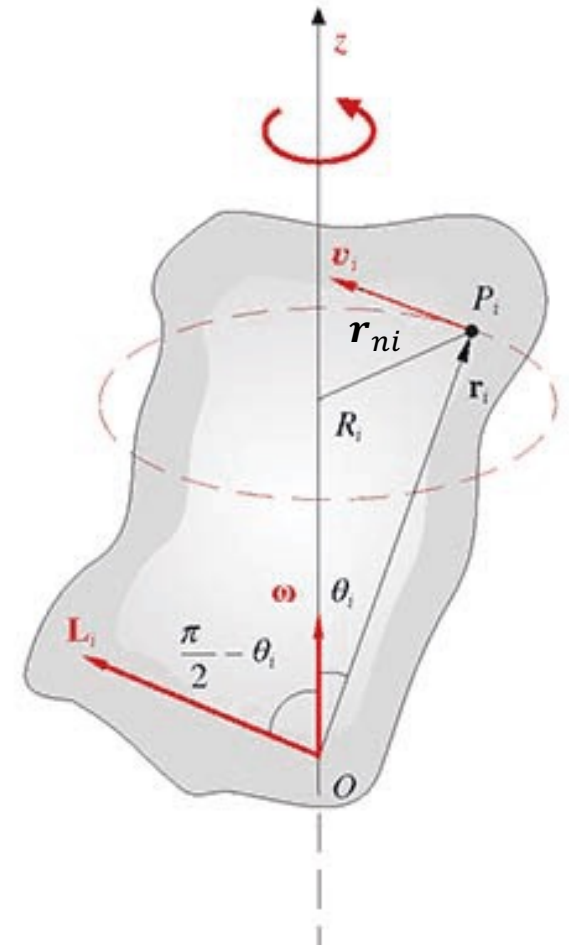
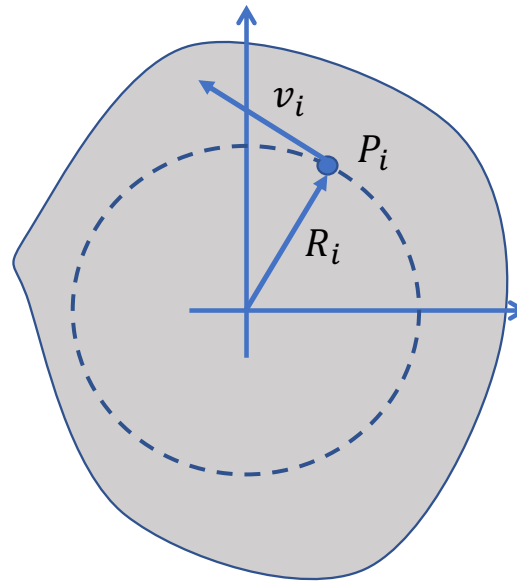
$$\begin{aligned} L_z &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{k} = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i \cdot \mathbf{k} = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \omega \\ &= \left(\sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \right) \omega = I_z \omega \end{aligned}$$



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Definiamo il **momento di inerzia** del corpo rigido rispetto all'asse z (asse di rotazione) come:

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$$



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Definiamo il momento di inerzia del corpo rigido rispetto all'asse z come:

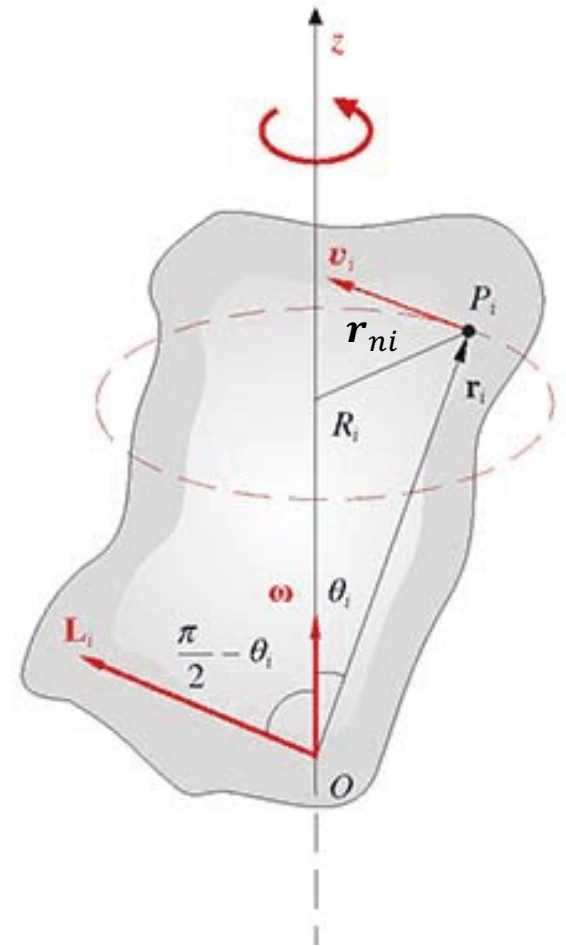
$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Per un corpo continuo possiamo modificare l'espressione del momento di inerzia come

$$I_z = \int_V \rho(x^2 + y^2) dV$$

Unità di misura del momento di inerzia? massa · lunghezza²

Da che cosa dipende? Dalla distribuzione di massa e dall'asse rispetto a cui si calcola.

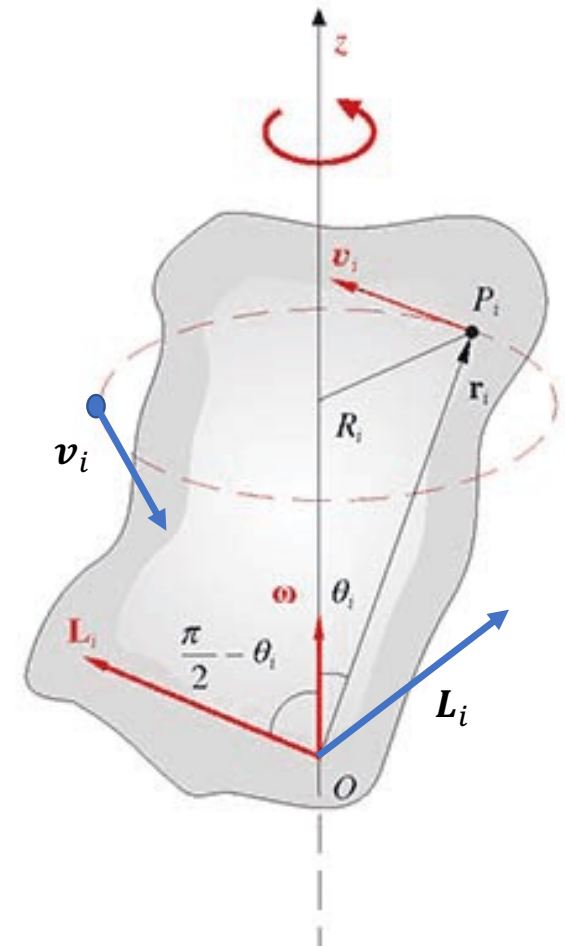


Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Per l'intero corpo rigido

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

- In generale $\mathbf{L}$ non è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$
- Durante il moto $\mathbf{L}$ ruota intorno a $\boldsymbol{\omega}$.
- La proiezione di $\mathbf{L}$ sulla direzione di $\boldsymbol{\omega}$, $L_z = I_z \omega$ è proporzionale alla velocità angolare ω .
- Il coefficiente di proporzionalità I_z dipende dalle caratteristiche del corpo e dalla posizione dell'asse.
- L_z non dipende dalla scelta del polo (da dove si trova O lungo l'asse di rotazione)



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

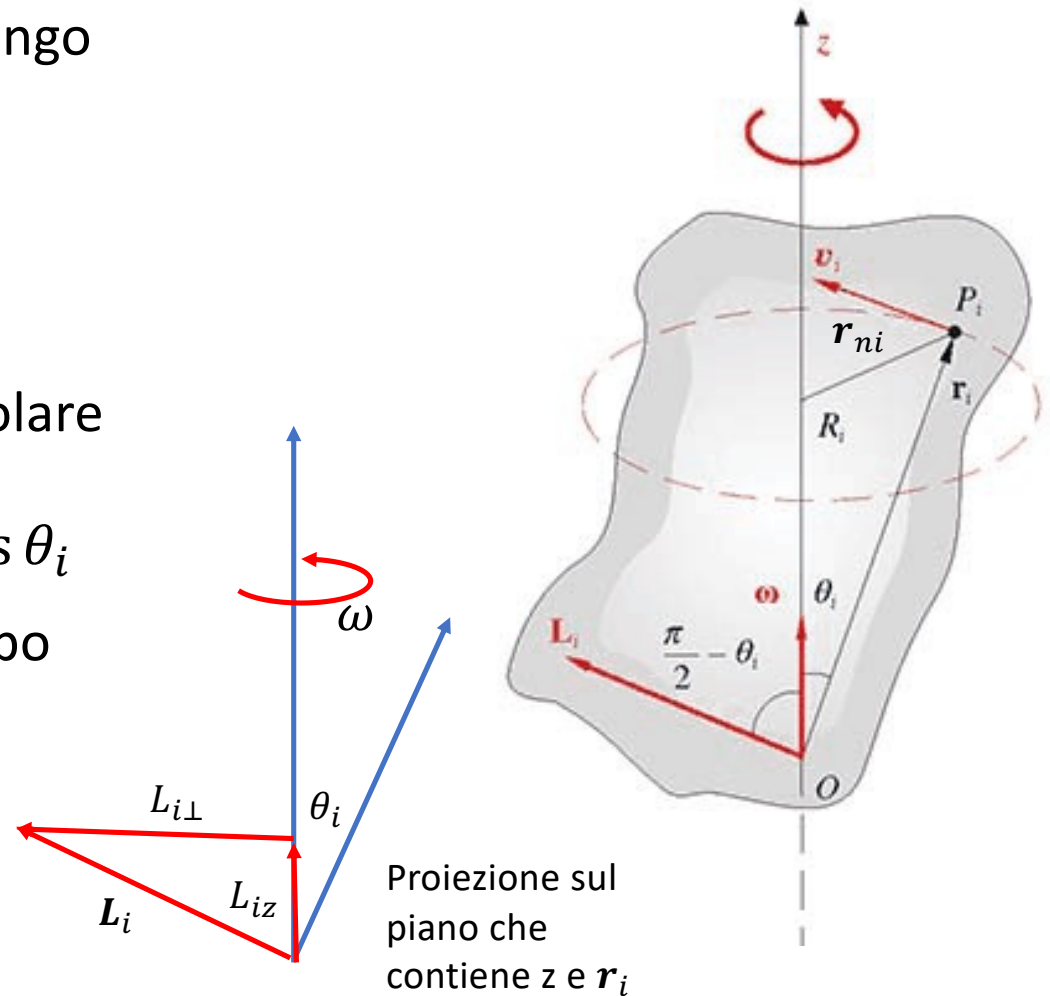
Abbiamo visto che la proiezione di $\mathbf{L}_i$ lungo l'asse z

$$\begin{aligned} L_{iz} &= \mathbf{L}_i \cdot \mathbf{k} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) \\ &= L_i \sin \theta_i = r_i m_i R_i \omega \sin \theta_i = m_i R_i^2 \omega \end{aligned}$$

Proiezione di $\mathbf{L}_i$ in direzione perpendicolare all'asse z

$$L_{i\perp} = L_i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = r_i m_i R_i \omega \cos \theta_i$$

La direzione di $\mathbf{L}_{i\perp}$ ruota insieme al corpo rigido



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Esistono casi in cui $\mathbf{L}$ è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$.

Ad esempio se l'asse di rotazione è un asse di simmetria.

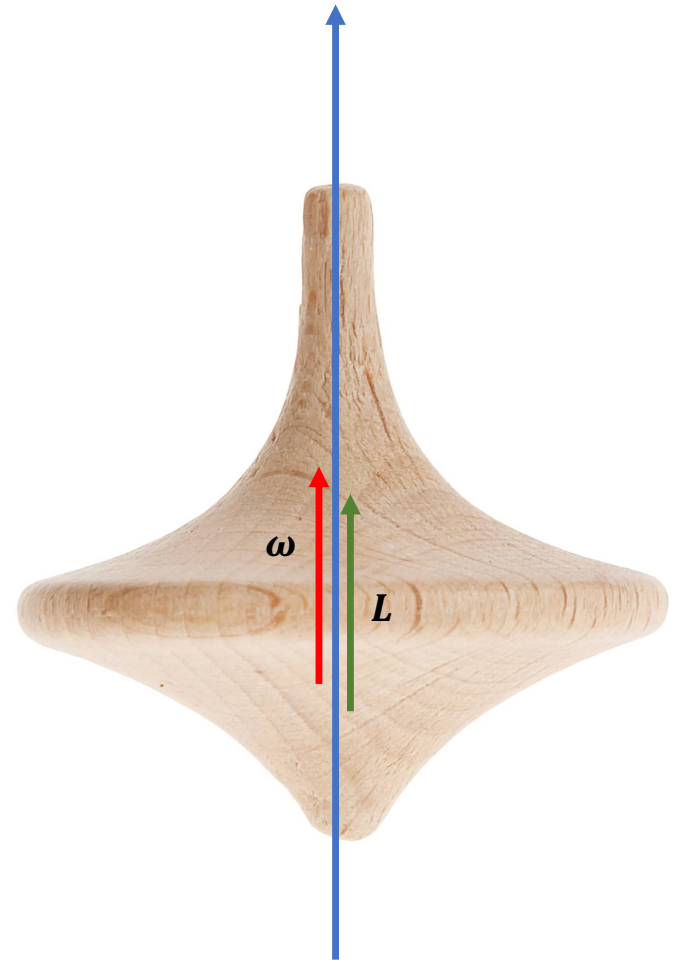
Esistono altri casi che vedremo dopo...

In questo caso risulta

$$\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega}$$

$$L_{\perp} = 0$$

$$L_z = L$$



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Quando $\mathbf{L}$ non è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$ e ruota attorno all'asse di rotazione) si parla di moto di *precessione*.

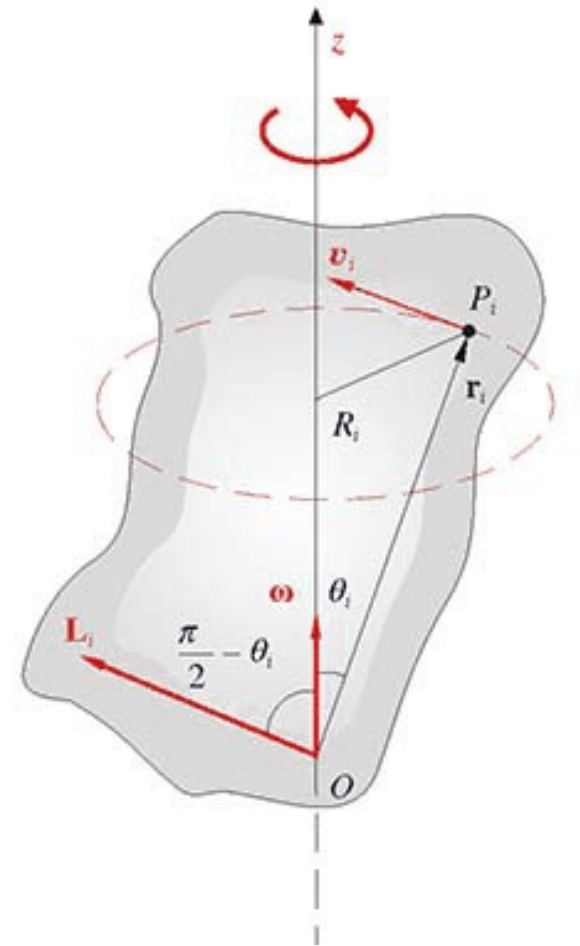
Se $\boldsymbol{\omega}$ è costante si dice *precessione uniforme*.

Se $\boldsymbol{\omega}$ è costante anche il modulo di $\mathbf{L}$ è costante (ma non la direzione, dato che $\mathbf{L}$ ruota insieme al corpo).

In questo caso risulta

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

(è analogo a quanto visto per il vettore posizione, per il quale risultava $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$)



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Nel caso di *precessione uniforme*

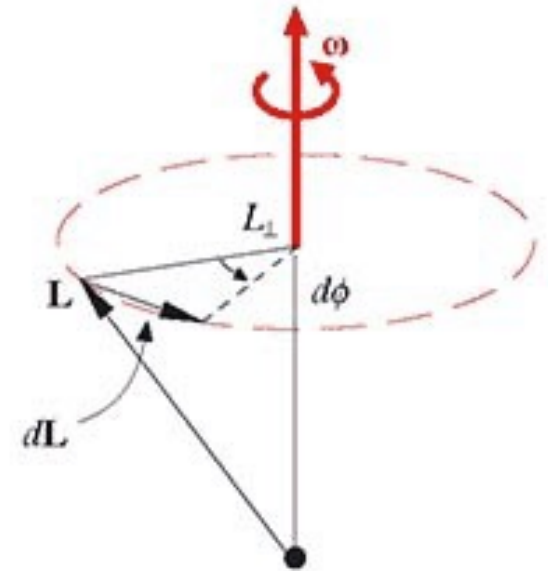
$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

$d\mathbf{L}$ è perpendicolare a $\mathbf{L}$ e all'asse di rotazione.

$$dL = L_{\perp} d\phi$$

$$\frac{dL}{dt} = L_{\perp} \frac{d\phi}{dt} = L_{\perp} \omega$$

→ Quindi in questo caso $\mathbf{M}$ è perpendicolare a $\mathbf{L}$ e all'asse di rotazione e il suo modulo vale $M = L_{\perp} \omega$



Esempio 1

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1$$

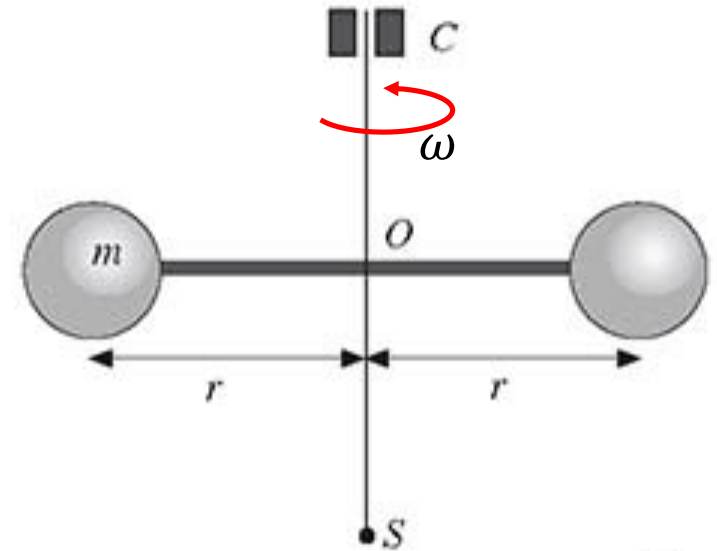
$$\mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2$$

$$L = 2mr v = 2mr^2 \omega$$

$$I_z = 2mr^2$$

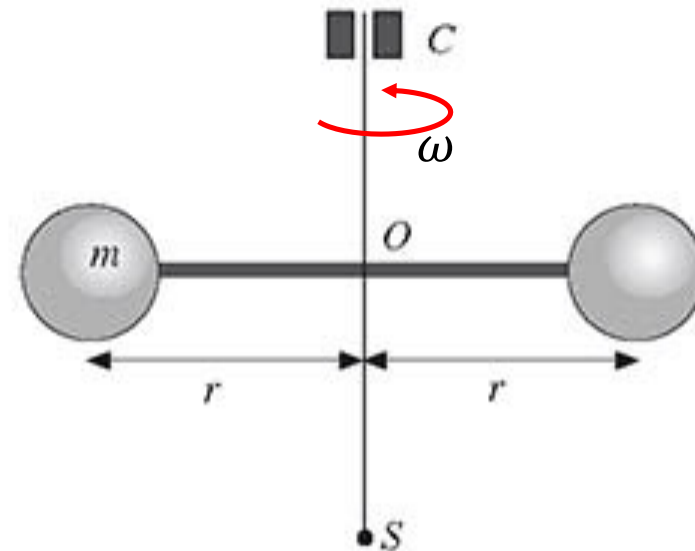
$\mathbf{L}$ e' diretto come l'asse di rotazione, $\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I_z \boldsymbol{\alpha}$$



Esempio 1

Analizziamo le forze agenti sul sistema



Esempio 2

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \\ \mathbf{L} &= \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2\end{aligned}$$

Se ω e' costante,

$$L_z = 2mr \sin \theta v = 2mR^2\omega \rightarrow \text{costante}$$

$L_{\perp} = 2mr \cos \theta v = 2mr \cos \theta R\omega \rightarrow$ modulo costante, cambia la direzione

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

$$M = L_{\perp}\omega = 2mr \cos \theta R\omega^2$$

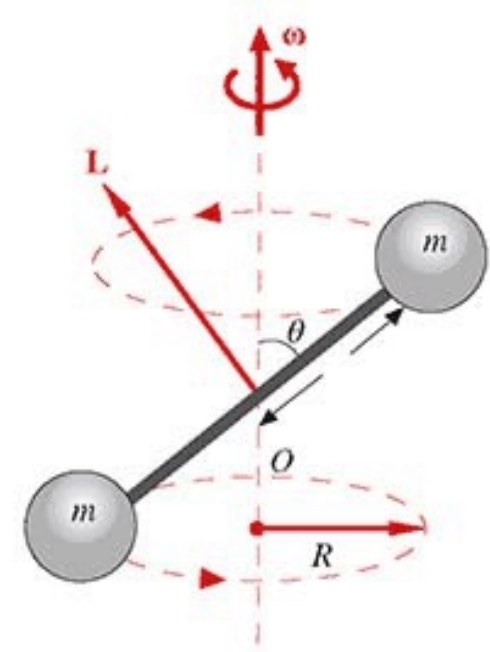
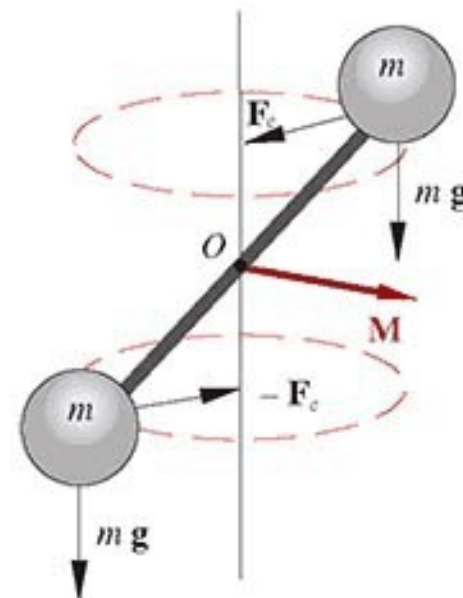


Figura 6.17

Esempio 2

Analizziamo le forze agenti sul sistema



Moto di rotazione, equazioni di moto

Se $\mathbf{L}$ e` diretto come l'asse di rotazione,

$$\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega}$$
$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I_z \boldsymbol{\alpha}$$

Conoscendo il momento delle forze esterne posso calcolare $\mathbf{M}$,
quindi $\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{I_z} \mathbf{M}$

E per integrazione posso calcolare $\boldsymbol{\omega}$

Moto di rotazione, equazioni di moto

Se $\mathbf{L}$ ha direzione generica, per determinare il moto utilizzo

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z \alpha$$

La componente di $\mathbf{M}$ perpendicolare all'asse mi dà

$$M_{\perp} = \frac{dL_{\perp}}{dt}$$

Che non fornisce informazioni aggiuntive sul moto

Moto di rotazione, energia cinetica

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Ricordiamo che

$$W = \Delta E_k$$

Che relazione esiste tra lavoro e momento?

$$dW = dE_k = I_z \omega d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} d\omega = I_z \frac{d\omega}{dt} d\theta = I_z \alpha d\theta = M d\theta$$

Quindi

$$W = \int_{\theta_{in}}^{\theta_{fin}} M d\theta$$

Moto di rotazione, energia cinetica

Potenza in funzione del momento e della velocita` angolare

$$P = \frac{dW}{dt} = M\omega$$

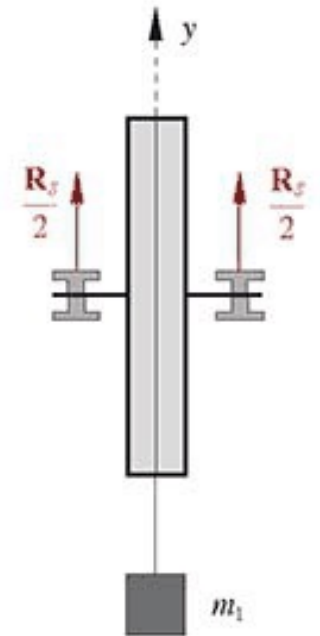
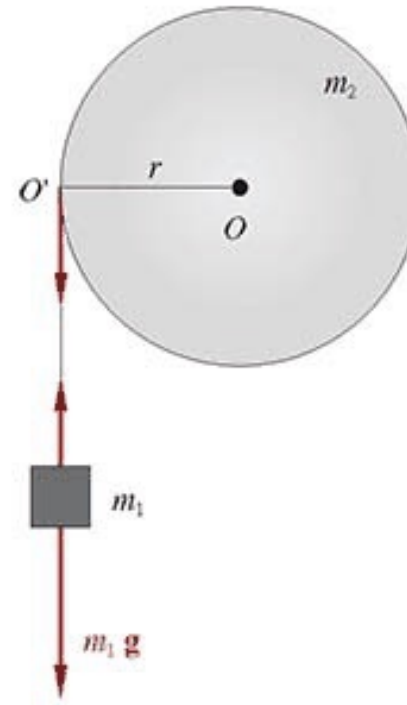
Esempio

$$m_2 \mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{R}_S = 0$$

$$m_1 \mathbf{a} = m_1 \mathbf{g} - \mathbf{T}$$

$$I_z \alpha = \mathbf{r} \times \mathbf{T}$$

$$a = r\alpha$$

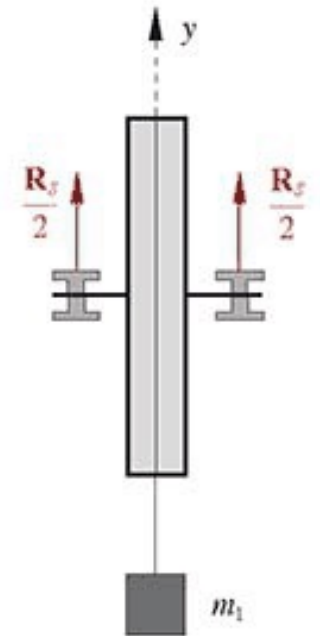
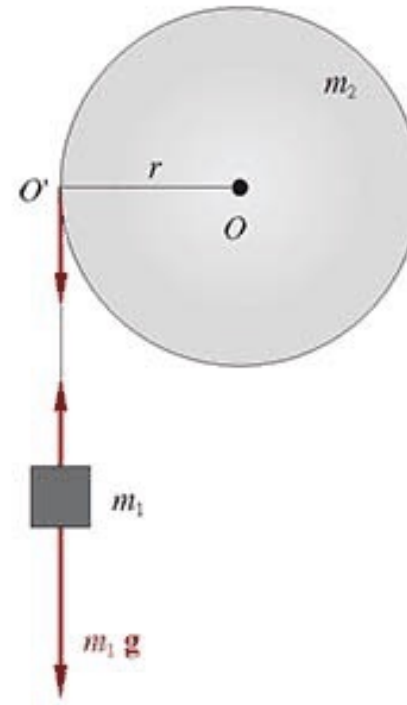


Esempio

$$m_1 a = -m_1 g + T$$

$$I_z \alpha = r T$$

$$a = r \alpha$$



Coppia di vettori applicati

Definizione: Si definisce come **coppia di vettori applicati**, un sistema di vettori applicati costituito da due vettori opposti ($A_1, \mathbf{a}$) e ($A_2, -\mathbf{a}$).



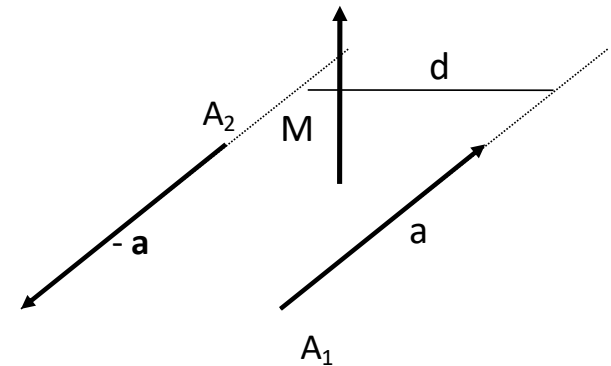
Coppia di vettori applicati

Definizione: Si definisce come **coppia di vettori applicati**, un sistema di vettori applicati costituito da due vettori opposti $(A_1, \mathbf{a})$ e $(A_2, -\mathbf{a})$.

Essendo la risultante di tale sistema nullo, il momento risultante (**momento della coppia**) è invariante rispetto al punto O scelto come polo per il calcolo del momento risultante.

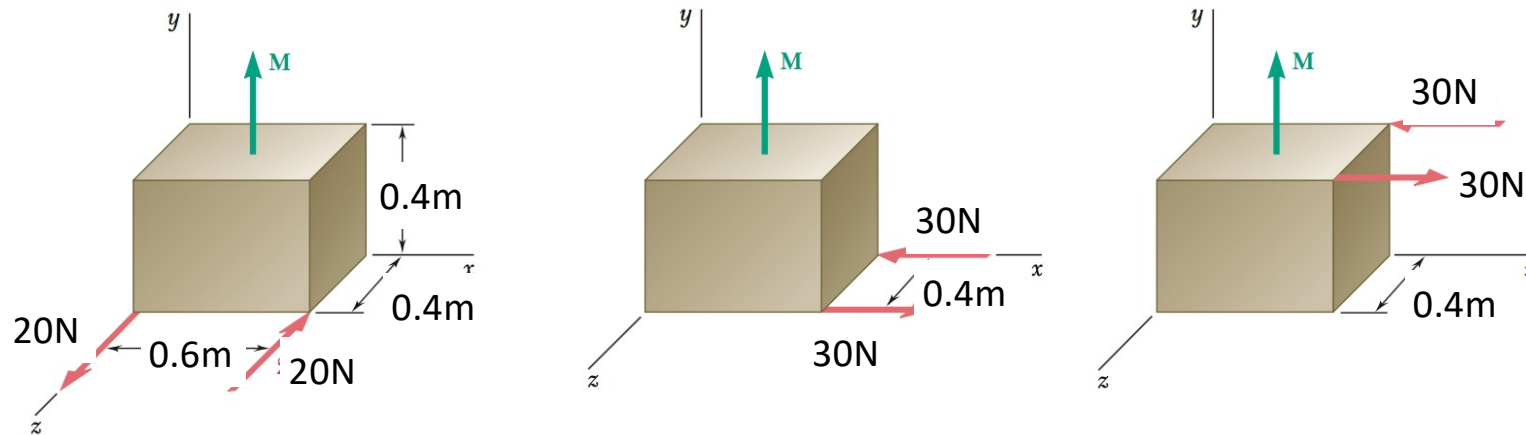
Si definisce quindi momento della coppia (**M**) un vettore avente:

- modulo uguale al prodotto del modulo di uno dei due vettori, $|\mathbf{a}|$, per la distanza tra le rette d'azione dei due vettori d (braccio) $|\mathbf{M}| = |\mathbf{a}|d$
- direzione ortogonale al piano di appartenenza dei due vettori (piano della coppia)
- verso determinato in modo tale che il vettore $(A_1 - A_2)$, $\mathbf{a}$ ed $\mathbf{M}$ formino una terna destrorsa.



Coppia di vettori applicati

Le tre coppie riportate in figura, applicate allo stesso corpo rigido, hanno lo stesso momento **M**.



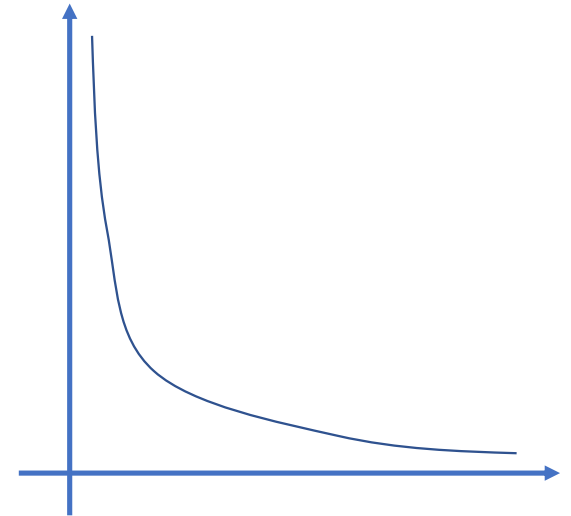
Coppie equivalenti: due coppie aventi lo stesso momento sono tra loro equivalenti.

Esempio

Qual e` la relazione tra coppia e velocita` angolare in un motore che lavora a potenza costante?

$$P = M\omega$$

$$M = \frac{P}{\omega}$$



Impulso angolare

- Teorema dell'impulso

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{P}$$

In modo analogo integrando rispetto al tempo l'equazione $\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$ possiamo verificare che

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt = \Delta \mathbf{L}$$

Momento di inerzia

Definiamo il momento di inerzia del corpo rigido rispetto all'asse z come:

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Per un corpo continuo possiamo modificare l'espressione del momento di inerzia come

$$I_z = \int_V \rho (x^2 + y^2) dV$$

Momento di inerzia

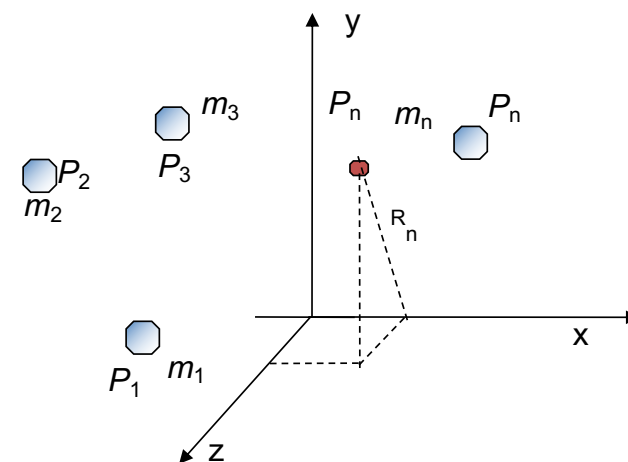
Analogamente, per gli assi x e y avremo

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

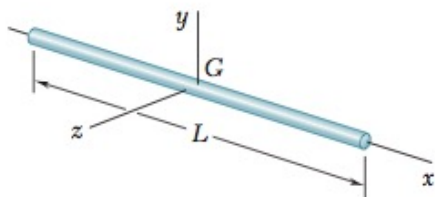
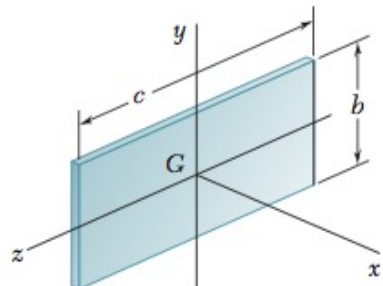
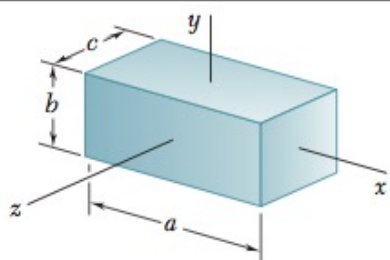
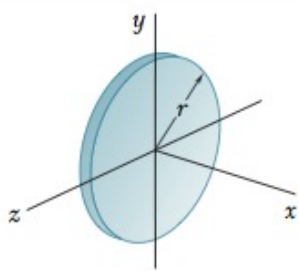
$$I_x = \int_V \rho (y^2 + z^2) dV$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2)$$

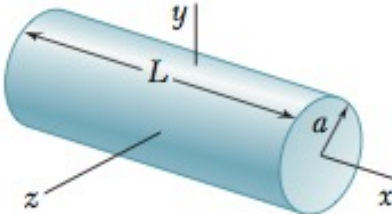
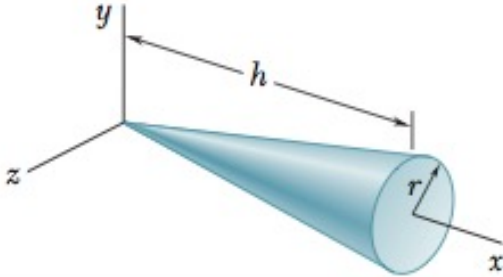
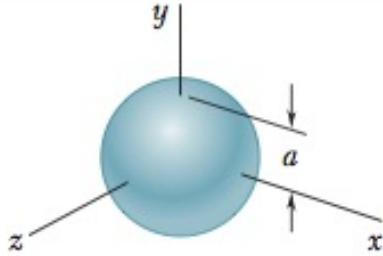
$$I_y = \int_V \rho (x^2 + z^2) dV$$



Momenti di inerzia per alcuni corpi

Slender rod		$I_y = I_z = \frac{1}{12} mL^2$
Thin rectangular plate		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} mc^2$ $I_z = \frac{1}{12} mb^2$
Rectangular prism		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
Thin disk		$I_x = \frac{1}{2} mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4} mr^2$

Momenti di inerzia per alcuni corpi

Circular cylinder		$I_x = \frac{1}{2} m a^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12} m (3a^2 + L^2)$
Circular cone		$I_x = \frac{3}{10} m a^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5} m (\frac{1}{4} a^2 + h^2)$
Sphere		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} m a^2$

Momento di inerzia – teorema di Huygens Steiner

- Il momento di inerzia dipende dalle caratteristiche del corpo (geometria, densita`) e dalla posizione dell'asse, ed e` sicuramente un valore positivo. Data una direzione, qual e` il valore minimo del momento di inerzia rispetto a un generico asse ad essa parallelo?
- Negli esempi precedenti abbiamo calcolato il momento di inerzia rispetto a un asse che passa per il centro di massa, ma se l'asse non passa per CM devo rifare il calcolo? 😞

Momento di inerzia – teorema di Huygens Steiner

Riprendiamo l'espressione di I_Z

$$\begin{aligned} I_Z &= \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (R'_i + d)^2 = \sum_{i=1}^n m_i (R_i'^2 + 2R'_i d + d^2) = \\ &= I_{Z'} + md^2 + \sum_{i=1}^n 2m_i R'_i d = I_{Z'} + md^2 \end{aligned}$$

$$I_Z = I_{Z'} + md^2$$

Momento di inerzia – matrice di inerzia

- E se l'asse di rotazione non coincidesse con nessuno dei tre assi x , y e z ? 🙄
- Indichiamo con $\mathbf{u}$ il versore dell'asse di rotazione e con u_x , u_y , u_z le sue componenti rispetto al sistema di riferimento cartesiano con cui abbiamo calcolato i momenti di inerzia I_x , I_y e I_z

... e' possibile verificare che il momento di inerzia rispetto all'asse $\mathbf{u}$ vale

Momento di inerzia – matrice di inerzia

$$I_u = I_x u_x^2 + I_y u_y^2 + I_z u_z^2 - 2I_{xy} u_x u_y - 2I_{yz} u_y u_z - 2I_{xz} u_x u_z$$

Dove I_x, I_y, I_z sono i momenti di inerzia rispetto agli assi x, y e z che abbiamo già incontrato, mentre I_{xy}, I_{yz}, I_{xz} sono i cosiddetti momenti di inerzia centrifughi (o prodotti di inerzia)

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i$$
$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i$$
$$I_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i$$

Momento di inerzia – matrice di inerzia

Grazie a questa definizione, possiamo calcolare le componenti cartesiane del momento angolare il momento angolare corrispondente a una generica velocità angolare come il risultato del seguente prodotto matrice-vettore

$$\mathbf{L} = [\mathbf{I}]\boldsymbol{\omega}$$

dove

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

E' la matrice di inerzia del corpo calcolata rispetto al sistema di riferimento xyz