

Teorema di Gauss nei dielettrici

var

$$\oint_S \underline{E}(\underline{r}) \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Se nel volume ci sono
elettroni polarizz
dal campo, Q dato da
cariche libere
e legate

- ✓ Dalle considerazioni fenomenologiche che sono state effettuate ci aspettiamo che se un dielettrico viene sottoposto all'azione di un campo elettrostatico si **polarizza**.
- ✓ Lo stato di polarizzazione è descritto dal vettore di polarizzazione $\underline{P}(x, y, z)$ che rappresenta un momento di dipolo per unità di volume.
- ✓ Per dielettrici omogenei isotropi e campi non troppo intensi, $\underline{P}(x, y, z)$ è proporzionale al campo elettrico totale che agisce all'interno del dielettrico.
- ✓ Gli effetti della polarizzazione possono essere descritti con la presenza all'interno del dielettrico di densità di cariche di polarizzazione volumetriche $\rho_p(x, y, z)$ e con la presenza sulla superficie di densità di cariche superficiali $\sigma_p(x, y, z)$, entrambe non nulle.

ricap dato volume ΔV e $\underline{P}(\underline{r})$

$$d\underline{P}(\underline{r}) = \underline{P}(\underline{r}) dV$$

inf

$$V(\underline{r}) = \int_{\text{int}} \frac{\rho_p(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} dV' + k_e \oint_S \frac{\sigma_p(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} dS$$

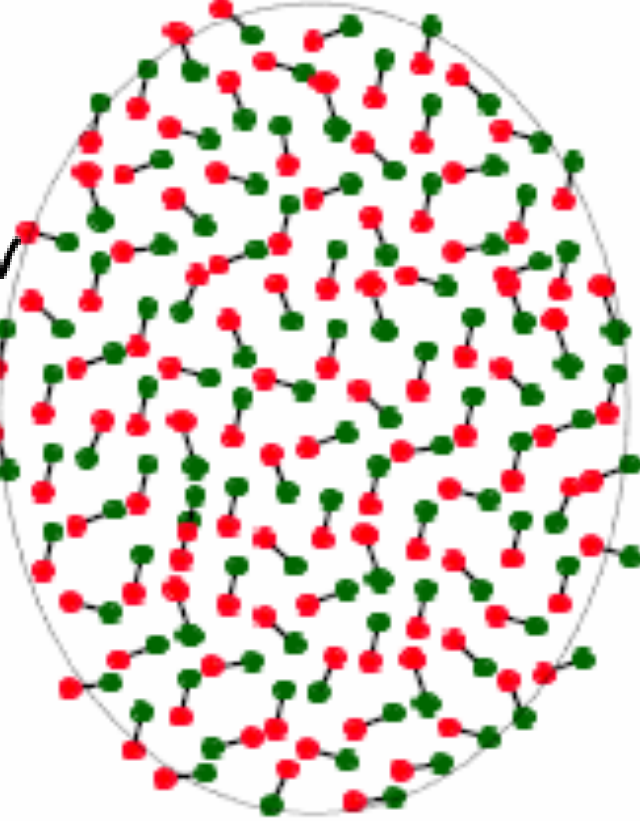
int

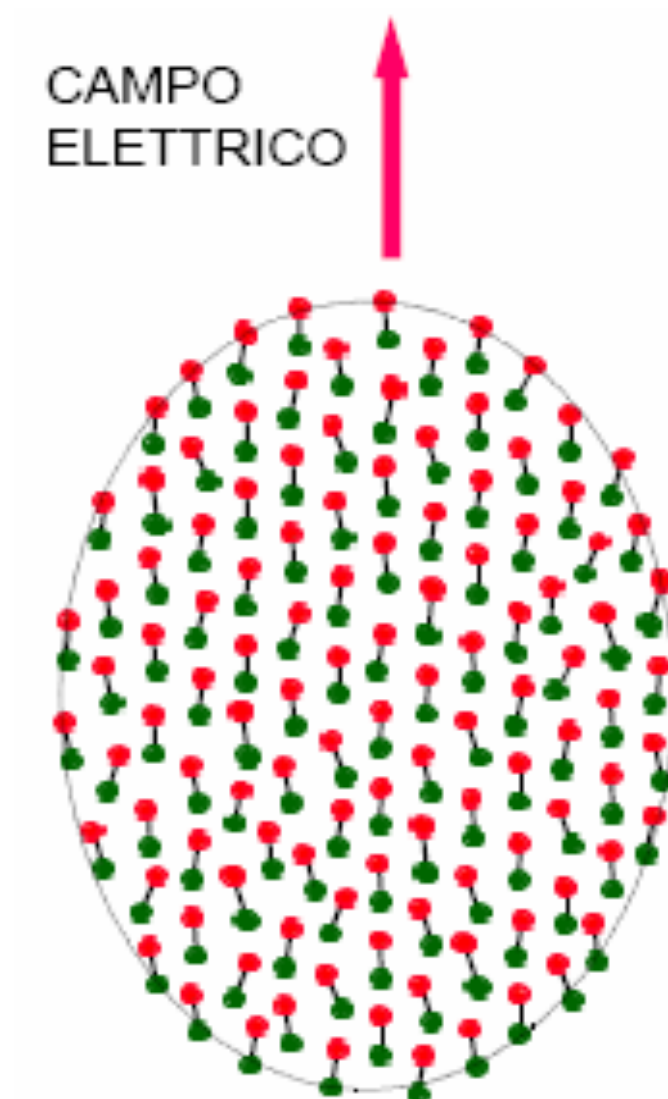
$\sigma_p(\underline{r}') \propto \underline{P}(\underline{r}')$

$\rho_p(\underline{r}') \propto -\nabla \cdot \underline{P}(\underline{r}')$

$\underline{P}(\underline{r}) = \epsilon_0 \chi \underline{E}$

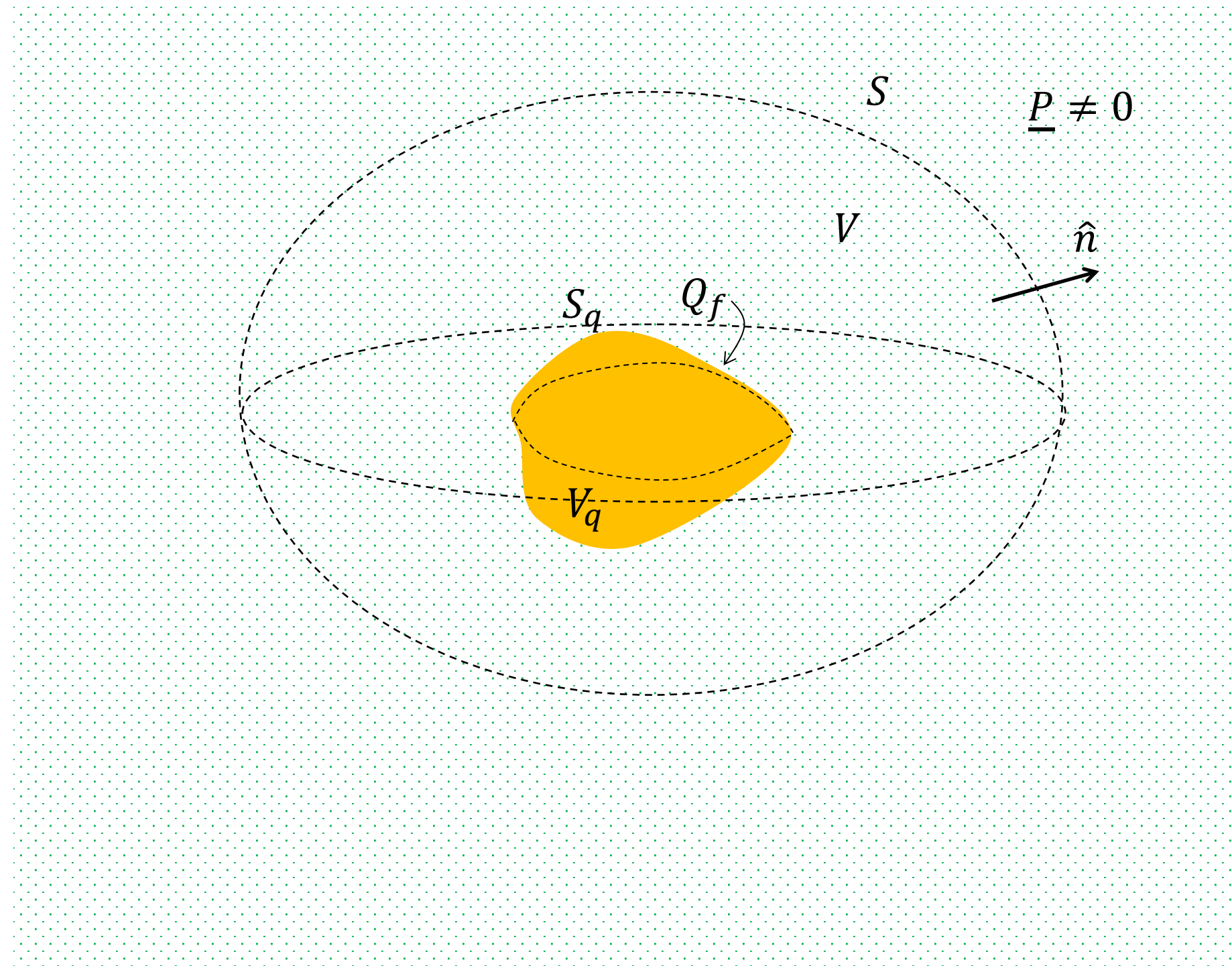
$\underline{P}(\underline{r}) = n \alpha \underline{E}$





Teorema di Gauss nei dielettrici

- ✓ Consideriamo una regione di dielettrico in cui sia presente una carica libera Q_f distribuita ad esempio sulla superficie di un conduttore di volume V_q e superficie S_q .



- ✓ Consideriamo una superficie di Gauss di volume V e superficie S , tutta interna al dielettrico, che racchiude anche tutta la carica Q_f .

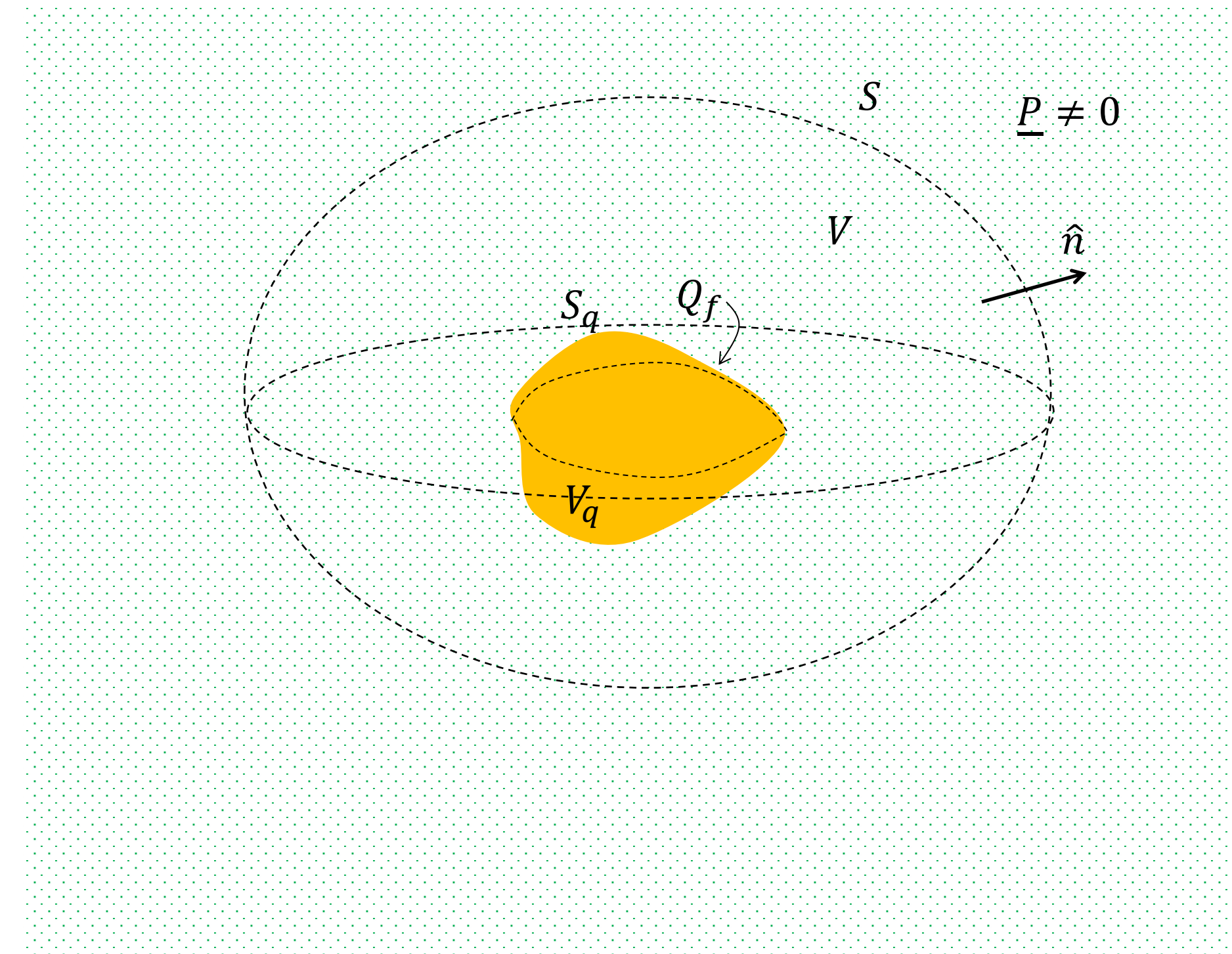
Teorema di Gauss nei dielettrici

- ✓ Il teorema di Gauss applicato alla superficie S vale anche per regioni in cui è presente il dielettrico a patto di includere nelle cariche anche le cariche di polarizzazione Q_p presenti nel volume V

$$\oiint_S \underline{E}(\underline{r}) \cdot \hat{n} \, ds = \frac{Q_f}{\epsilon_0} + \frac{Q_p}{\epsilon_0}$$

- ✓ Il totale delle cariche di polarizzazione contenute in V è

$$Q_p = \oiint_{S_q} \sigma_p(\underline{r}) \, ds + \iiint_{V-V_q} \rho_p(\underline{r}) \, dv$$



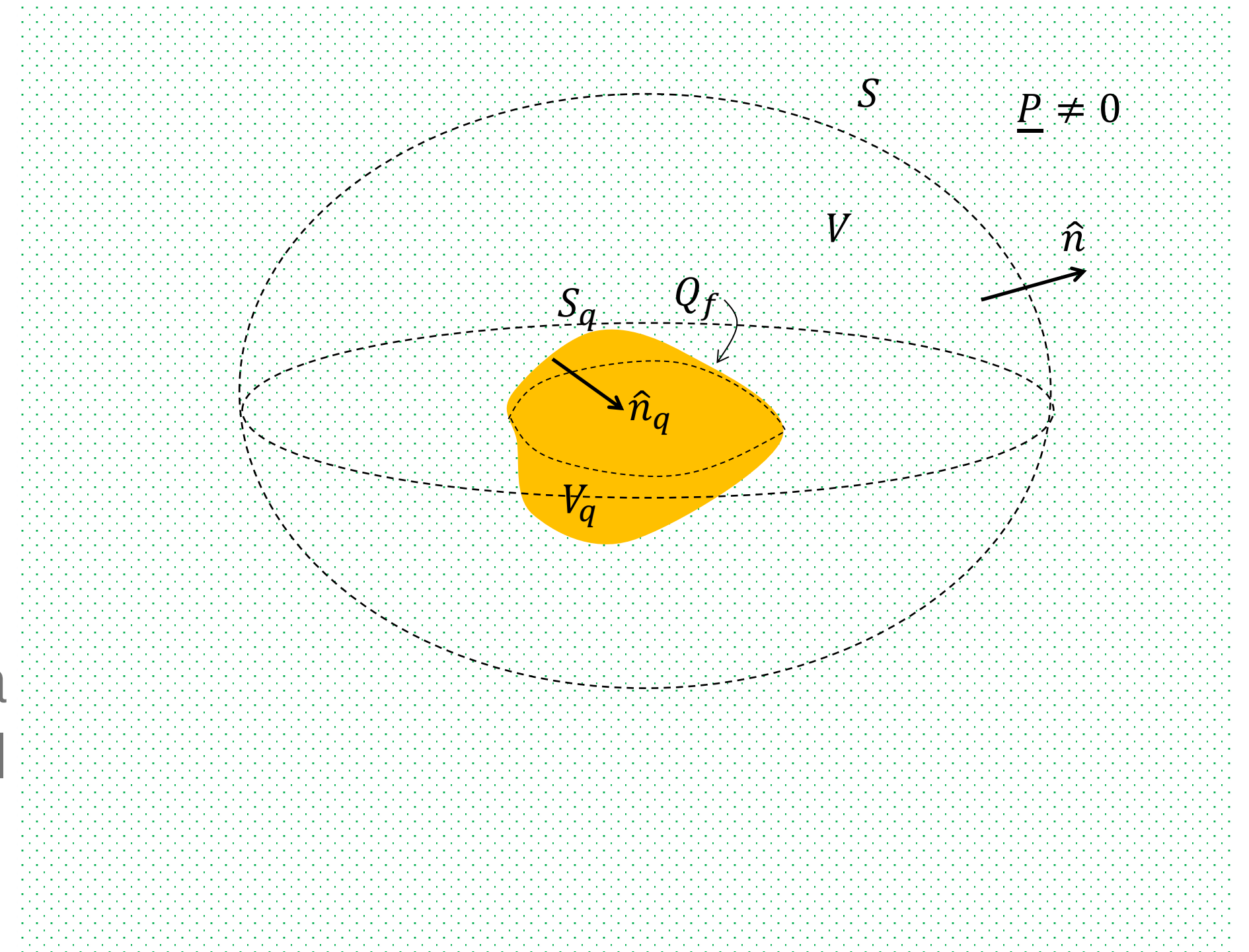
- ✓ La densità superficiale di carica di polarizzazione è presente sulla sola superficie di separazione fisica tra dielettrico e conduttore S_q

Teorema di Gauss nei dielettrici

- ✓ Utilizzando le espressioni delle cariche di polarizzazione in funzione del vettore $\underline{P}(\underline{r})$:

$$Q_p = \oiint_{S_q} \underline{P}(\underline{r}) \cdot \hat{n}_q \, ds + \iiint_{V-V_q} [-\nabla \cdot \underline{P}(\underline{r})] \, dv$$

- ✓ Applicando il teorema della divergenza all'integrale volumetrico della divergenza di $\underline{P}$, tenendo presente che la superficie che delimita il volume $(V - V_q)$ è la superficie $(S + S_q)$.



$$Q_p = \oiint_{S_q} \underline{P}(\underline{r}) \cdot \hat{n}_q \, ds - \oiint_{S_q} \underline{P}(\underline{r}) \cdot \hat{n}_q \, ds - \oiint_S \underline{P}(\underline{r}) \cdot \hat{n} \, ds = - \oiint_S \underline{P}(\underline{r}) \cdot \hat{n} \, ds$$

Teorema di Gauss nei dielettrici

- ✓ La carica totale di polarizzazione contenuta nel volume $(V - V_q)$ è:

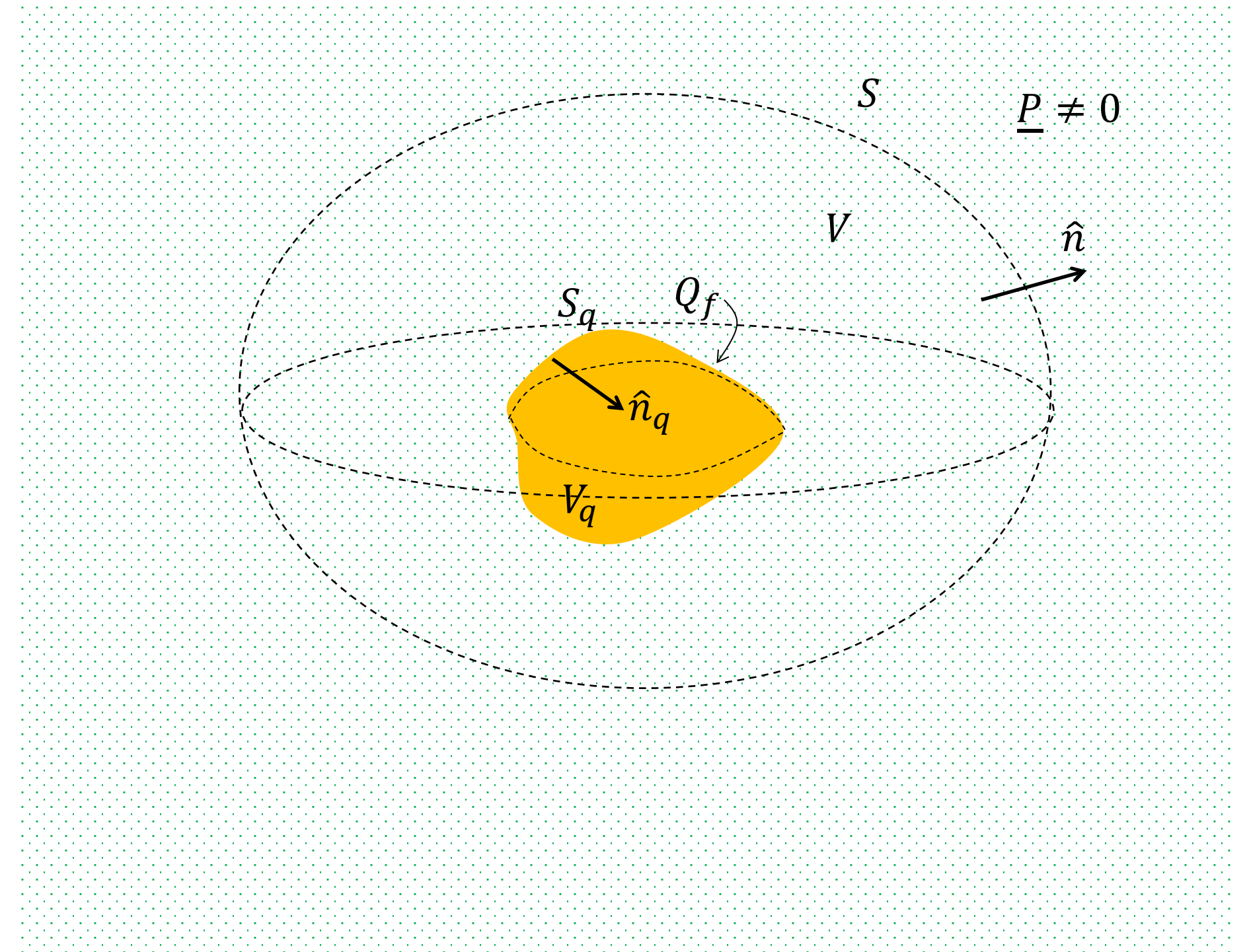
$$Q_p = - \oint_S \underline{P}(\underline{r}) \cdot \hat{n} \, ds$$

- ✓ Sostituendo nell'espressione del teorema di Gauss

$$\oint_S \varepsilon_0 \underline{E}(\underline{r}) \cdot \hat{n} \, ds = Q_f - \oint_S \underline{P}(\underline{r}) \cdot \hat{n} \, ds$$

- ✓ Portando al primo termine l'integrale di superficie

$$\oint_S [\varepsilon_0 \underline{E}(\underline{r}) + \underline{P}(\underline{r})] \cdot \hat{n} \, ds = Q_f$$



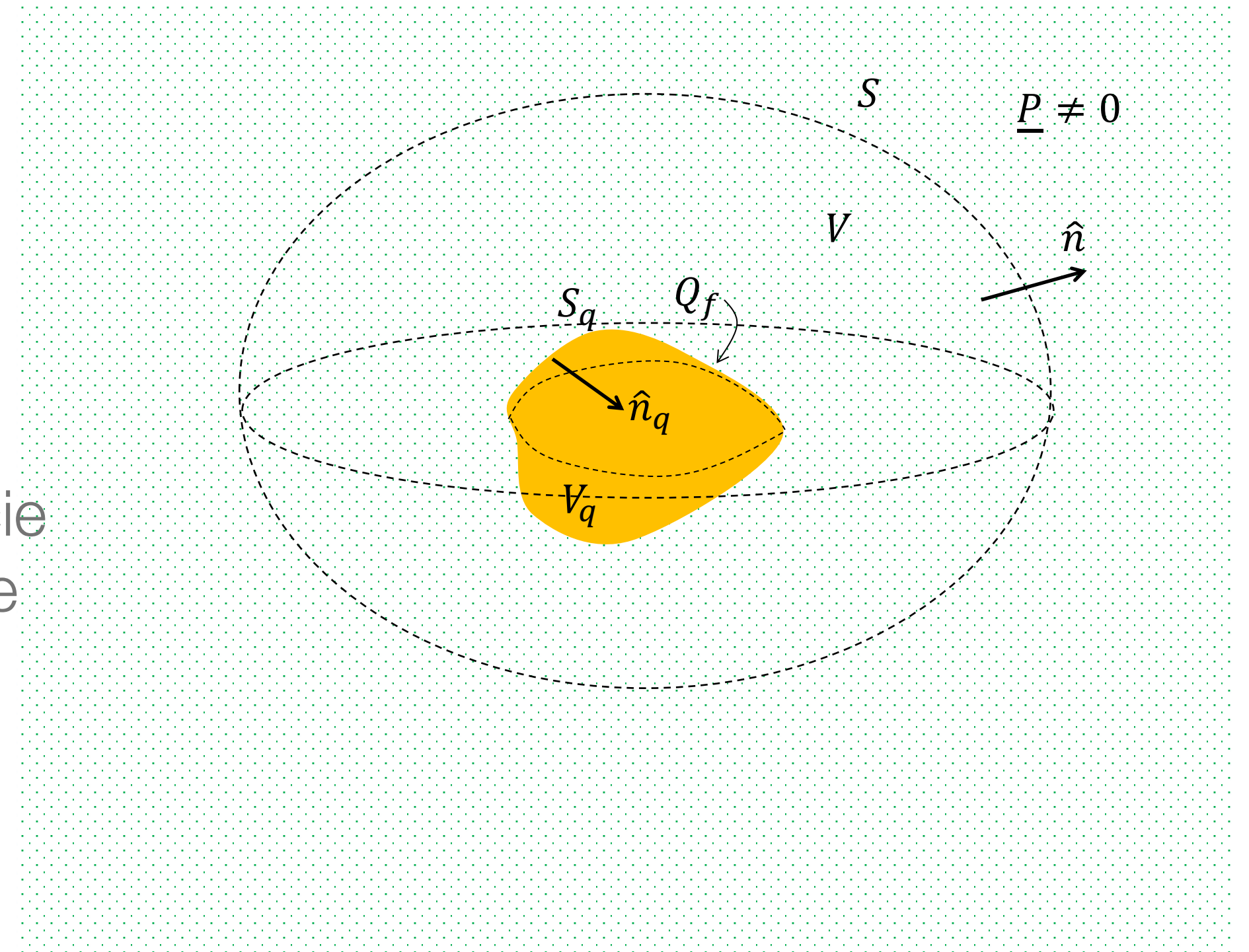
Vettore induzione elettrica

- ✓ Si definisce **vettore induzione elettrica** (o spostamento elettrico) il vettore

$$\underline{D}(\underline{r}) = \varepsilon_0 \underline{E}(\underline{r}) + \underline{P}(\underline{r}) \quad \frac{C}{m^2}$$

- ✓ Il flusso del vettore induzione elettrica attraverso una superficie chiusa S dipende solo dalle **cariche libere** racchiuse dalla superficie

$$\oiint_S \underline{D}(\underline{r}) \cdot \hat{n} \, ds = Q_f$$



Teorema di Gauss in forma differenziale

- ✓ Quando la carica libera può essere rappresentata in termini di integrale di densità volumetrica $\rho_f(\underline{r})$

$$Q_f = \iiint_V \rho_f(\underline{r}) dv$$

- ✓ Sostituendo nella espressione integrale del teorema di Gauss e applicando il teorema della divergenza al primo termine

$$\oiint_S \underline{D}(\underline{r}) \cdot \hat{n} ds = \iiint_V \nabla \cdot \underline{D}(\underline{r}) dv = \iiint_V \rho_f(\underline{r}) dv$$

- ✓ L'uguaglianza vale per ogni punto delle integrande sullo stesso volume per cui si ottiene il Teorema di Gauss in forma differenziale

$$\nabla \cdot \underline{D}(\underline{r}) = \rho_f(\underline{r})$$

