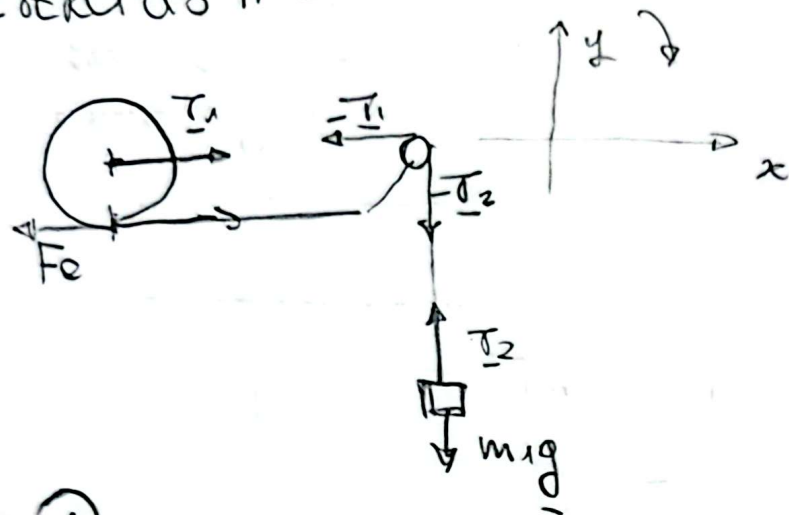


ESERCIZIO n° 2



①

Equazioni di moto

- Masse m_1 , componenti in direzione y

$$m_1 a_1 = -m_1 g + T_2$$

- Disco

centro di massa, componente x

$$m_2 a_2 = T_1 - f_a$$

rotazione

$$I_2 a_2 = f_a R$$

- Puleggia

$$\text{rotazione } I_3 a_3 = (T_2 - T_1) R_3$$

Da quest'ultimo ricaviamo che
 $T_1 = T_2$
 le tensioni nei due tratti di filo hanno lo stesso modulo

Dato che il filo è inestensibile considerando i sistemi di riferimento scelti risulta

$$a_2 = -a_1 = a$$

$$\alpha_2 = \frac{a_2}{R} = \frac{a}{R}$$

Sostituendo otteniamo

$$\begin{cases} -m_1 a = -m_1 g + T_2 \\ m_2 a = T_2 - f_a \\ I_2 \frac{a}{R} = f_a R \end{cases}$$

Sviluppiamo i calcoli

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T_2 \\ m_2 a = T_2 - f_a \\ \frac{I_2}{R^2} a = f_a \end{cases}$$

$$(m_1 + m_2 + \frac{I_2}{R^2}) a = m_1 g$$

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + \frac{I_2}{R^2}} = 3.27 \text{ m/s}^2$$

$$T_2 = m_1 (g - a) = 9.81 \text{ N}$$

Risulte quindi:

$$\underline{a}_1 = - a \underline{j}$$

$$\underline{a}_2 = a \underline{i}$$

$$\underline{T}_1 = T_2 \underline{i}$$

$$\underline{T}_2 = T_2 \underline{j}$$

② Dal punto precedente risulta

$$f_r = \frac{I_2 a}{R^2} = \frac{I_2 m_1 g}{R^2 (m_1 + m_2 + \frac{I_2}{R^2})}$$

$$= 3.27 \text{ N}$$

Affinché il moto di rotolamento sia possibile è necessario che

$$f_r \leq \mu_s N_2$$

essendo N_2 la componente della forza di contatto in direzione perpendicolare al piano

Dall'equazione di moto del centro del disco in direzione y risulta

$$0 = -m_2 g + N_2$$

$$\rightarrow N_2 = m_2 g$$

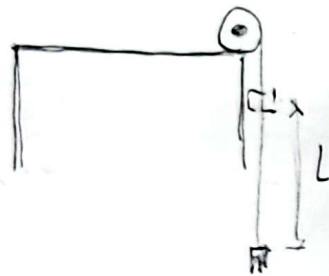
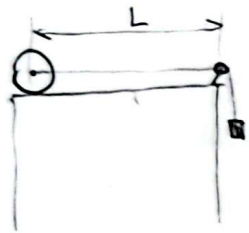
Il vincolo sul coefficiente di attrito diventa quindi:

$$f_r \leq \mu_s m_2 g$$

Da cui possiamo ricavare

$$\mu_s \geq \frac{f_r}{m_2 g} = 1.67$$

③ Analizziamo le variazioni di energie meccaniche tra le configurazioni iniziale e finale



Configurazione iniziale

$E_{k0} = 0$ (il disco parte da fermo)

$E_{p0} = 0$ (assumiamo le quote iniziali della massa per il calcolo dell'energia potenziale)

Configurazione finale

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_d \omega^2 =$$

Ricordiamo che, dato che il filo è inestensibile,
 $v_1 = v_2 = \omega R$

Sostituendo, otteniamo:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} (m_2 R^2 + m_1 R^2 + I_d) \omega^2$$

$$E_{p1} = -m_1 g L$$

(se il filo è inestensibile, quando il cdm del disco si sposta di L verso destra, le masse m_2 scende di L)

Dato che nel sistema non esistono altre forze non conservative, l'energia meccanica si conserva

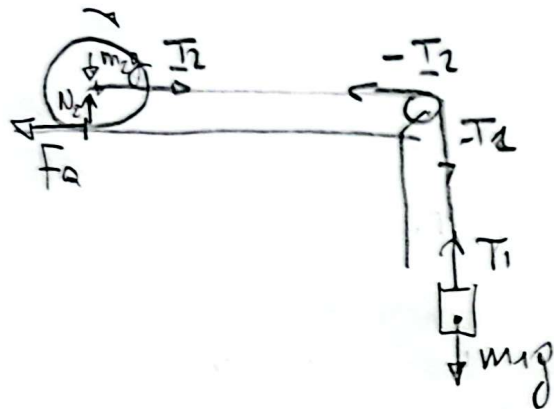
$$E_{k0} + E_{p0} = E_{k1} + E_{p1}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} (m_1 R^2 + m_2 R^2 + I_d) \omega^2 = m_1 g L$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2 m_1 g L}{m_1 R^2 + m_2 R^2 + I_d}} = 24.3 \text{ rad/s}$$

Nota allo stesso risultato si poteva arrivare studiando il moto uniformemente accelerato del disco con il valore di accelerazione calcolato nel punto precedente

② Analizziamo il problema considerando non trascurabili il momento di inerzia della carrucola



Equazioni di moto

Disco

$$m_2 a_2 = T_2 - f_a$$

$$I_2 \alpha_2 = f_a R$$

Carrucola

$$I_3 \alpha_3 = (T_1 - T_2) R_3$$

Masse sospese

$$m_1 a_1 = T_1 - m_1 g$$

Condizioni cinematiche

$$a = a_2 = -a_1 \quad \alpha_2 = \frac{a}{R_2}, \quad \alpha_3 = \frac{a}{R_3}$$

Sostituendo otteniamo

$$m_2 a = T_2 - f_a$$

$$\frac{I_2}{R_2^2} a = f_a$$

$$\frac{I_3}{R_3^2} a = T_1 - T_2$$

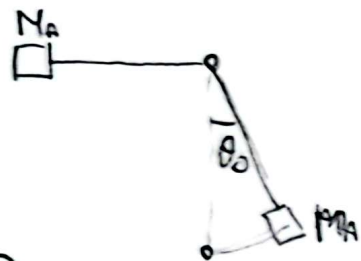
$$m_1 a = m_1 g - T_1$$

Sommando membro a membro ottengo

$$(m_1 + m_2 + \frac{I_2}{R_2^2} + \frac{I_3}{R_3^2}) a = m_1 g$$

Da cui posso ricavare a e quindi tutte le altre incognite

ESERCIZIO n° 3



①

Prima dell'urto la massa M_A parte con il filo in posizione orizzontale. Per la conservazione dell'energia meccanica tra le configurazioni iniziale e quella immediatamente dopo l'urto risulta

$$\frac{1}{2} M_A v_{Ao}^2 = M_A g L$$

$$\Rightarrow v_{Ao} = \sqrt{2 g L} = 3.96 \text{ m/s}$$

Dopo l'urto, la massa M_A continua a oscillare ma l'ampiezza si riduce a θ_0 . Risultato quindi, per la conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{1}{2} M_A v_{Ai}^2 = M_A g L (1 - \cos \theta_0)$$

$$v_{Ai} = \sqrt{2 g L (1 - \cos \theta_0)} = 1.45 \text{ m/s}$$

② Analizziamo l'urto. In direzione orizzontale, si conserva la quantità di moto. Risultato quindi

$$M_A v_{Ao} = M_B v_{Bi} + M_A v_{Ai}$$

Da cui si ricave

$$v_{Bi} = \frac{M_A (v_{Ao} - v_{Ai})}{M_B} = 3.77 \text{ m/s}$$

③

L'urto è elastico?

Calcoliamo l'energia cinetica iniziale e finale

$$E_{ko} = \frac{1}{2} M_A v_{Ao}^2 = M_A g L = 2.35 \text{ J}$$

$$E_{ki} = \frac{1}{2} M_B v_{Bi}^2 + \frac{1}{2} M_A v_{Ai}^2 = 1.73 \text{ J}$$

Risultato $E_{ko} \neq E_{ki}$

L'urto non è elastico. La variazione di energia cinetica è

$$\Delta E_k = \frac{E_{k1} - E_{k0}}{E_{k0}} \cdot 100 = -28.31\%$$

⑥ Dopo l'urto, la massa M_B procede con moto uniforme fino a incontrare la molla.

Analizziamo l'energia meccanica al momento del contatto con la molla e alla massima compressione.

$$E_{kB1} = \frac{1}{2} M_B v_{B1}^2$$

$$E_{pB1} = 0$$

$$E_{kB2} = 0 \quad (\text{alla massima compressione, la velocità è nulla})$$

$$E_{pB2} = \frac{1}{2} k x_{B2}^2$$

Non essendo presenti forze non conservative risulta

$$\frac{1}{2} M_B v_{B1}^2 = \frac{1}{2} k x_{B2}^2$$

Da cui si ricave

$$x_{B2} = \sqrt{\frac{M}{k}} v_{B1} = 3.37 \text{ cm}$$