

Esercizio n. 1

Un tratto di ciclo termodinamico (in regime stazionario) è composto da una portata unitaria di liquido saturo a 55bar di pressione (punto1). Tale flusso subisce uno scambio di calore sino alle condizioni di vapore saturo (punto 2). Una volta raggiunto tale stato il flusso subisce una espansione in una turbina avente un rendimento isoentropico pari a 0,81 sino alla pressione di 10 bar (punto 3).

1. Si vuole sapere il lavoro specifico trasferito dalla turbina ipotizzando trascurabili le variazioni di energia cinetica e potenziale del flusso che subisce la trasformazione di espansione e considerando altresì trascurabile la trasmissione di calore con l'ambiente.
2. Si vuole anche conoscere la quantità di calore che è necessario trasferire al fluido nella trasformazione 1-2 considerando trascurabili le variazioni di energia cinetica e potenziale del flusso che subisce la trasformazione di scambio termico e considerando altresì trascurabile la trasmissione di lavoro con l'ambiente.
3. Si vuole sapere nel (punto 3) di fine espansione in quali condizioni di titolo si trova il fluido.
4. Considerando infine di impiegare la sola portata di liquido presente nel punto 3 per un processo di laminazione sino alla pressione di 1 bar si determini la portata di vapore ottenuto ad 1 bar

(si ricordi che il processo di laminazione considera nulle le variazioni di energia cinetica e potenziale del flusso che subisce la trasformazione e altresì nulle le trasmissioni di calore e lavoro con l'ambiente).

P	T	h_{ls}	h_{vs}	u_{ls}	u_{vs}	s_{ls}	s_{vs}
(bar)	(°C)	(kJ/kg)	(kJ/kg)	(kJ/kg)	(kJ/kg)	(kJ/kgK)	(kJ/kgK)
1	99,63	417,5	2675,4	417,4	2506,0	1,3027	7,3598
10	179,88	762,6	2776,2	761,5	2581,9	2,1382	6,5828
55	269,94	1184,9	2789,9	1177,7	2594,0	2,9758	5,9309

Esercizio n. 2

Un'asta omogenea di lunghezza L e massa M è vincolata a ruotare sul piano verticale intorno a un asse passante per il suo estremo O e si trova inizialmente in posizione orizzontale. L'asta viene lasciata libera di ruotare e quando raggiunge la posizione verticale urta contro una sfera omogenea di massa m e raggio r. Dopo l'urto l'asta continua la sua rotazione, raggiungendo un angolo massimo θ , mentre la sfera inizia a muoversi su un piano orizzontale scabro, sia μ_d il coefficiente di attrito dinamico tra sfera e piano.

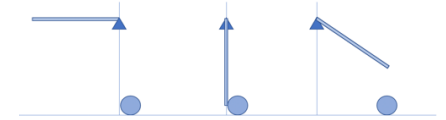
- 1: Calcolare la velocità angolare dell'asta immediatamente prima e dopo l'urto e la velocità del centro di massa della sfera dopo l'urto. L'urto è elastico?

- 2: Calcolare l'accelerazione del centro di massa della sfera e la sua accelerazione angolare immediatamente dopo l'urto.

- 3: Dopo quanto tempo dall'urto la sfera inizia a rotolare senza strisciare lungo il piano?

- 4: Da quando inizia il moto di rotolamento puro, la sfera compie n_g giri per poi arrestarsi. Quanto vale in modulo il momento delle forze di attrito volvente (supponiamo che sia costante)?

[Valori numerici $M = 2\text{ kg}$, $L = 0.3\text{ m}$, $m = 0.3\text{ kg}$, $r = 3\text{ cm}$, $\theta = 60^\circ$, $\mu_d = 0.3$, $n_g = 10$, m. di inerzia di un'asta rispetto a un asse per il cdm $I_a = \frac{1}{12}ML^2$, m. di inerzia di una sfera rispetto a un asse per il centro $I_s = \frac{2}{5}mr^2$]



Esercizio n. 3

Su un disco, che ruota su un piano orizzontale con velocità angolare ω costante rispetto a un sistema di riferimento inerziale con origine nel centro del disco e assi x e y , è stata realizzata una guida con direzione radiale in cui scorre senza attrito un cursore, con velocità costante di modulo v' , assimilabile a un punto materiale di massa m . Nell'istante iniziale la guida è allineata con l'asse x e il cursore si trova nell'origine del sistema di riferimento, al centro del disco. Dopo un tempo t_0 la guida è allineata con l'asse y e il cursore si è spostato di una quantità in modulo pari a r' . Analizziamo nel dettaglio questa configurazione:

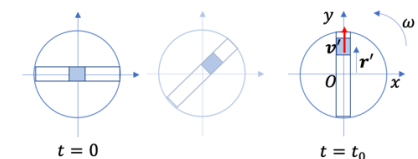
- 1: Qual è la velocità $\mathbf{v}'$ del cursore vista da un osservatore solidale al disco? Qual è la velocità angolare ω del disco? Qual è la velocità $\mathbf{v}$ del cursore vista da un osservatore solidale al sistema di riferimento inerziale?

- 2: Qual è l'accelerazione relativa $\mathbf{a}'$? Qual è l'accelerazione $\mathbf{a}$ vista da un osservatore inerziale?

- 3: Quali sono le forze apparenti sul cursore? Quanto vale la risultante delle forze applicate al cursore?

- 4: Il moto del cursore è realizzato tramite un attuatore che può applicare solo forze in direzione radiale, il cursore scorre senza attrito nella guida, quanto vale la forza applicata dall'attuatore? Quanto vale la reazione vincolare della guida?

Nota: per le quantità vettoriali, occorre specificare modulo, direzione e verso oppure le componenti cartesiane. [Valori numerici: $m = 0.1\text{ kg}$, $t_0 = 0.25\text{ s}$, $r' = 10\text{ cm}$]



ESERCIZIO n° 2 - Q1

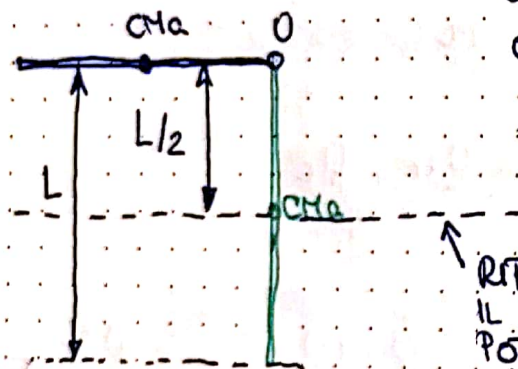
Analizziamo il moto dell'asta prima dell'urto.
Conservazione dell'energia meccanica.

- Energia meccanica ~~prima~~ iniziale

$$E_{p0} = Mg \frac{L}{2} \rightarrow \text{PRENDO COME RIFERIMENTO LA POSIZIONE DEL CM DELL'ASTA QUANDO È VERTICALE}$$

$$E_{k0} = 0$$

$$E_{m0} = Mg \frac{L}{2}$$



0 -> ISTANTE INIZIALE
1 -> ISTANTE IMMEDIATAMENTE PRIMA DELL'URTO

↑ RIFERIMENTO PER IL CALCOLO DELL'EN. POTENZIALE

- Energia meccanica finale (subito prima dell'urto)

$$E_{p1} = 0$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2} I_a \omega_i^2$$

$$I_a = \frac{1}{12} ML^2 + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

Momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse passante per O

$$E_{m1} = \frac{1}{2} I_a \omega_i^2$$

CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA

$$E_{m0} = E_{m1}$$

$$Mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} I_a \omega_i^2$$

$$\omega_i^2 = \frac{2MgL/2}{I_a}$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{MgL}{I_a}} = \sqrt{\frac{3MgL}{ML^2}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

$$\boxed{\omega_i = 9.90 \text{ rad/s}}$$

DOPO L'URTO

L'asta prosegue la sua rotazione e arriva a un angolo massimo $\theta = \frac{\pi}{3}$

Applico di nuovo la conservazione dell'energia meccanica.

2 ISTANTE IMMEDIATAMENTE DOPO L'URTO

3 ISTANTE IN CUI L'ASTA ARRIVA ALLA ROTAZIONE $\theta = \frac{\pi}{3}$

- Energia meccanica dell'asta subito dopo l'urto

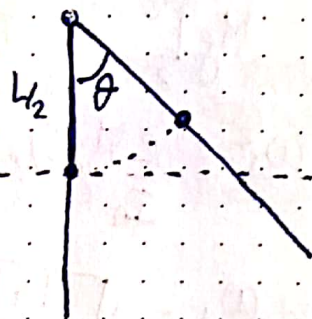
$$E_{p2} = 0 \quad (\text{L'asta è in posizione verticale})$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2} I_A \omega_2^2 \rightarrow E_{m2} = \frac{1}{2} I_A \omega_2^2$$

ENERGIA MECCANICA ^{DELL'ASTA} NELL'ISTANTE IN CUI RAGGIUNGE LA MASSIMA ROTAZIONE

$$E_{p3} = Mg \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2} \cos \theta \right)$$

$$= Mg \frac{L}{2} (1 - \cos \theta)$$



$$E_{k3} = 0$$

$$\rightarrow E_{m3} = Mg \frac{L}{2} (1 - \cos \theta)$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

$$E_{m2} = E_{m3}$$

$$Mg \frac{L}{2} (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} I_A \omega_2^2$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{MgL(1 - \cos \theta)}{I_A}} =$$

$$= \sqrt{\frac{MgL(1 - \cos \theta)}{\frac{1}{3} ML^2}} = \sqrt{\frac{3gL}{L} (1 - \cos \theta)}$$

$$\boxed{\omega_2 = 7.00 \text{ rad/s}}$$

DURANTE L'URTO

→ IL MOMENTO ANGOLARE, CALCOLATO RISPETTO AL PUNTO O (PASSANTE PER L'ASSE DI ROTAZIONE) SI CONSERVA, DATO CHE IL MOMENTO RISPETTO AD O DELLE FORTE VINCOLARI È NULO.

1 ISTANTE IMMEDIATO PRIMA DELL'URTO

2 ISTANTE IMMEDIATO DOPO L'URTO

CONSIDERIAMO LA COMPONENTE DEL MOMENTO IN DIREZIONE PERPENDICOLARE AL PIANO (ASSE Z, DIREZIONE USCENTE)

$$L_{1z} = L_{2z}$$

$$L_{1z} = I_A \omega_1$$

$$L_{2z} = I_A \omega_2 + m v_2 L$$

$$\rightarrow I_A \omega_1 = I_A \omega_2 + m v_2 L$$

$$\boxed{v_2 = \frac{I_A (\omega_1 - \omega_2)}{mL} = 1.93 \text{ m/s}}$$

L'URTO È ELASTICO?

Energia cinetica del sistema prima dell'urto

$$E_{k1} = \frac{1}{2} I_A \omega_1^2 = 2.94 \text{ J}$$

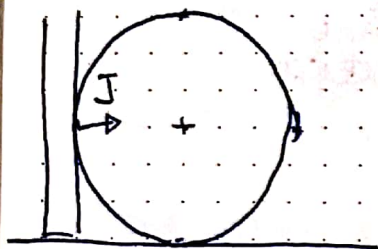
$$E_{K2} = \frac{1}{2} I_A \omega_2^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 = 2.03 \text{ J}$$

RISULTA QUINDI

$E_{K1} \neq E_{K2}$, l'urto non è elastico

Q2

ANALIZZIAMO IL MOTO DELLA SFERA DOPO L'URTO



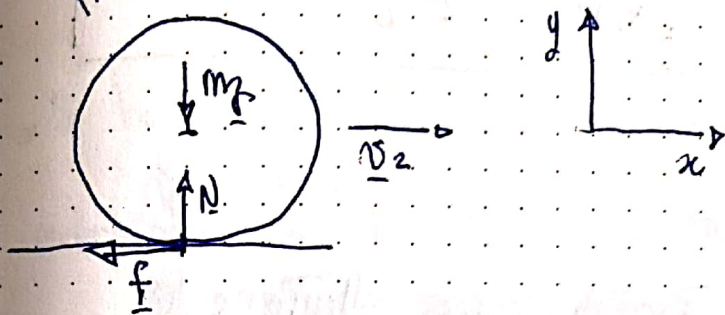
cdm delle

PER effetto dell'urto alla sfera è impressa una velocità v_2 , mentre la sua velocità angolare è inizialmente nulla.

$v_2 \rightarrow$ velocità ~~immediata~~ del centro di massa subito dopo l'urto

$\omega_{2s} = 0 \rightarrow$ velocità angolare della sfera immediatamente dopo l'urto

Le sfere iniziano a strisciare sul piano. Tra sfera e piano è presente attrito, sia per il coefficiente di attrito dinamico.



- Equazione di moto: traslazione in direzione y (verticale)

$$N - mg = 0 \rightarrow N = mg$$

- Equazione di moto: traslazione in direzione x (orizzontale) $m a_{cm} = -f$

$$m a_{cm} = -\mu_d N$$

$$m a_{cm} = -\mu_d mg$$

$$\rightarrow a_{cm} = -\mu_d g = -2.94 \text{ m/s}^2$$

- Equazione di moto: rotazione intorno all'asse z

$$I_s \alpha = -f r \rightarrow \alpha = \frac{-\mu_d mg r}{I_s}$$

$$I_s = \frac{2}{5} m r^2$$

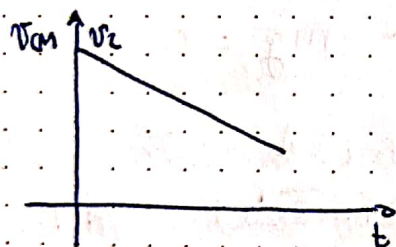
$$\alpha = - \frac{\mu_s m g r}{\frac{2}{5} m r^2} = - \frac{5}{2} \frac{\mu_s g}{r} = -245.25 \text{ rad/s}^2$$

Q3

Dopo l'urto

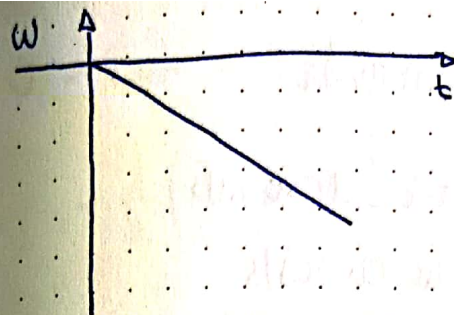
- Il centro di massa rotolante e la sua velocità variano con legge lineare

$$v_{cm} = v_z + a_{cm} t$$



- La velocità angolare inizialmente nulla inizia ad aumentare in valore assoluto, il segno è negativo (rotazione in senso orario)

$$\omega_s = \alpha t$$



- Si ha rotolamento puro quando

$v_{cm} = -\omega_s r$
 indichiamo con t_r l'istante di tempo in cui questa condizione si verifica

$$v_z + a_{cm} t_r = - \alpha r t_r$$

$$\rightarrow v_z = - (a_{cm} + \alpha r) t_r$$

$$t_r = - \frac{v_z}{a_{cm} + \alpha r} = 0.1885$$

↑ ricordiamo che sia a_{cm} che α sono negative quindi il risultato è positivo

Q4

Nell'istante in cui inizia il rotolamento, la sfera ha un'energia meccanica (cinetica) pari a

$$E_{kr} = \frac{1}{2} I_r \omega_{sr}^2 + \frac{1}{2} m v_{cmr}^2$$

$$\text{Dove } v_{sr} = v_z + a_{cm} t_r = 1.38 \text{ m/s}$$

$$\omega_{sr} = \alpha t_r = 46.06 \text{ rad/s}$$

Ricordando il vincolo di rotolamento possiamo scrivere anche

$$E_{kr} = \frac{1}{2} (I_r + m r^2) \omega_{sr}^2$$

oppure

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I_r}{r^2} \right) v_{cm}^2$$

Dopo n_f giri, o cui corrisponde una rotazione

$$\Theta = 2\pi n_f$$

tutta l'energia meccanica delle sfere è stata dissipata dall'attrito volvente, il cui lavoro complessivo è

$$L_{att} = - M_a \Theta$$

Il momento delle forze di attrito volvente sarà quindi tale che

$$0 - E_{kr} = L_{att}$$

$$-\frac{1}{2} (I_r + m r^2) \omega_{sr}^2 = - M_a \Theta$$

$$\rightarrow M_a = \frac{\frac{1}{2} (I_r + m r^2) \omega_{sr}^2}{\Theta} = 0.0064 \text{ Nm}$$

ESERCIZIO n° 3

Q1

Scegliamo il sistema di riferimento

- inerziale

- origine nell'asse di rotazione del disco

- asse x allineato con la guida nella posizione iniziale

- asse y sul piano del disco

- asse z perpendicolare al piano del moto

nota: il piano xy è orizzontale

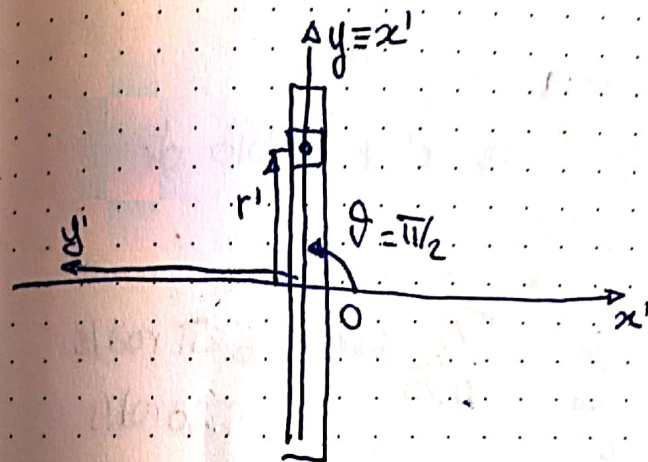
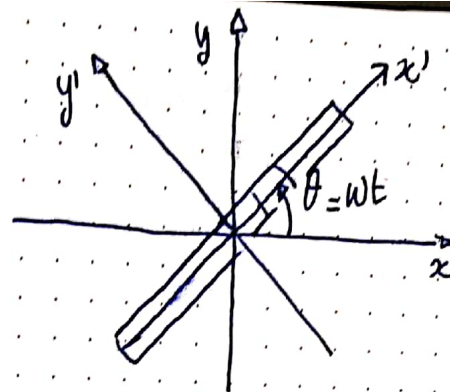
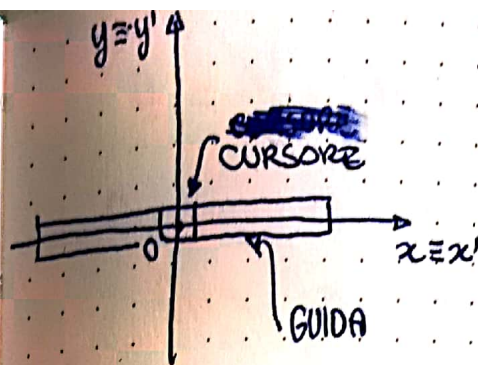
- solidale al disco

- origine coincidente con il sistema inerziale

- asse x' allineato con la guida durante il moto

- asse y' sul piano del disco

- asse z' coincidente con z



• VELOCITÀ DEL CURSORE visto da un osservatore solidale al disco, $\underline{v}'$

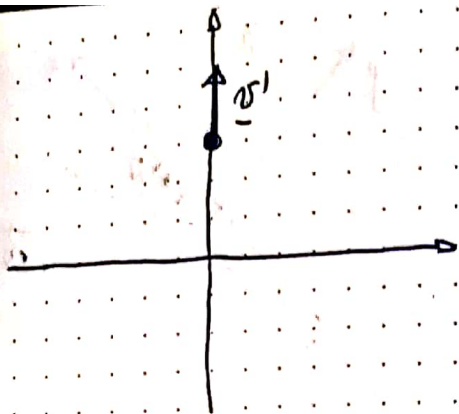
• modulo

$$v' = r' / t_0 = 0.4 \text{ m/s}$$

• direzione: allineato con l'asse x'

$$\underline{v}' = v' \underline{i}' = v' \underline{j}'$$

(nella configurazione analizzata l'asse x' coincide con y)



• VELOCITÀ ANGOLARE

nel tempo t_0 l'asse x' è ruotato di un angolo $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\rightarrow \omega = \frac{\theta_0}{t_0} = \frac{\pi/2}{0.25} \text{ rad/s} = 2\pi \text{ rad/s} = 6.28 \text{ rad/s}$$

Q2 $\left\{ \begin{array}{l} \omega = \omega k \\ \uparrow \text{IL VETTORE } \omega \text{ È DIRETTO COME L'ASSE } z \end{array} \right.$

Accelerazione a' del cursore "visiva" del sistema di riferimento solidale al disco

- Rispetto al disco il cursore si muove con velocità v costante, quindi

$$a' = 0$$

- Rispetto al sistema di riferimento iniziale

$$\underline{a} = \underline{a'} + \underline{a_{tr}} + \underline{a_c} = \underline{a_{tr}} + \underline{a_c}$$

Accelerazione di trascinamento

$$\underline{a_{tr}} = \underline{\dot{\omega}} \times \underline{r'} + \omega \times \omega \times \underline{r'}$$

ω è costante

L'origine del sistema di riferimento del disco è fissa e coincide con o

$$= \omega \times \omega \times \underline{r'} = -\omega^2 \underline{r'}$$

nella configurazione analizzata

$$\underline{a_{tr}} = -\omega^2 \underline{r'}$$

in modulo

$$a_{tr} = 3.95 \text{ m/s}^2$$

accelerazione complementare (Coriolis)

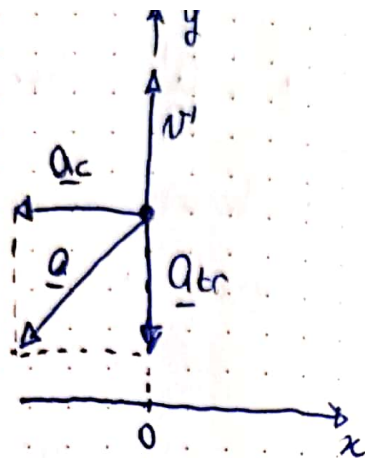
$$\underline{a_c} = 2\omega \times \underline{r'}$$

in modulo

$$a_c = 2\omega r' = 1.26 \text{ m/s}^2$$

direzione $\rightarrow$ come y' (con le regole della mano destra)

$$\underline{a}_c = -a_c \underline{i}$$



Complessivamente

$$\begin{aligned}\underline{a} &= \underline{a}_{tr} + \underline{a}_c \\ &= a_x \underline{i} + a_y \underline{j}\end{aligned}$$

$$a_x = -a_c = -0,126 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = -a_{tr} = -0,395 \text{ m/s}^2$$

Q3

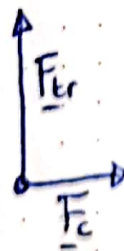
Forze opposte agenti sul cursore

$$\underline{F}_{tr} = -m \underline{a}_{tr} = m \omega^2 r \underline{j}$$

$$\underline{F}_c = -m \underline{a}_c = m \omega^2 r \underline{i}$$

forza di Coriolis

forza di trascinamento



In modulo

$$F_{tr} = 0,395 \text{ N}$$

$$F_c = 0,126 \text{ N}$$

Calcoliamo la risultante delle forze applicate al cursore

$$\underline{F} = m \underline{a}$$

$$\rightarrow F_x = m a_x = -0,126 \text{ N}$$

$$F_y = m a_y = -0,395 \text{ N}$$

Q4

Se il cursore può applicare forze solo in direzione della guida

$$\underline{F}_a = F_a \underline{j}$$

la guida è priva di attrito quindi

$$\underline{F}_a = F_a \underline{i} + F_a \underline{k}$$

la reazione è perpendicolare alla guida quindi perpend a y

Il piano è orizzontale (il peso agisce in direzione z)

$$\underline{F} = \underline{F}_a + \underline{F}_{ao} + \underline{F}_p + \underline{F}_{az}$$

$$\underline{F} = m \underline{a}$$

↑ forza peso

Quindi risulta

$$\underline{F}_a = F_{aj} = -0.395 \text{ N} \underline{j}$$

$$\underline{F}_z = F_{ao} \underline{i} + F_{az} \underline{k}$$

~~Quindi~~

$$\textcircled{a} F_{ax} = -0.126 \text{ N}$$

$$F_{az} = mg = 0.981 \text{ N}$$