

Esercizio 1

Una biglia omogenea di massa M , raggio r e momento di inerzia I viene lanciata, con velocità del centro di massa v_0 e moto di puro rotolamento, lungo una pista costituita da un tratto orizzontale seguito da un piano inclinato di un angolo θ in salita. Assumendo che non vi siano forze dissipative calcolare:

- L'energia cinetica iniziale totale della biglia;
- la quota h del centro di massa rispetto al tratto orizzontale iniziale nel punto di inversione del moto;
- La velocità iniziale v_1 , assumendo che il moto rimanga di puro rotolamento, necessaria per raggiungere la stessa quota se l'inclinazione fosse θ_2 ;
- L'angolo massimo di inclinazione θ_M per il quale il moto rimane di puro rotolamento se il coefficiente di attrito statico fra la biglia e la pista è $\mu_s = 0.4$ (4 punti).

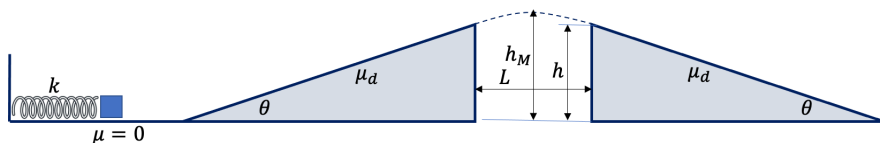
[Valori numerici: $M = 0.2 \text{ kg}$, $r = 1 \text{ cm}$, $I = \frac{2}{5}Mr^2$, $v_0 = 1.2 \text{ m/s}$, $\theta = 15^\circ$, $\theta_2 = 30^\circ$, $\mu_s = 0.4$]

Esercizio 2

Due piani inclinati di altezza h e angolo d'inclinazione θ , sono disposti specularmente come schematizzato in figura ad una distanza L l'uno dall'altro. Un corpo puntiforme di massa M viene lanciato lungo la parte inclinata del cuneo di sinistra per mezzo di una molla ideale, disposta orizzontalmente, avente costante elastica k . In seguito al lancio, dopo aver raggiunto la sommità del piano inclinato di sinistra, il corpo prosegue di moto parabolico raggiungendo il punto più in alto del cuneo di destra tangenzialmente alla sua superficie e quindi scivola fino in fondo ad esso. Sapendo che le superfici dei piani inclinati presentano un coefficiente di attrito dinamico μ_d , mentre il tratto iniziale orizzontale a sinistra è liscio, determinare:

- la velocità con cui il punto materiale lascia il piano inclinato di sinistra;
- la massima altezza rispetto alla quota iniziale raggiunta dal corpo durante il suo moto;
- la deformazione della molla al momento del lancio del corpo;
- la velocità dello stesso quando raggiunge il punto più basso del piano inclinato di destra.

[Valori numerici: $h = 1 \text{ m}$, $\theta = 30^\circ$, $L = 1 \text{ m}$, $M = 1 \text{ kg}$, $k = 1.5 \cdot 10^3 \text{ N/m}$, $\mu_d = 0.1$]

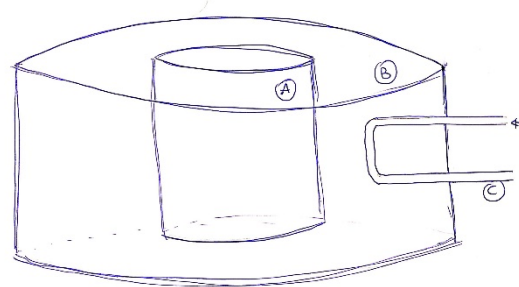


Esercizio 3

Si consideri una massa d'acqua (A) alla pressione di 1 atm in equilibrio di fase tra stato liquido e solido (con un 10% di massa solida sul totale) contenuta in un recipiente cilindrico di diametro pari a 1 m e altezza di 1,28 m. Tale contenitore è in contatto termico con una massa (B) di aria (considerabile gas perfetto) attraverso la sua superficie laterale di cui si conoscono lo spessore (2 cm) e il coefficiente di conducibilità (22 W/mK).

L'aria in contatto termico con il contenitore di acqua è a sua volta contenuta in un volume chiuso ad una temperatura di 20°C che viene mantenuta costante (durante la trasformazione che porta l'acqua allo stato completamente liquido) da uno scambiatore entro il quale passa un fluido (C, acqua) con portata di $0,5 \text{ kg/s}$ che si trova nello stato iniziale allo stato di vapore saturo alla pressione di 1 atm. In riferimento al sistema A si consideri un calore latente di liquefazione pari a 334 kJ/kg ed un volume specifico del ghiaccio assimilabile a quello del liquido. In riferimento al sistema C si considerino condizioni di regime stazionario e trascurabilità di variazioni di energia potenziale e cinetica del fluido. Si determinino:

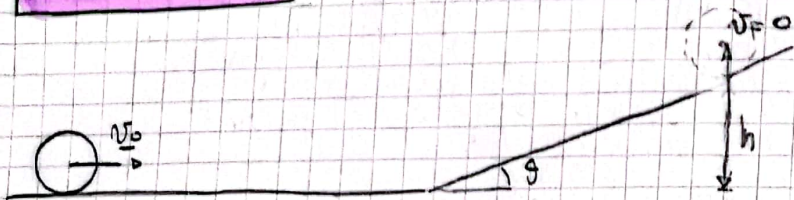
- il tempo necessario ad avere il passaggio dell'acqua (A) al completo stato di liquido;
- il titolo del fluido C dello scambiatore nella sezione di uscita dal volume di aria



P	T	h_{ls}	h_{vs}	u_{ls}	u_{vs}	v_{ls}	v_{vs}
(bar)	($^\circ\text{C}$)	(kJ/kg)	(kJ/kg)	(kJ/kg)	(kJ/kg)	(m^3/kg)	(m^3/kg)
1,01325	100	419,1	2676,0	417,4	2506,0	0,001	1,673

SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA DEL 5/9/22
- PARTE DI MECCANICA

ESERCIZIO 1'



a) Energia cinetica Totale delle biglie

Dato che le biglie ha moto di puro rotolamento, la sua velocità angolare è

$$\omega = \frac{v_0}{R} = 120 \text{ rad/s}$$

L'energia cinetica delle biglie è quindi

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I \frac{v_0^2}{R^2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{R^2} \right) v_0^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(m + \frac{2/5 MR^2}{R^2} \right) v_0^2 = \frac{7}{10} m v_0^2 \end{aligned}$$

$$T = \frac{7}{10} m v_0^2 = 0.202 \text{ J}$$

b) Quota h del centro di massa della biglia rispetto al tratto orizzontale nel punto di inversione del moto

- Nel punto di inversione del moto le velocità del CM delle biglie e le sue velocità angolari si annullano

- Configurazione iniziale

$$E_{k0} = \frac{7}{10} m v_0^2$$

(dal punto precedente)

$$E_{p0} = m g R$$

(prendo il piano come riferimento per il calcolo dell'energia potenziale)

- Configurazione finale

$$E_{k1} = 0$$

$$E_{p1} = m g h$$

Non sono presenti altre forze non conservative, l'energia meccanica si conserva

$$E_{k0} + E_{p0} = E_{k1} + E_{p1}$$

$$\frac{7}{10} m v_0^2 + m g R = m g h$$

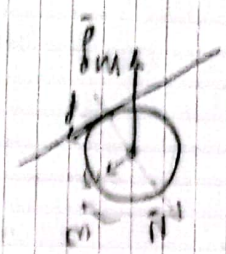
Da cui posso ricavare h

$$R = \frac{1}{2} (1.0^2 + 9^2) = 0.113m$$

La velocità iniziale v_i necessaria per raggiungere le stesse quote h , se l'inclinazione fosse di 30° sarebbe maggiore, osservando l'espansione dal punto precedente, osservando che esiste che esso non dipende da θ , per cui

$$v_i = v_o = 1.2 \text{ m/s}$$

L'angolo di inclinazione massimo θ_m per il quale il moto avviene di puro rotolamento, osservando che il coefficiente d'attrito statico μ_s



Moto in salita

$$ma = f - mg \sin \theta$$

$$I \alpha = -fR$$

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

$$I \frac{a}{R} = -fR$$

$$ma = f - mg \sin \theta$$

$$ma = -I \frac{a}{R^2} - mg \sin \theta$$

$$(m + \frac{I}{R^2}) a = -mg \sin \theta$$

$$a = - \frac{mg \sin \theta}{m + \frac{I}{R^2}}$$

$$f = -I \frac{a}{R} = \frac{I mg \sin \theta}{R^2 (m + \frac{I}{R^2})} =$$

$$= \frac{I mg \sin \theta}{I + mR^2} \cdot mg \sin \theta$$

Affidando il moto di rotolamento θ_0 possibile

è necessario che

$$f \leq \mu_s N$$

$$\frac{I}{I + mR^2} \cdot mg \sin \theta \leq \mu_s mg \cos \theta$$

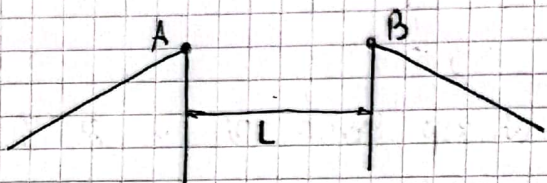
$$\sin \theta \leq \mu_s (I + mR^2) \frac{I}{I + mR^2}$$

$$\tan \theta \leq \mu_s (I + mR^2) \frac{I}{I + mR^2}$$

$$\theta_0 = \arctan(\mu_s \frac{I}{I + mR^2}) = 54.76^\circ$$

ESERCIZIO 2

2) Calcolare la velocità con cui il punto materiale lascia il piano di lancio



Le due parti del punto materiale segue un moto parabolico, parte da A con velocità v_A (incognita) inclinata di θ rispetto all'orizzontale e atterra in B

Analizziamo il moto parabolico

$$\begin{cases} v_x = v_A \cos \theta \\ v_y = v_A \sin \theta - gt \end{cases}$$

velocità

Coordinate del punto durante il volo

$$x(t) = v_A \cos \theta t$$

$$y(t) = v_A \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

Nel punto di atterraggio $y(t) = 0$

TUTTA QUESTA PARTE POTREVO EVITARLA SE AVESSI RICORDATO L'ESPRESSIONE DELLA GITTATA NEL MOTO PARABOLICO

$$0 = v_A \sin \theta t_B - \frac{1}{2} g t_B^2$$

$$(v_A \sin \theta - \frac{1}{2} g t_B) t_B = 0$$

$$t_B = 0 \text{ (soluzione banale)}$$

$$t_B = 2 \frac{v_A \sin \theta}{g}$$

Sostituisco nell'espressione di x per trovare la gittata

$$v_A \cos \theta t_B = L$$

$$v_A \cos \theta \cdot 2 \frac{v_A \sin \theta}{g} = L$$

$$L = \frac{2 v_A^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_A^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$L = \frac{v_A^2 \sin 2\theta}{g}$$

Nel nostro caso, sono noti θ ed L , posso ricavare v_A

$$v_A = \sqrt{\frac{L g}{\sin 2\theta}} = 3.37 \text{ m/s}$$

D) Messimo alterno rispetto alle quote iniziale raggiunta dal punto durante il volo

- Anche in questo caso, devo analizzare il moto parabolico tra A e B

l'altitudine massima viene raggiunta quando v_y si annulla quindi quando

$$v_A \sin \theta = g t_m$$

$$\rightarrow t_m = \frac{v_A \sin \theta}{g}$$

Per questo valore di t , la quota y del punto è pari a

$$y_m = v_A \sin \theta t_m - \frac{1}{2} g t_m^2 =$$

$$= \frac{v_A^2 \sin^2 \theta}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_A^2 \sin^2 \theta}{g^2} =$$

$$y_m = \frac{1}{2} \frac{v_A^2 \sin^2 \theta}{g}$$

Espresso con il punto A a titolo a quota h rispetto al riferimento iniziale, risulta

$$\left\{ \begin{aligned} h_m &= h + \frac{1}{2} \frac{v_A^2 \sin^2 \theta}{g} = h_{\max} \end{aligned} \right\}$$

C) Determinazione della variazione di momento del lancio del corpo

- Al momento del lancio

$$E_k = 0$$

$$E_{p0} = \frac{1}{2} k x_0^2$$

$$E_{m0} = \frac{1}{2} k x_0^2$$

- Nel punto A

$$E_{kA} = \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$E_{mA} = \frac{1}{2} m v_A^2 + m g h$$

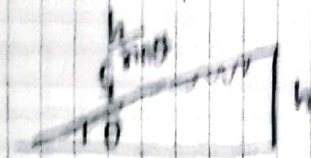
$$E_{pA} = m g h$$

- Durante il moto la forza di attrito compie lavoro negativo.

$$L_{nc} = - \mu_s m g \cos \theta \cdot \frac{h}{\sin \theta}$$

Forza di attrito $\cdot$ spostamento

(lunghezza del primo indicatore)



$$L_{nc} = - \mu_s m g h \frac{1}{\tan \theta}$$

Risulta quindi:

$$E_{mi} - E_{mo} = L_{nc}$$

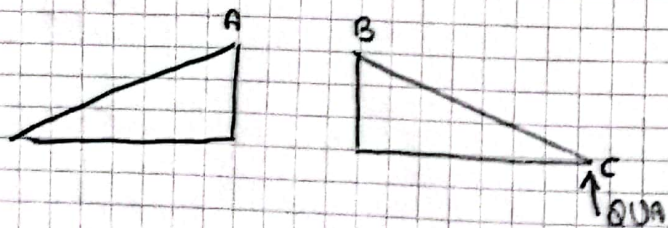
$$\frac{1}{2} m v_A^2 + mgh - \frac{1}{2} k x_0^2 = - \mu_d \frac{mgh}{\tan \theta}$$

Da cui posso ricavare x_0

$$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + mgh + \mu_d \frac{mgh}{\tan \theta}$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{2m}{k} \left(\frac{1}{2} v_A^2 + gh \left(1 + \frac{\mu_d}{\tan \theta} \right) \right)} = 0.151 \text{ m}$$

① Velocità del punto materiale quando raggiunge il punto più basso del secondo piano



$$E_{mo} = \frac{1}{2} k x_0^2 \rightarrow \text{energia meccanica iniziale}$$

Energia meccanica finale

$$E_{mc} = \frac{1}{2} m v_c^2$$

Lavoro delle forze non conservative

$$L_{nc} = - 2 \mu_d \frac{mgh}{\tan \theta}$$

Doppio rispetto a prima dato che ho 2 tratti, uno in salita e uno in discesa, di uguale lunghezza

$$\rightarrow \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{1}{2} k x_0^2 - 2 \mu_d \frac{mgh}{\tan \theta}$$

Posso quindi calcolare v_c

$$v_c = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{1}{2} k x_0^2 - 2 \mu_d \frac{mgh}{\tan \theta} \right)} = 5.25 \text{ m/s}$$