

PROVE IN ITINERE
24/04/24

ESERCIZIO n° 2A

Applichiamo le seconde legge
di Newton

$$\underline{m\vec{a}} = \underline{T} + \underline{mg}$$

$\underline{a} = \underline{a}_n \rightarrow$ il punto
si muove di moto
circolare uniforme,
l'accelerazione ha direzione
normale ed è sul piano del
moto

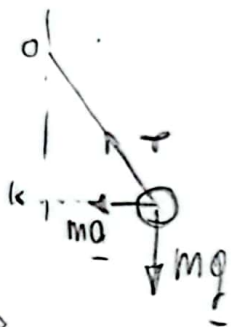
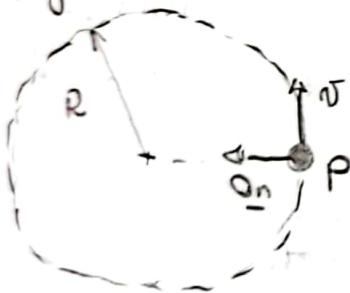


Figura 1

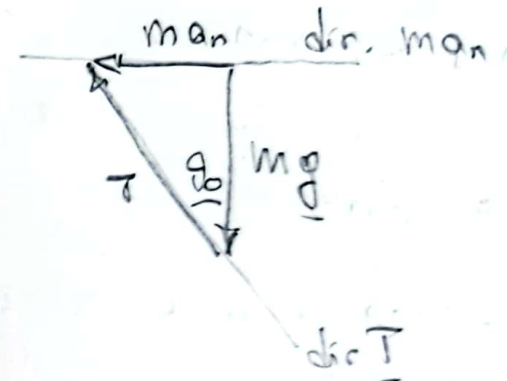


$$R = L \sin \theta_0 \rightarrow \text{raggio circonferenza} \\ = 0.51 \text{ m} \quad \text{e posizione di P}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{L \sin \theta_0}$$

$\underline{T}$ è diretto come il filo
 $\underline{mg}$ è verticale

$$\underline{m\vec{a}} = \underline{T} + \underline{mg} \leftarrow \text{andizziamo i vettori}$$



Il triangolo costruito dai vettori
 $\underline{T}$, $\underline{mg}$, $\underline{m\vec{a}_n}$ è rettangolo, $\underline{mg}$
(vettore noto) è uno dei cateti

$$\rightarrow \boxed{T = \frac{mg}{\cos \theta_0} = 38.4 \text{ N}}$$

② Analizzando il Triangolo rettangolo
trovo anche che

$$m a_n = mg \tan \theta_0$$

$$\boxed{a_n = g \tan \theta_0 = 8.23 \text{ m/s}^2}$$

ricordando che $a_n = \frac{v^2}{R}$ trovo anche

$$\boxed{v = \sqrt{a_n R} = 2.06 \text{ m/s}}$$

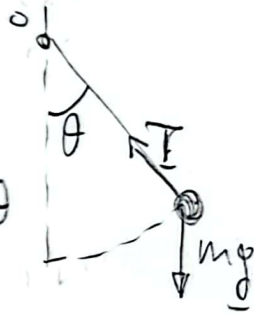
$\underline{a}_n$ è sul piano della circonferenza
con direzione centripeta

$\underline{v}$ è sul piano della circonferenza
con direzione tangenziale
(vedi figura 1)

③ Si analizza il moto del pendolo

$$m\underline{a} = \underline{T} + m\underline{g}$$

prendiamo una
generica configurazione θ
($-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$)



Componenti dei vettori in direzione
normale al moto

$$ma_n = T - mg \cos \theta$$

ricordiamo che $a_n = \frac{v^2}{L}$
in questo caso

$$m \frac{v^2}{L} = T - mg \cos \theta$$

Possiamo esplicitare T:

$$T = \frac{mv^2}{L} + mg \cos \theta \quad \textcircled{1}$$

In direzione tangenziale abbiamo

$$ma_t = -mg \sin \theta$$

$$L \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$

Equazione differenziale non lineare
che non sappiamo risolvere

Sul punto materiale agisce le
forze peso (che è conservativa)
e le forze $\underline{T}$ che non compie
lavoro. Quindi l'energia meccanica
si conserva.

- in una configurazione generica

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2$$

$$E_p = mgL(1 - \cos \theta)$$

$$\rightarrow E_m = \frac{1}{2} mv^2 + mgL(1 - \cos \theta)$$

- quando il pendolo raggiunge l'angolo

$$E_k = 0$$

$$E_p = mgL(1 - \cos \theta_0)$$

$$\rightarrow E_m = mgL(1 - \cos\theta_0)$$

Dato che l'energia meccanica si conserva abbiamo

$$E_m = E_m$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos\theta) = mgL(1 - \cos\theta_0)$$

$$\rightarrow v^2 = 2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Sostituendo nell'espressione di T (*) si ottiene

$$\begin{aligned} T &= 2mg(\cos\theta - \cos\theta_0) + mg\cos\theta \\ &= 3mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_0 \end{aligned}$$

Si osserva che per $\theta = \theta_0$

$$T_{\min} = mg\cos\theta_0 = 22.5 \text{ N}$$

mentre per $\theta = 0$

$$\begin{aligned} T_{\max} &= 3mg - 2mg\cos\theta_0 \\ &= 43.2 \text{ N} \end{aligned}$$

④ Accelerazione normale

$$a_n = \frac{v^2}{L} = 2g(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

per $\theta = \theta_0$

$$a_n = 0$$

(valore minimo)

per $\theta = 0$

$$a_n = 2g(1 - \cos\theta_0)$$

$= 6.59 \text{ m/s}^2$

(valore massimo)

Accelerazione tangenziale

$$a_t = -g\sin\theta$$

per $\theta = 0$

$$a_t = 0$$

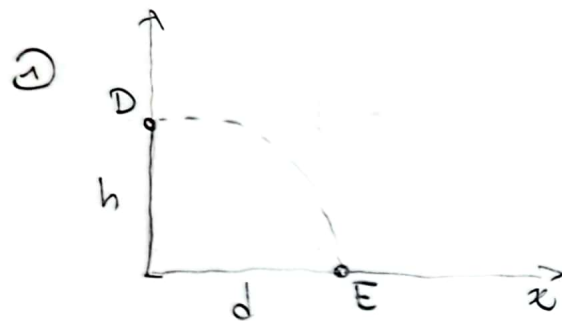
per $\theta = \theta_0$

$$a_t = -g\sin\theta_0$$

$= 6.31 \text{ m/s}^2$

(massimo valore assoluto)

ESERCIZIO n° 3A



Tra le posizioni D ed E il punto si muove di moto parabolico con velocità iniziale v_0 orizzontale

$$v_{0x} = v_0$$

$$v_{0y} = -gt$$

$$x(t) = v_0 t$$

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

All'ottenimento

$$d = v_0 t_a$$

$$0 = h - \frac{1}{2}gt_a^2$$

Risolto per trovare v_0 (e t_a)

$$t_a = \frac{d}{v_0}$$

$$0 = h - \frac{1}{2}g \frac{d^2}{v_0^2}$$

$$\frac{2h}{g} = \frac{d^2}{v_0^2} \quad v_0^2 = \frac{gd^2}{2h}$$

$$\textcircled{*} \quad v_0 = d \sqrt{\frac{g}{2h}} = 4.46 \text{ m/s}$$

② Tra C e D si conserva l'energia meccanica

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$$

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{\frac{d^2 g}{2h} + 2gh} = 5.96 \text{ m/s}$$

Tra A e B la variazione di energia meccanica è pari al lavoro delle forze non conservative (attrito)

$$\textcircled{3} \quad \underbrace{\frac{1}{2}kx_0^2}_{\text{En. meccanica in A (potenziale)}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_B^2}_{\text{En. meccanica B (cinetica)}} + \underbrace{N_0 mgl}_{\text{lavoro forze attrito}}$$

$$K = \frac{2}{x_0^2} \left(\frac{1}{2}mv_B^2 + N_0 mgl \right) = 2.39 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

$$\frac{1}{2} m v_0'^2 + mgh - \frac{1}{2} k x_0^2 = \mu_0 mg (l + h/\tan\theta)$$

$$\frac{1}{2} m v_0'^2 = \frac{1}{2} k x_0^2 - mgh - \mu_0 mg (l + h/\tan\theta)$$

$$v_0' = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{1}{2} k x_0^2 - mgh - \mu_0 mg (l + h/\tan\theta) \right)}$$

$$= 4.20 \text{ m/s}$$

Una volta calcolate v_0' , riprendo l'espressione $\otimes$ trovata nel punto 2 e ricavo d

$$d = v_0' \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1.69 \text{ m}$$

Supponiamo di lanciare il punto materiale con la stessa compressione delle molle, ma assumendo due anche sul piano inclinato se presenti attrito

$$E_{m0} = \frac{1}{2} k x_0^2$$

$$E_{m0} = \frac{1}{2} m v_0'^2 + mgh$$

$$W_{nc} = \mu_0 mgl + \mu_0 mg \cos\theta \cdot \frac{h}{\sin\theta} =$$

$$= \mu_0 mg (l + h/\tan\theta)$$



Da A a B, moto caduta libera con velocità iniziale nulla

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$-(h_i - R) = -\frac{1}{2}gt_B^2$$

$$t_B = \sqrt{\frac{2(h_i - R)}{g}} = 0.585$$

$$v_B = gt_B = \sqrt{2(h_i - R)g} = 5.69 \text{ m/s}$$

② Conservazione energia meccanica tra A e C

$$E_{mA} = Mgh_i$$

$$E_{mC} = \frac{1}{2}Mv_C^2$$

$$\frac{1}{2}Mv_C^2 = Mgh_i$$

$$v_C = \sqrt{2gh_i} = 6.56 \text{ m/s}$$

L'accelerazione normale, in modulo, sarà

$$a_c = \frac{v_C^2}{R} = \frac{2gh_i}{R} = 78.48 \text{ m/s}^2$$

③ La variazione di energia meccanica tra C ed E è pari al lavoro della forza d'attrito

$$E_{mC} = \frac{1}{2}Mv_C^2$$

$$E_{mE} = \frac{1}{2}Mv_E^2 - mgh_f$$

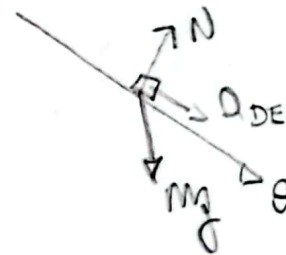
$$W_{nc} = -\mu_0 mgl$$

$$\frac{1}{2}Mv_C^2 - \frac{1}{2}Mgh_f - \frac{1}{2}Mv_E^2 = -\mu_0 mgl$$

$$v_E = \sqrt{v_C^2 + 2gh_f - \mu_0 gl} = 7.69 \text{ m/s}$$

Per calcolare l'accelerazione nel tratto DE

$$\theta = \arctan \frac{h_f}{d}$$



$$M a_{DE} = M g \sin \theta$$

$$a_{DE} = g \sin \theta = 3.98 \text{ m/s}^2$$

$$v_E = \sqrt{v_C^2 + 2gh_f - \mu_0 gl + 2a_{DE}d} = 8.04 \text{ m/s}$$

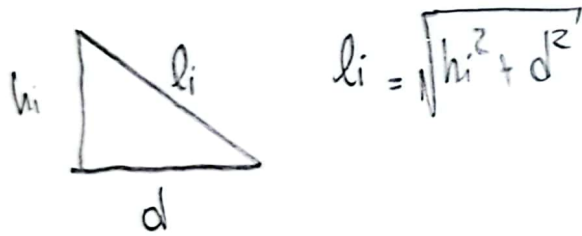
$$h_f = \sqrt{d^2 + h_i^2}$$

④ In questo caso

$$E_{mc} = \frac{1}{2} M v_c^2$$

$$E_{md} = \frac{1}{2} M v_E^2 - mgh_i$$

$$W_{nc} = -\mu_0 mgl - \mu_0 mg \cos \theta l_i$$



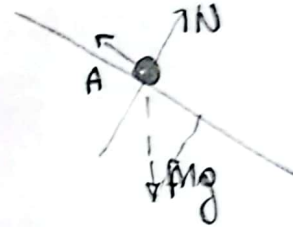
Come prima, la variazione dell'energia meccanica è pari al lavoro delle forze non conservative

$$E_{md} - E_{mc} = W_{nc}$$

risolviamo per calcolare v_E

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M v_E^2 - mgh_i - \frac{1}{2} M v_c^2 &= \\ &= -\mu_0 mg(l + l_i \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{v_E = \sqrt{v_c^2 + mgh_i - \mu_0 mg(l + l_i) \cos \theta} = 6.04 \text{ m/s}}$$



$$\begin{aligned} m a_{DE} &= mg \sin \theta - A \\ &= mg \sin \theta - \mu_0 N = \\ &= mg \sin \theta - \mu_0 mg \cos \theta \\ &= mg(\sin \theta - \mu_0 \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\boxed{a'_{DE} = g \sin \theta - \mu_0 \cos \theta = 3.08 \text{ m/s}^2}$$

ESERCIZIO n° 3B

① Equazione differenziale per piccole oscillazioni

$$L \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$

$$\sin \theta \approx \theta$$

$$L \frac{d^2 \theta}{dt^2} + g \theta = 0$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

Pulsazione piccole oscillazioni

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

risultato che

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Conoscendo T possiamo calcolare L

$$L = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \cdot g = 1.31 \text{ m}$$

② Energia meccanica nelle diverse configurazioni

- Configurazione generica

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + m g L (1 - \cos \theta)$$

- Alle massime estensione

$$E_{m0} = m g L (1 - \cos \theta_0)$$

CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g L (1 - \cos \theta) = m g L (1 - \cos \theta_0)$$

POSSIAMO RITROVARE V IN FUNZIONE DI θ

$$v = \sqrt{2 g L (\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

v è massima quando $\cos \theta = 1$ quindi $\theta = 0$
e vale

$$v_{max} = \sqrt{2 g L (1 - \cos \theta_0)} = 3.59 \text{ m/s}$$

③ Dalle seconde equazione d. Newton

$$m \underline{a} = \underline{T} + m \underline{g}$$

In direzione normale

$$a = a_n = \frac{v^2}{L}$$

$$m \frac{v^2}{L} = T - mg \cos \theta$$

$$\rightarrow T = m \frac{v^2}{L} + mg \cos \theta$$

sostituendo l'espressione di v^2 trovato precedentemente

$$T = 3mg \cos \theta - 2mg \cos \theta_0$$

per $\theta = 0$, $\cos \theta = 1$, $T = T_{\max}$

$$T_{\max} = 3mg - 2mg \cos \theta_0 = 9.81 \text{ N}$$

per $\theta = \theta_0$, $T = T_{\min}$

$$T_{\min} = mg \cos \theta_0 = 2.65 \text{ N}$$

④ Riprendiamo l'espressione di T trovata in precedente

$$T = m \frac{v^2}{L} + mg \cos \theta$$

nella posizione in alto

$$\theta = \pi, \cos \theta = -1$$



Per avere il filo teso deve risultare $T > 0$ quindi

$$m \frac{v_{\pi}^2}{L} - mg > 0$$

v_{π} velocità nel punto più alto

$$v_{\pi}^2 > gL$$

Analizziamo l'energia meccanica nelle configurazioni in alto e in basso

$$E_{m\pi} = \frac{1}{2} m v_{\pi}^2 + 2mgL$$

$$E_{m0} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Per la conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{1}{2} m v_{\pi}^2 + 2mgL = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\rightarrow v_0^2 = v_{\pi}^2 + 4gL$$

Da cui si ricave

$$v_0^2 \approx 8L + 4gL$$

$$v_0 \approx \sqrt{5gL} = 8.03 \text{ m/s}$$