

## Appello scritto 24 febbraio 2022

### Esercizio n. 1

Si consideri un flusso di acqua pari a  $2,5 \text{ kg/s}$  che si trova in condizioni di liquido saturo e alla pressione di 5 bar (stato 1). Tale flusso passa entro un condotto di un sistema nel quale subisce un incremento di pressione ad opera di una pompa avente potenza pari a  $1.900 \text{ W}$  ed un trasferimento di calore sino a raggiungere complessivamente lo stato di liquido saturo a 10 bar di pressione (stato 2). Si determinino:

- la potenza termica che si rende necessario trasferire in condizioni di regime stazionario affinché si realizzi concretamente questa trasformazione, considerando trascurabili sia la variazione di quota del fluido che la sua velocità
- tenendo conto che, successivamente, il fluido subisce un processo di laminazione con perdita di pressione fino alle condizioni di 1 bar (stato 3), si definisca lo stato fisico finale del fluido
- tenuto conto che il trasferimento di calore precedentemente individuato avviene attraverso una superficie diatermica di dimensioni pari a complessivi  $5 \text{ m}^2$  e spessore pari a  $2 \text{ cm}$  che pone in contatto termico il fluido con una sorgente avente una differenza di temperatura rispetto al fluido stesso di  $50^\circ\text{C}$ , si individui il materiale della superficie diatermica attraverso il suo coefficiente di conducibilità

| P     | T                    | $h_{ls}$ | $h_{vs}$ | $u_{ls}$ | $u_{vs}$ |
|-------|----------------------|----------|----------|----------|----------|
| (bar) | ( $^\circ\text{C}$ ) | (kJ/kg)  | (kJ/kg)  | (kJ/kg)  | (kJ/kg)  |
| 1     | 99,63                | 417,33   | 2673,8   | 417,23   | 2504,4   |
| 5     | 151,85               | 639,9    | 2746,8   | 639,4    | 2559,5   |
| 10    | 179,88               | 762,2    | 2777,5   | 761,1    | 2583,1   |

### Esercizio n. 2

Due dischi cilindrici raggio  $R$  e lunghezza  $L$ , costituiti da due materiali diversi di densità  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , rispettivamente, sono collegati tra loro con una fune ideale, inestensibile e di massa trascurabile, in corrispondenza del loro asse di simmetria. I due dischi sono posizionati su un piano orizzontale, tra la superficie del disco e quella dei cilindri il coefficiente di attrito statico vale  $\mu_s$ . A partire da una configurazione iniziale in cui i dischi sono allineati tra loro e la fune è perfettamente stesa con tensione nulla, al disco più leggero è applicata una forza  $F$  con direzione orizzontale e perpendicolare all'asse dei dischi e modulo variabile nel tempo con una legge lineare  $F = \beta t$

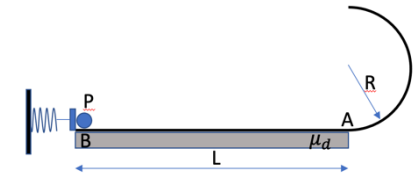
- Calcolare le accelerazioni dei centri di massa e le accelerazioni dei dischi dopo un tempo  $t_1$  dall'applicazione della forza.
- Dopo quanto tempo dall'applicazione della forza i due dischi smettono di avere un moto di puro rotolamento e iniziano a slittare (perdita di aderenza)?

- Calcolare la distanza percorsa dal primo disco, la velocità del suo centro di massa e la velocità angolare nell'istante in cui viene raggiunto il limite di aderenza.
- Calcolare l'energia cinetica del sistema nella configurazione precedente.

[valori numerici:  $R = 5 \text{ cm}$ ,  $L = 1 \text{ cm}$ ,  $\rho_1 = 1500 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_2 = 3000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ,  $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ,  $\mu_s = 0.7$ ,  $\beta = 1 \text{ N/s}$ ,  $t_1 = 2 \text{ s}$ ]

### Esercizio n. 3

Un punto materiale  $P$  di massa  $m$  viene lanciato tramite una molla con costante elastica  $k$  lungo una guida che ha un tratto iniziale rettilineo orizzontale di lunghezza  $L$ , seguito da un tratto semicircolare di raggio  $R$  su un piano verticale come indicato in figura. Il tratto orizzontale è scabro, con coefficiente di attrito dinamico  $\mu_d$ , nel tratto circolare e nel tratto in cui la molla viene compressa l'attrito è trascurabile.

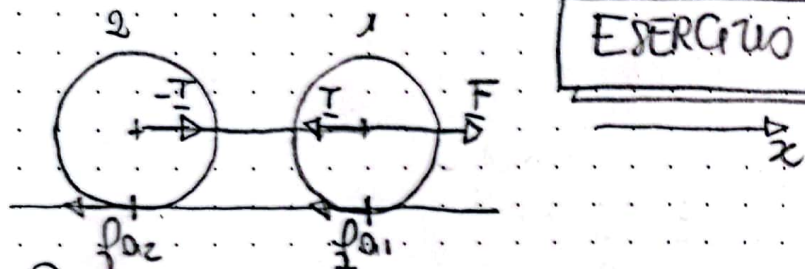


- Calcolare il valore minimo della compressione della molla  $x_{m1}$  affinché il punto materiale riesca a raggiungere la sommità della guida, supponendo che la guida sia in grado di esercitare una reazione normale con entrambi i versi (vincolo bilaterale).
- Calcolare il valore minimo della compressione della molla  $x_{m2}$  affinché il punto materiale riesca a raggiungere la sommità della guida, supponendo che la guida sia in grado di esercitare una reazione normale solo in direzione uscente - centripeta (vincolo unilaterale).
- Calcolare la distanza da A del punto di atterraggio di P quando viene lanciato con una compressione della molla  $x_{m2}$ .
- Calcolare il valore della compressione della molla affinché il punto P dopo il lancio atterri in corrispondenza del punto B.
- All'atterraggio, l'urto del punto contro il piano è perfettamente anelastico e avviene in un tempo  $\Delta t$ . Calcolare il valore medio della forza che si genera tra il punto P e il piano durante l'urto e l'energia cinetica dissipata.

[Valori numerici:  $m = 0.05 \text{ kg}$ ,  $L = 1 \text{ m}$ ,  $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ ,  $R = 20 \text{ cm}$ ,  $k = 1000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ,  $\mu_d = 0.1$ ,  $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ]

# SVOLGIMENTO COMMENTATO DEL COMPITO DI FISICA 1 DEL 24/02/2022

## ESERCIZIO N° 2



### PROPRIETÀ INERZIALI DEI DISCHI

- MASSA

$$m_1 = \rho_1 \pi R^2 L = 0.12 \text{ kg}$$

$$m_2 = \rho_2 \pi R^2 L = 0.24 \text{ kg}$$

- MOMENTI D'INERZIA RISPETTO AGLI ASSI DI SIMMETRIA

$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2 = 1.47 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} m_2 R^2 = 2.95 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

### Equazioni di moto

- Rispetto all'asse x

$$m_1 a_1 = F - T - f_{a1}$$

$$m_2 a_2 = T - f_{a2}$$

- Rotazione intorno all'asse z (perpend. al piano del disegno)

$$I_1 \alpha_1 = -f_{a1} R$$

$$I_2 \alpha_2 = -f_{a2} R$$

Dato che il verso positivo di z è "uscite"

Considerazioni di cinematiche

- dato che il filo è inestensibile

$$a_1 = a_2 = a$$

- in condizioni di puro rotolamento

$$\alpha_1 = -\frac{a_1}{R} = -\frac{a}{R} \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = -\frac{a}{R}$$

$$\alpha_2 = -\frac{a_2}{R} = -\frac{a}{R}$$

Utilizzo questi risultati nelle equazioni di moto

$$(1) \quad m_1 a = F - T - f_{a1}$$

$$(2) \quad m_2 a = T - f_{a2}$$

$$(3) \quad I_1 \frac{a}{R} = f_{a1} R$$

$$(4) \quad I_2 \frac{a}{R} = f_{a2} R$$

Da queste quattro equazioni calcolo  $a, T, f_{a1}, f_{a2}$

- Ricevo  $f_{a1}$ ,  $f_{a2}$  dalle (3) e dalle (4)

$$f_{a1} = \frac{I_1 a}{R^2}, \quad f_{a2} = \frac{I_2 a}{R^2}$$

- Sommo membro a membro le (4) e le (2)

$$(m_1 + m_2) a = F - f_{a1} - f_{a2}$$

- Sostituisco le espressioni di  $f_{a1}$  ed  $f_{a2}$

$$(m_1 + m_2) a = F - \frac{I_1 a}{R^2} + \frac{I_2 a}{R^2}$$

- risolvo per calcolare  $a$

$$\left( m_1 + m_2 + \frac{I_1}{R^2} + \frac{I_2}{R^2} \right) a = F$$

(verifica dimensionale  $I \rightarrow \text{kgm}^2$   
 $I/R^2 \rightarrow \text{kg}$ , le dimensioni dei termini  
 nelle parentesi sono coerenti)

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + \frac{I_1}{R^2} + \frac{I_2}{R^2}} = \frac{F}{m_2}$$

$$\text{con } m_r = m_1 + m_2 + \frac{I_1}{R^2} + \frac{I_2}{R^2}$$

Per  $t_1 = 25$  Risolte

$$F = \beta t_1 = 2 \text{ N}$$

Da cui risolte

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 = a_2 = a &= 3.77 \text{ m/s}^2 \\ \alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{a}{R} &= -75.6 \text{ rad/s}^2 \end{aligned}} \quad (1)$$

Una volta calcolata  $a$ , posso ricavare  $f_{a1}$  ed  $f_{a2}$

$$f_{a1} = \frac{I_1 a}{R^2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 R^2 a}{R^2} = \frac{1}{2} m_1 a$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_r} F$$

$$f_{a2} = \frac{I_2 a}{R^2} = \frac{\frac{1}{2} m_2 R^2 a}{R^2} = \frac{1}{2} m_2 a = \frac{1}{2} \frac{m_2}{m_r} F$$

Le condizioni di rotolamento sono possibili

se

$$f_{a1} \leq \mu_s m_1 g$$

$$f_{a2} \leq \mu_s m_2 g$$

Sviluppiamo queste disuguaglianze usando i risultati trovati in precedenza

$$\frac{1}{2} \frac{m_1}{m_r} F \leq \mu_s m_1 g$$

$$\frac{1}{2} \frac{m_2}{m_r} F \leq \mu_s m_2 g$$

Semplificando, ottengo per entrambi la condizione

$$\frac{1}{2} F \leq \mu_s g$$

Da cui posso ricavare

$$F \leq 2\mu_s m_r g$$

Ricordando che  $F = \beta t$  ottengo

$$\beta t \leq 2\mu_s m_r g$$

Le condizioni di puro rotolamento sono quindi possibili nell'intervallo  $t < t_2$  con

$$t_2 = \frac{2\mu_s m_r g}{\beta} = 7.28 \text{ s} \quad (2)$$

→ Verifica: calcoliamo  $f_{a1}$  ed  $f_{a2}$  in queste condizioni

$$f_{a1} = \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_r} \beta t_2 = 0.809 \text{ N}$$

$$f_{a2} = \frac{1}{2} \frac{m_2}{m_r} \beta t_2 = 1.62 \text{ N}$$

mentre i valori limite sono

$$f_{a1\text{lim}} = \mu_s m_1 g = 0.809 \text{ N}$$

$$f_{a2\text{lim}} = \mu_s m_2 g = 1.62 \text{ N}$$

la verifica è soddisfatta

Studio del moto nella fase di rotolamento

$$a = \frac{F}{m_r} = \frac{\beta t}{m_r}$$

Integriamo nel tempo (supponendo le velocità iniziali nulle)

$$v(t) = \int_0^t a dt = \int_0^t \frac{\beta t}{m_r} dt = \frac{\beta t^2}{2m_r}$$

per  $t = t_2$  risulta

$$v_1(t_2) = v_2(t_2) = \frac{\beta t_2^2}{2m_r} = 50 \text{ m/s} \quad (3)$$

Integriamo ancora rispetto al tempo per calcolare lo spazio percorso

$$x(t) = \int_0^t v dt = \int_0^t \frac{\beta t^2}{2m_r} dt = \frac{\beta t^3}{6m_r}$$

Per  $t = t_2$  risulta

$$x(t_r) = \frac{\beta t_r^3}{6 m_r} = 121.34 \text{ m} \quad (3)$$

L'energia cinetica del sistema risulta

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2$$

in condizioni di rotolamento  
risultato

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{v_1}{R} = \frac{v_2}{R} = \frac{v}{R}$$

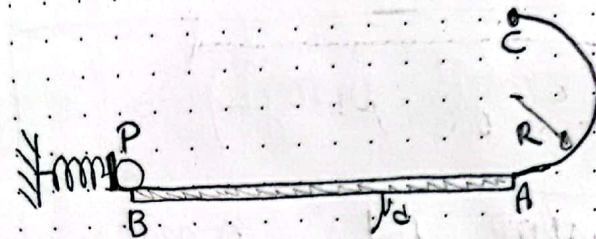
Sostituendo otteniamo

$$E_k = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + I_1/R^2 + I_2/R^2) v^2 = \frac{1}{2} m_r v^2$$

Al tempo  $t_r$  risulta

$$E_k = \frac{1}{2} m_r v_r^2 = 662.6 \text{ J}$$

### ESERCIZIO N° 3



Per poter raggiungere il punto C, l'energia potenziale della molla deve compensare il lavoro dissipato per attrito nel tratto orizzontale e l'energia potenziale della forza peso.

→ Configurazione iniziale

$$E_p = \frac{1}{2} k x_i^2$$

$$E_k = 0$$

→ Configurazione finale

$$E_p = m g \cdot 2R$$

$$E_k = 0 \quad (\text{sto cercando il valore limite})$$

→ Lavoro dissipato per attrito

$$L_a = -\mu_s m g L$$

bilancio energie meccanica

$$\frac{1}{2} k x_1^2 = 2 m g R + \mu_0 m g L$$

①

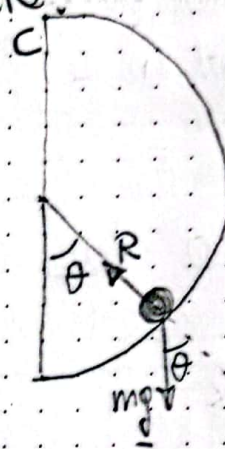
$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{k} (2 m g R + \mu_0 m g L)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{k} m g (2 R + \mu_0 L)} = 0.0221 \text{ m}$$

Se il vincolo delle guide è unilaterale, le variazioni vincolari deve essere, lungo il tratto circolare, direzione centripeta, in altri termini il vincolo non può impedire che il punto si allontani. Dobbiamo quindi valutare le variazioni vincolari lungo le guide e assicurarsi che nel punto C sia diretta verso il centro della circonferenza.

In un punto generico delle guide, identificato dall'angolo  $\theta$  indicato nello schema, applicando la seconda legge

di Newton e considerando la componente centripeta delle forze e delle accelerazioni, risulta



$$M a_n = R - m g \cos \theta$$

$a_n$  è la componente normale dell'accelerazione, che ricordiamo essere pari a

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

quindi  $R = m a_n + m g \cos \theta = m \frac{v^2}{R} + m g \cos \theta$   
Affinché il punto rimanga in contatto con la guida deve risultare  $R > 0$   
quindi

$$m \frac{v^2}{R} + m g \cos \theta \geq 0$$

in particolare, nel punto C risulta  $\theta = \pi$   
e quindi  $\cos(\pi) = -1$

$$m \frac{v^2}{R} - m g \geq 0$$

$$v^2 \geq gR \quad v \geq \sqrt{gR}$$

Il punto P deve essere nel punto C  
con una velocità maggiore del valore limite

$$v_c = \sqrt{gR}$$

Quindi la sua energia cinetica deve essere almeno pari a

$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{1}{2} mgR$$

Riprendiamo quindi il bilancio dell'energia meccanica in questa nuova configurazione

Configurazione iniziale

$$E_p = \frac{1}{2} k x_z^2$$

$$E_k = 0$$

Configurazione finale

$$E_p = 2mgR$$

$$E_k = \frac{1}{2} mgR$$

$$E_m = \frac{5}{2} mgR$$

Lavoro dissipato per attrito (lavoro delle forze non conservative)

$$L_a = -\mu_0 mgL$$

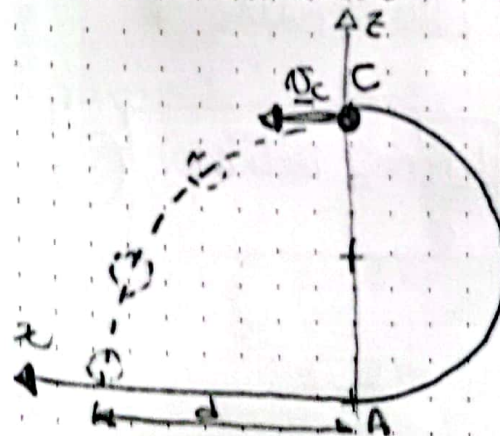
Del bilancio dell'energia meccanica risulta

$$\frac{1}{2} k x_z^2 = \frac{5}{2} mgR + \mu_0 mgL$$

Da cui ricaviamo

$$x_z = \sqrt{\frac{mg}{k} (5R + 2\mu_0 L)} = 0.0243 \text{ m} \quad (2)$$

Una volta arrivato nel punto C, P segue un moto di caduta libera con velocità iniziale  $v_c$  diretta orizzontalmente



per praticità fissiamo un sistema di riferimento con origine in A e assi  $x$  e  $z$  orientati come nella figura

Velocità

$$v_x = v_c$$

$$v_z = -gt$$

Posizione

$$x(t) = v_c t$$

$$z(t) = 2R - \frac{1}{2}gt^2$$

Il punto ottiene dopo un tempo  $t_c$  da quando è partito da C, tale che

$$0 = 2R - \frac{1}{2}gt_c^2$$

$$gt_c^2 = 4R$$

$$t_c = \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

e la distanza da A allo scivolo è quindi

$$d = v_c t_c = v_c \sqrt{\frac{4R}{g}} = 0.4 \text{ m} \quad (3)$$

moto uniformemente  
accelerato con accelerazione  $g$

Riprendendo il risaltello del punto precedente, la distanza tra il punto di caduta ed A per un valore generico della velocità di partenza da C vale

$$d(v) = v \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

se voglio che il punto ottenga in B devo imporre

$$L = v_B \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

Quindi il punto deve lasciare la guida con una velocità pari a

$$v_B = \sqrt{\frac{g}{4R}} L = 3.50 \text{ m/s}$$

Riprendendo il bilancio dell'energia meccanica, in questa configurazione

$$\frac{1}{2} k x_3^2 = 2mgR + \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$= 2mgR + \frac{1}{2} \frac{mg}{4R} L^2$$

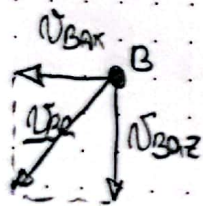
Da cui possiamo calcolare la compressione della molla

$$\textcircled{4} \quad x_3 = \sqrt{\frac{2mg(2R + \frac{L^2}{8R})}{k}} = 0.0317 \text{ m}$$

Calcoliamo la velocità del punto all'atterraggio in B,  $\underline{v}_{Ba}$

$$v_{Bax} = v_B = 3.50 \text{ m/s}$$

$$v_{Baz} = -gt_c = -2.80 \text{ m/s}$$



il tempo di caduta è lo stesso dato che la quota, e le componenti di vel. in direzione verticale e l'accelerazione sono le stesse

Le quantità di moto prima dell'urto vale quindi

$$\underline{p}_{Ba} = m \underline{v}_{Ba} = p_{Bax} \underline{i} + p_{Baz} \underline{k}$$

$$p_{Bax} = m v_{Bax} = 3.50 \text{ Ns}$$

$$p_{Baz} = m v_{Baz} = -2.80 \text{ Ns}$$

L'urto è perfettamente anelastico quindi

$$p_{By} = 0$$

Quindi per il teorema dell'impulso, l'impulso delle forze che agiscono sul punto materiale durante l'urto, vale

$$\underline{J} = \underline{p}_{By} - \underline{p}_{Ba}$$

Ricordando la definizione di impulso e di valore medio di una funzione, possiamo valutare il valore medio delle forze come

$$\underline{F} = \frac{1}{\Delta t} \underline{J}$$

Quindi risulta

$$F_x = -350 \text{ N}$$

$$F_z = 280 \text{ N}$$