

Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Esistono casi in cui $\mathbf{L}$ è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$.

Ad esempio se l'asse di rotazione è un asse di simmetria.

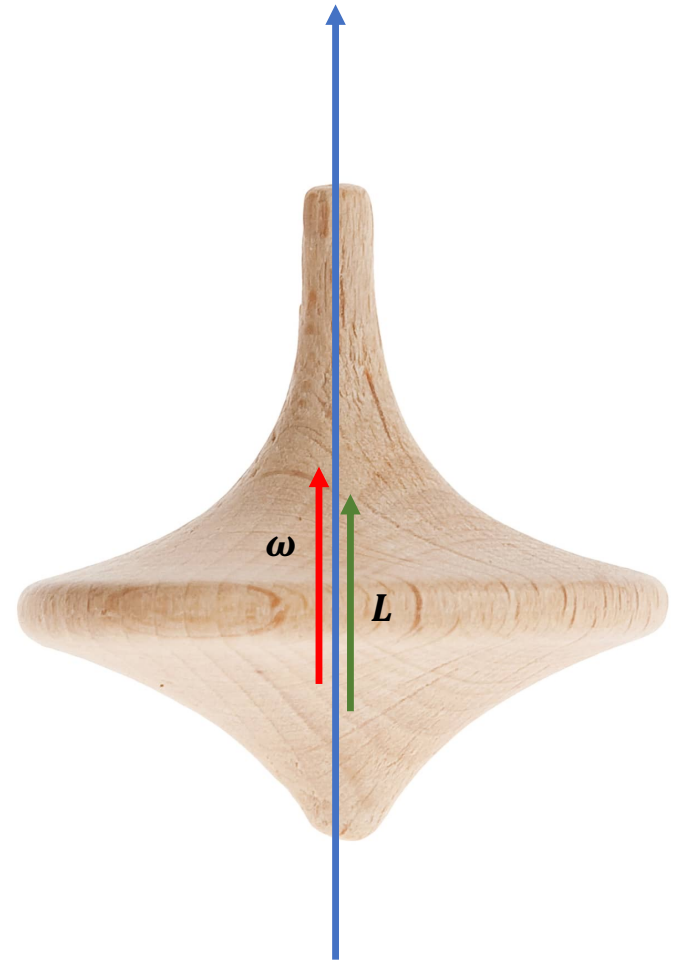
Esistono altri casi che vedremo dopo...

In questo caso risulta

$$\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega}$$

$$L_{\perp} = 0$$

$$L_z = L$$



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Quando $\mathbf{L}$ non è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$ e ruota attorno all'asse di rotazione) si parla di moto di *precessione*.

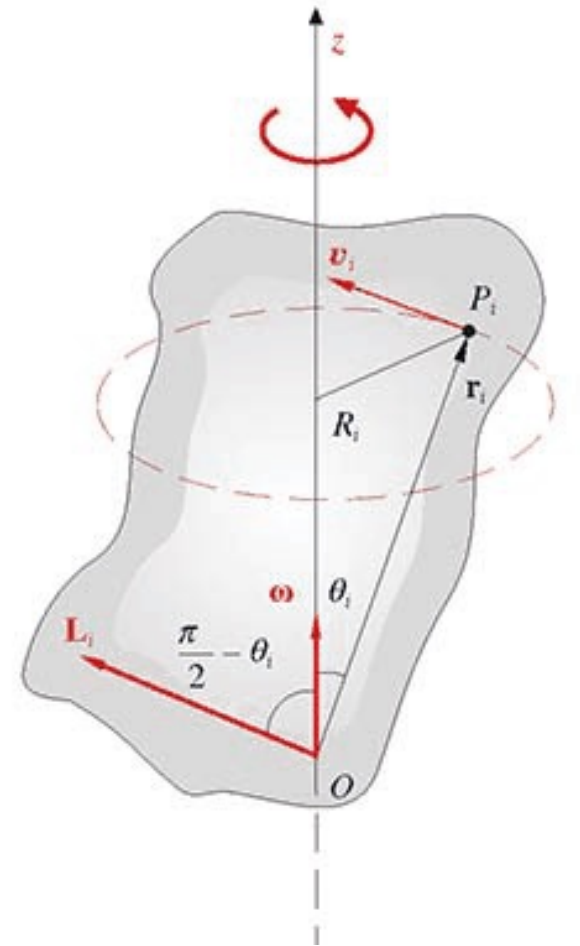
Se $\boldsymbol{\omega}$ è costante si dice *precessione uniforme*.

Se $\boldsymbol{\omega}$ è costante anche il modulo di $\mathbf{L}$ è costante (ma non la direzione, dato che $\mathbf{L}$ ruota insieme al corpo).

In questo caso risulta

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

(è analogo a quanto visto per il vettore posizione, per il quale risultava $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$)



Moto di rotazione intorno a un asse fisso

Nel caso di *precessione uniforme*

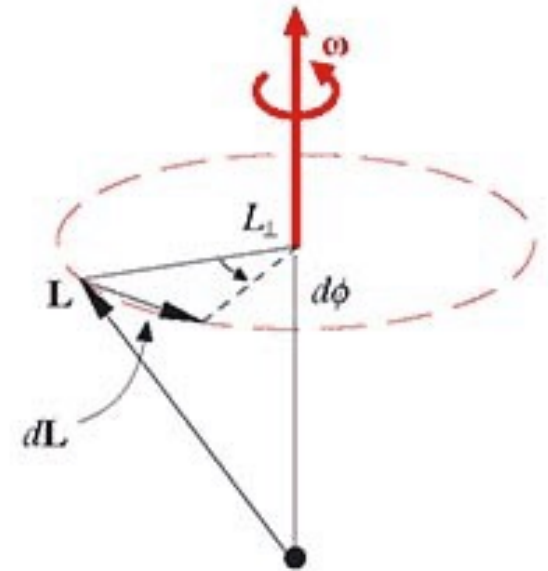
$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

$d\mathbf{L}$ è perpendicolare a $\mathbf{L}$ e all'asse di rotazione.

$$dL = L_{\perp} d\phi$$

$$\frac{dL}{dt} = L_{\perp} \frac{d\phi}{dt} = L_{\perp} \omega$$

→ Quindi in questo caso $\mathbf{M}$ è perpendicolare a $\mathbf{L}$ e all'asse di rotazione e il suo modulo vale $M = L_{\perp} \omega$



Esempio 1

Analizziamo il moto di un corpo rigido costituito da due sferette uguali di massa m collegate da un'asticella di massa trascurabile di lunghezza $2r$, che ruota intorno a un asse passante per il centro dell'asticella e perpendicolare ad essa con velocità angolare ω .

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

Calcoliamo il momento angolare

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2$$

Il modulo del momento angolare vale quindi

$$L = 2mr v = 2mr^2 \omega$$

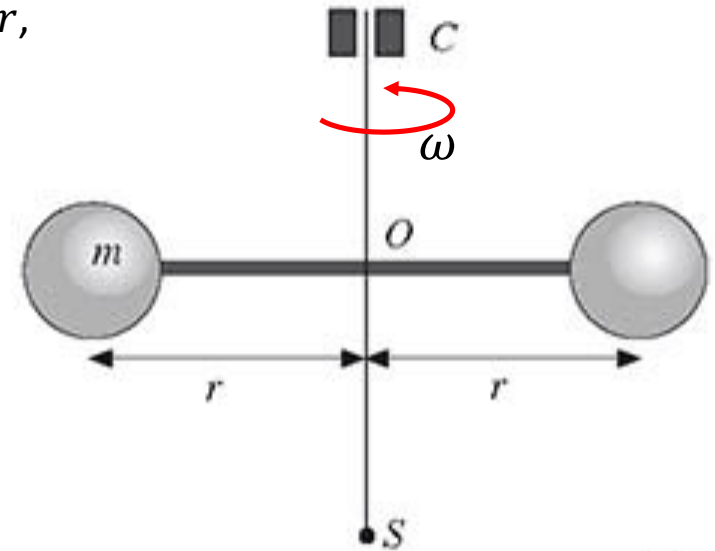
Il momento di inerzia del corpo rigido in questo caso vale:

$$I_z = 2mr^2$$

$\mathbf{L}$ è diretto come l'asse di rotazione,

$$\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega}$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I_z \boldsymbol{\alpha}$$



Moto di rotazione, equazioni di moto

Se $\mathbf{L}$ e` diretto come l'asse di rotazione,

$$\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega}$$
$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I_z \boldsymbol{\alpha}$$

Conoscendo il momento delle forze esterne posso calcolare $\mathbf{M}$,
quindi $\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{I_z} \mathbf{M}$

E per integrazione posso calcolare $\boldsymbol{\omega}$

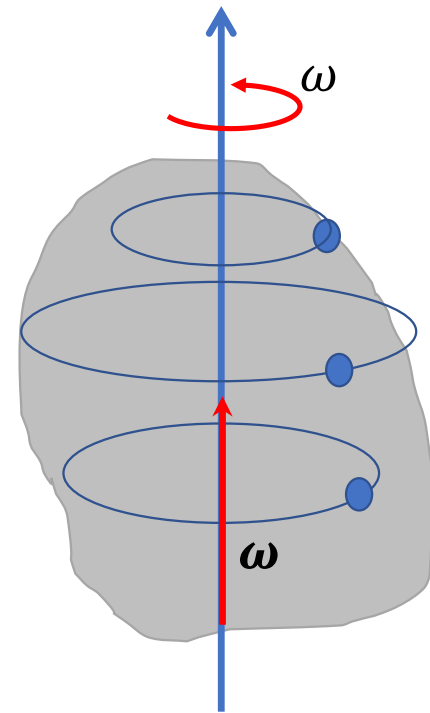
Moto di rotazione, energia cinetica

Calcoliamo l'energia cinetica di un corpo in moto di rotazione intorno a un asse fisso:

$$\begin{aligned} E_k &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$



Lavoro delle forze agenti su un corpo in moto di rotazione

Ricordiamo che

$$W = \Delta E_k$$

Che relazione esiste tra lavoro e momento?

$$dW = dE_k = I_z \omega d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} d\omega = I_z \frac{d\omega}{dt} d\theta = I_z \alpha d\theta = M d\theta$$

Quindi

$$W = \int_{\theta_{in}}^{\theta_{fin}} M d\theta$$

Moto di rotazione, potenza

Potenza in funzione del momento e della velocità angolare

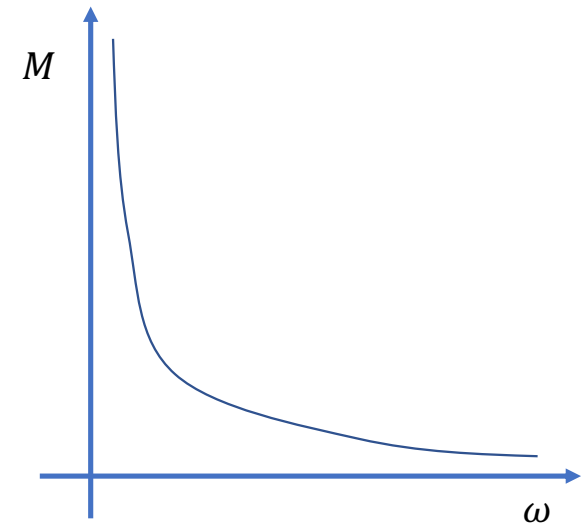
$$P = \frac{dW}{dt} = M\omega$$

Esempio

Qual e` la relazione tra coppia e velocita` angolare in un motore che lavora a potenza costante?

$$P = M\omega$$

$$M = \frac{P}{\omega}$$



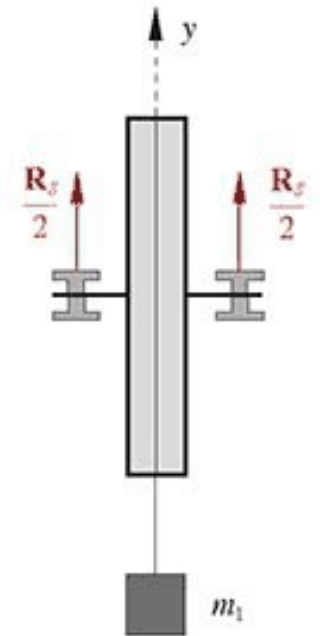
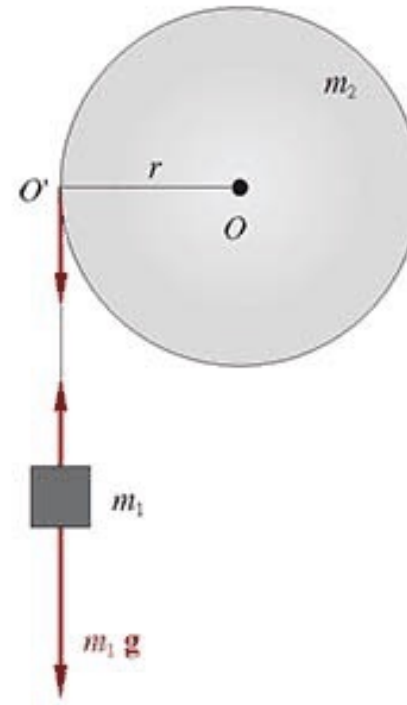
Esempio

$$m_2 \mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{R}_S = 0$$

$$m_1 \mathbf{a} = m_1 \mathbf{g} - \mathbf{T}$$

$$I_z \alpha = \mathbf{r} \times \mathbf{T}$$

$$a = r\alpha$$

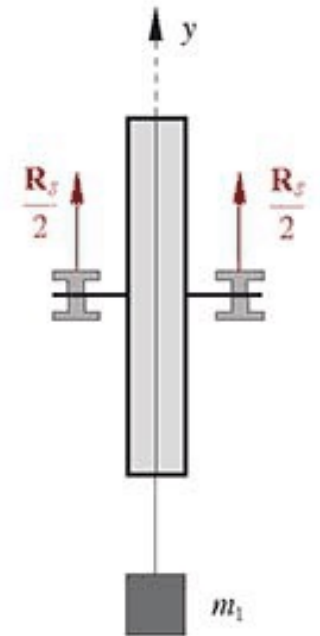
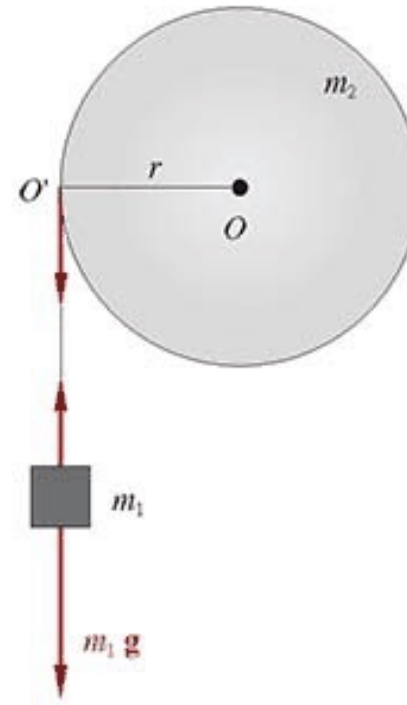


Esempio

$$m_1 a = -m_1 g + T$$

$$I_z \alpha = r T$$

$$a = r \alpha$$



Momento di inerzia

Definiamo il momento di inerzia del corpo rigido rispetto all'asse z come:

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Per un corpo continuo possiamo modificare l'espressione del momento di inerzia come

$$I_z = \int_V \rho (x^2 + y^2) dV$$

Calcolo dei momenti di inerzia

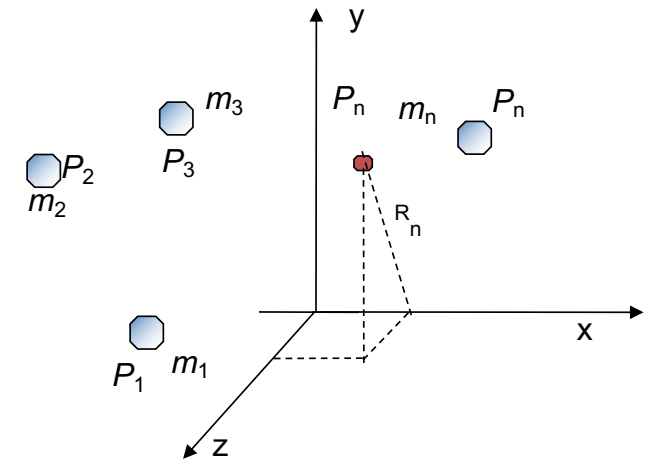
Analogamente, se l'asse di rotazione coincide con gli assi x o y possiamo definire i corrispondenti momenti di inerzia come:

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

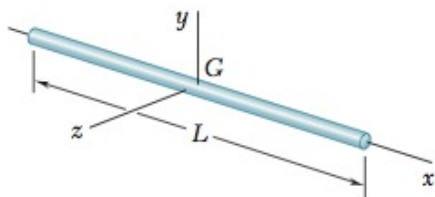
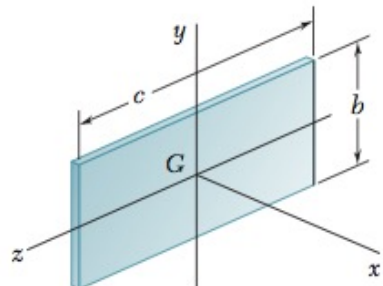
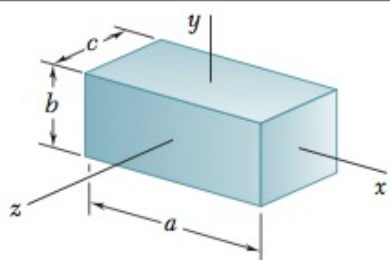
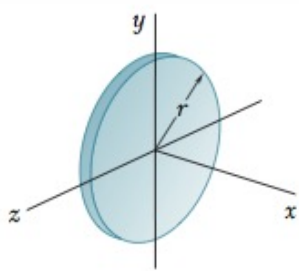
$$I_x = \int_V \rho (y^2 + z^2) dV$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2)$$

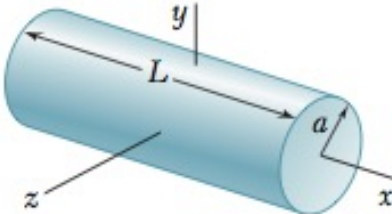
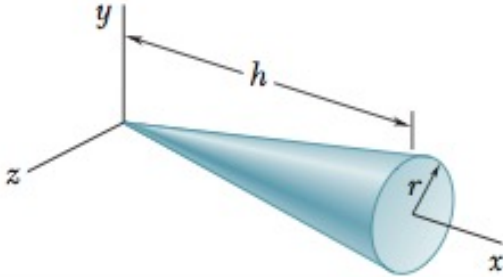
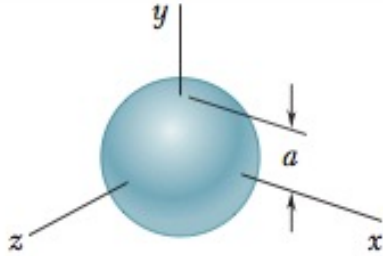
$$I_y = \int_V \rho (x^2 + z^2) dV$$



Momenti di inerzia per alcuni corpi

Slender rod		$I_y = I_z = \frac{1}{12} mL^2$
Thin rectangular plate		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} mc^2$ $I_z = \frac{1}{12} mb^2$
Rectangular prism		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
Thin disk		$I_x = \frac{1}{2} mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4} mr^2$

Momenti di inerzia per alcuni corpi

Circular cylinder		$I_x = \frac{1}{2} m a^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12} m (3a^2 + L^2)$
Circular cone		$I_x = \frac{3}{10} m a^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5} m (\frac{1}{4} a^2 + h^2)$
Sphere		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} m a^2$

Momento di inerzia – teorema di Huygens Steiner

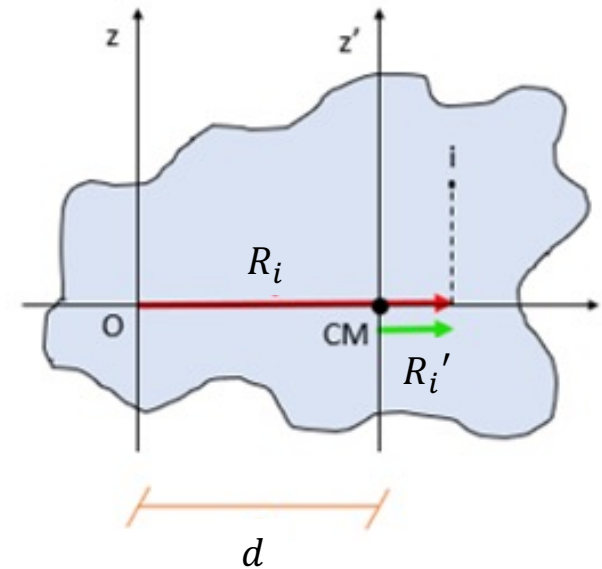
- Il momento di inerzia dipende dalle caratteristiche del corpo (geometria, densità) e dalla posizione dell'asse, ed è sicuramente un valore positivo. Data una direzione, qual è il valore minimo del momento di inerzia rispetto a un generico asse ad essa parallelo?
- Negli esempi precedenti abbiamo calcolato il momento di inerzia rispetto a un asse che passa per il centro di massa, ma se l'asse non passa per CM devo rifare il calcolo? 🙄

Momento di inerzia – teorema di Huygens Steiner

Riprendiamo l'espressione di I_z , supponiamo che l'asse z non passi per il centro di massa del corpo. Prendiamo un secondo asse z' parallelo a z e passante per il centro di massa:

$$\begin{aligned} I_z &= \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (R'_i + d)^2 = \sum_{i=1}^n m_i (R_i'^2 + 2R'_i d + d^2) \\ &== I_{z'} + md^2 + \sum_{i=1}^n 2m_i R'_i d = I_{z'} + md^2 \end{aligned}$$

$$I_z = I_{z'} + md^2$$



Momento di inerzia – matrice di inerzia

- E se l'asse di rotazione non coincidesse con nessuno dei tre assi x , y e z ? 😞
- Indichiamo con $\mathbf{u}$ il versore dell'asse di rotazione e con u_x, u_y, u_z le sue componenti rispetto al sistema di riferimento cartesiano con cui abbiamo calcolato i momenti di inerzia I_x, I_y e I_z

... è possibile verificare che il momento di inerzia rispetto all'asse $\mathbf{u}$ vale

Momento di inerzia – matrice di inerzia

$$I_u = I_x u_x^2 + I_y u_y^2 + I_z u_z^2 - 2I_{xy} u_x u_y - 2I_{yz} u_y u_z - 2I_{xz} u_x u_z$$

Dove I_x, I_y, I_z sono i momenti di inerzia rispetto agli assi x, y e z che abbiamo già incontrato, mentre I_{xy}, I_{yz}, I_{xz} sono i cosiddetti momenti di inerzia centrifughi (o prodotti di inerzia)

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i$$
$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i$$
$$I_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i$$

Momento di inerzia – matrice di inerzia

Grazie a questa definizione, possiamo calcolare le componenti cartesiane del momento angolare il momento angolare corrispondente a una generica velocità angolare come il risultato del seguente prodotto matrice-vettore

$$\mathbf{L} = [\mathbf{I}]\boldsymbol{\omega}$$

dove

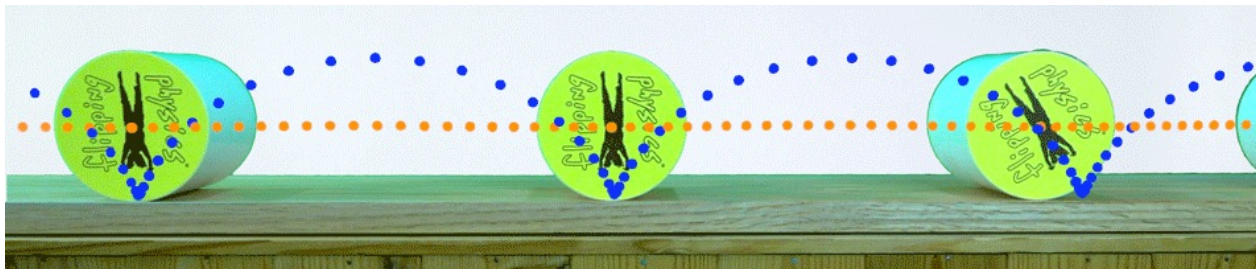
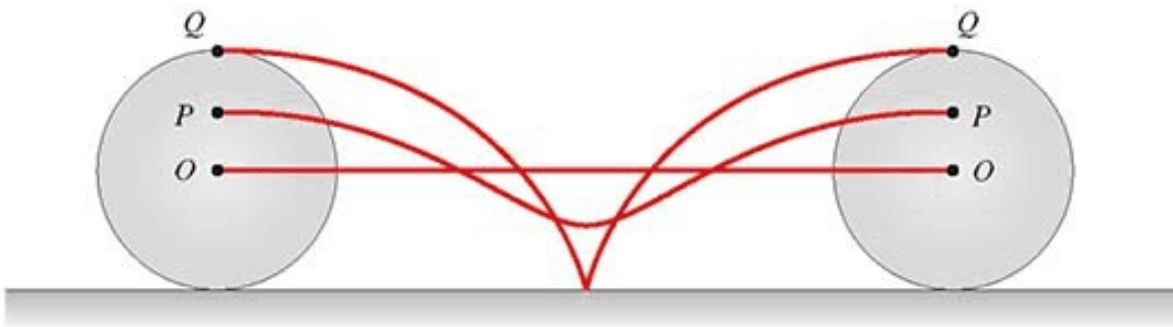
$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

E' la matrice di inerzia del corpo calcolata rispetto al sistema di riferimento xyz

Moto di rotolamento



Moto di rotolamento

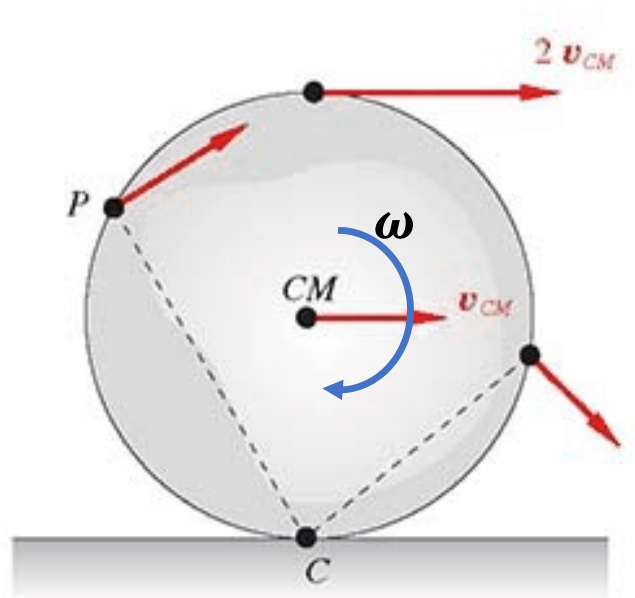


Moto di traslazione e rotazione caratterizzato da avere, istante per istante, un punto con velocità nulla (punto di contatto con il tracciato).

Il centro di massa del disco trasla in direzione orizzontale con velocità v_{CM} , mentre il disco ruota con velocità angolare ω .

Nel punto di contatto la velocità è istantaneamente nulla.

Moto di rotolamento - cinematica



Se il punto di contatto ha velocità nulla, la velocità di un generico punto può essere scritta, istante per istante, come

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CP}$$

E in particolare, per il centro di massa, risulta

$$\mathbf{v}_{CM} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CM}$$

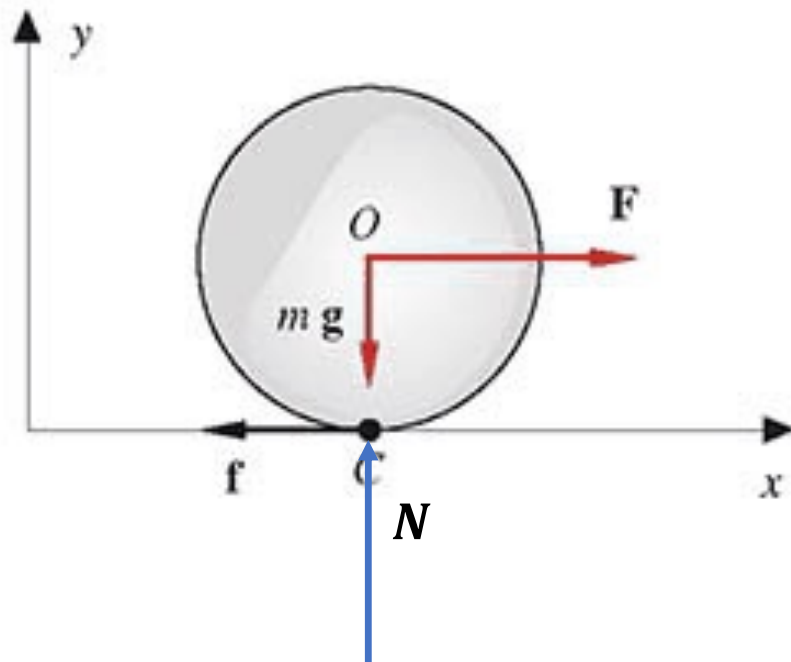
Se CM si muove verso destra, $\boldsymbol{\omega}$ “entra” nel foglio.

Possiamo scrivere quindi le seguenti relazioni cinematiche tra le velocità e le accelerazioni del disco:

$$v_{CM} = \omega R$$

$$a_{CM} = \alpha R$$

Moto di rotolamento - dinamica



Analizziamo quindi la dinamica del disco. Supponiamo che sul centro di massa sia applicata una forza $\mathbf{F}$ orizzontale che trascina il disco lungo il piano.

Scriviamo le equazioni di moto:

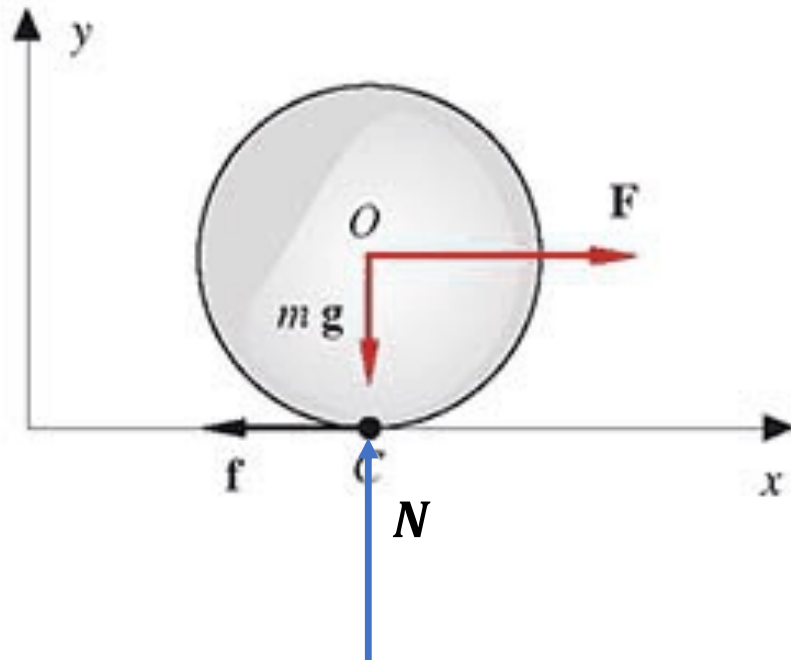
Accelerazione del centro di massa:

$$m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}$$

Momento angolare:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

Moto di rotolamento - dinamica



Analizziamo la prima equazione

$$m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}$$

La risultante delle forze è data da:

$$m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{f} + m\mathbf{g}$$

f è la forza generata dall'attrito tra disco e tracciato, che consente il moto di rotolamento (forza di aderenza).

Consideriamo le componenti orizzontali e verticali delle forze:

In direzione orizzontale abbiamo:

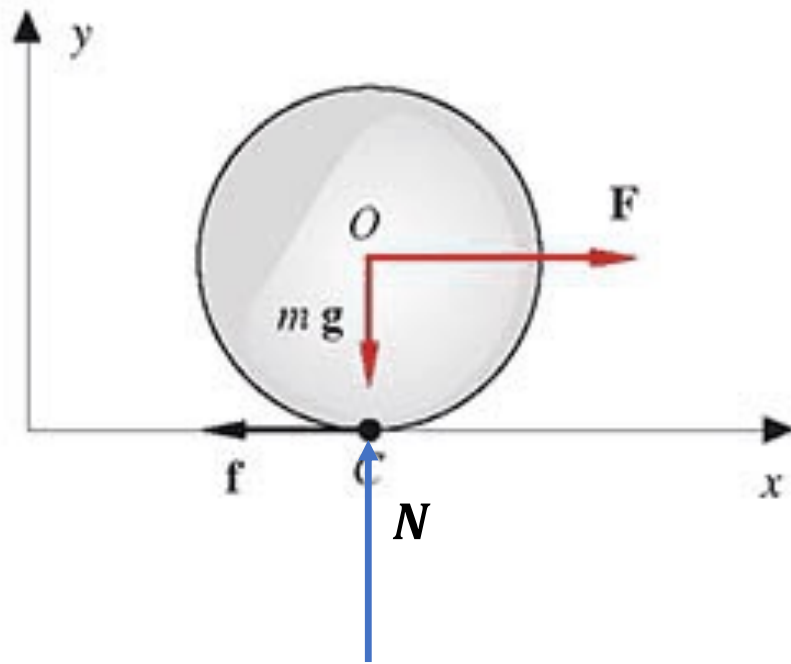
$$ma_{CM} = F - f$$

Mentre in direzione verticale:

$$N - mg = 0$$

$$N = mg$$

Moto di rotolamento - dinamica



Consideriamo i momenti

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

Calcoliamo il momento rispetto ad O

$$I_z \alpha = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$$

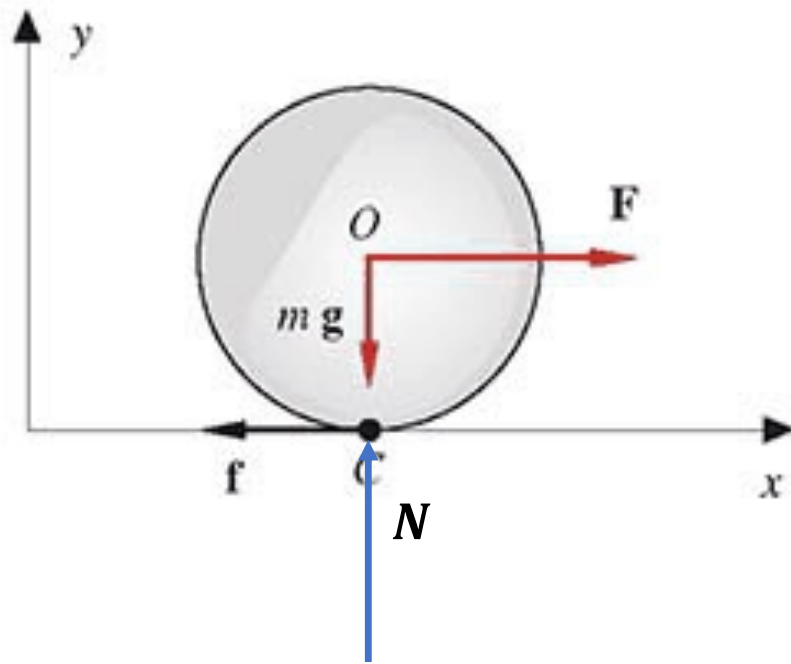
Possiamo considerare solo la componente in direzione perpendicolare al piano (z):

$$I_z \alpha = f R$$

Da cui ricaviamo:

$$f = \frac{I_z \alpha}{R}$$

Moto di rotolamento - dinamica



Possiamo adesso riprendere l'espressione dell'accelerazione

$$ma_{CM} = F - f$$

E sostituire l'espressione di f appena trovata

$$f = \frac{I_z \alpha}{R} = \frac{I_z a_{CM}}{R^2}$$

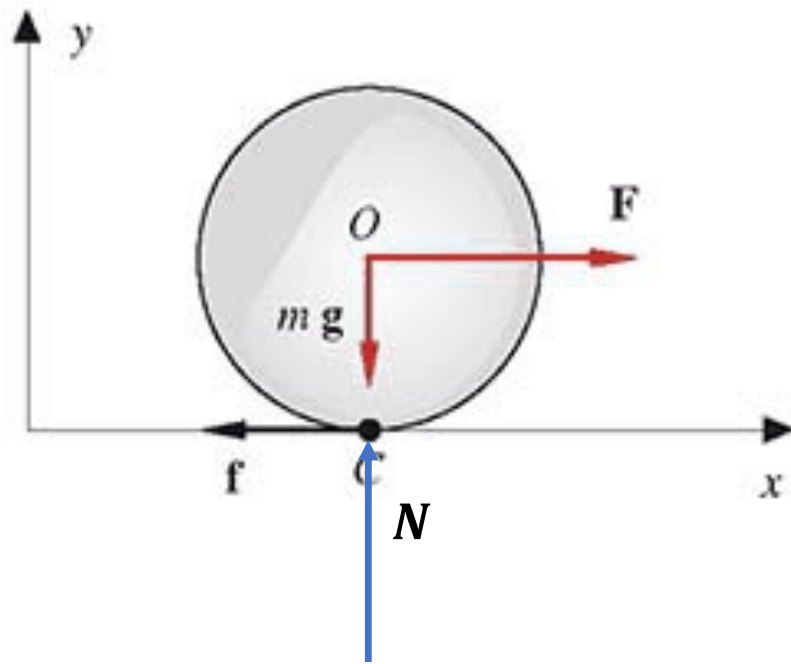
Ottenendo:

$$ma_{CM} = F - \frac{I_z a_{CM}}{R^2}$$

Da cui possiamo ricavare l'accelerazione

$$(mR^2 + I_z)a_{CM} = FR^2$$

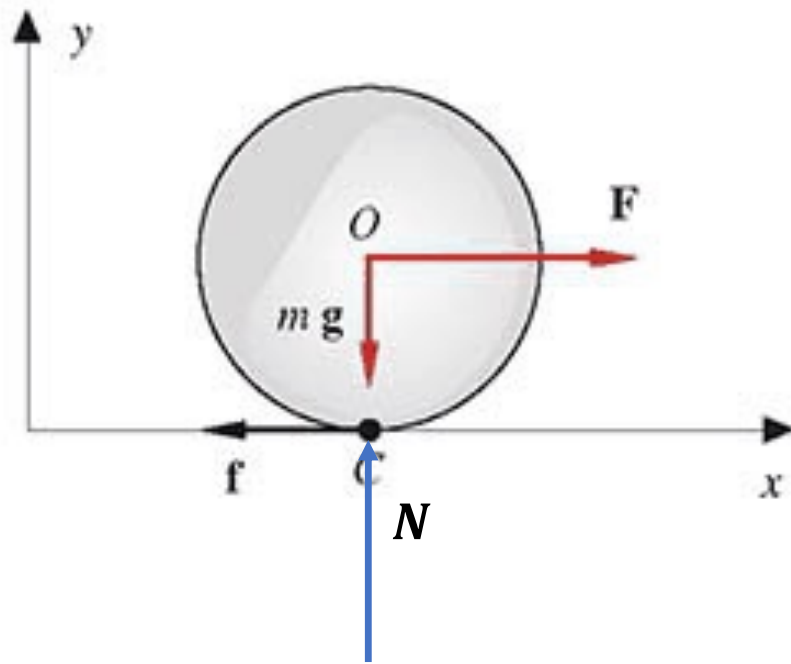
Moto di rotolamento - dinamica



$$a_{CM} = \frac{F}{m + \frac{I_z}{R^2}}$$

$$f = \frac{I_z a_{CM}}{R^2} = \frac{I_z}{R^2} \frac{F}{m + \frac{I_z}{R^2}} = \frac{F}{1 + \frac{mR^2}{I_z}}$$

Moto di rotolamento - dinamica



$$f = \frac{F}{1 + \frac{mR^2}{I_z}}$$

$$f \leq \mu_s N$$