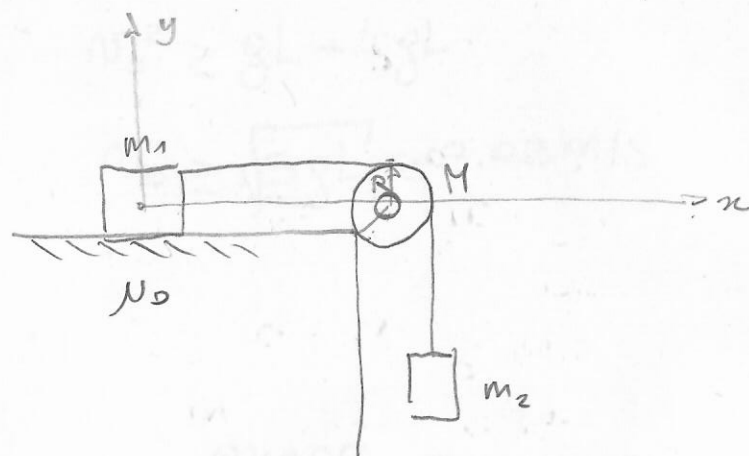
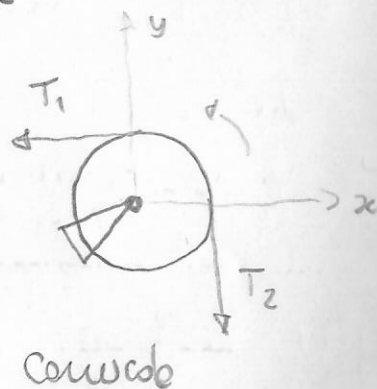
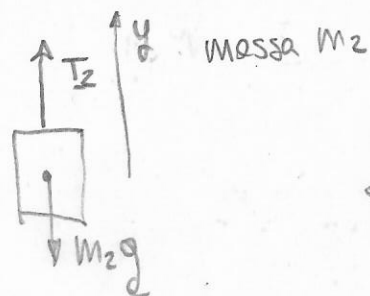
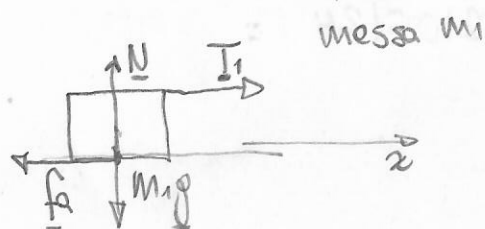


ESERCIZIO n° 2



① Accelerazione delle due masse,
Tensione nel filo



Equazioni di moto, componenti cartesiane
nelle direzioni x e y

• massa m_1

- direzione x

$$m_1 a_1 = T_1 - f_a$$

- direzione y

$$-m_1 g + N_1 = 0$$

- attrito coulombiano

$$f_a = \mu_0 N_1$$

Sostituendo, otteniamo

$$m_1 a_1 = T_1 - \mu_0 m_1 g$$

• massa m_2

direzione y

$$m_2 a_2 = T_2 - m_2 g$$

• corruccia

$$I \alpha = T_1 R - T_2 R$$

• Analisi cinematica

$$a_1 = -a_2 = a$$

$$\alpha = -\frac{a_1}{R} = -\frac{a}{R}$$

Riepilogando

$$\begin{cases} m_1 a = T_1 - \mu_0 m_1 g \\ -m_2 a = T_2 - m_2 g \\ -I \frac{a}{R} = (T_1 - T_2) R \end{cases}$$

Sviluppiamo i calcoli per determinare

a , T_1 e T_2

$$(I = \frac{1}{2} M R^2 = 0.0288 \text{ kgm}^2)$$

$$m_1 a = T_1 - \mu_0 m_1 g$$

$$\otimes m_2 a = m_2 g - T_2$$

$$I \frac{a}{R^2} = T_2 - T_1$$

Sommando membro a membro

$$(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}) a = T_1 - \mu_0 m_1 g + m_2 g - T_2 + T_2 - T_1$$

$$(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}) a = m_2 g - \mu_0 m_1 g$$

$$\rightarrow \boxed{a = \frac{m_2 g - \mu_0 m_1 g}{m_1 + m_2 + I/R^2} = 1.01 \text{ m/s}^2}$$

Possiamo quindi ricavare le tensioni

$$\boxed{T_1 = m_1 a + \mu_0 m_1 g = 15.58 \text{ N}}$$

$$\boxed{T_2 = m_2 g - m_2 a = 17.60 \text{ N}}$$

② Potendo da ferme, la massa m_2 si muove di moto unif. accelerato verso il basso con accelerazione a

$$y(t) = -\frac{1}{2} a t^2$$

Per $t = 4.5$ la massa è scesa di

$$y = -8.08 \text{ m}$$

③ Soluzione "diretta"

Per $t = 4.5$ le velocità delle masse m_1 ed m_2 sono

$$v_1 = a t$$

$$v_2 = -a t$$

mentre la velocità angolare vale

$$\omega = -\alpha t = -\frac{0}{R} t$$

Quindi l'energia cinetica del sistema vale

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2 = 69.35 \text{ J}$$

Soluzione indiretta.

Il sistema è inizialmente in quiete, quindi la sua energia cinetica è nulla

$$E_{k0} = 0$$

Sappiamo che la variazione di energia cinetica è pari al lavoro delle forze esterne e interne.

Dato che il filo è inestensibile le tensioni (forze interne) non compiono lavoro, quindi

$$E_{kf} - E_{ki} = W_{P2} + W_{O1}$$

$$W_{P2} = -m_2 g y_f \quad \left(\begin{array}{l} \text{Forza peso} \\ \text{masse } m_2 \end{array} \right)$$

$$W_{O1} = -\mu_0 m_1 g x_f$$

Si osserva che

$$y_f < 0 \quad \text{quindi} \quad W_{P2} > 0$$

$$x_f = -y_f > 0 \quad \text{quindi} \quad W_{O1} < 0$$

L'energia cinetica finale è quindi

$$E_{kf} = -m_2 g y_f - \mu_0 m_1 g x_f = 69.35 \text{ J}$$

④ Riprendiamo le equazioni

$$m_1 a = T_1 - f_0$$

$$m_2 g = T_2 - T_1$$

$$I \frac{a}{R} = T_2 - T_1$$

In condizioni statiche, $a = 0$
quindi dalla terza deduciamo
che $T_1 = T_2$ e sommando
le prime e la seconda otteniamo
 $f_0 = m_2 g$

In condizioni statiche

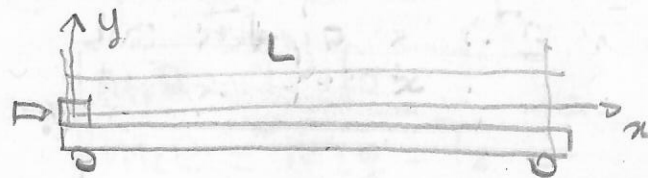
$$f_0 \leq \mu_s m_1 g$$

sostituendo, otteniamo

$$m_2 g \leq \mu_s m_1 g$$

$$\boxed{m_1 \geq \frac{m_2}{\mu_s} = 8 \text{ kg}}$$

ESERCIZIO N° 3



- ① Analizziamo l'urto anelastico
Considero le componenti in direzione x dei vettori qdm

$$p_{in} = M_P v_0$$

$$p_{fin} = (M_P + M_B) v_1$$

In direzione x , la qdm totale si conserva, quindi:

$$M_P v_0 = (M_P + M_B) v_1$$

$$v_1 = \frac{M_P v_0}{M_P + M_B} = 8.57 \text{ m/s}$$

La variazione di qdm del proiettile vale

$$\Delta p_P = M_P v_1 - M_P v_0 = -1.71 \text{ Ns}$$

Quindi l'impulso delle forze interne generate nell'urto e agenti sul proiettile vale, per il Teorema dell'impulso

$$\boxed{J_P = \Delta p_P = -1.71 \text{ Ns}}$$

Analogamente per il blocchetto

$$\Delta p_B = M_B v_1 - M_B v_{B0} = M_B v_1$$

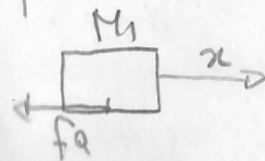
Risulta quindi

$$\boxed{J_B = \Delta p_B = 1.71 \text{ Ns}}$$

Si osserva che $J_P = -J_B$ (terzo principio della dinamica)

- ② Analizziamo il moto del blocchetto e del corruccio dopo l'urto

Definisco $M_1 = M_P + M_B = 0.35 \text{ kg}$



Equazione di moto del blocchetto, componente in direzione x

$$M_1 a_1 = -F_R$$

Ricordiamo che

$$f_a = \mu_0 N_1 = \mu_0 M_1 g$$

Sostituendo otteniamo

$$M_1 a_1 = -\mu_0 M_1 g$$

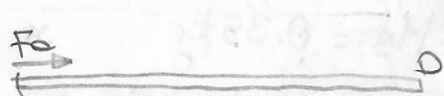
$$a_1 = -\mu_0 g$$

Il blocchetto dopo l'urto ha un moto unif. accelerato in direzione x con velocità iniziale v_1 e accelerazione $a_1 = -\mu_0 g$

$$\rightarrow v_B(t) = v_1 - \mu_0 g t$$

$$x_B(t) = v_1 t - \frac{1}{2} \mu_0 g t^2$$

Dinamica del carrello



$$M_c a_c = f_c$$

$$M_c a_c = \mu_0 M_1 g$$

$$a_c = \frac{\mu_0 M_1 g}{M_c}$$

Il carrello si muove di moto traslato in direzione x con velocità iniziale nulla e accelerazione a_c

Considerando il punto D, all'estremità a destra del carrello, risulta

$$v_D(t) = a_c t$$

$$x_D(t) = \frac{1}{2} a_c t^2 + L$$

Il blocchetto raggiunge l'estremità del carrello quando

$$x_B(t) = x_D(t)$$

Sostituendo otteniamo

$$v_1 t - \frac{1}{2} \mu_0 g t^2 = \frac{1}{2} a_c t^2 + L$$

Sviluppiamo e risolviamo per trovare il tempo

$$\frac{1}{2}(\mu_0 g + \mu_0 \frac{M_3}{M_c} g) t_c^2 - v_{1i} t_c - L = 0$$

$$t = \frac{v_{1i} \pm \sqrt{v_{1i}^2 - 2\mu_0(1 + \frac{M_3}{M_c})gL}}{\mu_0 g(1 + \frac{M_3}{M_c})}$$

Delle due soluzioni, quella che interessa è la più piccola

$$t_c = 0.155$$

In questo tempo, il conello si è spostato di

$$x_c = \frac{1}{2} a_c t_c^2 = 0.0055 \text{ m} = 5.5 \text{ mm}$$

Il blocchetto cade dal conello con una velocità

$$v_{Bc} = v_{1i} - \mu_0 g t_c = 8.23 \text{ m/s}$$

In quell'istante il conello si muove

mantenendo la velocità

$$v_{cc} = a_c t_c = 0.0710 \text{ m/s}$$

Quindi:

- l'osservatore solidale al sistema di riferimento fisso (approssimativamente inerziale) vede cadere il blocchetto con velocità

$$v_{Bc} = 8.23 \text{ m/s}$$

- l'osservatore solidale al conello vede cadere il blocchetto con velocità

$$v'_{Bc} = v_{Bc} - v_{cc} = 8.20 \text{ m/s}$$

③ Il blocchetto si muove all'estremità del canello e al tempo t_c risale

$$v_{bc} = v_{cc}$$

Sostituendo, si ottiene

$$v_1 - \mu_0 g t_c = a_c t_c$$

$$v_1 - (\mu_0 g + \mu_0 \frac{M_1 g}{M_c}) t_c = 0$$

$$v_1 - \mu_0 g (1 + \frac{M_1}{M_c}) t_c = 0$$

$$v_1 - \mu_0 g (1 + \frac{M_1}{M_c}) \cdot \frac{v_1 - \sqrt{v_1^2 - 2\mu_0(1 + \frac{M_1}{M_c})gL}}{\mu_0 g (1 + \frac{M_1}{M_c})} = 0$$

$$v_1 - v_1 + \sqrt{v_1^2 - 2\mu_0(1 + \frac{M_1}{M_c})gL} = 0$$

$$v_1^2 = 2\mu_0(1 + \frac{M_1}{M_c})gL$$

$$v_1 = \sqrt{2\mu_0(1 + \frac{M_1}{M_c})gL} = 2.51 \text{ m/s}$$

questo è la velocità con cui deve partire il blocchetto dopo l'urto

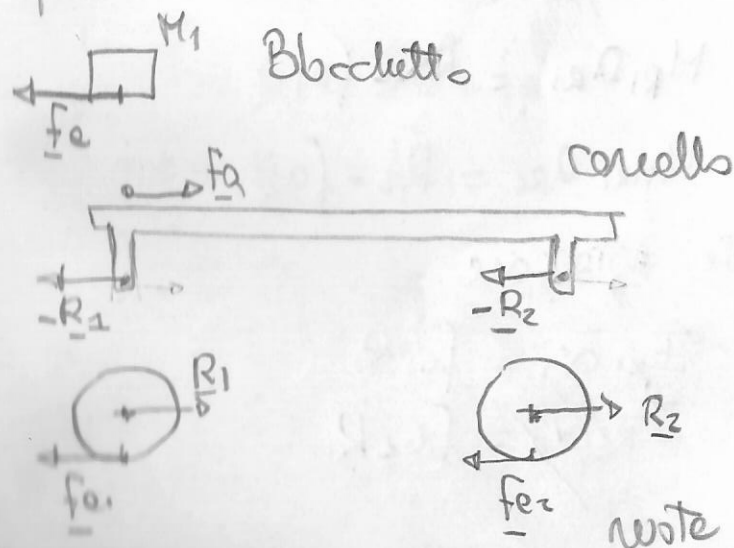
Riprendendo il punto 1

$$M_p v_0 = M_1 v_1$$

Possiamo ricavare la velocità con cui deve essere sparato il proiettile come

$$v_0 = \frac{M_1 v_1}{M_p} = 5.85 \text{ m/s}$$

④ Se il momento di inerzia delle ruote non è trascurabile, possiamo schematizzare il problema in questo modo



Equazioni di moto

• Blocchetto

$$M_1 a_1 = -\mu_0 M_1 g$$

$$a_1 = -\mu_0 g$$

• Carrello

$$M_c a_c = \mu_0 M_1 g - R_1 - R_2$$

R_1, R_2 forze applicate dalle ruote ai rispettivi perni

• Ruote, traslazione

$$M_{R1} a_{R1} = R_1 - f_{a1}$$

$$M_{R2} a_{R2} = R_2 - f_{a2}$$

• Ruote, rotazione

$$I_{R1} \alpha_1 = f_{a1} R$$

$$I_{R2} \alpha_2 = f_{a2} R$$

Se il moto delle ruote è puramente rotazionale

$$a_{R1} = a_{R2} = a_c$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{a_c}{R}$$

Possiamo riscrivere le equazioni di moto come

$$M a_1 = -\mu_0 g$$

$$M_c a_c = \mu_0 M_1 g - R_1 - R_2$$

$$M_{R1} a_c = R_1 - f_{a1}$$

$$M_{R2} a_c = R_2 - f_{a2}$$

$$I_{R1} \frac{a_c}{R} = f_{a1}$$

$$I_{R2} \frac{a_c}{R} = f_{a2}$$

Sommando le ultime cinque membro o membro otteniamo

$$a_c = \frac{\mu_0 M_1 g}{M_c + M_{R1} + M_{R2} + I_{R1}/R + I_{R2}/R}$$