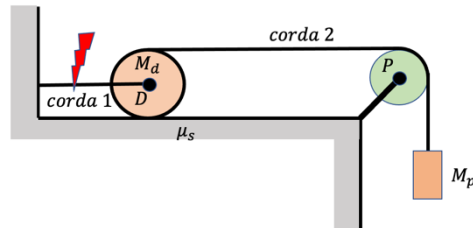


Esercizio 1



Un corpo cilindrico di massa M_d , raggio R_d e momento di inerzia (calcolato rispetto all'asse di simmetria del corpo) pari a I_d rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Sul corpo è

arrotolata una corda ideale (corda 2) che, attraverso una carrucola di massa e momento di inerzia trascurabili, sostiene una massa sospesa M_p . Nella fase iniziale, il disco è collegato ad una parete tramite un'altra corda (corda 1), fissata in un punto D dell'asse del cilindro.

1. Calcolare le tensioni delle due corde quando il sistema si trova in condizioni di equilibrio statico.
2. Calcolare il valore minimo del coefficiente di attrito statico nella configurazione analizzata nel punto 1.
3. In un determinato istante, la corda 1 viene tagliata, la massa inizia a scendere e il disco a rotolare sul piano. Calcolare l'accelerazione della massa sospesa e l'accelerazione angolare del disco.
4. Calcolare la velocità angolare del disco dopo che la massa è scesa di una quantità L a partire dalla configurazione iniziale.

[Valori numerici $M_d = 3 \text{ kg}$, $R_d = 0.1 \text{ m}$, $I_d = 0.015 \text{ kgm}^2$, $M_p = 2 \text{ kg}$, $L = 1.5 \text{ m}$, $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$]

Esercizio 2

Un pendolo semplice, costituito da una massa M_M fissata al soffitto tramite una fune ideale di lunghezza L , sta oscillando con ampiezza θ . In un istante in cui la massa del pendolo ha velocità massima, questa viene colpita da un corpo di massa M_p che viaggia con velocità v_p , avente direzione orizzontale e sullo stesso piano dell'oscillazione del pendolo, ma direzione opposta rispetto a quella della massa del pendolo. L'urto è perfettamente anelastico. Calcolare:

- L'ampiezza massima dell'oscillazione dopo l'urto.

- La variazione di energia cinetica durante l'urto e l'impulso delle forze interne scambiate tra i due corpi durante l'urto.
- La tensione massima nella fune durante le oscillazioni immediatamente prima e immediatamente dopo l'urto.
- Risolvere il primo punto supponendo l'urto perfettamente elastico.

[Valori numerici $M_M = 1 \text{ kg}$, $M_p = 0.1 \text{ kg}$, $L = 0.8 \text{ m}$, $\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$, $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $v_p = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$]

Esercizio 3

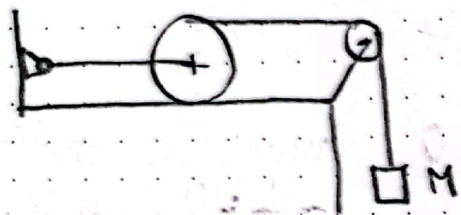
Un meccanismo è basato su un flusso di 0,5 kg/s di acqua a 10 bar di pressione in transizione di fase (titolo $x=0,5$). La sola componente vapore di tale flusso subisce una trasformazione (1-2) a causa di una superficie diatermica che mette in contatto il flusso stesso con un recipiente chiuso a parete mobile (di massa trascurabile) che contiene 5 kg di gas di cui sono noti il calore specifico ($c_p=1,005 \text{ kJ/kgK}$) e la massa molare ($MM=28,96 \text{ kg/kmol}$). Del recipiente si conosce che tutte le pareti (tranne quella in contatto con il flusso di acqua vapore) sono adiabatiche e che si trova in una atmosfera esterna avente pressione barometrica pari a 1 atm. Assimilando il gas ad un gas perfetto:

- I. si calcolino temperatura finale (T_f) e volume finale (V_f) del gas a partire da uno stato iniziale $T_i=100^\circ\text{C}$, considerando un tempo di trasformazione pari a 10 s, tempo durante il quale la potenza termica trasmessa mediamente è pari a 30kW. Si verifichi anche che alla fine della trasformazione sia ancora possibile lo scambio di conduzione
- II. si calcoli il titolo finale (x_2) del flusso di acqua vapore alla fine della trasformazione 1-2, tenendo di poter trascurare le variazioni di energia potenziale e cinetica del flusso di massa
- III. si calcoli la quantità di flusso complessivamente a disposizione di massa liquida a 10 bar e se ne calcoli l'entropia specifica ad esito di un processo di laminazione dai 10 ai 2 bar di pressione sull'intera portata di massa liquida.

P	T	h_{ls}	h_{vs}	u_{ls}	u_{vs}	s_{ls}	s_{vs}
(bar)	(°C)	(kJ/kg)	(kJ/kg)	(kJ/kg)	(kJ/kg)	(kJ/kgK)	(kJ/kgK)
2	120,23	504,7	2706,3	504,5	2529,2	1,5301	7,1268
10	179,88	762,6	2776,2	761,5	2581,9	2,1382	6,5828

SVOLGIMENTO COMPITO DEL 5/7/2022 - PARTE DI MECCANICA

ESERCIZIO n° 1



1) Analizziamo il sistema in condizioni statiche.

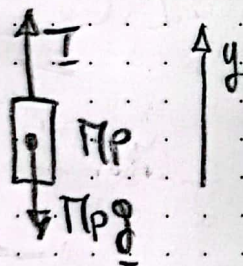
- Masse sospese

$$T - M_p g = 0$$

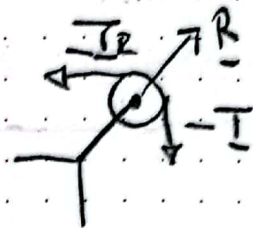
considerando la componente in direzione y

$$T - M_p g = 0$$

$$T = M_p g$$



Conclusione



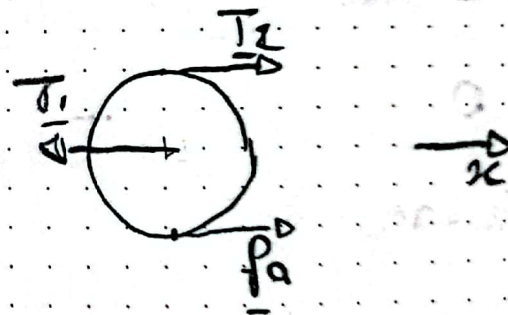
$$-T + T_2 + R = 0$$

$$-T_2 R - (T R) = 0 \quad (\text{momento risultante calcolato rispetto al centro è nullo})$$

$$\Rightarrow T_2 = T$$

(in modulo)

Disco



$$T_1 + T_2 + f_a = 0$$

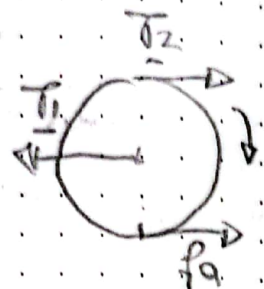
proietto in direzione x

$$-T_1 + T_2 + f_e = 0$$

Momento risultante rispetto al centro del disco

$$T_2 R_d - f_e R_d = 0$$

$$\rightarrow T_2 = f_e$$



Sostituendo nell'equazione precedente

$$T_1 = T_2 + f_e = 2T_2 \\ = 2T = 2M_p g$$

Riassumendo

$$T_1 = 2M_p g$$

$$T_2 = M_p g$$

Vettori

$$\underline{T}_1 = -T_1 \underline{i}'$$

$$\underline{T}_2 = T_2 \underline{i}$$

2) Dal punto precedente risulta

$$f_e = T_2 = M_p g$$

quindi le condizioni di attrito statico impone

$$f_e \leq \mu_s N$$

dove

$N = M_d g$
(dall'equazione di equilibrio del disco in direzione y)

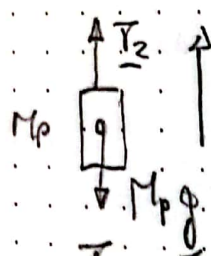
$$\rightarrow M_p g \leq \mu_s M_d g$$

$$\rightarrow \mu_s \geq \frac{M_p}{M_d}$$

Sostituendo otteniamo

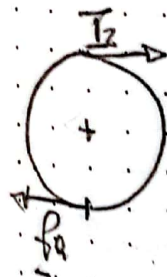
$$\mu_s \geq 0.66$$

3) Analizziamo il moto del sistema



- Masse sospese

$$M_p g - T_2 = M_p a_p$$



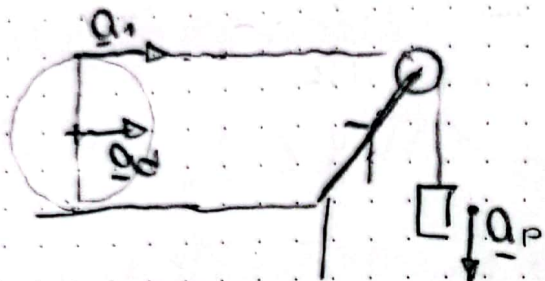
- Disco (traslazione)

$$M_d a_d = T_2 - f_e$$

- Disco (rotazione)

$$I_d \alpha = T_2 R + f_e R$$

Sviluppiamo i calcoli
- condizioni cinematiche



$\alpha_d = \frac{\alpha_1}{2} = -\frac{\alpha_p}{2}$ (dato che il
pib è inestensibile
e il disco rotola)

$\alpha = \frac{\alpha_d}{R_d}$ (se α_d è
positivo, α_p
è negativo)

$$\begin{cases} M_p a_p = T_2 - M_p g \\ M_d \alpha_d = T_2 - f_a \\ I_d \frac{\alpha_d}{R_d} = T_2 R_d + f_a R_d \end{cases}$$

$a = \alpha_d \quad a_p = -2a \quad \alpha = \frac{a}{R}$

relazioni cinematiche

$(M_d + \frac{M_p}{2} + \frac{I_d}{4R^2})$

Risolvendo

$$(M_d + 4M_p + \frac{I_d}{R^2}) \alpha = 2M_p g$$

$$\alpha = \frac{2M_p g}{M_d + 4M_p + \frac{I_d}{R^2}}$$

Esempio di risoluzione

$$-2M_p a = T_2 - M_p g$$

$$M_d a = T_2 - f_a$$

$$I_d \frac{a}{R_d} = T_2 R_d + f_a R_d$$

$$(M_d + 2M_p) a = -f_a + M_p g$$

$$\frac{I_d}{R_d^2} a = T_2 + f_a$$

$$(M_d + 2M_p + \frac{I_d}{R_d^2}) a = T_2 + M_p g$$

$$-2M_p a = T_2 - M_p g$$

$$(M_d + 4M_p + \frac{I_d}{R_d^2}) a = 2M_p g$$

Possiamo quindi calcolare

$$Q_P = -2Q = \frac{4M_P g}{M_D + 4M_P + \frac{I_D}{R_D^2}} =$$

$$= \frac{M_P g}{M_P + \frac{M_D}{4} + \frac{I_D}{4R_D^2}}$$

$$\alpha = \frac{Q}{R_D} = \frac{2M_P g}{R_D \left(M_D + 4M_P + \frac{I_D}{R_D^2} \right)}$$

- ④ Se la massa M_P è scesa di una quantità L , la fine π è scivolata di una quantità L , quindi il centro di massa ha percorso una distanza $\frac{L}{2}$ e il disco ha ruotato di un angolo pari a $\theta_d = \frac{L}{2R_D}$.

Il tempo necessario affinché le masse scenda di una quantità L vale

$$t_L = \sqrt{\frac{2L}{10g}}$$

e di conseguenza la velocità angolare del disco vale

$$\omega_L = \alpha t_L =$$

$$= \alpha \sqrt{\frac{2L}{10g}} =$$

$$= \alpha \sqrt{\frac{2L}{2\alpha R_D}}$$

$$= \sqrt{\frac{L\alpha}{R_D}}$$

Potremmo risolvere il problema anche considerando la conservazione dell'energia meccanica e la variazione di energia potenziale

$$E_{kin} = 0$$

$$E_{pin} = M_p g L$$

$$E_{kfin} = \frac{1}{2} M_d v_d^2 + \frac{1}{2} M_p v_p^2 + \frac{1}{2} I_d \omega_d^2 =$$

$$= \frac{1}{2} (M_d R_d^2 + 4 M_p R_d^2 + I_d) \omega_d^2$$

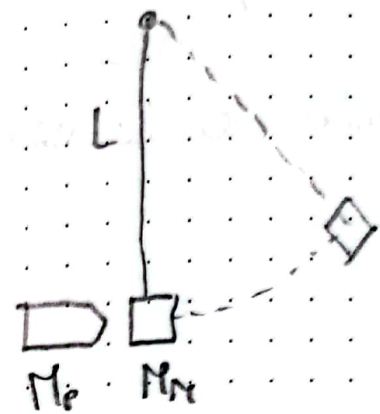
$$E_{pfin} = 0$$

$$\rightarrow \omega_d^2 = \frac{M_p g L}{M_d R_d^2 + 4 M_p R_d^2 + I_d}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{M_p g L}{M_d R_d^2 + 4 M_p R_d^2 + I_d}}$$

(è lo stesso risultato ottenuto in precedenza)

ESEK 11



① Calcoliamo la velocità del pendolo prima dell'urto

$$E_{pin} = M_d g L (1 - \cos \theta)$$

$$E_{kin} = 0$$

$$E_{kfin} = \frac{1}{2} M_d v_M^2$$

$$E_{pfin} = 0$$

$$E_{min} = E_{mfin}$$

$$E_{kin} + E_{pfin} = E_{pin} + E_{kfin}$$

$$M_d g L (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} M_d v_M^2$$

$$v_M = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta)}$$

Analizziamo l'urto perfettamente anelastico

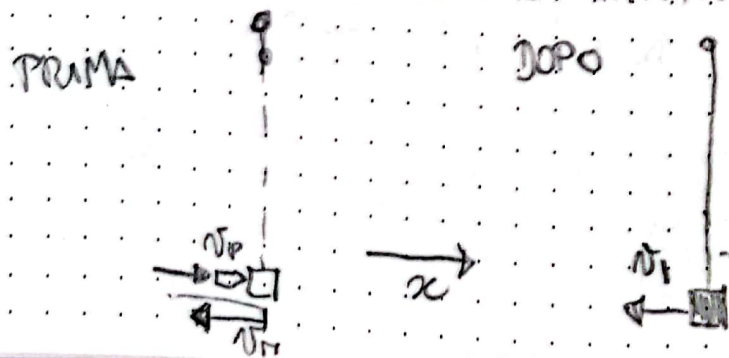
- conservazione della quantità di moto

$$M_P v_P - M_M v_M = (M_P + M_M) v_1$$

$$v_1 = \frac{M_P v_P - M_M v_M}{M_P + M_M}$$

$v_1 < 0 \rightarrow$ il moto del pendolo continua $\&$ nella direzione che aveva prima dell'urto

$|v_1| < |v_M| \rightarrow$ a seguito dell'urto la velocità diminuisce



Dopo l'urto il moto del pendolo avrà una nuova ampiezza θ_1

Tale che (conservazione energia meccanica)

$$\frac{1}{2} (M_P + M_M) v_1^2 = (M_P + M_M) gl(1 - \cos\theta_1)$$

Da cui posso ricavare

$$\cos\theta_1 = 1 - \frac{v_1^2}{2gL}$$

$$\theta_1 =$$

② Calcoliamo la variazione di energia cinetica

$$E_{kin} = \frac{1}{2} M_P v_P^2 + \frac{1}{2} M_M v_M^2$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} (M_P + M_M) v_1^2$$

$$\Delta E_{kin} = E_{kin} - E_{kin}$$

Analizziamo il moto dei singoli punti

- proiettile

- prima dell'urto la sua velocità è

$$\underline{v}_p = v_p \underline{i}$$

- dopo l'urto la sua velocità è

$$\underline{v}_1 = v_1 \underline{i}$$

↑
ricordiamo che è
negativo!

La quantità di moto del proiettile
varia di

$$\begin{aligned}\Delta p_p &= m_p v_1 - m_p v_p \\ &= m_p (v_1 - v_p) \underline{i}\end{aligned}$$

Per il Teorema dell'impulso

$$\underline{J}_p = \Delta p_p$$

↑
impulso della forza che il pannello
applica al proiettile nell'urto

- massa del pannello

- prima dell'urto

$$\underline{v}_M = -v_M \underline{i}$$

↑
il segno è negativo
perché la direzione
opposta a $\underline{i}$ e in
precedenza (nel punto 1)
ho calcolato il modulo

- dopo l'urto

$$\underline{v}_1 = v_1 \underline{i}$$

↑
qui non occorre mettere
il segno negativo perché
 v_1 è la componente
lungo x della velocità
calcolata con la conserva-
zione della q.d.m ed
è negativa

Variazione della quantità di moto delle
masse M_m

$$\Delta p_m = v_1 \underline{i} - (-v_M \underline{i}) = (v_1 + v_M) \underline{i}$$

$$\Delta p_H = (v_i - v_f)_H =$$

Per il teorema dell'impulso risulta

$$\underline{J}_H = \Delta p_H$$



impulso delle forze che il proiettile applica alle masse del pendolo durante l'urto

Si osserva che

$$\underline{J}_P = -\underline{J}_H \quad (\text{per il terzo principio della dinamica})$$

④ Urto perfettamente elastico

Se l'urto è perfettamente elastico

- i due corpi rimangono indipendenti tra loro, con velocità v_{Pi} e v_{Hi} distinte

- l'energia cinetica si conserva (le forze che si sviluppano durante l'urto sono conservative e la variazione di energia potenziale durante l'urto è trascurabile)

• conservazione della quantità di moto

$$M_P v_P + M_H v_H = M_P v_{Pi} + M_H v_{Hi}$$

considerando le componenti dei vettori in direzione x e ricordando le definizioni precedenti

$$M_P v_P + M_H v_H = M_P v_{Pi} + M_H v_{Hi}$$

• conservazione dell'energia cinetica

$$\frac{1}{2} M_P v_P^2 + \frac{1}{2} M_H v_H^2 = \frac{1}{2} M_P v_{Pi}^2 + \frac{1}{2} M_H v_{Hi}^2$$

Otteniamo un sistema di due equazioni in due incognite (v_{Pi} , v_{Hi})
Risoluiamo...

Riprendiamo l'equazione dell'energia cinetica e riorganizziamo i termini

$$\frac{1}{2} M_P (v_P^2 - v_{P1}^2) = \frac{1}{2} M_M (v_{M1}^2 - v_M^2)$$

Sviluppiamo le differenze di quadrati

$$M_P (v_P + v_{P1})(v_P - v_{P1}) = M_M (v_{M1} - v_M)(v_{M1} + v_M)$$

Riprendiamo l'equazione delle qdm

$$M_P v_P + M_M v_M = M_P v_{P1} + M_M v_{M1}$$

Riorganizziamo i termini

$$M_P (v_P - v_{P1}) = M_M (v_{M1} - v_M)$$

Dividiamo membro e membro le $\otimes$ per le $\otimes$

$$v_P + v_{P1} = v_M + v_{M1}$$

$$v_{P1} - v_{M1} = v_M - v_P \quad \otimes \otimes \otimes$$

Riprendiamo l'equazione delle qdm e l'ultima equazione

$$\begin{cases} M_P v_{P1} + M_M v_{M1} = M_P v_P + M_M v_M \\ v_{P1} - v_{M1} = v_M - v_P \end{cases}$$

Adesso abbiamo un sistema lineare

$$M_P (v_M - v_P + v_{M1}) + M_M v_{M1} = M_P v_P + M_M v_M$$

$$(M_P + M_M) v_{M1} = 2 M_M v_M + M_P v_P$$

$$v_{M1} = \frac{2 M_P v_P + (M_M - M_P) v_M}{M_P + M_M}$$

$$v_{P1} = \frac{2 M_M v_M + (M_P - M_M) v_P}{M_P + M_M}$$