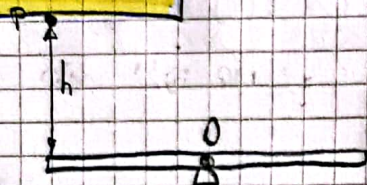


PARTE DI MECCANICA

ESERCIZIO n° 2 - SVOLGIMENTO COMMENTATO



1) CALCOLO DELL'ALTEZZA h DA CUI CADE IL PUNTO MATERIALE

- Il punto cade con velocità iniziale nulla a partire dall'altezza h

$$Mgh = \frac{1}{2} M v_0^2$$

$$v_0 = \sqrt{2gh} \quad (*)$$

↑
velocità al momento dell'impatto

- L'urto è completamente anelastico. Dopo l'urto il punto materiale e l'asta costituiscono un unico corpo rigido il cui momento d'inerzia rispetto a un asse passante per O e perpendicolare al piano del moto è

$$I_1 = \underbrace{\frac{1}{2} ML^2}_{\text{ASTA}} + \underbrace{M \left(\frac{L}{2}\right)^2}_{\text{PUNTO}} = \frac{3}{4} ML^2$$

Dopo l'urto, le componenti perpendicolari al piano del momento angolare calcolate rispetto ad O risultano

$$L_1 = I_1 \omega_1$$

mentre immediatamente prima dell'urto esso valeva

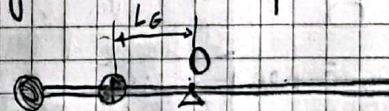
$$L_0 = M v_0 \frac{L}{2}$$

Rispetto al polo O, il momento angolare si conserva

$$L_1 = L_0$$

$$I_1 \omega_1 = M v_0 \frac{L}{2} \quad (*)$$

- Dopo l'urto il sistema è un pendolo composto il cui centro di massa G è definito in questo modo

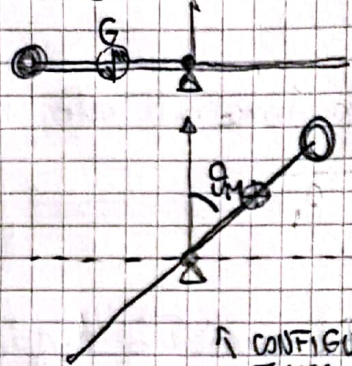


$$M \frac{L}{2} + M \cdot 0 = 2M LG$$

$$\rightarrow LG = \frac{L}{4}$$

e la cui massa è $2M$

CONFIGURAZIONE INIZIALE
(SUBITO DOPO L'URTO)



↑ CONFIGURAZIONE FINALE

→ CONFIGURAZIONE INIZIALE

- Energia cinetica

$$E_{k1} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$$

- Energia potenziale

$$E_{p1} = 0$$

→ CONFIGURAZIONE FINALE

$$E_{k2} = 0$$

$$E_{p2} = 2Mg \frac{L}{4} \cos \theta_m$$

NOTA
Il riferimento con cui definire l'energia potenziale è arbitrario, in questo caso prendiamo la conf. orizzontale dell'asta

Dalla conservazione dell'energia meccanica si ottiene
$$\frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = 2Mg \frac{L}{4} \cos \theta_m$$

Da cui ricaviamo

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{4MgL \cos \theta_m}{I_1}} = \\ &= \sqrt{\frac{MgL \cos \theta_m}{\frac{3}{4} ML^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{4}{3} \frac{g}{L} \cos \theta_m} \end{aligned}$$

Ricordando la relazione *1 della pagina precedente (conservazione del momento angolare calcolato rispetto ad O)

$$I_1 \omega_1 = I_O \omega_0$$

posso ricavare ω_0 in funzione di ω_1

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{2I_1}{I_O} \omega_1 = \frac{2 \cdot \frac{3}{4} ML^2}{ML^2} \omega_1 \\ &= \frac{3}{2} \omega_1 L \\ &= \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} \frac{g}{L} \cos \theta_m} \\ &= \sqrt{3 \frac{g}{L} \cos \theta_m} \end{aligned}$$

Ricordando infine la relazione tra la velocità v_0 e h definite nell'equazione

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

possiamo ricavare h in funzione di v_0 e sostituendo le espressioni trovate in precedenza possiamo trovare h

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{3gL \cos \theta}{2g} = \frac{3}{2} L \cos \theta$$

$$h = \frac{3}{2} L \cos \theta$$

2) QUANTITÀ DI MOTO e MOMENTO ANGOLARE DURANTE L'URTO

Calcoliamo il momento angolare, visto che lo abbiamo già discusso nel punto precedente

$$L_1 = I_1 \omega_1$$

$$L_0 = M v_0 \frac{L}{2}$$

Per quanto detto in precedenza

$$L_1 = L_0 \quad \text{quindi} \quad \Delta L = 0$$

Per quanto riguarda le quantità di moto

$$\underline{P}_0 = M \underline{v}_0$$

in modulo

$$P_0 = M v_0$$

direzione verticale discendente

$$\underline{P}_1 = 2M \underline{v}_G$$

$$\underline{v}_G = \frac{L}{4} \omega_1 \quad \text{direzione verticale discendente}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= 2M \frac{L}{4} \omega_1 \\ &= M \frac{L}{2} \omega_1 \end{aligned}$$

$$\Delta \underline{P} = \underline{P}_1 - \underline{P}_0 \quad \text{i vettori hanno la stessa direzione (verso il basso, componente y negativa)}$$

$$\Delta P = P_1 - P_0 = -M \frac{L}{2} \omega_1 + M v_0 =$$

$$= -\frac{L}{4} \frac{M L}{2} \omega_1 + \frac{M}{2} \frac{3}{2} \omega_1 L =$$

$$\Delta P = M L \omega_1$$

NOTA: si osserva quindi che le quantità di moto non si conservano. Ricordando il teorema dell'impulso otteniamo

$$J = \Delta p$$

Quindi l'impulso delle forze che si fermano a cause dell'urto è pari a

$$J = ML\omega_1 j$$

↳ diretto come l'asse y

③ ENERGIA CINETICA DISSIPATA DURANTE L'URTO

$$E_{k0} = \frac{1}{2} M V_0^2 \rightarrow \text{prima dell'urto}$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \rightarrow \text{dopo l'urto}$$

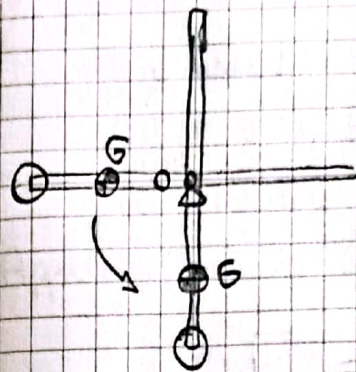
$$\Delta E_k = E_{k1} - E_{k0} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 - \frac{1}{2} M V_0^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} ML^2 \right) \omega_1^2 - \frac{1}{2} M \left(\frac{3}{2} \omega_1 L \right)^2 =$$

$$= \frac{3}{8} ML^2 \omega_1^2 - \frac{9}{8} ML^2$$

$$\Delta E_k = -\frac{2}{3} ML^2 \omega_1^2$$

④ ENERGIA CINETICA DEL SISTEMA QUANDO IL PENDOLO È IN CONFIGURAZIONE VERTICALE



SUBITO DOPO L'URTO ABBIAMO VISTO CHE

$$E_{k1} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$$

$$E_{p1} = 0$$

ATTENZIONE!
Ricordiamo che ^{la quota} Y ^{di riferimento} Y_{ref} per il calcolo dell'energia potenziale della forza peso è arbitrario, puoi poterla scegliere diversamente

[SCEGLIENDO LA CONFIG. ORIZZONTALE COME REF. PER IL CALCOLO DELL'ENERGIA POTENZIALE DELLA FORZA PESO]

NELLA CONFIGURAZIONE FINALE

$$E_{k2} = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 \quad (\text{INCOGNITA DEL PROBLEMA})$$

$$E_{p2} = -2Mg \frac{L}{4} = -Mg \frac{L}{2}$$

è negativo perché è "sotto" la quota che ho scelto come riferimento

Per la conservazione dell'energia meccanica
(non abbiamo elementi dissipativi)

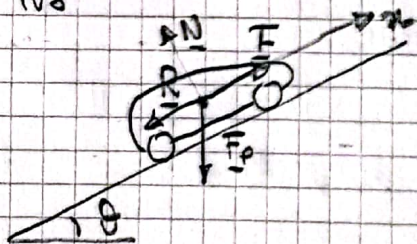
$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

Da cui otteniamo

$$\begin{aligned} E_{k2} &= E_{k1} + E_{p1} - E_{p2} = \\ &= \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + Mgl \frac{L}{2} \end{aligned}$$

ESERCIZIO n° 3 - SVOLGIMENTO COMMENTATO

1) POTENZA DEL MOTORE NEL TRATTO IN
SALITA CON MOTO UNIFORME A VELOCITÀ
 v_0



- sull'auto agiscono - forze motrici F
- forza peso F_p (direzione verticale discendente)
 - resistenza al moto R (direzione parallela al tracciato, verso opposto a quello del moto)

- reazione vincolare del tracciato N
(direzione perpendicolare al piano, le componenti dissipative e comprese in R)

Applichiamo la seconda legge della dinamica

$$M \underline{a} = \underline{F}_p + \underline{R} + \underline{N} + \underline{F}$$

Consideriamo le componenti dell'equazione
in direzione x

R ed F sono dirette come x

$$Ma = - \underbrace{Mg \sin \theta}_{\text{componente delle forze peso in direzione } x} - R + F$$

Se il moto è uniforme con velocità v_0

risulta

- $a = 0$ (uniforme $\rightarrow$ velocità costante $\rightarrow$ accelerazione nulla)

$$R = R_0 + k v_0^2$$

Sostituendo otteniamo

$$0 = -Mg \sin \theta - R_0 - k v_0^2 + F$$

da cui possiamo ricavare F

$$F = Mg \sin \theta + R_0 + k v_0^2$$

La potenza sviluppata dal motore è data da

$$P = F v_0 = (Mg \sin \theta + R_0 + k v_0^2) v_0$$

③ AL TERMINE DELLA SALITA, SE LA MACCHINA HA VELOCITÀ v_0 , RISULTA

$$M a = -R_0 + F - k v^2 = -R_0 + Mg \sin \theta - k v^2$$

$$= \underbrace{-R_0 + Mg \sin \theta}_{-R} + \underbrace{k v_0^2 + k v^2}_{F} =$$

$$= Mg \sin \theta$$

Da cui si ottiene

$$a = g \sin \theta$$

④ NEL TRATTO SUCCESSIVO MANTIENGO ACCELERAZIONE $a \rightarrow$ MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$v(t) = v_0 + at$$

la velocità aumenta linearmente nel tempo, il tempo necessario per raggiungere il limite

Neim è

$$v_{lim} = v_0 + at_a$$

$$t_a = \frac{v_{lim} - v_0}{a} = \frac{v_{lim} - v_0}{g \sin \theta}$$

distanza percorsa

$$d = v_0 t_a + \frac{1}{2} a t_a^2$$

Riprendiamo l'equazione di moto per il tratto orizzontale

$$M a = -R + F$$

obteniamo visto che

$$a = g \sin \theta$$

$$v = v_0 + at$$

$$R = R_0 + k v^2$$

sostituendo otteniamo

$$M a = -R_0 - k(v_0 + at)^2 + F$$

per mantenere l'accelerazione a la forza F deve essere regolata in questo modo

$$F = M a + R_0 + k(v_0 + at)^2$$

⑤ POTENZA SVILUPPATA DAL MOTORE IN FUNZIONE DEL TEMPO

$$P = F v = (M a + R_0 + k v_0^2 + 2k a t + k a^2 t^2) (v_0 + at)$$

(varia nel tempo secondo una legge di tipo polinomiale di terzo grado)