

Compito di Fisica 1 del 21 settembre 2021

Meccanica

Esercizio a)

Un corpo approssimabile a punto materiale di massa m è appeso tramite un filo ideale inestensibile di lunghezza l ad un supporto fisso O ed è lasciato libero di oscillare in un piano verticale. Il filo si trova inizialmente in posizione orizzontale, quando il corpo è lasciato libero con velocità iniziale nulla. Determinare:

1. La velocità massima del punto materiale durante l'oscillazione.
2. La tensione massima del filo.

Il filo viene sostituito con uno della stessa lunghezza ma con minore resistenza e la prova viene ripetuta. Questa volta, quando la tensione nel filo raggiunge il valore T_m il filo si spezza e il punto cade su una superficie orizzontale fissa posta ad una distanza pari a $2l$ rispetto ad O . L'urto contro la superficie orizzontale è perfettamente anelastico.

Determinare:

3. L'angolo θ_m tra il filo e la direzione verticale in corrispondenza della rottura del filo.
4. L'impulso della reazione vincolare tra la superficie e la massa durante l'urto.

[Valori numerici: $m = 50 \text{ kg}$, $l = 2.5 \text{ m}$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $T_m = 1000 \text{ N}$]

Esercizio b)

La puleggia di un sistema di sollevamento è costituita da due dischi di massa M e $2M$ e raggio R e $2R$ rispettivamente, fissati insieme in modo coassiale e vincolati a ruotare intorno a un asse orizzontale privo di attrito, coincidente con il proprio asse di simmetria. Sulla superficie esterna del disco più piccolo è fissata una fune inestensibile alla cui estremità è legata una massa m_1 , mentre sul disco più grande è avvolta una seconda fune a cui è collegata, dalla parte opposta rispetto ad O , una massa m_2 .

1. Supponendo nota m_1 , quale deve essere il valore di m_2 affinché la puleggia, in assenza di altre azioni esterne, abbia accelerazione angolare nulla?
2. A partire da questa configurazione, la massa m_2 raddoppia. Determinare l'accelerazione angolare della puleggia e le accelerazioni delle due masse in questa nuova configurazione.

3. Determinare la tensione nelle due funi nella configurazione analizzata nel punto 2.

4. La fune arrotolata sul disco di raggio più grande ha una lunghezza pari ad l . Nella condizione analizzata in precedenza nei punti 2 e 3, e ipotizzando di lasciare libero il sistema a partire da una situazione in cui le masse e la puleggia sono fermi, quanto tempo impiega la fune a srotolarsi completamente?

[Valori numerici: $M = 2 \text{ kg}$, $R = 0.5 \text{ m}$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $m_1 = 10 \text{ kg}$, $l = 10 \text{ m}$]

Termodinamica

Esercizio a)

Un impianto frigorifero, in condizioni stazionarie e avente un COP pari a 4, sottrae 7000 kJ/h di calore da un freezer a -5°C cedendo energia sotto forma di calore all'ambiente circostante a 24°C . Si determinino:

- 1) la potenza in ingresso al frigorifero e se ne confronti il valore con quella richiesta per un analogo ciclo reversibile
- 2) sapendo che l'energia elettrica costa $0,09 \text{ €/kWh}$, il costo giornaliero reale ed ideale in €/d

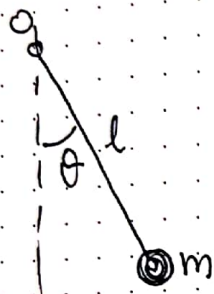
Esercizio b)

Un fluido geotermico (rappresentabile come acqua pura) si trova in uno stato di liquido saturo a 55 bar di pressione. Successivamente il fluido viene laminato a 10 bar di pressione. Si individuino il titolo del fluido e l'entalpia specifica del vapore a valle della laminazione.

P	T	h_{ls}	h_{vs}	u_{ls}	u_{vs}	v_{ls}	v_{vs}
(bar)	($^\circ\text{C}$)	(kJ/kg)	(kJ/kg)	(kJ/kg)	(kJ/kg)	(m ³ /kgK)	(m ³ /kg)
1,01325	100,00	419,1	2676,0	419,0	2506,5	0,001043	1,6730
10	179,88	762,6	2776,2	761,5	2581,9	0,0011274	0,19430
55	269,94	1184,9	2789,9	1177,7	2594,0	0,0013023	0,035624

SVOLGIMENTO DEL COMPITO SCRITTO DEL 21/09/2021 - MECCANICA

ESERCIZIO n° 1



Punto 1 velocità massima del punto materiale durante l'oscillazione

Sul sistema agiscono forze conservative (forza peso) e forze che non compiono lavoro (tensione del filo). Possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica.

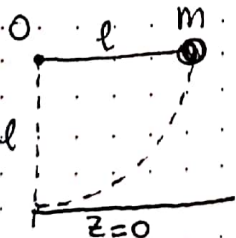
• Configurazione iniziale

$$E_p = mgl$$

$$E_k = 0$$

il filo è in conf. orizzontale.

energia cinetica iniziale nulla



$$E_{m, in} = mgl$$

• In una generica configurazione, in cui il filo è inclinato di un angolo θ rispetto alla verticale.

$$E_p = mgl(1 - \cos\theta)$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_{m, \theta} = mgl(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2$$

Per la conservazione dell'energia meccanica risulta quindi:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos\theta) = mgl$$

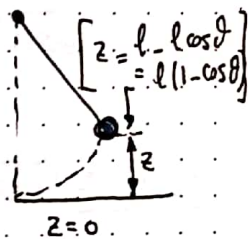
da cui posso determinare $v(\theta)$:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl - mgl(1 - \cos\theta)$$

$$v^2 = 2gl \cos\theta$$

$$v(\theta) = \sqrt{2gl \cos\theta}$$

Per trovare il massimo dovrei studiare questa funzione al variare dell'angolo θ .



Osservo però che $\cos \theta$ è massimo per $\theta = 0$, valore per cui risulta $\cos \theta = 1$

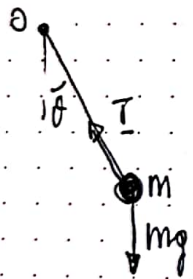
quindi posso dire che

$$v_{\max} = v(\theta=0) = \sqrt{2gl \cos(0)} = \sqrt{2gl}$$

Sostituendo i valori numerici ottengo

$$v_{\max} = 7.00 \text{ m/s}$$

Punto 2 - Tensione massima del filo



Applichiamo le seconde leggi di Newton, considerando le componenti dei vettori forze e accelerazione in direzione radiale

$$m \cdot a_n = T - mg \cos \theta$$

↑
componente radiale (centripeta)
dell'accelerazione

$$a_n = \frac{v^2}{l}$$

$$m \frac{v^2}{l} = T - mg \cos \theta$$

dal punto precedente ricordo che

$$v^2 = 2gl \cos \theta$$

sostituisco

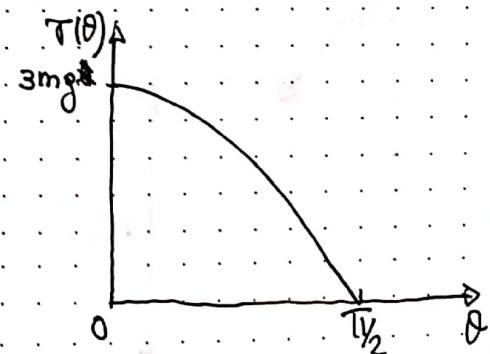
$$2mg \cos \theta = T - mg \cos \theta$$

Da cui ricavo che

$$T = 3mg \cos \theta$$

Analizziamo come varia T al variare di θ :

per $\theta = 0$ risulta $\cos \theta = 1$ e la T assume valore massimo, mentre per $\theta = \frac{\pi}{2}$ abbiamo $\cos \theta = 0$ quindi $T = 0$ (valore minimo)



Quindi

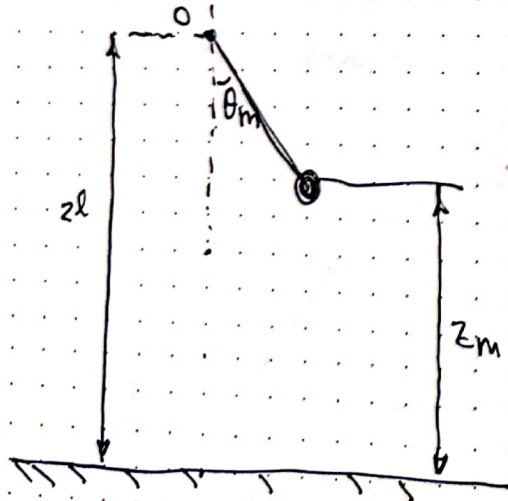
$$T_{\max} = T(0) = 3mg = 1471 \text{ N}$$

Punto ③ Determiniamo il valore θ_m per il quale la tensione assume il valore massimo T_m e la fune si rompe.
 $T_m = 3mg \cos \theta_m$

$$\rightarrow \theta_m = \arccos\left(\frac{T_m}{3mg}\right) = 0.823 \text{ rad} = 47.18^\circ$$

In questa configurazione la velocità delle masse è
 $v_m = \sqrt{2gl \cos \theta} = 5.77 \text{ m/s}$

Punto ④ Analizziamo il moto di caduta e l'urto contro la superficie.



Nell'istante in cui il filo si rompe il punto materiale si trova a una distanza z_m dalla superficie, pari a

$$z_m = 2l - l \cos \theta_m = 2l - l \left(\frac{T_m}{3mg}\right) = 3.30 \text{ m}$$

la velocità è pari a

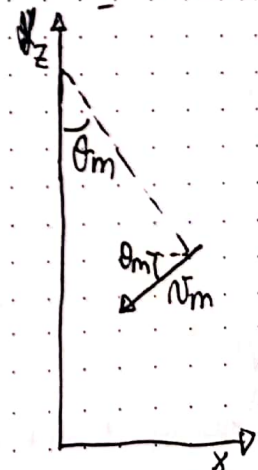
$$v_m = \sqrt{2gl \cos \theta_m} =$$

$$= \sqrt{2gl \frac{T_m}{3mg}} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{T_m l}{m}} = 5.77 \text{ m/s}$$

e ha componenti

$$v_{mx} = -v_m \cos \theta_m = -3.92 \text{ m/s}$$

$$v_{mz} = -v_m \sin \theta_m = -4.23 \text{ m/s}$$



Dopo la rottura del filo il punto materiale ha un moto di caduta libera con velocità iniziale $\underline{v}_m$ di componenti v_{mx} orizzontale e v_{mz} verticale.

Analizziamo il moto di caduta

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{mx} = -3.92 \text{ m/s} \\ v_z &= v_{mz} - gt \end{aligned} \right\} \text{velocità}$$

posizione

$$\left\{ \begin{aligned} x(t) &= x_m + v_{mx} t \\ z(t) &= z_m - v_{mz} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \right.$$

non la so non lo abbiamo calcolato perché non ci serve...

calcoliamo il tempo di caduta t_c

$$0 = z_m - v_{mz} t_c - \frac{1}{2} g t_c^2$$

$$t_c = \frac{-v_{mz} + \sqrt{v_{mz}^2 + 2gz_m}}{g} = 0.495 \text{ s}$$

risolvo l'equazione di secondo grado

La velocità al momento dell'impatto ha componenti:

$$v_{cx} = v_x = -3.92 \text{ m/s}$$

$$v_{cz} = v_{mz} - g t_c = -17.6 \text{ m/s}$$

La quantità di moto del sistema prima dell'impatto è quindi $\underline{P}_i$, con componenti cartesiane

$$P_x = m v_{cx}$$

$$P_z = m v_{cz}$$

L'urto è anelastico, il punto materiale rimane incollato alla superficie, quindi la sua quantità di moto sarà

$$\underline{P}_{fin} = 0$$

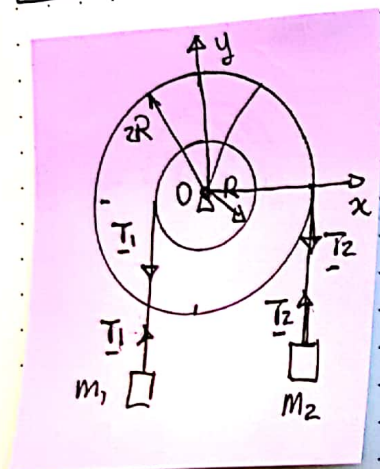
Per il Teorema dell'impulso, avremo

$$\underline{J} = \Delta \underline{P} = \underline{P}_{fin} - \underline{P}_i$$

Quindi $J_x = -m v_{cx} = 196 \text{ N}\cdot\text{s}$

$$J_z = -m v_{cz} = 878 \text{ N}\cdot\text{s}$$

ESERCIZIO n° 2



(asse z "uscite")

Punto n° 1

Scriviamo le equazioni di moto della carrucola e delle masse.

- Pulegge $\rightarrow$ consideriamo il moto di rotazione e la variazione del momento angolare.

Il sistema si muove sul piano verticale xy , i momenti delle forze e il momento angolare hanno componenti solo sull'asse z .

Anche se sono vettori, considero solo le componenti lungo l'asse z (perpendicolare al foglio, direzione "uscite").

$$I \alpha = T_1 R - T_2 R$$

$\uparrow$ I momento d'inerzia della pulegge

$$\left[\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} M R^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot (2R)^2 = \\ &= \frac{1}{2} M R^2 + 4 M R^2 = \frac{9}{2} M R^2 \\ &= 2.25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned} \right]$$

Per le masse m_1 ed m_2 , consideriamo il moto in direzione y ,

$$m_1 a_1 = T_1 - m_1 g$$

$$m_2 a_2 = T_2 - m_2 g$$

(Quindi, considero le componenti tensione delle forze e delle accelerazioni in direzione y)

Dato che le funi sono inestensibili, risulta

$$a_1 = -\alpha R$$

$$a_2 = \alpha R$$

⚠ (Attenzione ai segni! se α è positivo, cioè la pulegge ruota in senso orario, a_1 è negativo e a_2 è positivo)

Stiamo studiando il caso in cui $\alpha = 0$, quindi anche $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$.

Sostituendo nelle equazioni di moto delle masse si ottiene

$$T_1 = m_1 g \quad T_2 = m_2 g$$

E sostituendo nell'equazione di moto della puleggia si ottiene

$$0 = m_1 g R - 2m_2 g R$$

Da cui si ricava che

$$m_2 = m_1/2 = 5 \text{ kg}$$

Punto n° 2 Se raddoppio le masse m_2 , ottengo

$$m_2 = 2 \frac{m_1}{2} = m_1 = 10 \text{ kg}$$

Analizziamo la dinamica del sistema con le equazioni introdotte in precedenza

$$I\alpha = T_1 R - 2T_2 R$$

$$m_1 a_1 = T_1 - m_1 g$$

$$m_2 a_2 = T_2 - m_2 g$$

Dato che il filo è inestensibile, risulta; ancora

$$a_1 = -\alpha R$$

$$a_2 = 2\alpha R$$

$$I\alpha = T_1 R - 2T_2 R$$

$$-m_1 \alpha R = T_1 - m_1 g$$

$$2m_2 \alpha R = T_2 - m_2 g$$

(1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Sistema di 3} \\ \text{equazioni in 3} \\ \text{incognite: } \alpha, T_1 \text{ e} \\ T_2 \rightarrow \text{Risolvo} \end{array} \right.$

Moltiplico la seconda per R e la terza per $2R$

$$I\alpha = T_1 R - 2T_2 R$$

$$+ m_1 \alpha R^2 = -T_1 R + m_1 g R$$

$$4m_2 \alpha R^2 = 2T_2 R - 2m_2 g R$$

Sommo le tre equazioni membro a membro

$$(I + m_1 R^2 + 4m_2 R^2) \alpha = -m_1 g R$$

$$\alpha = - \frac{m_1 g R}{I + m_1 R^2 + 4m_2 R^2}$$

$$= - \frac{m_1 g R}{I + 5m_1 R^2} = -3.33 \text{ rad/s}^2$$

il segno negativo, per come è stato scelto il sistema di riferimento, significa che la rotazione è in senso orario

Le accelerazioni delle masse sono

$$a_1 = -\alpha R = 1.66 \text{ m/s}^2$$

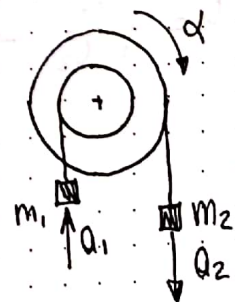
$$a_2 = 2\alpha R = -3.32 \text{ m/s}^2$$

Controlliamo i segni

α negativo, la rotazione è in senso orario

a_1 è positivo, m_1 sale

a_2 è negativo, m_2 scende



Punto n° 3

Calcoliamo la tensione

$$T_1 = m_1 (a_1 + g) = 114.73 \text{ N}$$

$$T_2 = m_1 (a_2 + g) = 61.85 \text{ N}$$

Punto n° 4

Se la fune si stacca di una quantità l , significa che la massa m_2 è scesa alla stessa quantità.

Il moto di m_2 è accelerato con accelerazione a_2 , e velocità iniziale nulla.

$$y_2(t) = y_2(0) + v_2(0)t + \frac{1}{2} a_2 t^2$$

$$-l = \frac{1}{2} a_2 t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a_2}} = 2.455$$