

Da microscopico a macroscopico

Vettore di polarizzazione

Dielettrico sottoposto a polarizz.

- ✓ Dalle considerazioni fenomenologiche che sono state effettuate ci aspettiamo che se un dielettrico viene sottoposto all'azione di un campo elettrostatico le sue molecole od atomi acquistano un momento di dipolo medio non nullo in direzione del campo elettrico locale.

$$\bullet \quad \langle \underline{p}_m \rangle = \alpha \underline{E}_l \quad \bullet \quad \alpha = \alpha_d + \alpha_0 \quad \text{Polarizzabilità molecolare totale}$$

def. orientat. t.c. considero volumetto

- ✓ Descrizione macroscopica: considero un punto (x, y, z) del dielettrico e un piccolo volumetto ΔV attorno ad esso che contiene un numero statisticamente significativo di molecole ΔN .

- ✓ Definisco un vettore di polarizzazione $\underline{P}(x, y, z)$ mediando i singoli momenti di dipolo nel volume e dividendo per il volume stesso

✓ punto di osservazione

Funzione
continua del
punto

VECTORE

di Polarizz.

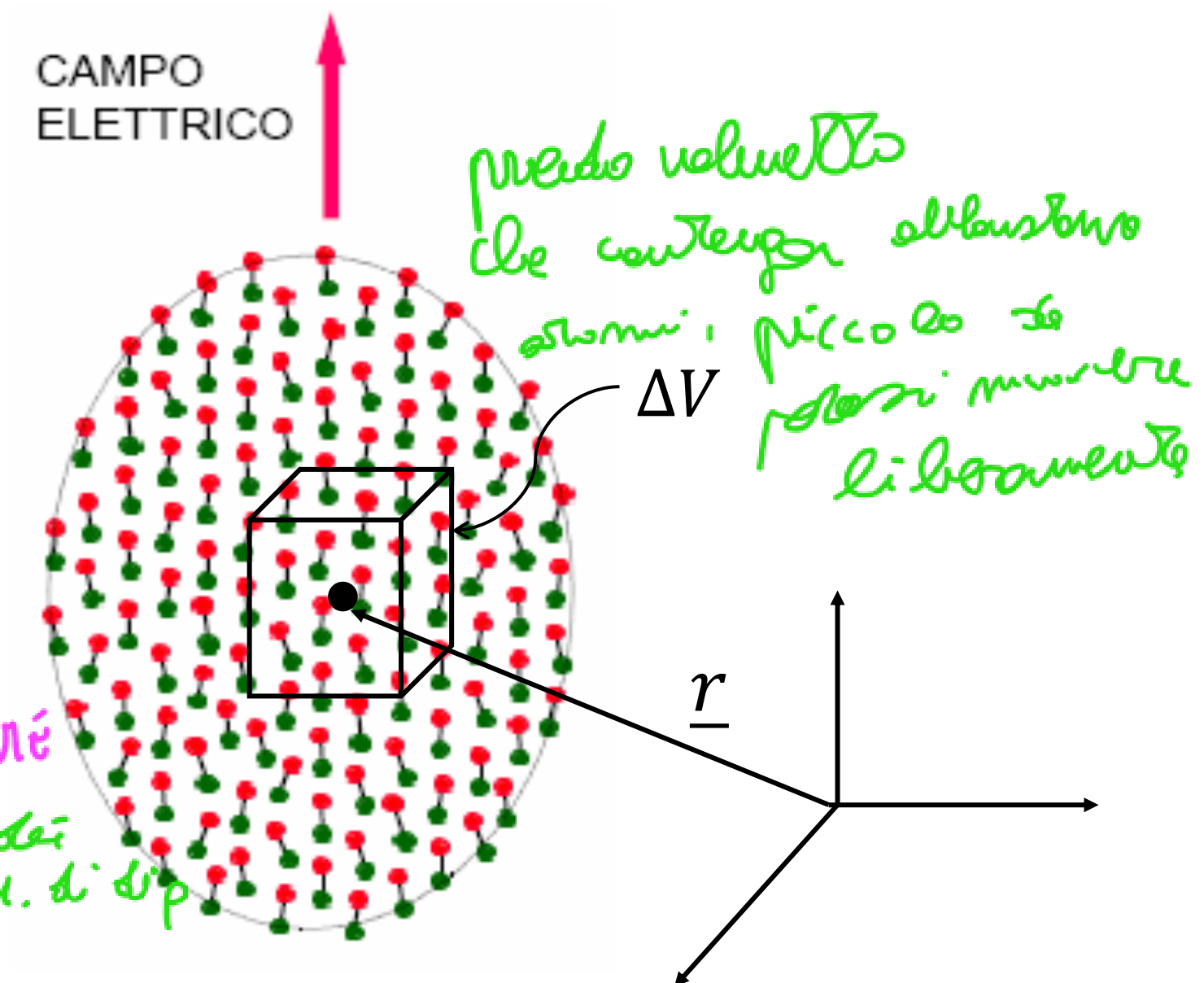
$$\underline{P}(x, y, z) = \frac{\sum_{m=1}^{\Delta N} \langle \underline{p}_m \rangle}{\Delta V}$$

MOM. DIP. PER
UNITÀ DI VOLUME

$$\left[\frac{C}{m^2} \right]$$

dato un volume, media volume dei
mom. di dip.

$$\frac{C \cdot m}{m^3}$$



MOMENTO DI DIPLO GLOBALE PER UNITÀ DI VOLUME

Se voglio trovare il dipolo, devo moltiplicare per volume

- ✓ Il vettore $\underline{P}(x, y, z)$ è chiamato vettore di polarizzazione ed è una grandezza macroscopica che rappresenta in ogni punto un momento di dipolo per unità di volume.

- ✓ ΔV deve essere sufficientemente piccolo in modo che $\underline{P}$ possa essere considerato uniforme all'interno di ΔV ma al tempo stesso sufficientemente grande da assicurare la regolarità $\underline{P}$ al variare del punto di osservazione.

Vettore di polarizzazione

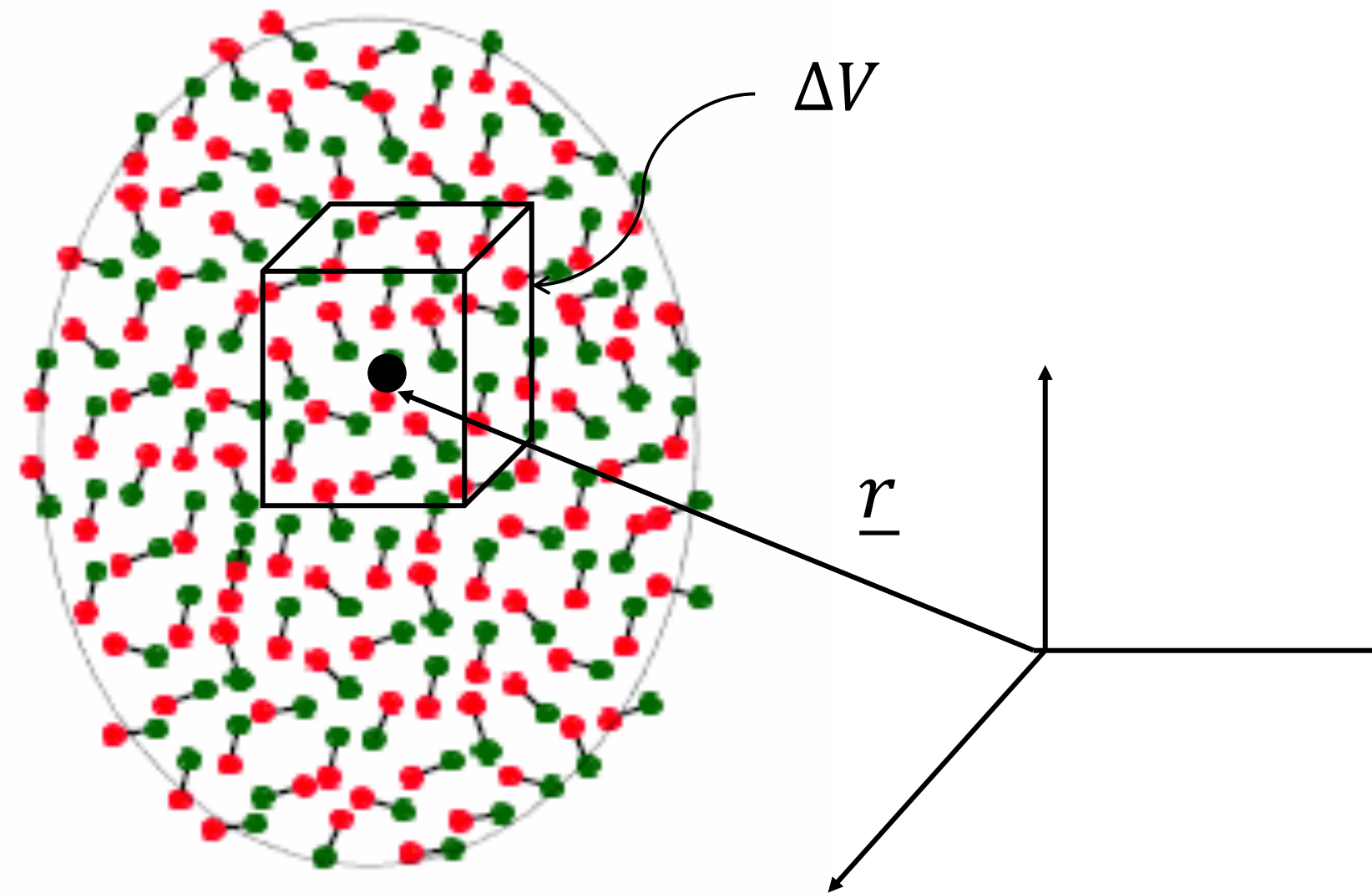
- Se ne per sé ne orientano* *in ogni punto il vettore di polarizzazione è 0*
- ✓ In un dielettrico non polarizzato l'agitazione termica porta ad una somma vettoriale dei singoli momenti di dipolo nulla all'interno del volumetto ΔV . Quindi in ogni punto

$$\underline{P}(x, y, z) = 0$$

*NON DI DIPOLO
MEDIO = 0*

MOL. Pieni, sfusi.

*Termica... DIPOLI disor.
casuali*



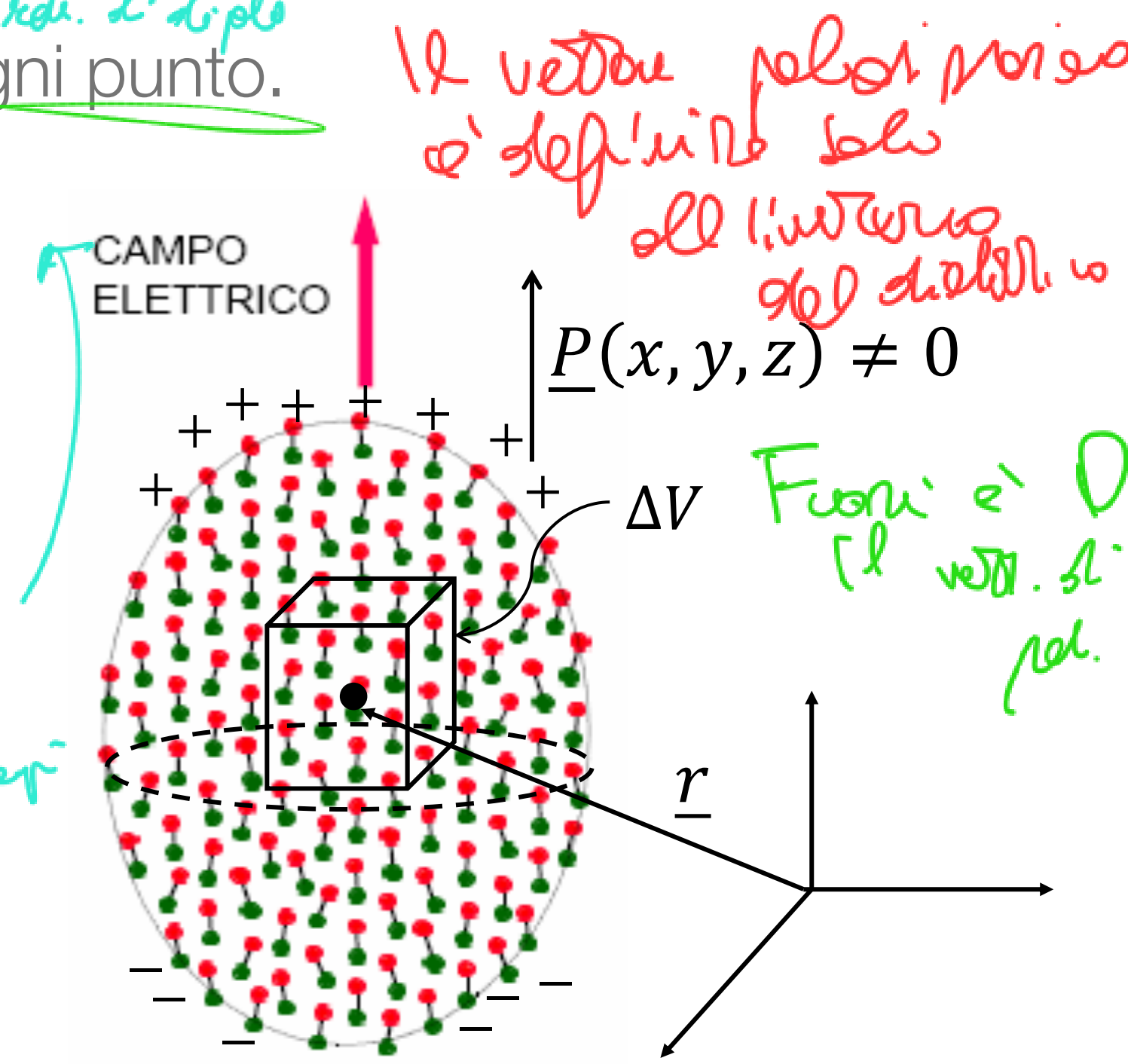
Vettore di polarizzazione

Possiamo considerare il dielettrico polarizzato con un campo vettoriale.

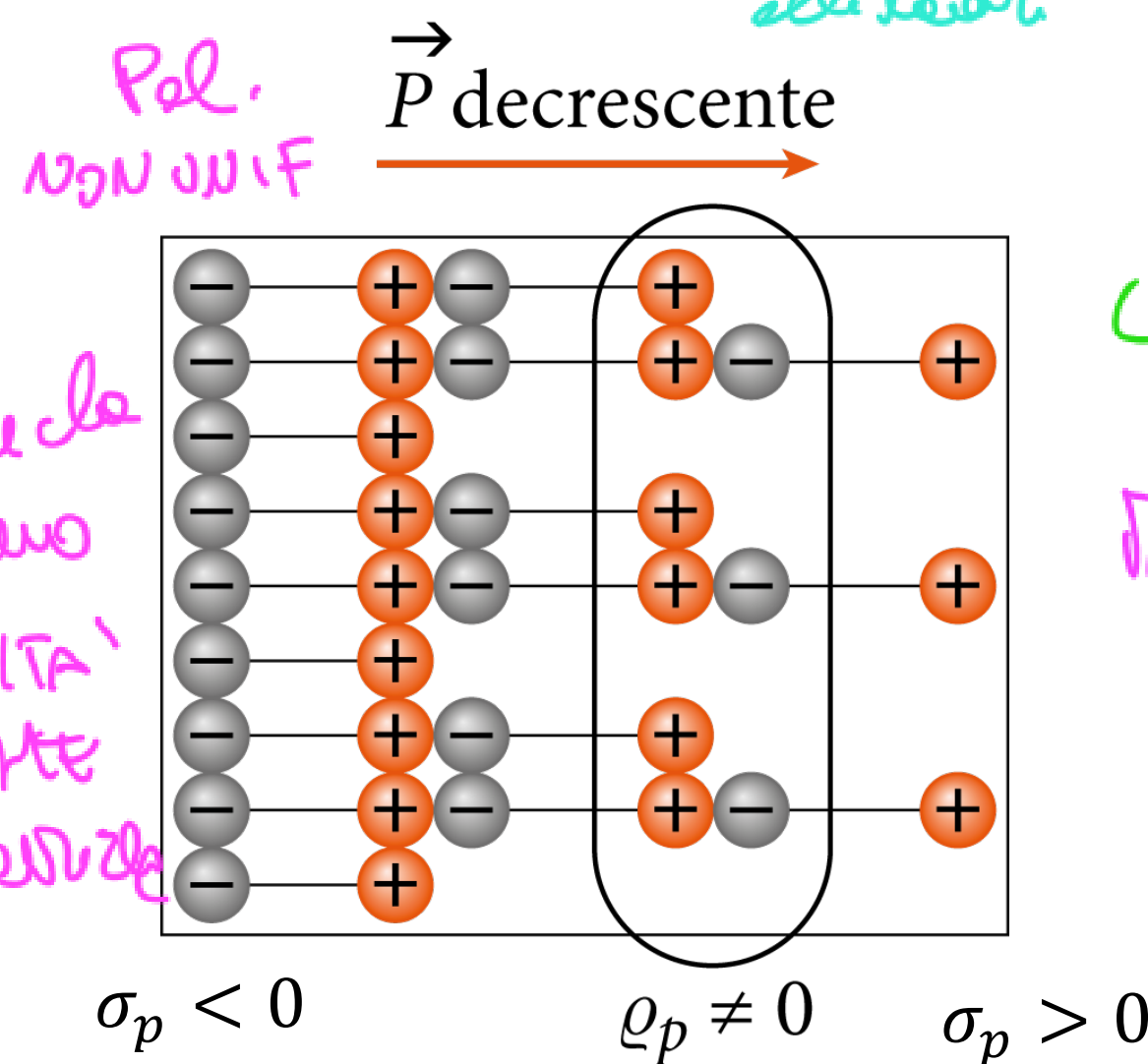
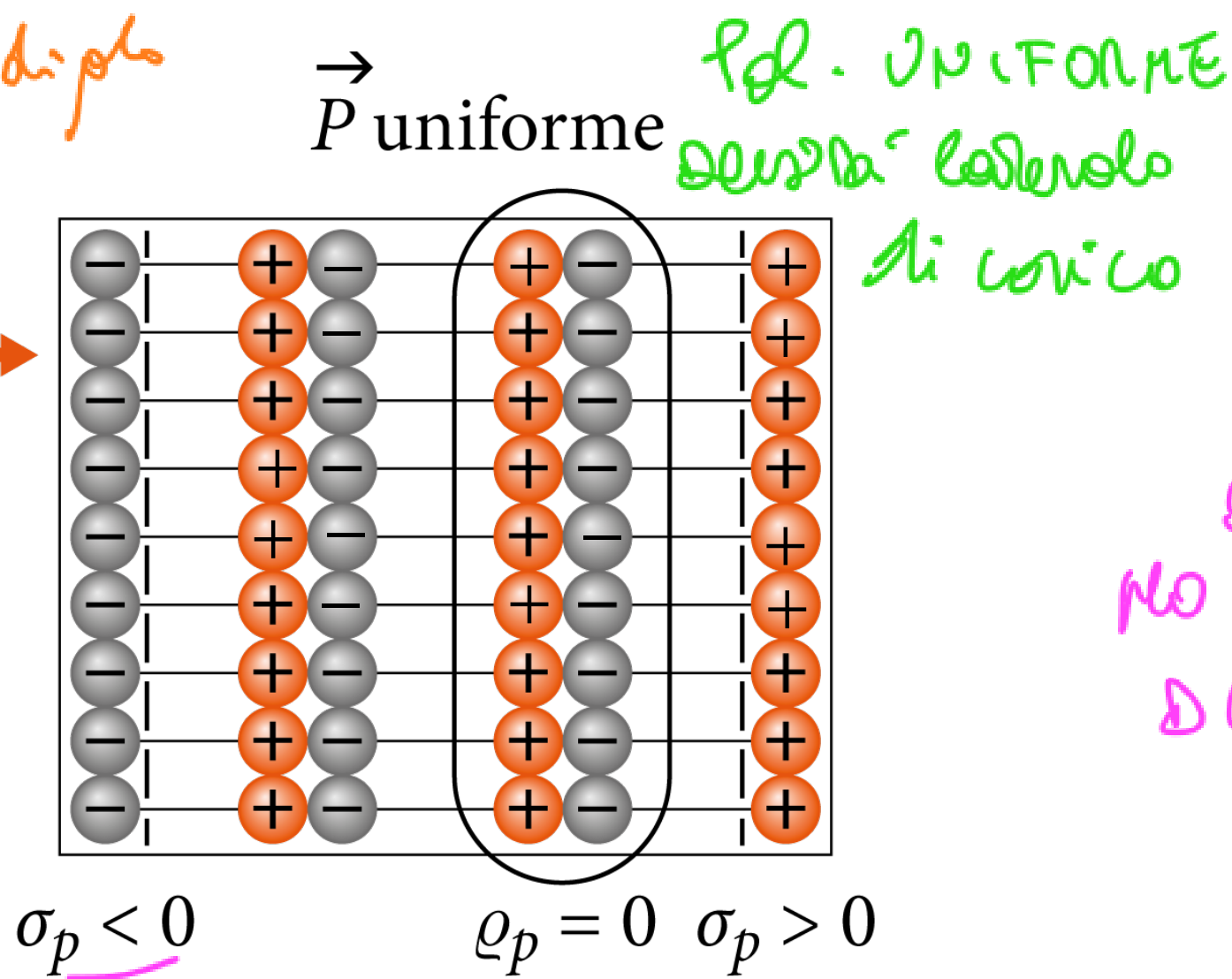
✓ In un dielettrico polarizzato, il vettore di polarizzazione è diverso da zero in ogni punto.

✓ Benché le cariche non siano libere di muoversi, il fatto che $\underline{P}(x, y, z) \neq 0$ implica che la situazione possa schematizzarsi con la presenza all'interno del dielettrico di densità di cariche di polarizzazione volumetriche $\rho_p(x, y, z)$ e con la presenza sulla superficie di densità di cariche superficiali $\sigma_p(x, y, z)$, entrambe non nulle.

✓ Sono cariche aggiuntive che contribuiscono sia al potenziale che al campo elettrico totale nei punti sia interni che esterni al dielettrico.



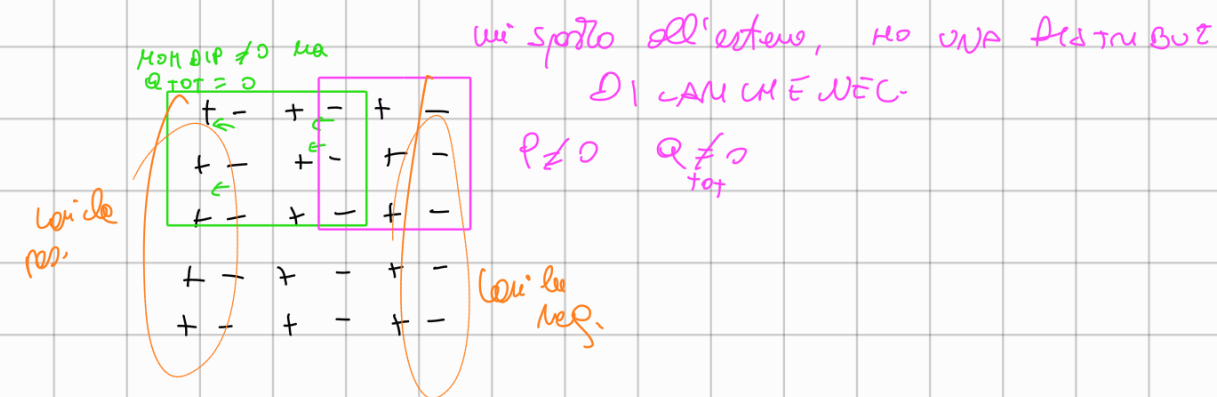
Se momento di dipolo uniforme, non ho densità di carica volumetrica



Carica in più che rimane dopo densità di carica

Sulle superfici appaiono cariche positive e negative, ma all'interno, per ogni volume i momenti di dipolo sono tutti uguali, non si osservano cariche

$\rightarrow$ MOM DEP $\neq 0$ campo elettrico all'esterno della carica
 presente. Prevedo un volume



$\Rightarrow$ In ogni punto del solido $P \neq 0$ ma SULLE SUPERFICI
 ho DENSITA' DI CARICHE $\neq 0$ solo sulle polarizzate.

Polarizzato, uniforme $\Rightarrow$ densita' sup. di carica $\neq 0$
 (all'interno $\neq 0$ la densita' di carica)
 carica di polarizz.

POL. UNIFORME = densita' SUP. di carica
 $P \neq 0 \quad \forall r$

POL. NON UNIF = densita' SUP.
 di carica e DENSITA'
 VOLUMICA di CARICA
 INTERNA

Visione Polarizzata. mi consente di modellare un DIELE POLARIZZ.
 come INSERIRE la DENSITA' di carica
 SUP. e VOLUMICHE di POLARIZZ.

Cariche di polarizzazione

come si lega il vettore polarizzazione alle cariche che nascono?

- ✓ In un dielettrico polarizzato, ad ogni punto $\underline{r}' \equiv (x', y', z')$ può essere associato un momento di dipolo elementare in quel punto

$$d\underline{P}(x', y', z') = \underline{P}(x', y', z') dv'$$

dove dv' è il volumetto elementare nel punto $\underline{r}'$ che genera?

- ✓ Il potenziale elementare generato in un punto di osservazione $\underline{r} \equiv (x, y, z)$ interno od esterno al dielettrico polarizzato è

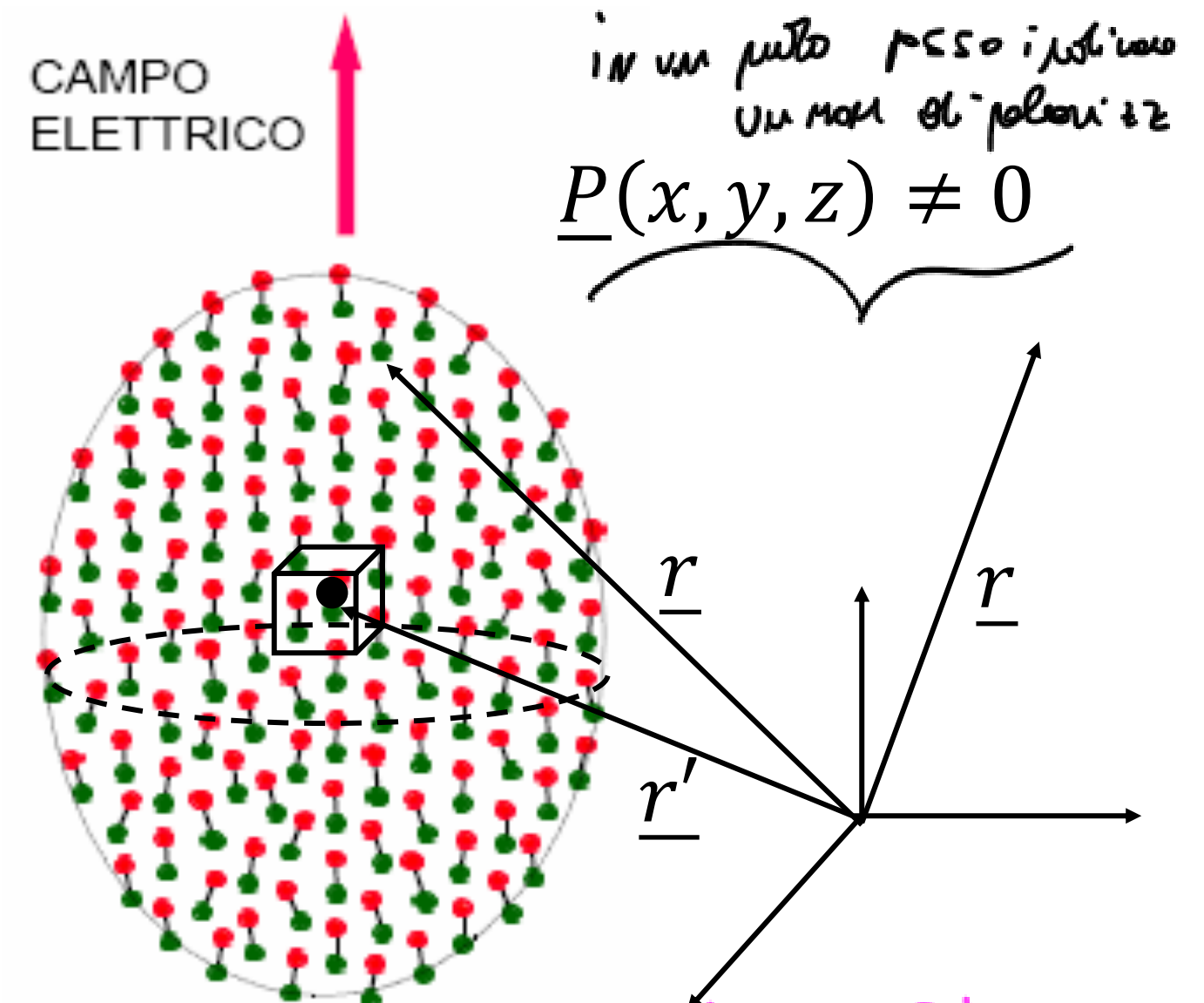
pot. in $\underline{r}$ generato da $d\underline{P}(\underline{r}')$

$$dV(x, y, z) = k_e \frac{\underline{P}(x', y', z') \cdot (\underline{r} - \underline{r}') dv'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

pot. elementare generato

della sorgente $\underline{r}'$ dato dal Mom di dip elementare $d\underline{P}(\underline{r}')$ e genero del vettore polariz. volume (cariche di volume)

- ✓ Il potenziale totale si ottiene integrando sul volume dove il vettore di polarizzazione è diverso da zero



potenziale dovuto alle polarizzazioni

$$V(x, y, z) = k_e \iiint_V \frac{\underline{P}(x', y', z') \cdot (\underline{r} - \underline{r}') dv'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

da sorgente

pot ≠ anche all'esterno, poiché dielettrico è polarizzabile

pot. totale in un punto dato

INTEGRANDO sul volume di tutto i contributi del vettore polariz.

✓ t.c. $\underline{P}(\underline{r}') \neq 0$

Cariche di polarizzazione *si può dimostrare*

✓ Vale la seguente identità

$$\frac{(\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} = \nabla' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

Trucco

grad. su $\underline{r}'$ di una funzione scalare

✓ Il potenziale totale diventa

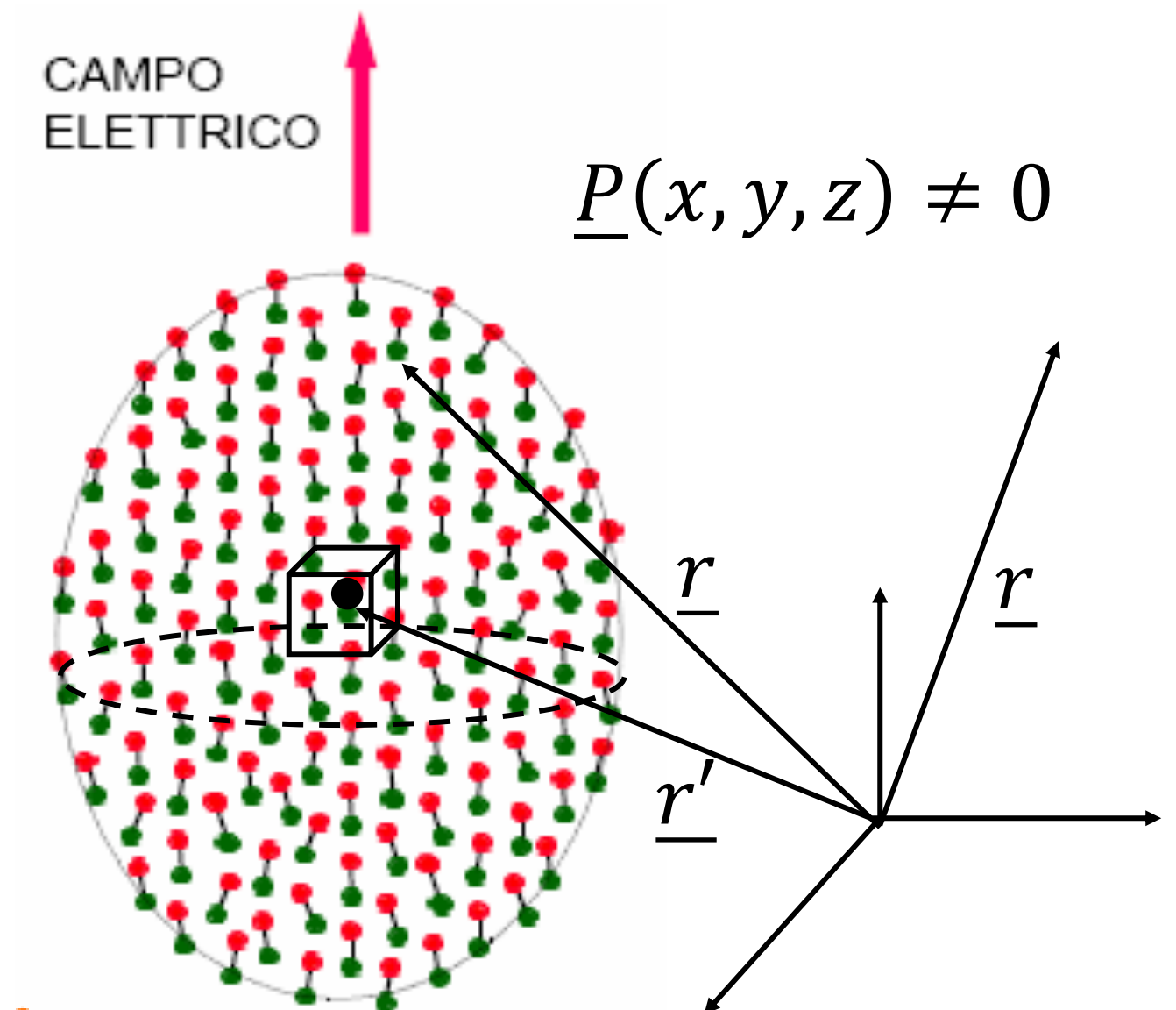
$$V(x, y, z) = k_e \iiint_V \underline{P}(x', y', z') \cdot \nabla' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} dv'$$

✓ Utilizzando l'identità vettoriale

$$\nabla \cdot (f \underline{A}) = f \nabla \cdot \underline{A} + \underline{A} \cdot \nabla f \quad \longrightarrow \quad \underline{A} \cdot \nabla f = \nabla \cdot (f \underline{A}) - f \nabla \cdot \underline{A}$$

Scrivo integrale come 2 contributi.

$$\underline{P}(x', y', z') \cdot \nabla' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \nabla' \cdot \left[\frac{\underline{P}(x', y', z')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right] - \frac{\nabla' \cdot \underline{P}(x', y', z')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$



Cariche di polarizzazione

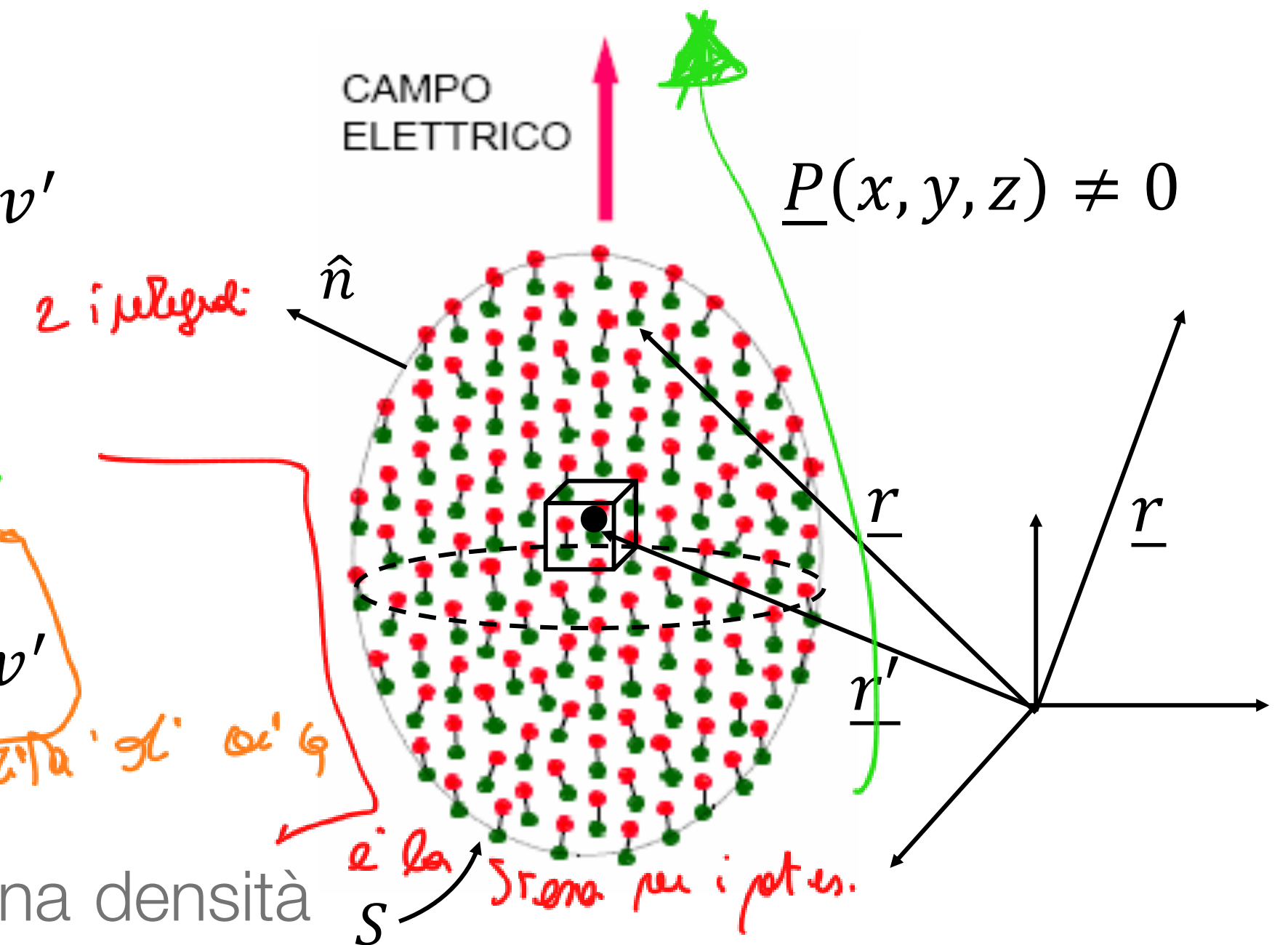
- ✓ Il potenziale totale diventa

$$V(\underline{r}) = k_e \iiint_V \nabla' \cdot \left[\frac{\underline{P}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right] dv' + k_e \iiint_V \frac{[-\nabla' \cdot \underline{P}(\underline{r}')]}{|\underline{r} - \underline{r}'|} dv'$$

- ✓ Applicando il teorema della divergenza al primo integrale

Pot derivare alla derivata
equivalente a calcolare
INTEGRANTE sulla ∂S
P.M
e sul valore V

$$V(\underline{r}) = k_e \oint_S \frac{\underline{P}(\underline{r}') \cdot \hat{n}}{|\underline{r} - \underline{r}'|} ds' + k_e \iiint_V \frac{[-\nabla' \cdot \underline{P}(\underline{r}')] }{|\underline{r} - \underline{r}'|} dv'$$



- ✓ Le quantità $\underline{P} \cdot \hat{n}$ e $-\nabla' \cdot \underline{P}$ hanno le dimensioni rispettivamente di una densità superficiale di carica e di una densità volumetrica di carica.
- ✓ La precedente espressione può essere interpretata come il potenziale generato da due distribuzioni continue di cariche di polarizzazione o legate

il potenziale può essere pensato come
Per calcolarlo ho bisogno di sapere
il valore di ϕ in $\mathbf{r}$.

$$\begin{aligned}\sigma_p(\underline{r}') &= P(\underline{r}') \cdot \hat{n} & \frac{C}{m^2} \\ \rho_p(\underline{r}') &= -\nabla' \cdot \underline{P}(\underline{r}') & \frac{C}{m^3}\end{aligned}$$

Movimento, movimento,
e lo sviluppo di un campo di
calcolo volume, fenomeni
e volumetrici

Sistema di coniche legate superficiali e volumetriche

Potenziale e campo elettrico

Stato di polarizzazione lo descrivono usando le cariche legate
difficile di carica continua sp. e di-
carica continua volumetrica

✓ Il potenziale dovuto alle cariche legate (non libere di muoversi) diventa

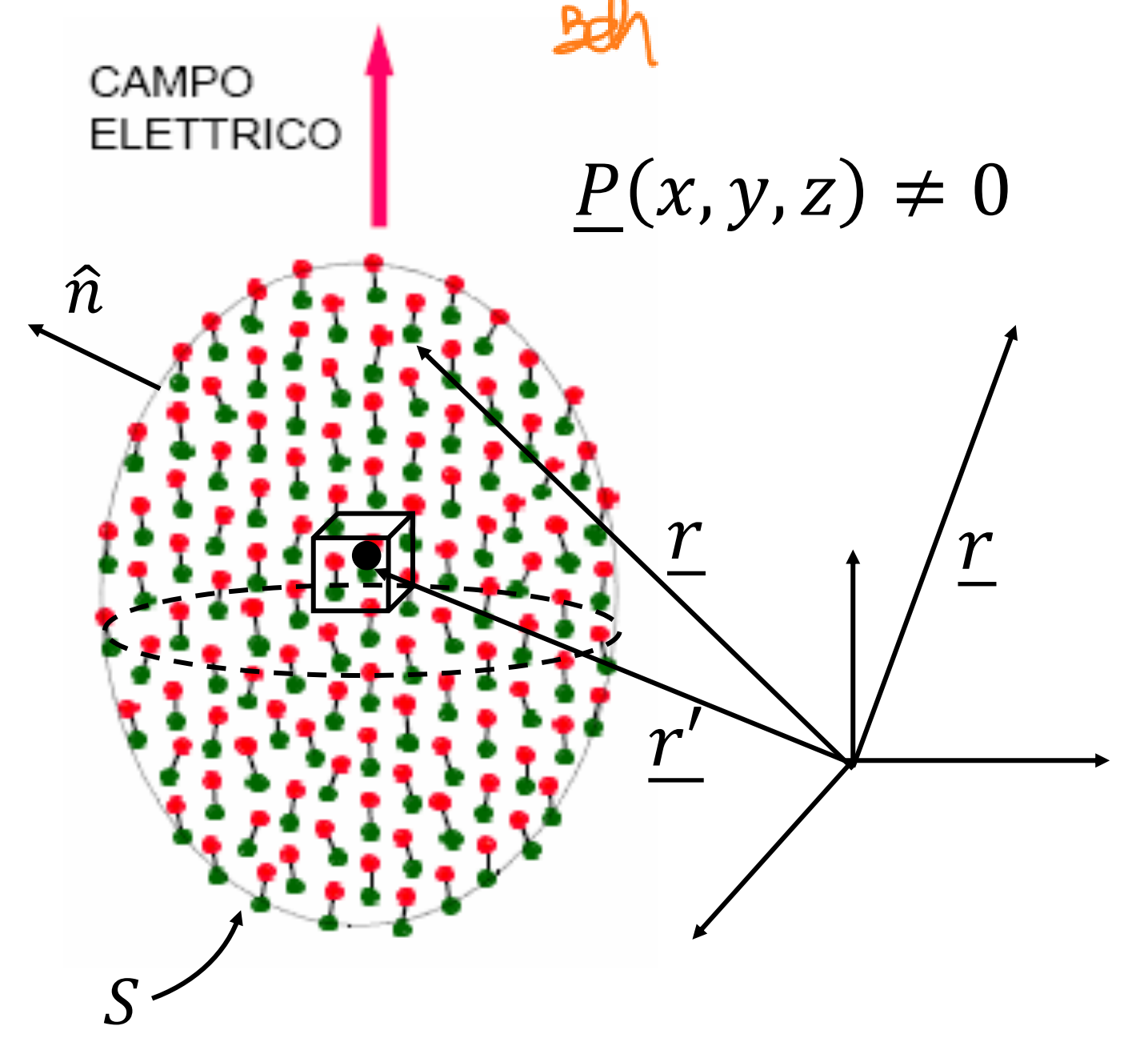
Cariche libere (es. conduttori) + Cariche legate, le posso trattare come cariche. Come calcolo P?
Beh

a lavoro di P ho definito

$\sigma_p(r) = \underline{P}(r) \cdot \hat{n}$ $\frac{C}{m^2}$
r ∈ sup

$$V(\underline{r}) = k_e \oint_S \frac{\sigma_p(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} ds' + k_e \iiint_V \frac{\rho_p(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} dv'$$

pos. carica sulla sup *pos. carica nel volume*



$\underline{P}(x, y, z) \neq 0$

✓ Se il vettore polarizzazione è uniforme nel dielettrico, si hanno solo cariche di polarizzazione superficiali.

✓ Ricordando che $\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla V(\underline{r})$ e che $\nabla \left[\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right] = -\frac{(\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$

$\rho_p(r) = -\nabla \cdot \underline{P}(r)$ $\frac{C}{m^3}$
r ∈ Volume / superf.

$$\underline{E}(\underline{r}) = k_e \oint_S \frac{\sigma_p(\underline{r}')(\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} ds' + k_e \iiint_V \frac{\rho_p(\underline{r}')(\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} dv'$$

=> Se so qualcosa sul P, so tutto
Modello del dielettrico con
un insieme con insieme di
cariche superficiali e volume
di polariz.

Conosco P, trovo sigma, rho e con loro trovo V
Trovo V, trovo E(r) = -nabla V(r)

CARICHE LEGATE, NON LIBERE DI MUOVERSI, MA PIU' EFFICACI DEVO PER STABILIRE (campo el. e V)

materiale puro: stesse caratteristiche materiali, indistinguibili non come
 isotropo: stesse valori medi di ρ e μ uguali, orient. simili

Campo elettrico

- ✓ Il campo totale è quindi dato dalla sovrapposizione dei contributi generati dalle cariche libere e da quelle legate.

$$\underline{E}(\underline{r}) = k_e \iint_S \frac{\sigma_p(\underline{r}')(\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} ds' + k_e \iiint_V \frac{\rho_p(\underline{r}')(\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} dv'$$

Se materiale

- ✓ Se i momenti dipolari $\langle \underline{p}_m \rangle$ sono tutti uguali, come avviene in un materiale omogeneo e isotropo

$$\langle \underline{p}_m \rangle = \alpha \underline{E}_l$$

$$\underline{P}(x, y, z) = \frac{\Delta N}{\Delta V} \alpha \underline{E}_l = n \alpha \underline{E}_l$$

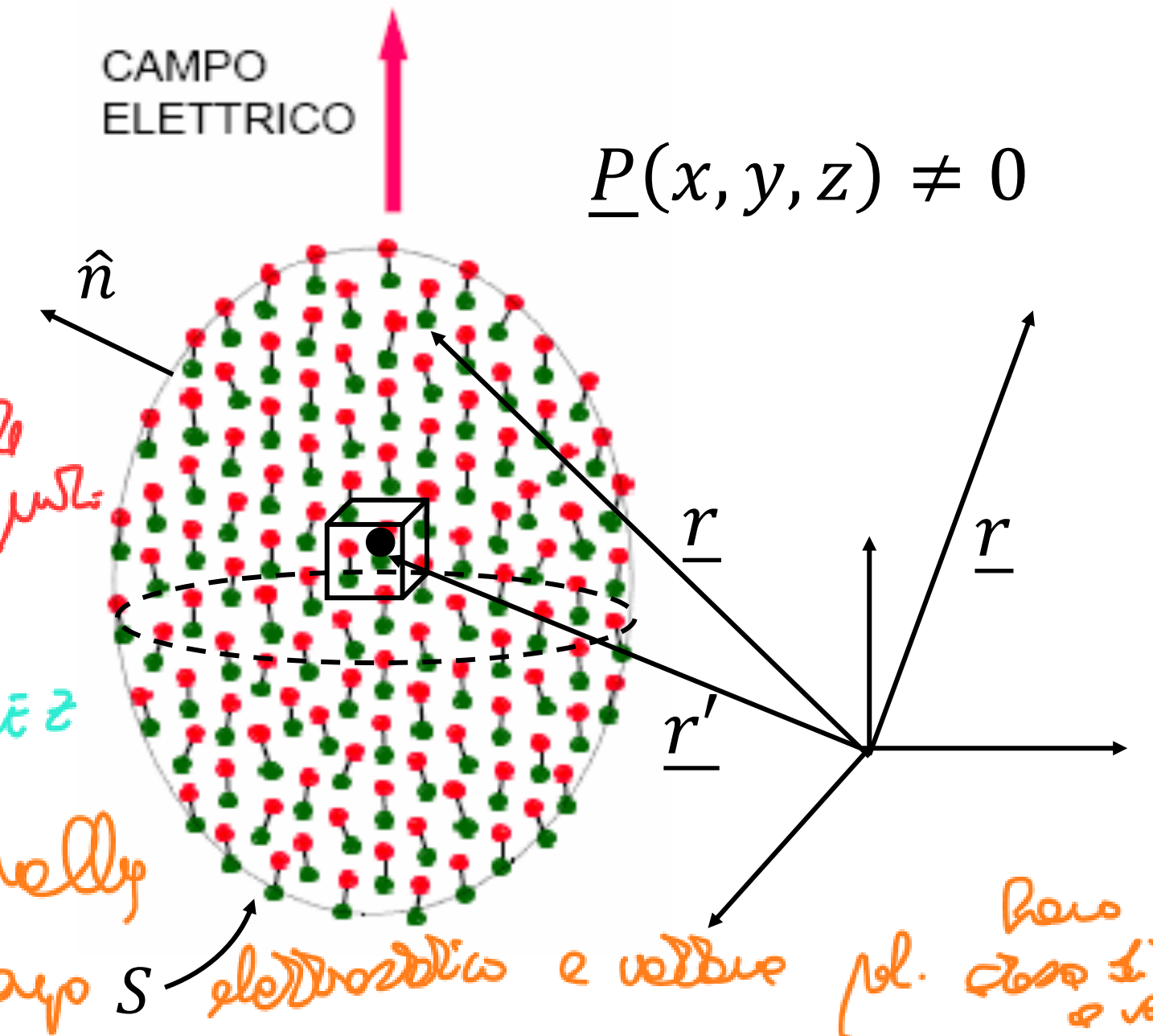
isotropo, il verso e la direzione del dipolo è la stessa del campo elettrico

n Numero di molecole per unità di volume

isotropo: $\underline{E}_l$ e $\underline{P}$ sono nella stessa direzione

$\alpha = \alpha_d + \alpha_0$ Polarizzabilità molecolare totale

Causa e effetto nella stessa direzione. Campo $\underline{S}$ elettrostatico e vettore pol. stesso verso



- ✓ Il vettore polarizzazione in un punto di un dielettrico omogeneo ed isotropo, per quanto detto, sarà in generale parallelo al campo elettrico locale in quel punto. P dipende anche dal campo el. TOTALE in quel punto (campo interno e esterno)
- ✓ Purtroppo per conoscere la distribuzione delle cariche all'interno del dielettrico, si deve conoscere la polarizzazione in quel punto che dipende dal campo totale locale in quel punto, cioè anche dal campo generato nel punto dalle altre molecole del dielettrico (e dalle cariche libere). Ma a sua volta lo stato di polarizzazione delle altre molecole dipende anche dalla polarizzazione della molecola nel punto considerato per cui, in sostanza, il campo totale compare come incognita anche nell'integranda.

$$\underline{P}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\Delta m} \frac{\underline{p}_m}{\Delta V} \quad \text{con} \quad \underline{p}_m = \alpha \underline{E}_l$$

Per sapere $\underline{V}$ devo sapere $\underline{V}$ e viceversa...
 eq. integrale

$$\underline{P}(\underline{r}) = \epsilon_0 \chi_e(|\underline{E}|, \underline{r}) \underline{E}(\underline{r})$$

SUSCETTIVITÀ DIELETTICA

dipende dalla temperatura,

nei materiali

"LINEARI",

OMOGONEI E ISOTROPI

$$\underline{P}(\underline{r}) = \epsilon_0 \chi_e \underline{E}(\underline{r})$$

χ_e
costante

campo elettrico
interno, locale

χ_e è costante

dato voltaggio $\Delta V = P(r)$

infin

$$dP(r) = P(r) dr$$

$$V(r) = \int_{\text{int}}^{\text{ext}} \frac{\rho(r') \cdot \hat{m}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d\tau + k_e \int \frac{(-\nabla \cdot \underline{P}(r'))}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d\tau$$

$\rho(r') \leq \frac{1}{m^3}$

$\rho(r') \leq \frac{1}{m^3}$

ρ dip. da campo esterno e interno

Oggi: cosa succede se sottopongo un dielettrico

ad un campo?

vedere gli spostamenti
dipende dal campo elettrico locale

NOTO il valore di polarizzazione

$$\sigma_p(r) = \underline{P}(r) \cdot \underline{n} \Big|_{r \in S} \quad \frac{C}{m^2}$$

$$\rho_p(r) = -\nabla \cdot \underline{P}(r) \Big|_{r \in V} \quad \frac{C}{m^3}$$



con $\underline{P}$ noto $\rightarrow$ calcolare V ed $\underline{E}$, ma $\underline{P}$ dipende dal campo locale
eq. integrale