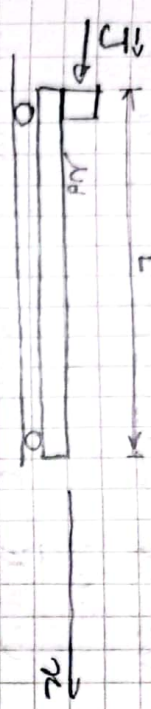


SOLUZIONE PROVA DI MECCANICA
(COMMENTATA)

ESERCIZIO n° 2



1. All'istante $t = 0$ viene applicato un impulso $\vec{J}$ al punto materiale di massa M_p , inizialmente in quiete.
 → Per il teorema dell'impulso risulta

$$\vec{J} = \Delta \vec{p}$$

Proiettando in direzione x

$$J = M_p(v_0 - v_{p0})$$

↑ velocità iniziale nulla

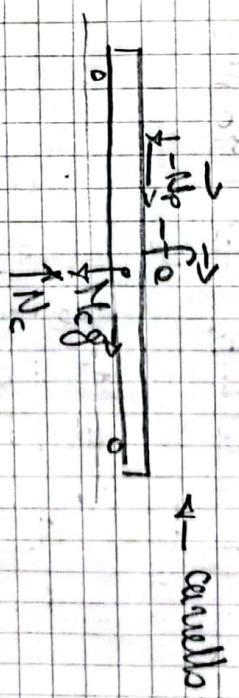
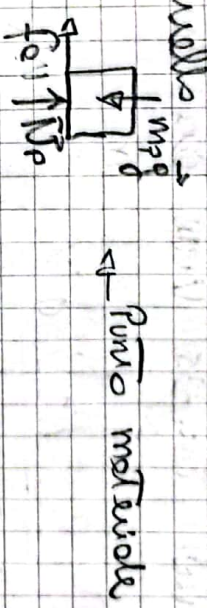
velocità del punto materiale dopo l'impulso (comparsa lungo x)

$$\rightarrow v_0 = \frac{J}{M_p} = 20 \text{ m/s}$$

2. ACCETTAZIONE PUNTO MATERIALE E CAVALLO

Dopo l'impulso, il punto materiale scorre lungo il cavallo (anch'esso inizialmente in quiete), tra punto e cavallo è presente attrito, caratterizzato da coefficiente di attrito dinamico μ_d

Forza agente sul punto materiale e cavallo



Il moto avviene in direzione x , quindi risulta

$$\begin{cases} -M_p g + N_p = 0 \rightarrow N_p = M_p g \\ -N_p - M_c g + N_c = 0 \rightarrow N_c = (M_p + M_c)g \end{cases}$$

equazione di moto di punto materiale e cavallo, proiettate in direzione y

Modello di attrito di Coulomb

$$f_a = -\mu_s N_p = -\mu_s M_p g$$

dato che il moto si svolge
in direzione concorde con x

Equazioni di moto del punto materiale
e del carrullo, compilate in direzione x

$$M_p a_p = -\mu_s M_p g$$

$$\rightarrow a_p = -\mu_s g = -1.96 \text{ m/s}^2$$

$$M_c a_c = \mu_s M_p g$$

$$a_c = \mu_s \frac{M_p}{M_c} g = 0.0392 \text{ m/s}^2$$

2) Tempo impiegato dal punto materiale
per scivolare lungo il carrullo

SOLUZIONE POSSIBILE $\rightarrow$ studio il moto
osservando da un sistema di riferimento
"esterno" a carrullo e punto materiale

Punto materiale

- $\rightarrow$ moto uniformemente accelerato con
- $\rightarrow$ posizione iniziale $x_p(0) = 0$
- $\rightarrow$ velocità iniziale v_0
- $\rightarrow$ accelerazione $a_p = -\mu_s g$

$$\text{risultato } x_p(t) = v_0 t - \frac{\mu_s g}{2} t^2$$

Carrullo

- $\rightarrow$ moto uniformemente accelerato con
- $\rightarrow$ posizione iniziale $x_c(0) = L$ (prendo lo
spigolo a destra come riferimento)
- $\rightarrow$ velocità iniziale nulla
- $\rightarrow$ accelerazione $a_c = \mu_s \frac{M_p}{M_c} g$

risultato

$$x_c(t) = L + \frac{1}{2} \mu_s \frac{M_p}{M_c} g t^2$$

Il punto materiale raggiunge lo spigolo
del carrullo quando

$$x_p(t) = x_c(t)$$

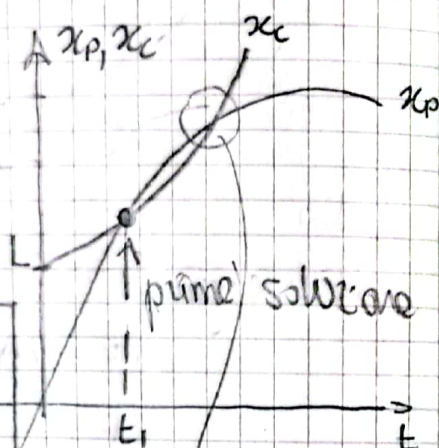
$$v_0 t - \frac{1}{2} \mu g t^2 = L + \frac{1}{2} \mu \frac{M_p}{M_c} g t^2$$

Risolvere per calcolare t

$$\frac{1}{2} \mu \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) g t^2 - v_0 t + L = 0 \quad (*)$$

L'equazione ammette due soluzioni positive, scelgo la minore

$$t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2 \mu L \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) g}}{\mu \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) g} = 0.0651 \text{ s}$$



Questa soluzione non ha significato fisico perché dopo t_1 il punto materiale cade dal carrello e le leggi di moto trascinate non sono più valide.

ALTRA SOLUZIONE POSSIBILE: analizzare il moto rispetto a un sistema di riferimento solidale al carrello, considerando il moto relativo del punto materiale e tenendo conto del moto di trascinamento uniformemente accelerato.

③ Velocità del punto materiale alla caduta

$$v_p(t_1) = v_0 - \mu g t_1 = 19.9 \text{ m/s}$$

$$v_c(t_1) = \mu g \frac{M_p}{M_c} t_1 = 2.55 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

$$v'(t_1) = v_p(t_1) - v_c(t_1) = v_0 - \mu g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) t_1 = 19.8 \text{ m/s}$$

velocità del punto materiale uscirà dal carrello (velocità relativa)

④ Impulso che dovrei dare per fermare il punto materiale all'estremità

Riprendo le equazioni (*) e (2) imponendo $v=0$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \mu \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) g t^2 - v_0 t + L = 0 \\ v_0 - \mu g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) t = 0 \end{cases}$$

Questa volta risolvo imponendo $v' = 0$
e ricevendo t (che non mi serve)
e v_0 (che mi serve per calcolare
l'impulso)

dalla 82 ricevo v_0

$$v_0 = \sqrt{2g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) L}$$

Sostituisco nella * e ricevo t

$$\frac{1}{2} \mu_0 g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) t^2 - \mu_0 g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) t^2 + L = 0$$

$$-\frac{1}{2} \mu_0 g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) t^2 + L = 0$$

$$t = \sqrt{\frac{2L}{\mu_0 g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right)}}$$

Posso quindi calcolare v_0

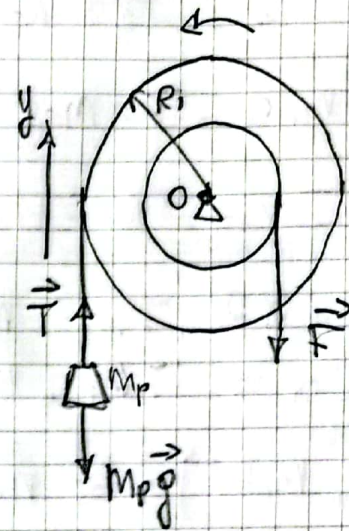
$$v_0 = \sqrt{2\mu_0 g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) L}$$

e quindi l'impulso

$$J = M_p v_0 = M_p \sqrt{2\mu_0 g \left(1 + \frac{M_p}{M_c}\right) L}$$

ESERCIZIO n° 3

1) Modello di F per
sollevare il cerchio
con velocità costante



- equazione moto cerchio
(direzione y)

$$m_p a = T - m_p g$$

- equazione moto (rotazione circonferenza)

$$I_c \alpha = T R_1 - F R_2$$

- cinematica $\alpha = -a/R_1$

se la velocità è costante, $a = 0$ e $\alpha = 0$

$$\rightarrow T = m_p g$$

$$T R_1 - F R_2 = 0$$

$$F = \frac{T R_1}{R_2} = m_p g \frac{R_1}{R_2} = 2 m_p g = 98.1 \text{ N}$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{F}_1 = \overline{F}_2 = \frac{m_p g R_1}{R_2} = 69.0 \text{ N}$$

$$m_p a = T - m_p g$$

$$a = -\alpha R_1$$

$$I \alpha = T R_1 - F_1 R_2$$

$$-m_p \alpha R_1 = T - m_p g$$

$$I \alpha = T R_1 - F_1 R_2$$

$$(I + m_p R_1^2) \alpha = m_p g R_1 - F_1 R_2$$

$$\alpha = \frac{m_p g R_1 - F_1 R_2}{I + m_p R_1^2}$$

$$\begin{aligned} a = -\alpha R_1 &= -\frac{m_p g R_1^2 - F_1 R_1 R_2}{I + m_p R_1^2} \\ &= -\frac{m_p g - F_1 R_2 / R_1}{\frac{I}{R_1^2} + m_p} \end{aligned}$$

$\textcircled{3}$

$$T = m_p g + m_p a = m_p (g + a)$$

$\textcircled{4}$ Se annulla F

$$a = -\frac{m_p g}{m_p + \frac{I}{R_1^2}}$$

m_p si muove di moto uniformemente accelerato

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$$

supponendo $v_0 = 0$ per semplicità

$$L = \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow t_r = \sqrt{\frac{2L}{a}}$$

$$v = -a t_r = \sqrt{2L a'}$$