

**Esercizio n. 1**

Un recipiente cilindrico chiuso contiene 10 kg di acqua in transizione di fase alle condizioni di pressione di 1 atm. Il recipiente è costituito da pareti adiabatiche al netto di due finestre quadrate di 20 cm di lato in materiale diatermico di seguito descritte: (i) una finestra in acciaio ( $\lambda=50\text{W/mK}$ ) di 10 cm di spessore in contatto termico con un serbatoio termico a  $300^\circ\text{C}$  (ii) una finestra in alluminio ( $\lambda=200\text{W/mK}$ ) di 20 cm di spessore in contatto termico con un serbatoio termico a  $50^\circ\text{C}$ . Il recipiente è dotato inoltre di una superficie mobile ideale (assenza di attriti) adiabatica, che è possibile rappresentare priva di peso, atta a garantire il mantenimento in condizioni costanti della pressione del fluido. All'interno del recipiente è inoltre collocato un agitatore ad elica di potenza pari a 2kW. Tenendo conto che all'inizio della trasformazione l'acqua si trovi allo stato di liquido saturo:

- ipotizzando che la superficie mobile si trovi in contatto con aria atmosferica si indichi il valore di pressione di suddetta aria;
- si calcoli il tempo necessario affinché si abbia il completamento della transizione di fase del liquido saturo
- si calcoli la variazione di Entropia subita dal fluido nella trasformazione di cui al punto 2

| P     | T                    | $h_{ls}$              | $h_{vs}$             | $u_{ls}$ | $u_{vs}$ |
|-------|----------------------|-----------------------|----------------------|----------|----------|
| (atm) | ( $^\circ\text{C}$ ) | (kJ/kg)               | (kJ/kg)              | (kJ/kg)  | (kJ/kg)  |
| 1     | 100,00               | 419,1                 | 2676,0               | 419,0    | 2506,5   |
| P     | T                    | $v_{ls}$              | $v_{vs}$             | $s_{ls}$ | $s_{vs}$ |
| (atm) | ( $^\circ\text{C}$ ) | (m <sup>3</sup> /kgK) | (m <sup>3</sup> /kg) | (kJ/kgK) | (kJ/kgK) |
| 1     | 100,00               | 0,001043              | 1,6730               | 1,3027   | 7,3598   |

**Esercizio n. 1**

Due punti materiali di uguale massa  $m = 1.5\text{ kg}$  si trovano alle estremità opposte di un piano inclinato di un angolo  $\theta = \pi/4$  rad rispetto all'orizzontale, ad una distanza  $l_0 = 1.5\text{ m}$  tra loro. In un determinato istante  $t = 0$ , il punto posto nella posizione più in alto viene lasciato libero di scivolare lungo il piano a partire da una velocità nulla, mentre quello più in basso è lanciato verso l'alto con una velocità iniziale  $v_0 = 2\text{ m/s}$  con direzione parallela al piano inclinato [si assuma  $g = 9.81\text{ m/s}^2$ ].

- Determinare dopo quanto tempo i due punti si incontrano, a che distanza dalle rispettive posizioni iniziali e con quali velocità.
- L'urto tra i due punti è perfettamente anelastico. Studiare il moto dei due punti dopo l'urto, calcolare l'energia cinetica dissipata durante l'urto.
- Vengono ripetuti in seguito lanci successivi, in cui la velocità iniziale del punto più in alto è sempre nulla, mentre quella del punto in basso è fatta variare. Per quali valori di  $v_0$  i punti effettivamente urtano tra loro in un punto lungo il piano inclinato? Esistono dei valori di  $v_0$  per i quali l'urto non avviene?
- Risolvere il punto 1. Supponendo che tra i punti materiali e il piano inclinato sia presente attrito, caratterizzato da un coefficiente di attrito dinamico  $\mu_d = 0.2$ .

**Esercizio n. 2**

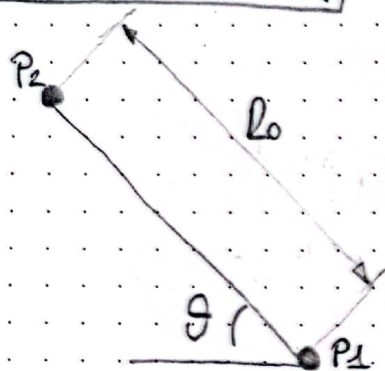
Una sfera di massa di raggio  $R = 4\text{ cm}$ , omogenea, costituita da un materiale avente densità  $\rho = 1400\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , scende rotolando su un piano inclinato di un angolo  $\theta = \frac{\pi}{6}\text{ rad}$ .

- Se la sfera parte da un punto posto alla quota  $z = 1\text{ m}$ , quanto valgono la velocità del suo centro di massa e la velocità angolare quando raggiunge la quota  $z = 0\text{ m}$ ?
- Qual è il minimo valore del coefficiente di attrito statico affinché sia possibile il moto di puro rotolamento?
- Calcolare il modulo, la direzione e il verso della reazione vincolare del piano inclinato durante il moto.
- Qual è l'accelerazione angolare della sfera quando raggiunge la quota  $z = 0\text{ m}$ ?

[si ricorda che il momento di inerzia di una sfera rispetto a un generico asse passante per il suo centro vale  $I = \frac{2}{5}mR^2$ , si assuma  $g = 9.81\text{ m/s}^2$ ]

SVOLGIMENTO COMMENTATO  
DEL COMPITO DI FISICA 1 DEL 5/11/2021  
- PARTE DI MECCANICA -

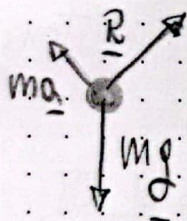
ESERCIZIO n° 2



Moto del punto  $P_1$

$$\underline{F} = m\underline{a}$$

$$m\underline{g} + \underline{R} = m\underline{a}$$



Considerando le componenti  
nelle direzioni parallele e perpendicolare  
al piano si ha

$$\begin{cases} ma = -mg \sin \theta \\ R + mg \cos \theta = 0 \end{cases}$$

de cui si ottiene  
 $a = g \sin \theta$

→ il punto  $P_1$  si muove con moto  
uniformemente accelerato con accelera-  
zione  $a_1 = -g \sin \theta$

→ velocità  $v_1 = +v_0 - g \sin \theta t$

→ spostamento  $s_1(t) = v_0 t - g \sin \theta \frac{t^2}{2}$

Per il punto  $P_2$ , analogamente, risulta

$$a_2 = a_1 = -g \sin \theta$$

$$v_2(t) = -g \sin \theta t$$

$$s_2(t) = l_0 - \frac{g \sin \theta t^2}{2}$$

I due punti  $P_1$  e  $P_2$  si incontrano quando  
 $s_1(t) = s_2(t)$

Quindi

$$v_0 t - g \sin \theta \frac{t^2}{2} = l_0 - g \sin \theta \frac{t^2}{2}$$

Sviluppando l'equazione si ottiene

$$v_0 t - l_0 = 0$$

Risolvendo l'equazione nell'incognita  $t$  troviamo dopo quanto tempo dall'istante iniziale i due punti si incontrano

$$\textcircled{1} \quad t_i = \frac{l_0}{v_0} = 0.55$$

⚠ Attenzione - nel testo del compito era indicato  $v_0 = 2 \text{ m/s}$  ma era un errore di battitura, il valore corretto era  $3 \text{ m/s}$

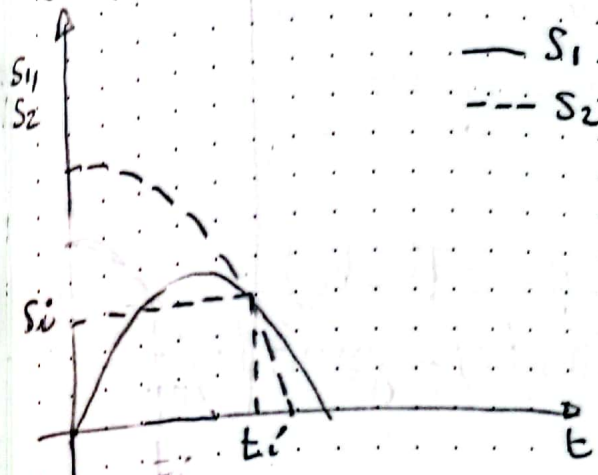
A questo punto, la posizione in cui i due punti si incontrano la passo traso

$$s_1 = s_2(t_i) = s_2(t_i) = l_0 - g \sin \theta \frac{t_i^2}{2}$$

$$s_i = 0.632 \text{ m} \quad \textcircled{1}$$

⚠ Sviluppando il calcolo con  $v_0 = 2 \text{ m/s}$  ottengo un valore negativo  $\rightarrow$  i punti non si incontrano sul piano

Graficamente



⚠ questa parte non era richiesta nel compito, era solo per spiegare

Calcoliamo le velocità con cui si incontrano

$$v_1 = v_0 - g \sin \theta t_i = -0.46 \text{ m/s}$$

$$v_2 = -g \sin \theta t_i = -3.46 \text{ m/s} \quad \textcircled{1}$$

Studiamo l'urto

- la quantità di moto si conserva
- l'urto è perfettamente anelastico, dopo l'urto i punti hanno la stessa velocità

$$m v_1 + m v_2 = 2m v_{12}$$

$$v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{2} = -1.968 \text{ m/s} \quad \textcircled{2}$$

Dopo l'urto i due punti si muovono insieme, dalla posizione  $s_i$ , con velocità  $v_{12}$  e accelerazione  $-g \sin \theta$

$$\textcircled{2} \begin{cases} a_{12} = -g \sin \theta \\ v(t) = v_{12} - g \sin \theta (t - t_i) \\ s(t) = s_i - v_{12}(t - t_i) - \frac{g \sin \theta (t - t_i)^2}{2} \end{cases}$$

Calcoliamo l'energia cinetica dissipata durante l'urto

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 = 9.195 \text{ J}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot v_{12}^2 = 5.81 \text{ J}$$

$$\textcircled{2} \boxed{\Delta E_k = E_{kin} - E_{kin} = -3.375 \text{ J}}$$

Per verificare per quali valori di  $v_0$  può avvenire l'urto, riprendiamo le espressioni di  $t_i$  e  $s_i$

$$t_i = l_0 / v_0$$

$$s_i = l_0 - \frac{g \sin \theta t_i^2}{2}$$

Scriviamo  $s_i$  in funzione di  $v_0$

$$s_i = l_0 - \frac{g \sin \theta l_0^2}{2 v_0^2}$$

Affinché l'urto possa avvenire lungo il piano è necessario che

$$0 \leq s_i \leq l_0$$

sicuramente  $s_i \leq l_0$  (basta osservare le due espressioni)

Quindi studiamo per quali valori di  $v_0$  risulta  $s_i \geq 0$

$$l_0 - \frac{g \sin \theta l_0^2}{2 v_0^2} \geq 0$$

(moltiplico per  $v_0^2$  e divido per  $l_0$ )

$$v_0^2 - \frac{g \sin \theta l_0}{2} \geq 0$$

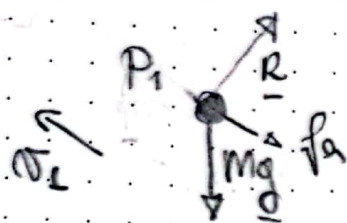
$$v_0^2 \geq \frac{g \sin \theta l_0}{2}$$

(per questo con  $v_0 = 2 \text{ m/s}$  il punto ha due soluzioni negative)

$$\textcircled{3} \boxed{\begin{aligned} v_0 &\geq \sqrt{\frac{g \sin \theta l_0}{2}} \\ v_{0 \min} &= \sqrt{\frac{g \sin \theta l_0}{2}} = 2.28 \text{ m/s} \end{aligned}}$$

movimento di moto dei due punti in presenza di attrito

$$F = ma$$



Punto  $P_1$ : finché la sua velocità è positiva

→ in direzione perpendicolare al piano

$$R - mg \cos \theta = 0$$

$$R = mg \cos \theta$$

→ in direzione parallela al piano

$$ma_1 = -mg \sin \theta - \mu_s R$$

$$a_1 = -g \sin \theta - \mu_s g \cos \theta$$

Quando  $P_1$  inizia a scendere le forze di attrito cambiano segno

$$a_1 = -g \sin \theta + \mu_s g \cos \theta$$

Il punto  $P_2$  scende, quindi  $v_2 < 0$  e la sua accelerazione è quindi

$$a_2 = -g \sin \theta + \mu_s g \cos \theta$$

Velocità

Punto  $P_1$ , fase iniziale del moto (salito)

$$\begin{aligned} v_{1s} &= v_0 + a_{1s} t \\ s_{1s} &= v_0 t + a_{1s} \frac{t^2}{2} \end{aligned} \quad \left( \begin{array}{l} \text{per } t_s = v_0 / a_{1s} \\ \text{il moto si inverte} \end{array} \right)$$

$$s_{\text{top}} = v_0 t_s - a_{1s} \frac{t_s^2}{2}$$

Fase successiva, discesa

$$v_{1d} = +a_{1d} (t - t_s)$$

$$s_{1d} = s_{\text{top}} + a_{1d} \frac{(t - t_s)^2}{2}$$

Il punto  $P_2$  scende durante tutto il moto

$$v_2 = +a_2 t$$

$$s_2 = l_0 + a_2 \frac{t^2}{2}$$

L'urto avviene quando

$$s_{1d} = s_2$$

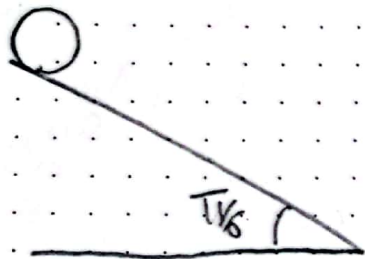
$$l_0 + a_2 \frac{t^2}{2} = s_{\text{top}} + a_{1d} \frac{(t - t_s)^2}{2}$$

( $a_{1d} = a_2$ )

$$l_0 + a_2 \frac{t^2}{2} = s_{\text{top}} + \cancel{a_2 \frac{t^2}{2}} - \cancel{a_2 \frac{t_s^2}{2}} + a_2 t t_s$$

... Risolvendo calcolo il tempo  $t_i$  in cui si incontrano...

### ESERCIZIO n°3



Proprietà inerziali delle sfere-

$$m = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 0.375 \text{ kg}$$

$$I = \frac{2}{5} m R^2 = 2.402 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

La sfera parte da una quota  $z = 1 \text{ m}$  da ferma e scende rotolando lungo il piano inclinato.

- Energia meccanica nella configurazione di partenza

$$E_{pi} = mgz$$

$$E_{kf} = 0$$

→ La sfera parte da ferma

- Energia meccanica nella configurazione finale

$$E_{pf} = 0$$

$$E_{kf} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Se la sfera ha moto di puro rotolamento risulta

$$\omega = \frac{v}{R}, \quad v = \omega R$$

Possiamo scrivere quindi

$$E_{kf} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{R^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left( m + \frac{I}{R^2} \right) v^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left( m + \frac{2}{5} m \frac{R^2}{R^2} \right) v^2 =$$

$$= \frac{7}{10} m v^2$$

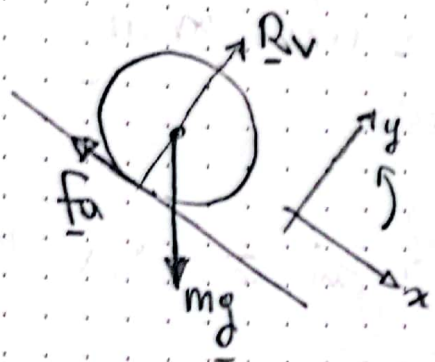
Per la conservazione dell'energia meccanica risulta

$$m g z = \frac{7}{10} m v^2$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{7} g z} = 3.76 \text{ m/s}$$

$$\textcircled{1} \quad \omega = \frac{v}{R} = 93.6 \text{ rad/s}$$

Analizziamo il moto di rotolamento



Equazioni di moto

→ direzione perpendicolare al piano

$$R_v - mg \cos \theta = 0$$

$$\rightarrow R_v = mg \cos \theta$$

→ direzione parallela al piano

$$ma = + mg \sin \theta - f_a$$

(ho scelto come positivo il verso della "discesa")

→ Rotazione (asse perpendicolare al piano)

$$I \alpha = - f_a R$$

Se il moto è di puro rotolamento  
 $\alpha = -\frac{a}{R}$  (osservare i <sup>versi degli</sup> assi del sistema di riferimento)

$$I \frac{a}{R} = - f_a R$$

sviluppo le equazioni per calcolare a ed  $f_a$

$$ma = mg \sin \theta - f_a$$

$$+ \frac{I}{R^2} a = + f_a$$

$$\rightarrow \left(m + \frac{I}{R^2}\right) a = mg \sin \theta$$

$$\rightarrow a = \frac{mg \sin \theta}{m + \frac{I}{R^2}}$$

$$\rightarrow f_a = \frac{I}{R^2} a = \frac{I}{R^2} \frac{mg \sin \theta}{m + \frac{I}{R^2}}$$

Il valore limite di  $f_a$  si ha quando

$$f_a = \mu_s R_v = \mu_s mg \cos \theta$$

Solitico

$$\mu_s mg \cos \theta = \frac{I}{R^2} \frac{mg \sin \theta}{m + \frac{I}{R^2}}$$

$$\rightarrow \mu_s = \frac{I \tan \theta}{R^2 m + \frac{I}{R^2}} = 0.165 \quad (2)$$

La reazione vincolare del piano ha una componente normale al piano

$$R_v = mg \cos \theta = 3.19 \text{ N}$$

e una componente parallela al piano

$$f_a = \frac{I}{R^2} a = \frac{I}{R^2} \frac{mg \sin \theta}{m + \frac{I}{R^2}} = 0.526 \text{ N}$$

Il modulo vale

$$F_v = \sqrt{R_v^2 + f_a^2} = 3.23 \text{ N} \quad (3)$$

L'accelerazione angolare delle sfere

è costante durante il moto e vale

$$\alpha = -\frac{a}{R} = -\frac{mg \sin \theta}{R(m + \frac{I}{R^2})} = -87.5 \text{ rad/s}^2$$

ossia mentre l'accelerazione del centro di massa vale

$$a = 3.50 \text{ m/s}^2$$