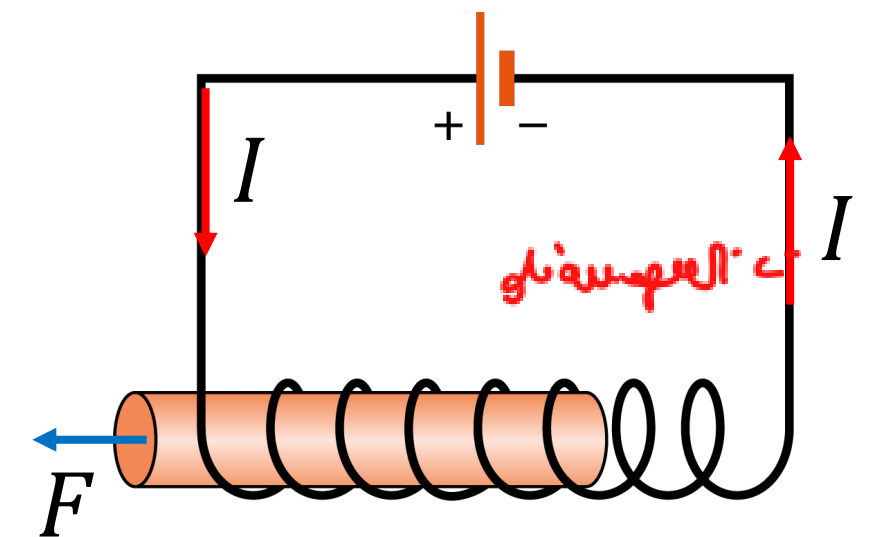
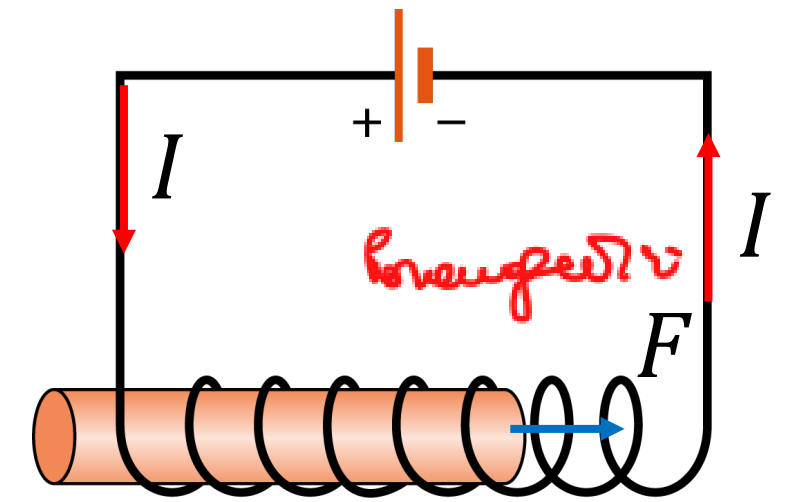
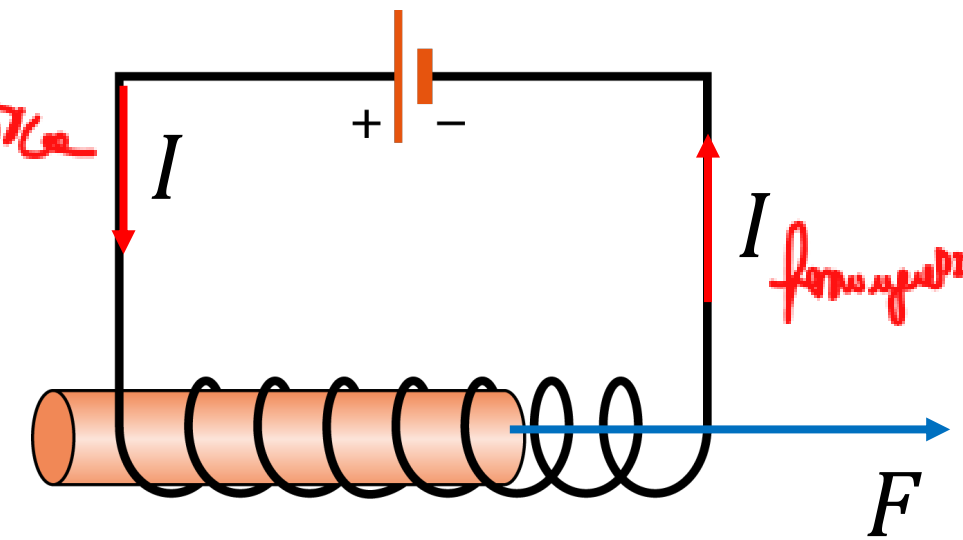


Fenomeni magnetici nella materia

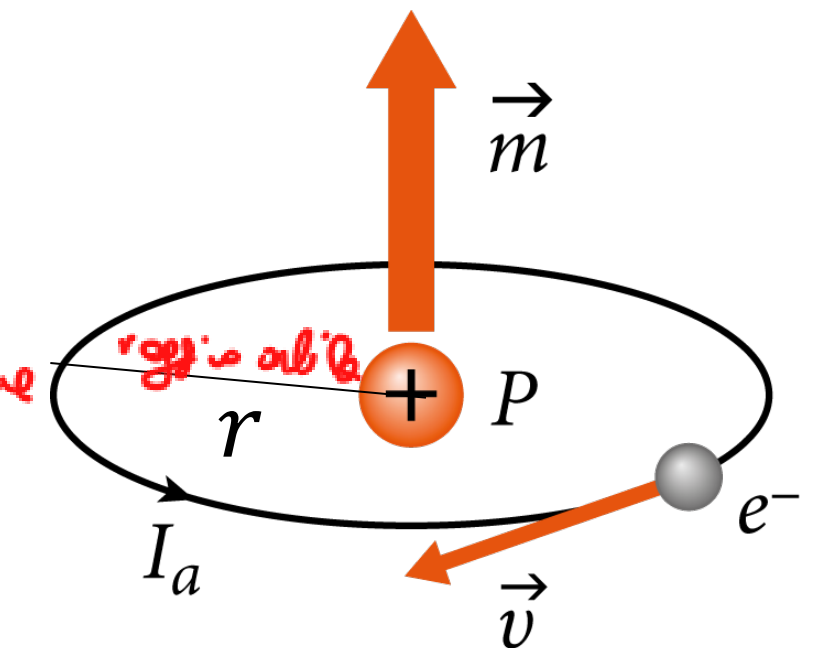
- ✓ Per esperienza quando certi materiali vengono posti in una regione dello spazio in cui è presente un campo magnetico, acquistano proprietà che in generale prima non possedevano:
 - possono subire azioni meccaniche (forze, momenti).
 - possono influenzare il campo magnetico in cui sono immersi.
- ✓ Materiali che presentano tale comportamento sono detti **magnetizzati**.
- ✓ Se inseriamo parzialmente all'interno di un solenoide percorso da una corrente I cilindri di materiale diverso, osserviamo tre tipologie di comportamento.
- ✓ Materiali (ferro, cobalto, nichel, etc.) che sono attratti all'interno con una forza molto intensa (dell'ordine della forza peso o più) verso l'interno del solenoide. Questi sono chiamati **ferromagnetici**.
- ✓ Materiali (alluminio, platino, cromo etc.), che sono attratti anch'essi verso l'interno del solenoide, però da una forza di molti ordini di grandezza inferiore rispetto al caso di sostanze ferromagnetiche. Questi vengono detti **paramagnetici**.
- ✓ Materiali (rame, piombo, zolfo, carbonio, argento etc.), che sono respinti all'esterno del solenoide con forze dell'ordine di grandezza di quelle subite dai materiali paramagnetici. Questi vengono detti **diamagnetici**.
- ✓ Come nel caso dei dielettrici è possibile sviluppare una **teoria macroscopica** dei materiali magnetizzati.

resiste
subiscono influenza
campo indotto magnetico



Modello atomico e momento magnetico orbitale

- ✓ Una piccola spira percorsa da corrente, di momento magnetico $\vec{m}$, è del tutto equivalente, per quanto riguarda i fenomeni magnetici, ad un piccolo ago di materiale magnetizzato, di uguale momento magnetico.
- ✓ Nel modello classico dell'atomo, questo possiede elettroni che percorrono orbite intorno al nucleo in modo simile ad un sistema planetario. Pur con molti difetti, questo modello porta a previsioni in discreto accordo con la teoria corretta che si basa sulla meccanica quantistica.
- ✓ Un elettrone di carica $-e$ in moto con velocità costante $|\underline{v}| = v$ attorno al nucleo su un'orbita circolare di raggio r compie una rivoluzione completa nel tempo $T = 2\pi r/v$.
- ✓ A questo movimento costituisce una piccola spira circolare di corrente $I_a = \frac{-e}{T} = \frac{-ev}{2\pi r}$ (es. per un atomo di idrogeno $I_a \cong 1 \text{ mA}$).
- ✓ A questa spira di corrente è associato un momento magnetico orbitale $\underline{m}_o$ di modulo $m_o = I_a \pi r^2 = -\frac{1}{2} e v r$ (es. per un atomo di idrogeno $m \cong 9.35 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$).



approssimo orbita elettrone ad una spira di corrente

di corrente $\frac{dq}{dt} = -\frac{e}{T}$

$$m_o = -\frac{1}{2} e v r \frac{m_e}{m_e} = -\frac{1}{2} \frac{e L}{m_e}$$

Modello atomico e momento magnetico orbitale

ho una massa che ruota... ho un MOM. ANGOL. associato

- ✓ L'elettrone ha una massa m_e per cui al moto è associabile anche un momento meccanico angolare di ampiezza $L_e = m_e v r$ (quantizzato in meccanica quantistica) orientato in senso inverso a $\underline{m}$.

$$\underline{L} = \underline{r}_i \times m_i \underline{v}_i \quad L = r_i m_i v_i \sin \theta$$

- ✓ Momento magnetico e momento meccanico sono legati dalla relazione $\underline{m} = -\left(\frac{e}{2m_e}\right) \underline{L}_e$

Le orbite (e quindi MOM. ang. orbitale) sono quantizzate

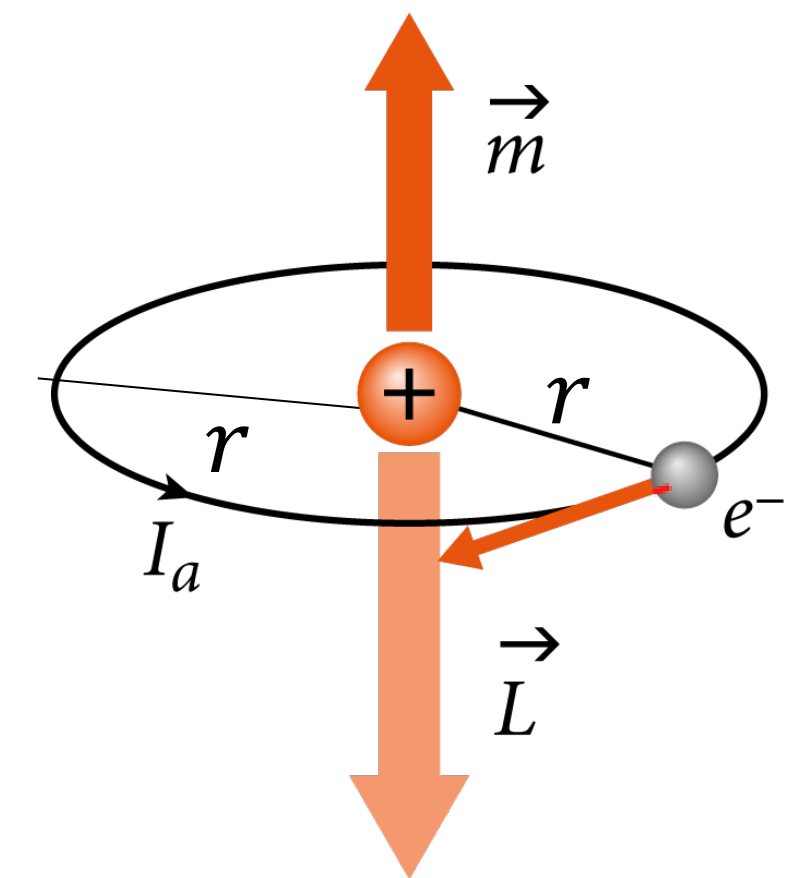
- ✓ In meccanica quantistica il momento angolare orbitale $\underline{L}_e$ di un elettrone può assumere solo valori che siano multipli interi della costante universale $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h costante di Planck) e cioè $\underline{L}_e = 0, \hbar, 2\hbar, \dots$

- ✓ Il modulo del più piccolo momento magnetico orbitale diverso da zero $m_o = -\frac{e\hbar}{2m_e}$ è chiamato *magnetone di Bohr* associato ad un elettrone

anche il MOM. orbitale è quantizzato

MOM. magnetico orbitale e MOM. angolare orbitale sono quantizzati.

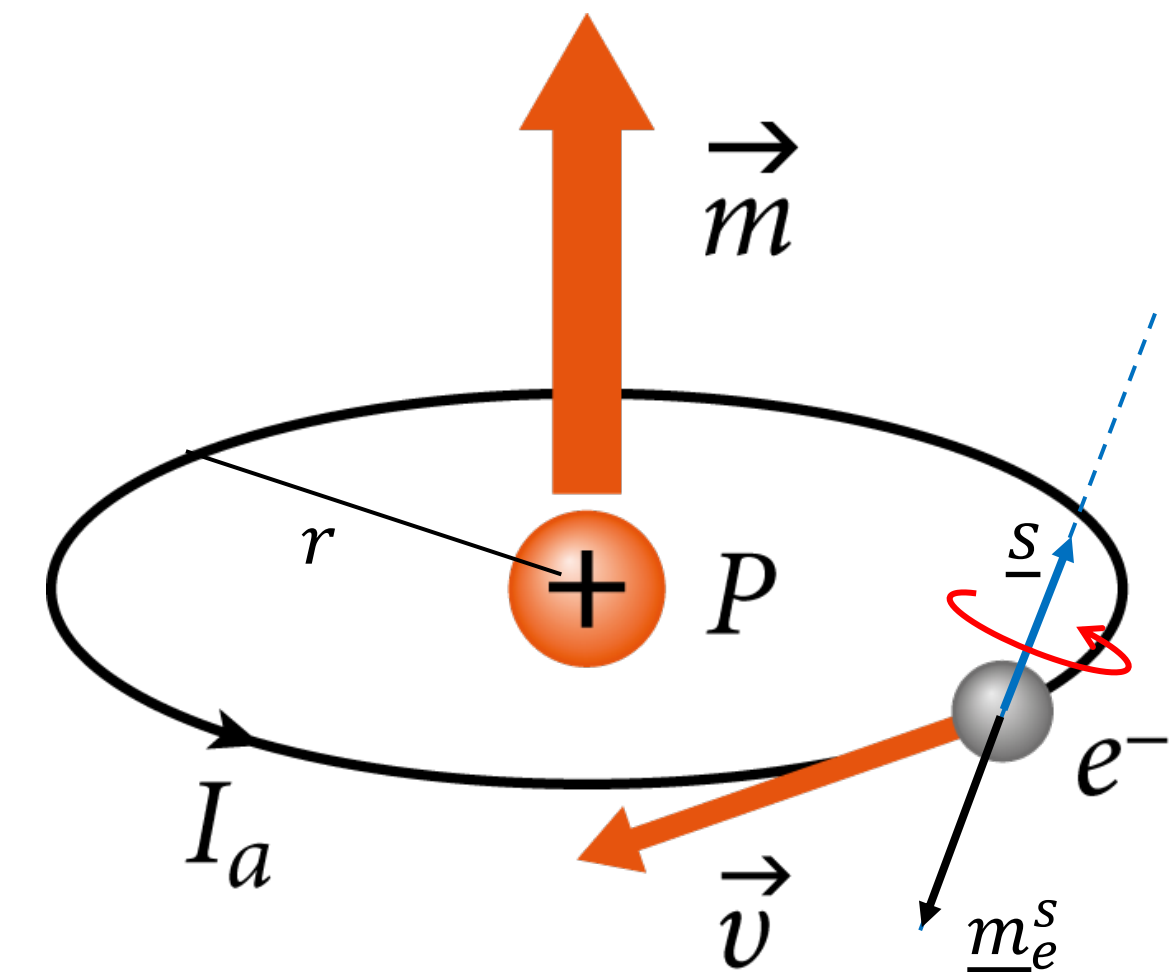
ad ogni elettrone è associato un momento orbitale che è quantizzato



$\underline{m}$ e $\underline{L}$ sono antiparalleli

Modello atomico e momento magnetico intrinseco

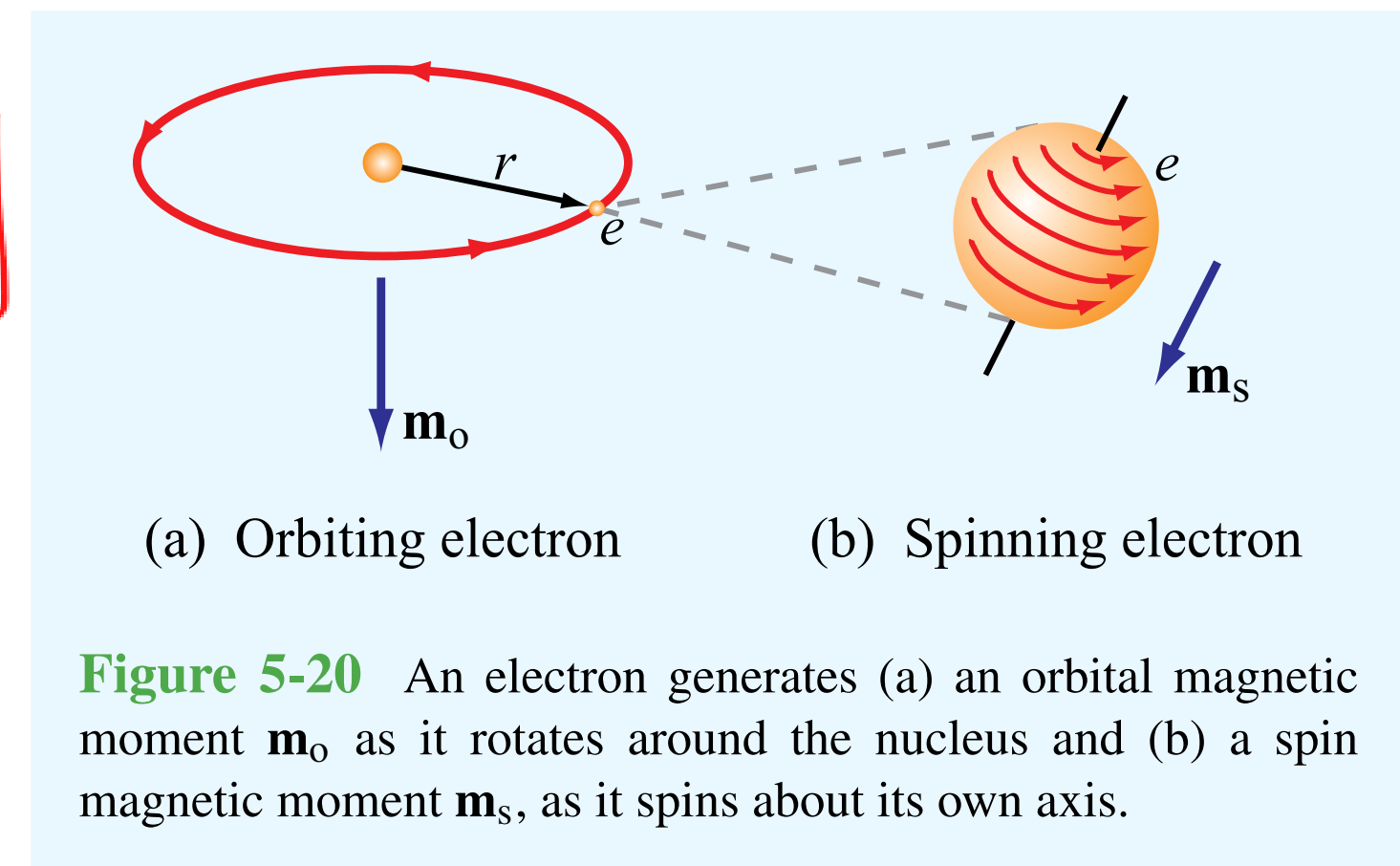
- ✓ In aggiunta al suo momento magnetico orbitale, l'elettrone (così come il protone, il neutrone e altre particelle) possiede anche una *proprietà intrinseca*, chiamata *spin* (trottola), che contribuisce al momento magnetico di spin $\underline{m}_e^s$ (ma anche al momento angolare di spin $\underline{s}$) *elettrone ruota attorno al nucleo e ruota attorno a se stesso... Nota: ruota su se stesso*
- ✓ Secondo il modello classico, l'elettrone può essere immaginato come una *sferetta carica* che ruota anche attorno al suo asse baricentrale mentre sta orbitando intorno al nucleo.
- ✓ L'elettrone *non gira fisicamente su se stesso*. Ha un momento angolare intrinseco come se stesse girando su se stesso, ma la definizione di rotazione riferita ad un punto materiale è priva di significato perché si applica solo ad un corpo rigido, che occupa un certo volume finito nello spazio. Il momento angolare di spin è in realtà un *fenomeno relativistico*.
- ✓ In meccanica quantistica il modulo del momento angolare di spin $\underline{s}$ (stesso per elettrone, protone e neutrone) vale $s = \hbar/2$. *s fisso in un verso o nell'altro (+, -)*
- ✓ Il modulo del momento magnetico di spin dell'elettrone vale $\left[m_e^s = -\frac{e\hbar}{2m_e} \right]$ ed è pari al magnetone di Bohr. *MM. magnetico = N volte magnetone Bohr in base all'orbita* *MM magnetico spin = magnetone Bohr, spin*
- ✓ E' pari al più piccolo momento magnetico orbitale (stato fondamentale dell'idrogeno)
- ✓ Anche il nucleo di un atomo ha un momento magnetico associato dei nucleoni che lo costituiscono. Considerato che la massa di un protone è circa 2000 volte più grande dell'elettrone il suo contributo al momento magnetico intrinseco può essere trascurato. *↳ 1/2000*



Atomi a molti elettroni (I)

MOMENTI magnetici di un atomo sono dovuti solo ai elettroni

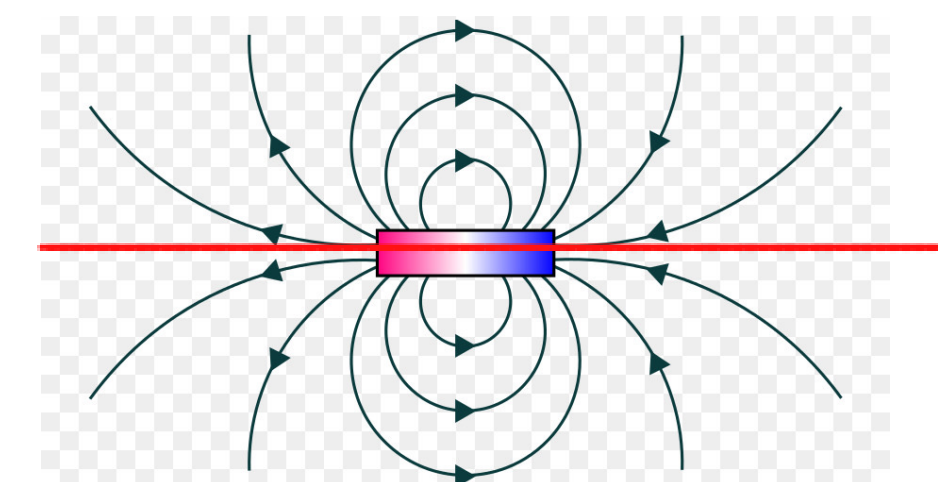
- ✓ Negli atomi contenenti molti elettroni, gli elettroni si accoppiano di solito a due a due con spin di verso opposto, per cui i momenti magnetici di spin si compensano.
- ✓ Tuttavia, atomi con un numero dispari di elettroni possono avere almeno un elettrone non accoppiato e, quindi, un momento magnetico di spin diverso da zero.
- ✓ Sia al moto *orbitale* che al moto di *spin* degli elettroni sono associati momenti magnetici (proporzionali ai momenti angolari).
- ✓ Il momento magnetico totale di un atomo è la somma vettoriale dei momenti magnetici orbitali e di spin.
- ✓ Nella sovrapposizione vanno rispettate precise regole stabilite dalla meccanica quantistica, e in particolare:
 - Principio di esclusione di Pauli: in un sistema atomico non possono coesistere più di due elettroni nello stesso stato orbitale; e in questo caso, i loro spin devono essere antiparalleli.
 - Quantizzazione della proiezione del momento angolare: la proiezione lungo un asse (e in particolare lungo la direzione di un eventuale campo magnetico esterno) del momento angolare orbitale può assumere solo i valori multipli interi di $\hbar$ compresi fra $-l\hbar$ e $l\hbar$, mentre lo spin degli elettroni e dei nucleoni può disporsi solo parallelamente o antiparallelamente a tale direzione.



in un atomo a molti elettroni, atomo può avere un MOM MAGNETICO TOTALE $\neq 0$ solo dalla sovrapp. dei MOM. MAGN degli elettroni e spin

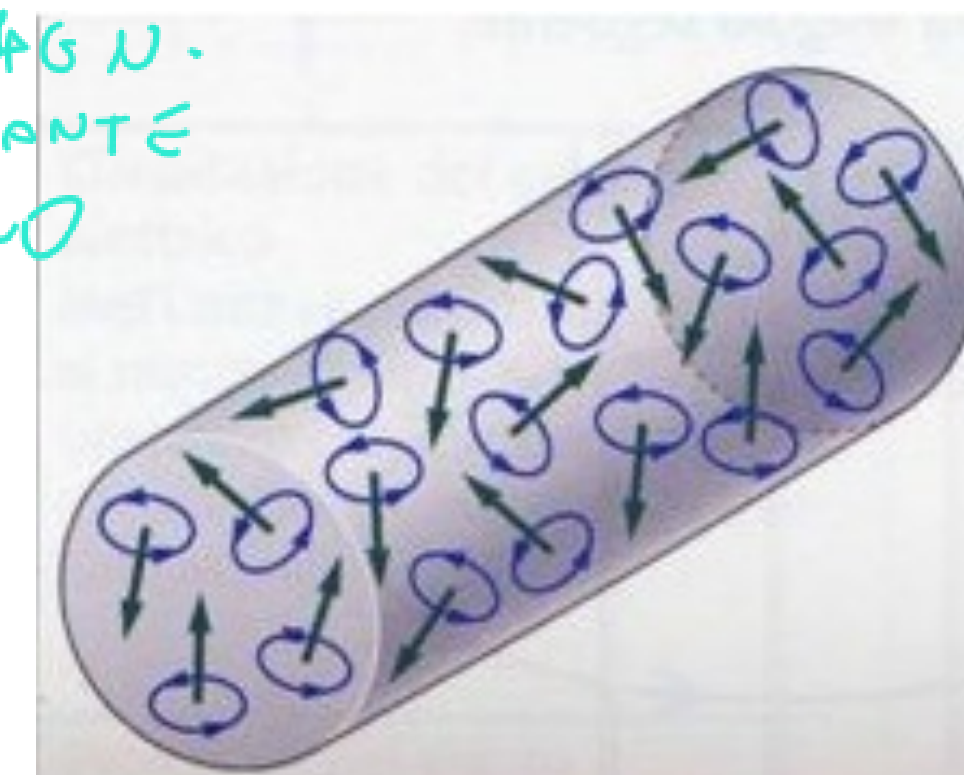
Opi' siamo la UM con. mag. totale, opi' siamo
pro' stata rappresentata come piccolo sistema corrente / AGO
e anche una piccolo corrente atomica

- | Atomo o Ione | Momento magnetico
($10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$) |
|------------------------------------|--|
| Idrogeno (H) | 9.27 |
| Elio (He) | 0 |
| Neon (Ne) | 0 |
| Ione Cerio (Ce^{3+}) | 19.8 |
| Ione Itterbio (Yb^{3+}) | 37.1 |



- MEM LONG ORIENTATI

RESULTANTE
NULLA



- интервалом Δt между измерениями

1. In quei dipoli spesso della forte
una coppia di tende ad orientarlo
CASUALI. nella dir. di B

VEDO OGNI MATEMATICA COME
insieme di piccole spine orientate casuali.

ogni atomo produce un piccolo campo di induzione magnetica
ma la somma è zero

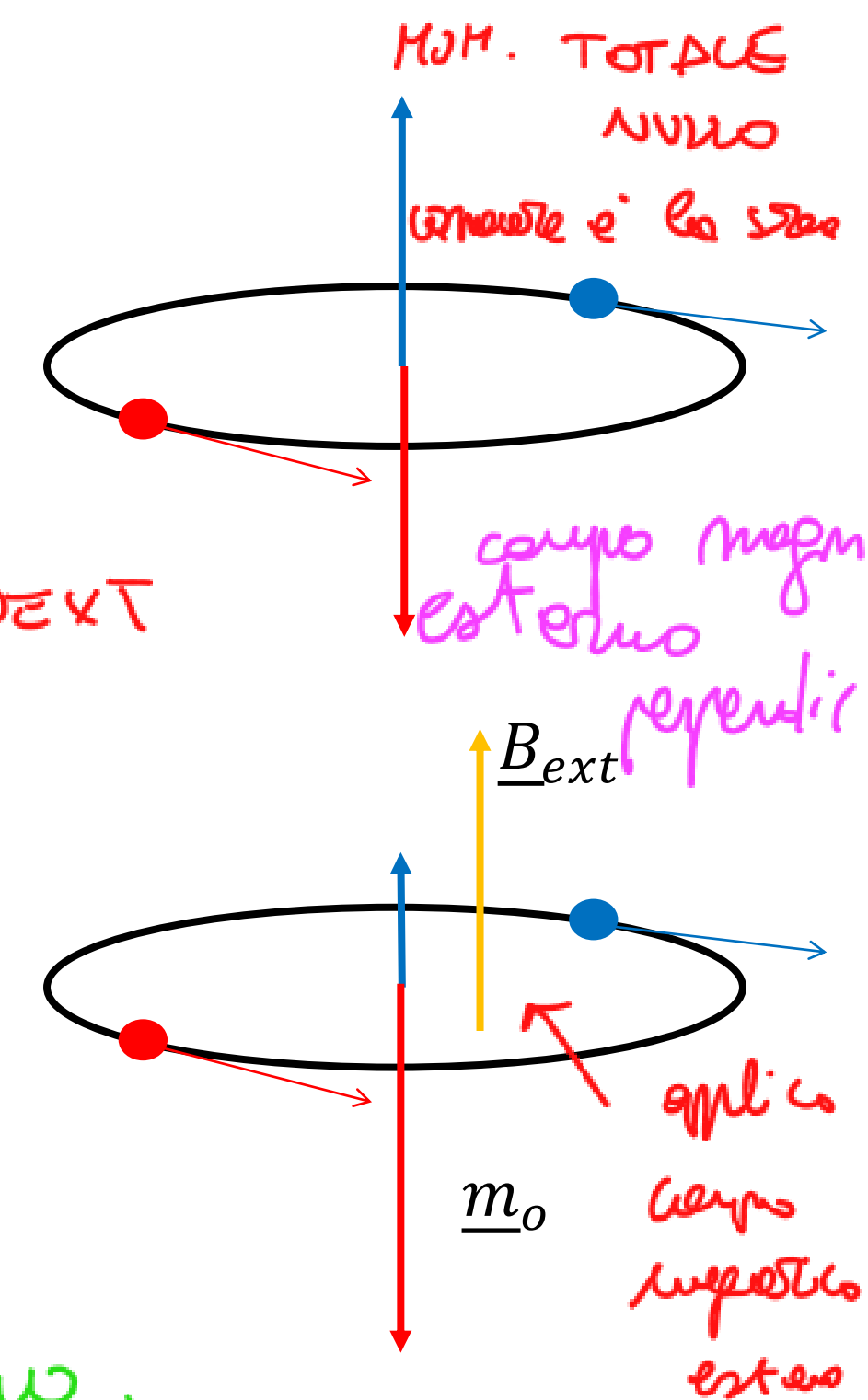
Magnetizzazione (I)

APPLICHO UN CAMPO MAGNETICO

AT=NP LE

il momento magnetico atomico
indotto è piccolissimo

- ✓ Atomi non dotati di momento magnetico ← DIAMAGNETICO
- ✓ Quando agisce un campo di induzione magnetica esterno il moto degli elettroni è perturbato e ha origine un momento magnetico che tende ad opporsi al campo esterno. Questo è il meccanismo classico del diamagnetismo ed è sempre presente.
- ✓ Esempio: due elettroni in un atomo che ruotano intorno al nucleo in versi opposti, ma con la stessa velocità.
- ✓ I due momenti magnetici orbitali sono uguali in modulo ed opposti in verso e si compensano.
- ✓ Quando si applica un campo di induzione magnetica esterno, gli elettroni sono sottoposti anche alla forza magnetica $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{ext}$. uno si accelera, l'altro si rallenta.
- ✓ Questa forza si aggiunge alle forze elettrostatiche ed aumenta la velocità orbitale dell'elettrone che ha momento magnetico antiparallelo al campo, mentre riduce la velocità dell'elettrone che ha momento magnetico parallelo al campo. CORRENTI DIVERSE $\Rightarrow$ MOM. TOT. OPPOSTO A B_{EXT}
- ✓ I momenti magnetici dei due elettroni non si compensano più, per cui la sostanza acquista un momento magnetico *opposto* a quello del campo applicato.



il campo modifica la compensazione, e qui atomo era non magn. atom $\neq 0$

$F = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ha una forza che agisce sull'elettrone che lo tira verso l'interno.

$= \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ l'elettrone tenderà a ruotare più velocemente, forza centripeta per compensare la F. centripeta

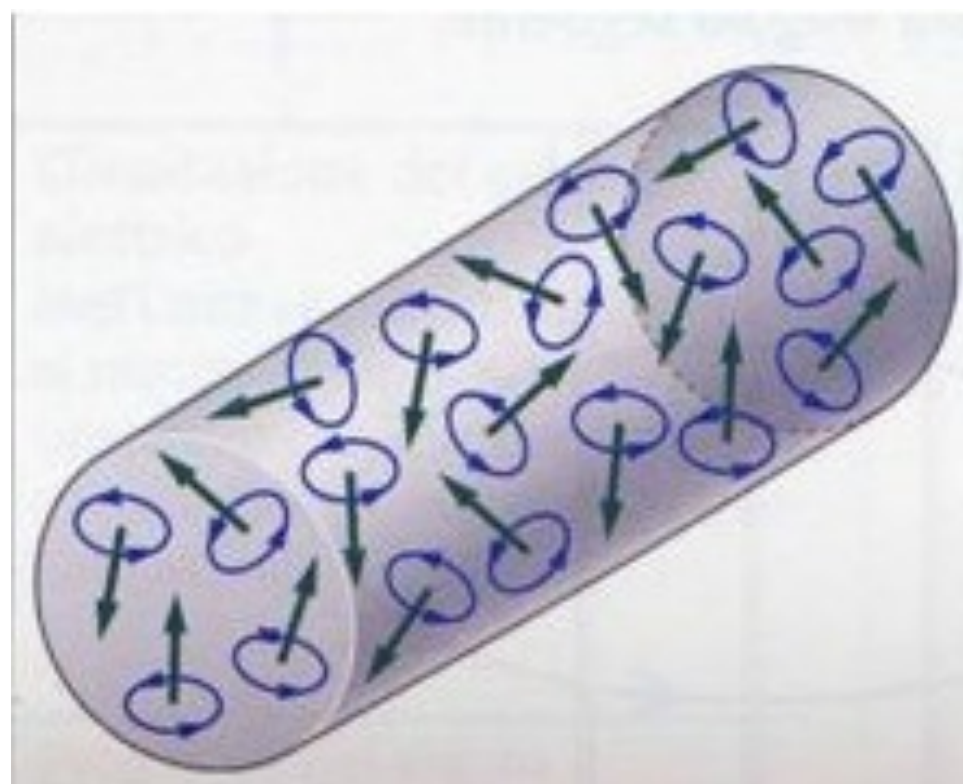
Magnetizzazione (II)

✓ Atomi dotati di momento magnetico.

✓ Il campo di induzione magnetica applicato dall'esterno, tramite una coppia di forze, tende a disporre le spire elementari percorse da correnti atomiche in un piano perpendicolare alla sua direzione (tende ad orientare i dipoli magnetici paralleli a se stesso) e ha origine un momento magnetico parallelo e concorde al campo di induzione esterno, che supera l'effetto diamagnetico. Questo è il meccanismo classico del paramagnetismo.

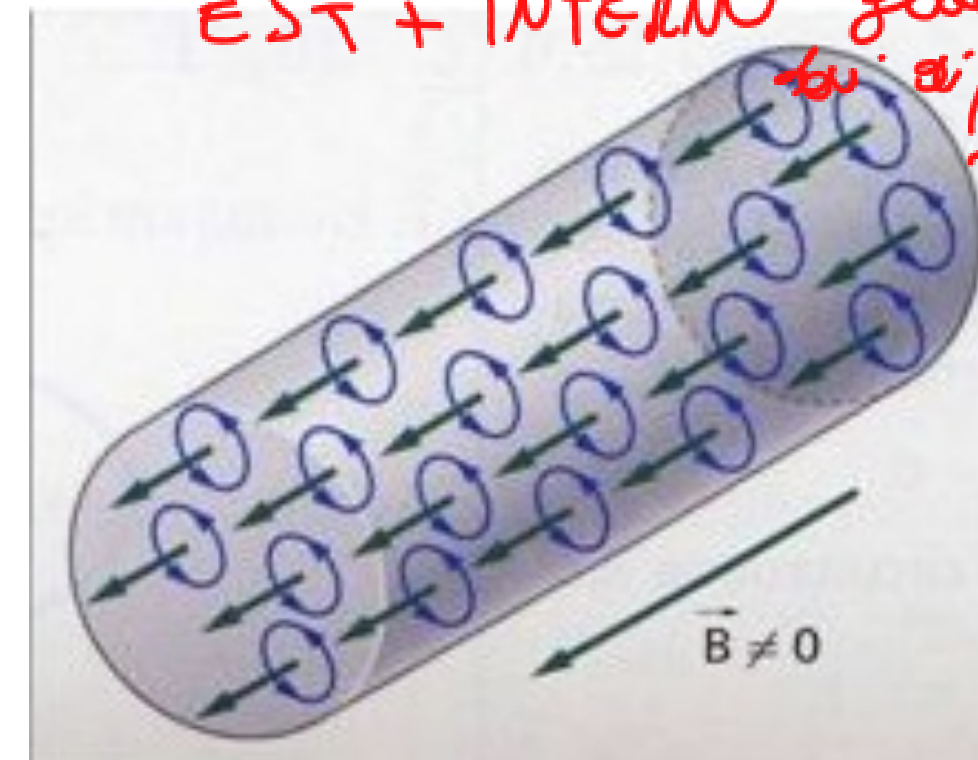
✓ Questo processo di allineamento è però in competizione con l'agitazione termica, fenomeno che tende a rendere casuale l'orientazione dei momenti di dipolo.

Ido campo ext,
agit. termica
li fa rimanere
casuali



Campo TOTALE = SOMMA CAMPO

EST + INTERNO generato



concordi al campo applicato

la somma dei campi magnetici sarà $\neq 0$.

Al campo magnetico esterno va sommato il campo magnetico indotto dall'allineamento dei mom. atom.

Paramagnetismo. Si può qui dire che non si dip. dalla

$$M = m \times B$$

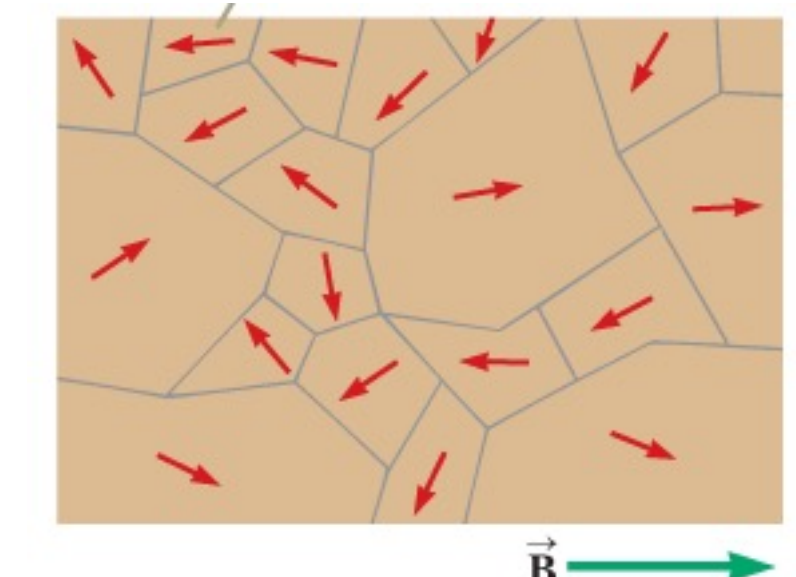
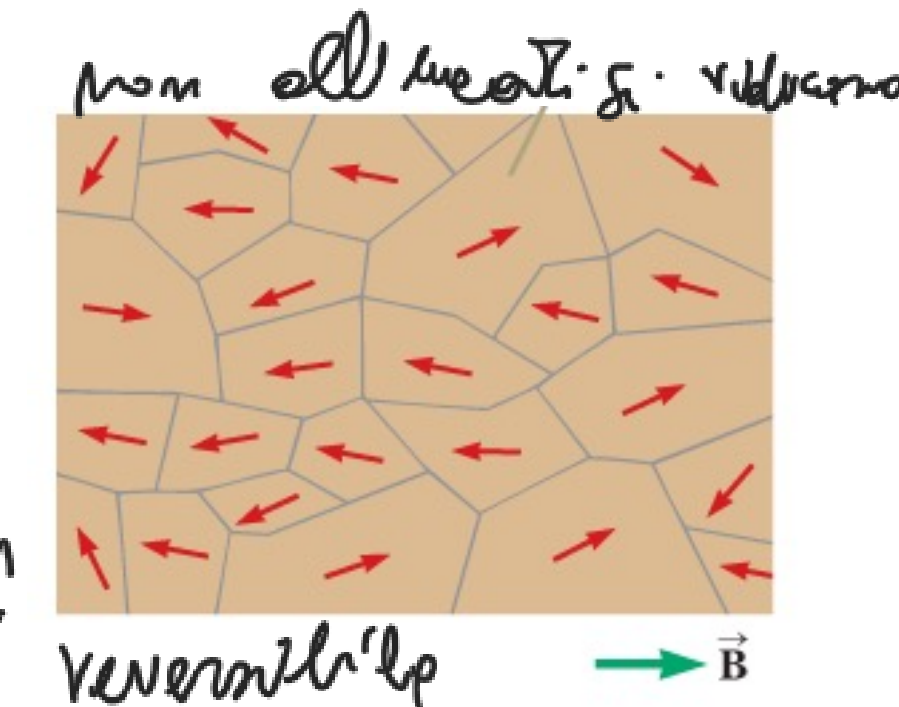
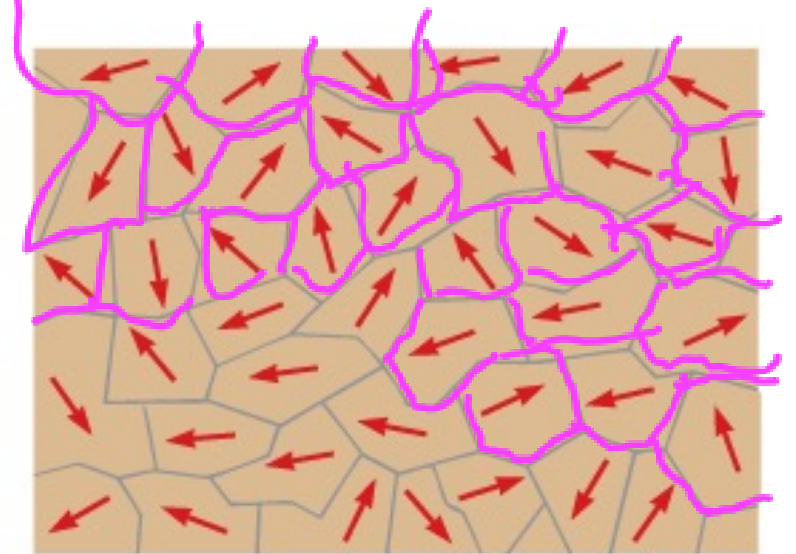
anche qui la risultante dei momenti allineati è piccola

Magnetizzazione (III)

in due lot.

anche in presenza di corpi magn
piccoli, reagiscono molto

- Un piccolo numero di sostanze cristalline (es. ferro, il cobalto, il nichel,..) mostra fenomeni magnetici molto marcati; questo fenomeno è chiamato ferromagnetismo.
- Tutti i materiali ferromagnetici contengono regioni microscopiche, dette domini di Weiss ($10^{-18} \div 10^{-12} m^3$), all'interno delle quali i momenti magnetici sono tutti allineati.
- Questo allineamento permanente è dovuto al forte accoppiamento fra momenti magnetici vicini e può essere descritto completamente *solo in termini quantistici*.
- Le superfici di separazione fra domini che hanno orientazioni diverse sono dette pareti del dominio. *i domini allineati con il campo magnetico esterno si amplificano, quelli*
- In un materiale non magnetizzato, i momenti magnetici dei domini sono orientati in modo casuale ed il momento magnetico risultante è in media nullo. *In molti casi il fenomeno non*
- Se il materiale viene posto in un campo di induzione magnetica esterno, le dimensioni dei domini aventi i momenti magnetici allineati con il campo crescono e la sostanza si magnetizza. *e'*
- Quando il campo esterno diventa molto intenso, i domini nei quali i momenti magnetici non sono allineati con il campo diventano molto piccoli.
- A temperature ordinarie l'agitazione termica non è sufficiente a distruggere questa orientazione preferenziale dei momenti magnetici.



NO DEXT,
NO MAG,
MAGN. TOT.
(NULO)
NO CAMPO
POTENZIALE

NON SONO
ORIENTATI

TOLGO CAMPO DEXT, NON. MAGNETICO INTERNO
MANE

il materiale
magnetizzato

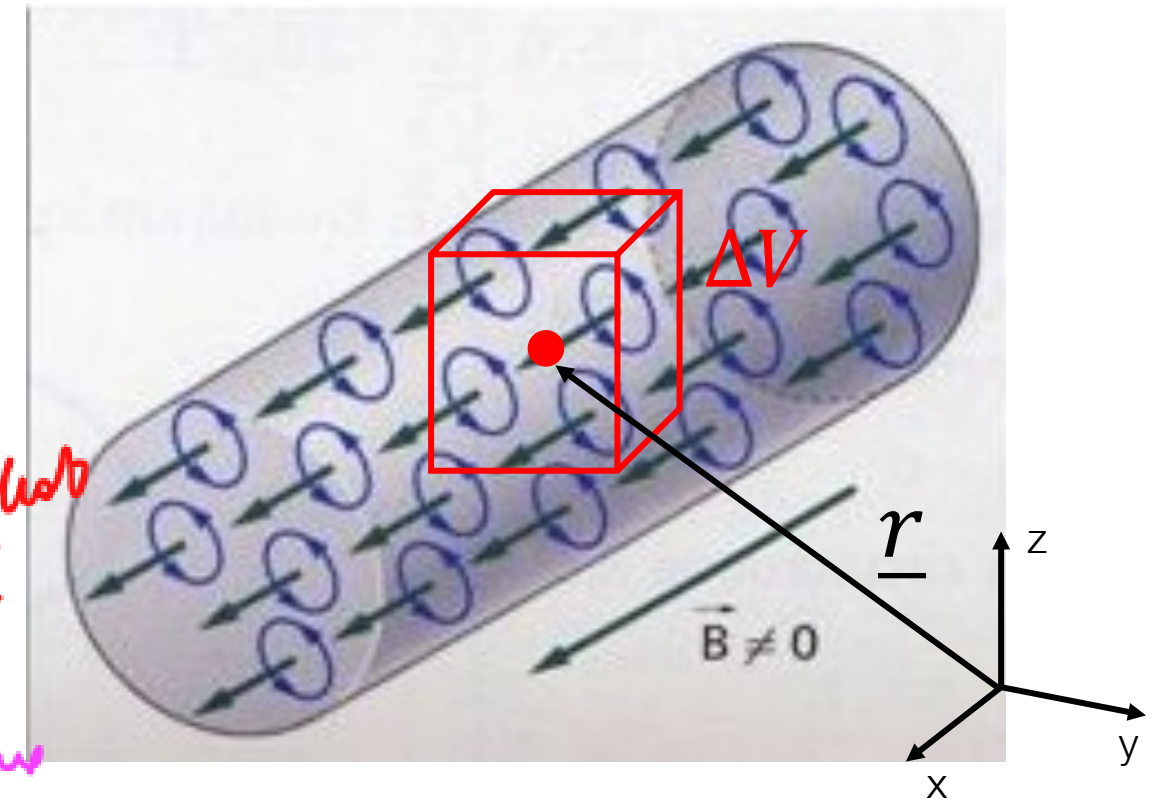
DEFINIZIONE MACROSCOPICA del Vettore magnetizzazione ~~Fenomeno~~

$$m_i = I_s \hat{n} \quad A \cdot m^2$$

- ✓ Dalle considerazioni fenomenologiche che sono state effettuate, un materiale magnetizzato può essere considerata come un insieme di atomi o molecole o domini dotati di momento magnetico complessivo non nullo.

- ✓ Descrizione macroscopica: considero un punto (x, y, z) del materiale e un piccolo volumetto ΔV attorno ad esso che contiene un numero statisticamente significativo ΔN di dipoli magnetici $\underline{m}_i$.

- ✓ Definisco un vettore di magnetizzazione $\underline{M}(x, y, z)$ mediando i singoli momenti di dipolo magnetico nel volume e dividendo per il volume stesso



$\underline{M}$ vettore
Magnetizzato.
rappresenta lo stato di
magnetizzazione del corpo

funzione
del punto

$$\underline{M}(x, y, z) = \frac{\sum_{i=1}^{\Delta N} \underline{m}_i}{\Delta V}$$

somma vettoriale

$$\frac{A}{m} \frac{Am^3}{m^3}$$

somma dei momenti nel volume
volume stesso

- ✓ Il vettore $\underline{M}(x, y, z)$ è una grandezza macroscopica che rappresenta in ogni punto un momento di dipolo magnetico per unità di volume.

$\underline{M}$ mom. di dip. magnetico per unità di volume

$\underline{M}$ rappresenta

- ✓ ΔV deve essere sufficientemente piccolo in modo da ridursi su scala macroscopica ad un punto e tale che $\underline{M}$ possa essere considerato uniforme all'interno di ΔV ma al tempo stesso sufficientemente grande su scala microscopica da assicurare la regolarità $\underline{M}(x, y, z)$ al variare del punto di osservazione.

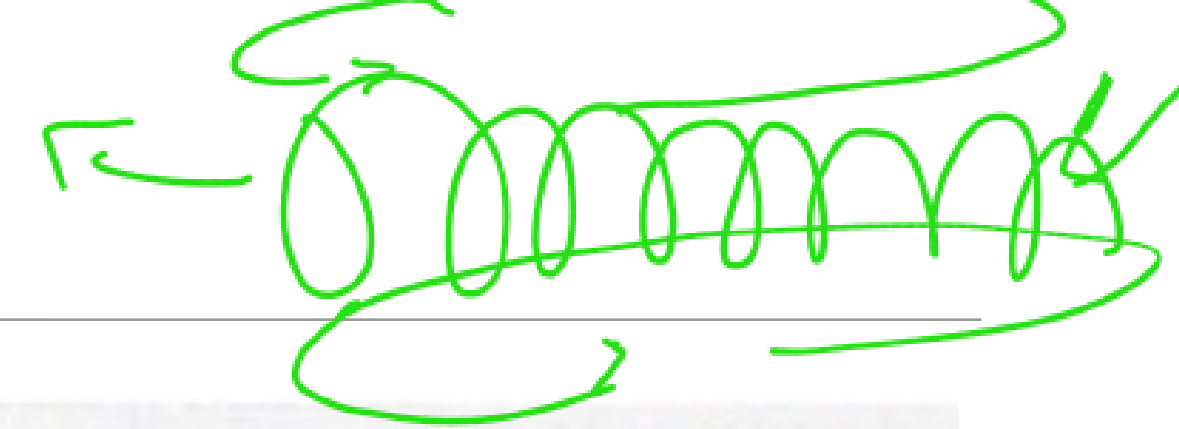
- ✓ Il momento magnetico per unità di volume $\underline{M}(x, y, z)$ nasce per effetto dell'azione del campo di induzione magnetica applicato esterno che tende a disporre ogni spira elementare percorsa da corrente atomica (corrente amperiana) in un piano perpendicolare alla sua direzione.

bolle o antipolle (dipole magnetici).

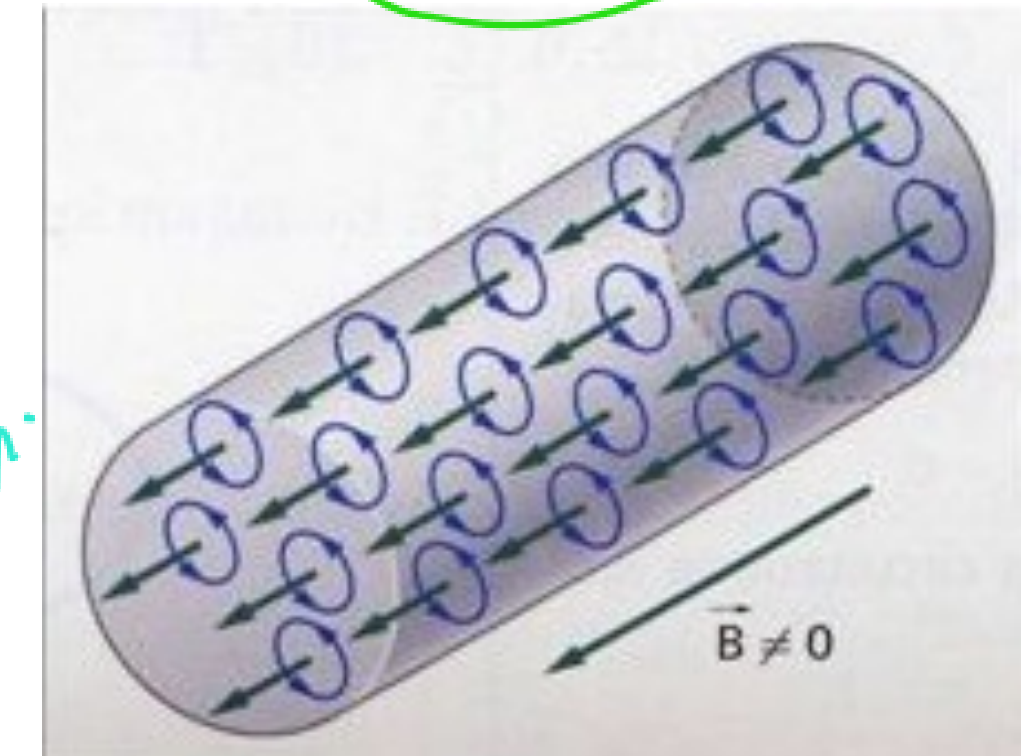
$\underline{M} \cdot \Delta V = \text{mom dipolo mag. in quel punto}$

applico B_{ext} , materiale si magnetizza, nasce M . Dipoli magnetici si allineano

Vettore magnetizzazione e correnti di magnetizzazione



- ✓ Materiale di forma cilindrica, magnetizzato lungo l'asse del cilindro stesso (M parallelo all'asse del cilindro). *qui abbiamo, genera campo magnetico (spira corrente)*
- ✓ Tutte le spire elementari sono perpendicolari alla direzione individuata da M e tutte sono percorse dalle correnti atomiche nello stesso verso. *B_{TOT} cambia, ho 2 campi*
- ✓ Se l'intensità di magnetizzazione è **uniforme** in tutto il materiale, il numero di spire per unità di volume è costante per cui **all'interno del cilindro** le correnti atomiche si annullano l'una con l'altra.



- ✓ Sulla **superficie del materiale**, la magnetizzazione M subisce una discontinuità passando bruscamente dal valore che essa ha internamente al materiale al valore zero che essa ha esternamente.

M_{TOT} genera una J orientato come M

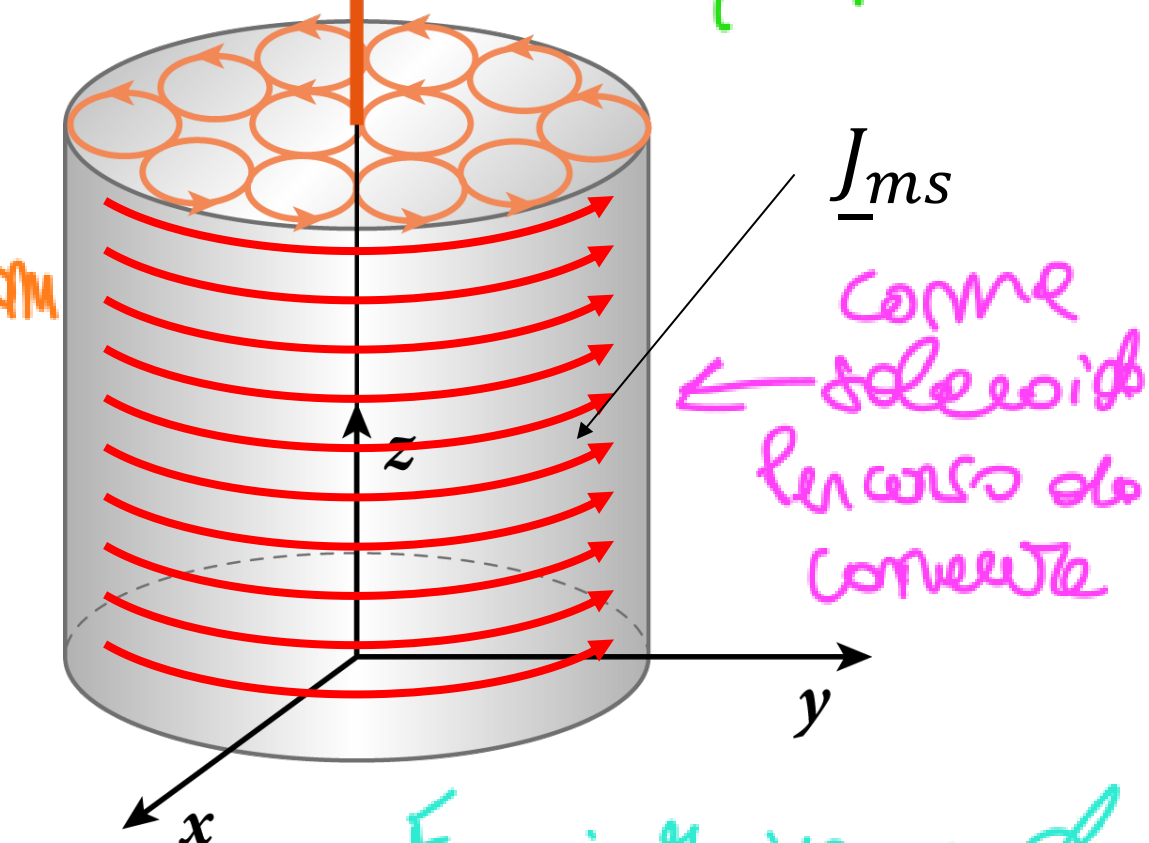
*es. se ho un cilindro di materiale
Soma delle spire*

DENTRO IL MATERIALE, CORRENTI VECIE SI ANNULLANO 2 a due

- ✓ Sulla superficie laterale non c'è compensazione delle correnti atomiche e queste danno origine ad una densità superficiale di corrente J_{ms} (A/m).

da origine ad un campo magnetico di dipolo

- ✓ Questa corrente superficiale è in grado a sua volta produrre un campo di induzione magnetica B_M che si somma vettorialmente a quello esterno applicato B_0 , sia dentro che fuori il materiale.



come solenoide percorso da corrente

in qualunque punto interno ho corrente equiva 0

Sulla parete esterna, ho tutte le correnti che danno in un solo senso

Fuori J va a 0 e le correnti non sono comprese

Dove ho discontinuità di M nasce $J \neq 0$

SE NON APPLICHI H , NO CORRENTI MAGNETICHE NO J_m

Se non applichi H , sei come un
cubo di ghiaccio.

Vettore magnetizzazione e correnti di magnetizzazione

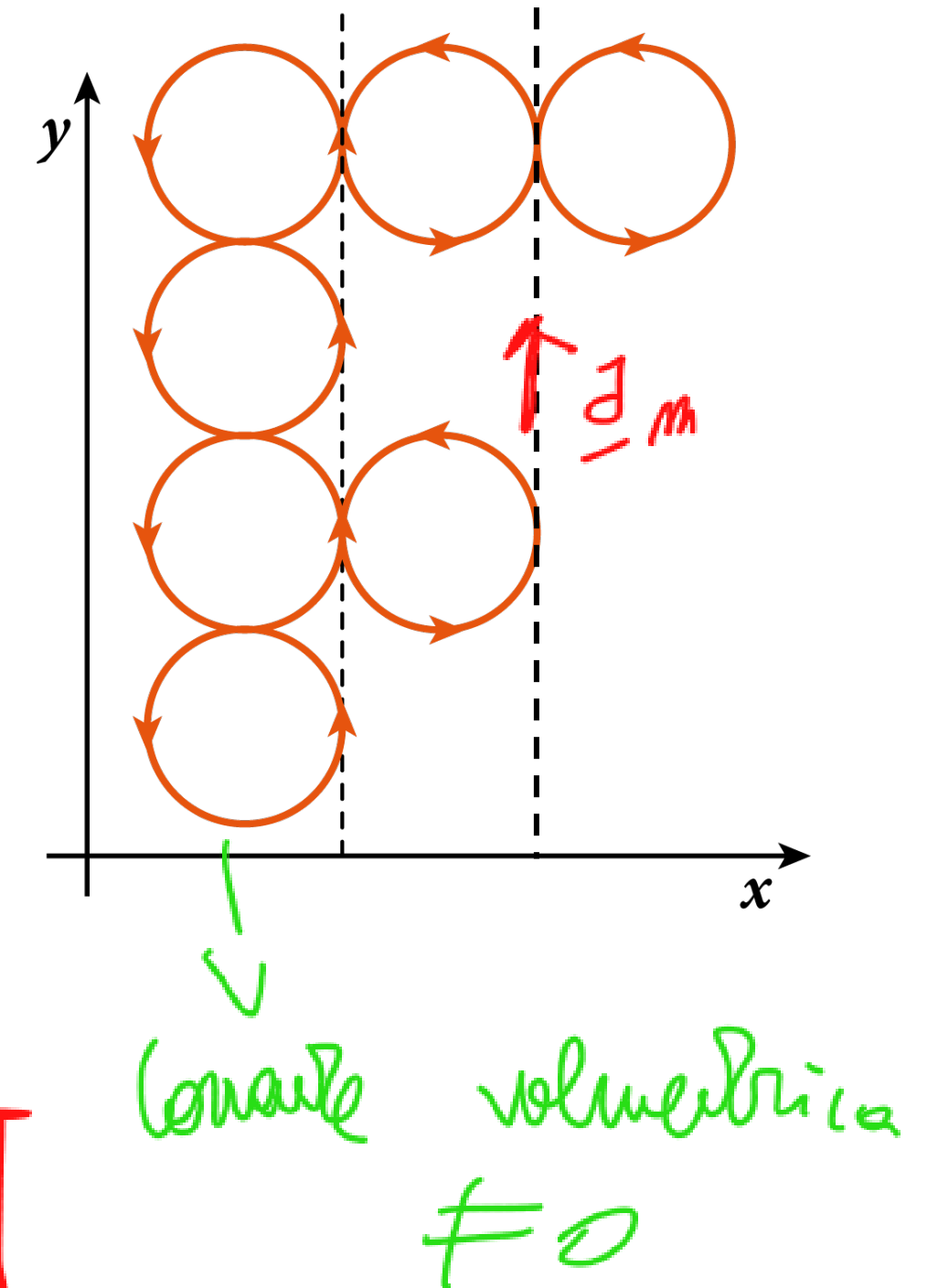
all'interno del materiale

- ✓ Se l'intensità di magnetizzazione non è uniforme, il numero di spire per unità di volume non è costante per cui all'interno del cilindro le correnti atomiche non si annullano l'una con l'altra.
- ✓ Esiste anche una densità di corrente volumetrica J_m (A/m²) che fluisce all'interno del materiale.
- ✓ In figura, sulle linee tratteggiate, la quantità di carica che va dal basso verso l'alto è maggiore di quella che dall'alto va verso il basso, per cui anche senza trasporto c'è una corrente diretta verso l'alto.
- ✓ Questa densità di corrente volumetrica somma il suo contributo alla densità di corrente superficiale.
- ✓ Le densità di correnti superficiali e volumetriche legate alla magnetizzazione dei materiali si chiamano correnti di magnetizzazione.

a causa della magnetizzazione. Si generano correnti magnetiche interne e/o esterne

risultano fuori dal vettore di magnetizzazione.

Se lo vettore di magnetizzazione all'interno ha componenti che girano a, e b
vettore come corrente



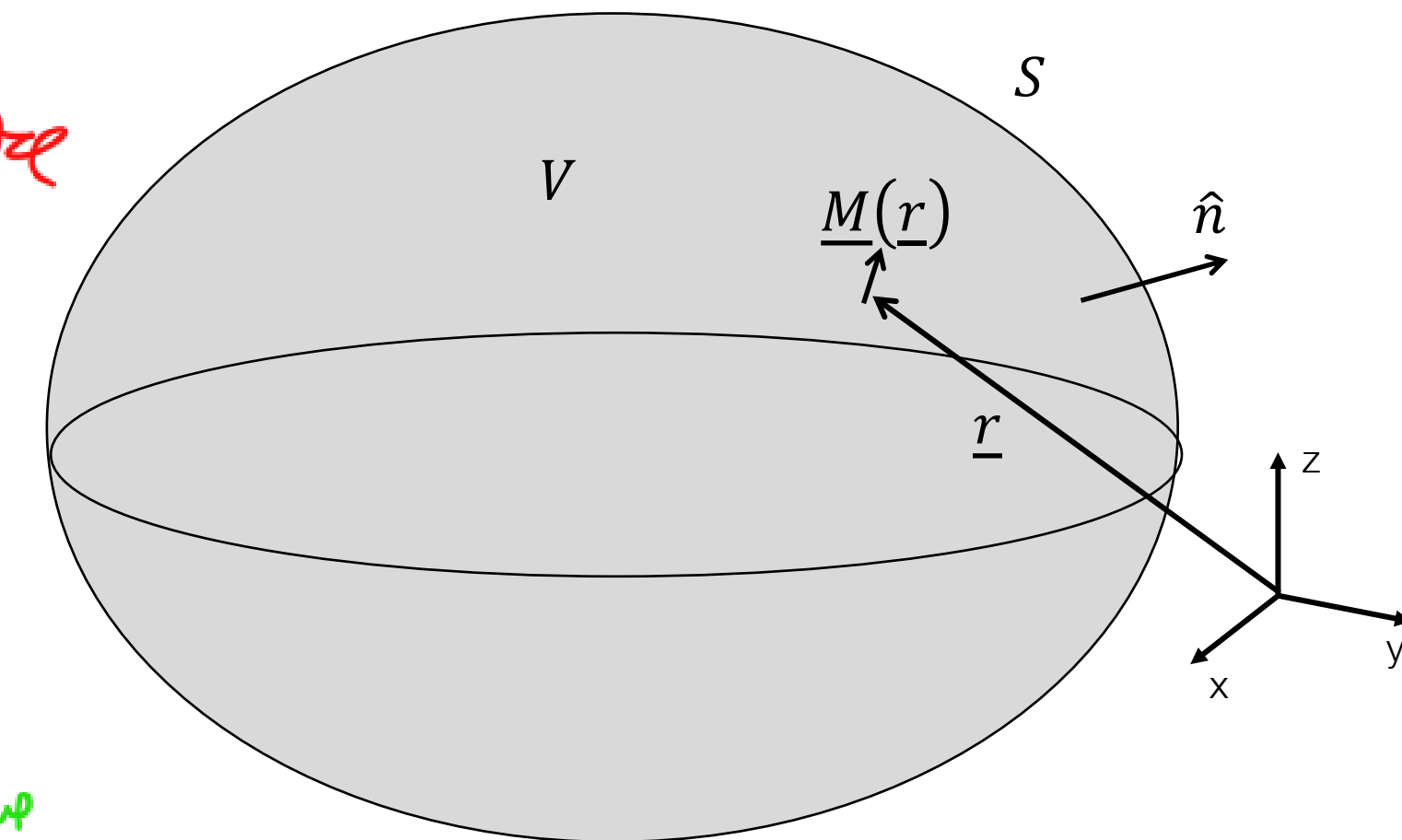
Vettore magnetizzazione e correnti di magnetizzazione

- ✓ Si può dimostrare che esiste un legame matematico preciso tra vettore di magnetizzazione e correnti di magnetizzazione.
- ✓ Per un punto generico del materiale magnetizzato, individuato dal vettore posizione $\underline{r}$ si ha: dato da:

$$\underline{J}_m(\underline{r}) = \nabla \times \underline{M}(\underline{r}) \quad \left[\frac{A}{m^2} \right] \quad \text{densità vorticosa delle correnti}$$

$$\underline{J}_{ms}(\underline{r}) = \underline{M}(\underline{r}) \times \hat{n} \quad \left[\frac{A}{m} \right] \quad \text{densità sup. delle correnti}$$

corrente superficiale
alla sup



- ✓ Se $\underline{M}(\underline{r})$ è *uniforme*, cioè non dipende dal punto di osservazione, $\underline{M}(\underline{r}) = \underline{M}$ si ha:

$$\underline{J}_m(\underline{r}) = \nabla \times \underline{M} = 0 \quad \text{le derivate sono nulle} \quad \text{Se è uniforme il vett. di magnetizzazione.}$$

Dato un materiale magnetizzato ($\mu \neq 0$) in equilibrio
le densità di corrente sono legate da

Legge della circuitazione di Ampere in presenza di materiali magnetizzati

- ✓ La forma differenziale della legge della circuitazione di Ampere nel vuoto, in presenza di correnti di conduzione $\underline{J}$ è:

$$\nabla \times \underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 \underline{J}(\underline{r})$$

- ✓ Nel caso in cui il campo di induzione magnetica $\underline{B}(\underline{r})$ sia generato oltre che da correnti (es. che fluiscono su fili conduttori), anche dalle correnti di magnetizzazione presenti nei materiali magnetizzati, l'equazione precedente diventa:

B dato da 2 correnti

$$\nabla \times \underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 [\underline{J}(\underline{r}) + \underline{J}_m(\underline{r})]$$

correnti

correnti

correnti $\underline{B}_m$

superficie campo nel vuoto

correnti

magnetizz. solo

sulle sop. o nel volume

- ✓ Dato che è un vettore $\underline{J}_m(\underline{r}) = \nabla \times \underline{M}(\underline{r})$ si può scrivere

$$\nabla \times \left[\frac{\underline{B}(\underline{r})}{\mu_0} - \underline{M}(\underline{r}) \right] = \underline{J}(\underline{r})$$

- ✓ Si definisce vettore campo magnetico il vettore

Se ho materiali magnetizzati o meno possiamo introdurre vettore campo magnetico

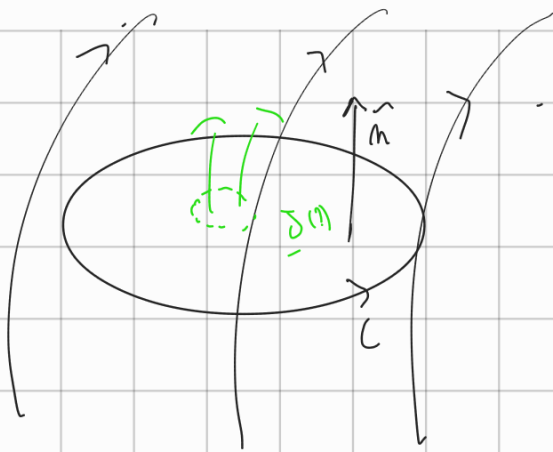
$$\underline{H}(\underline{r}) = \frac{\underline{B}(\underline{r})}{\mu_0} - \underline{M}(\underline{r})$$

STESSE DIM. DI H.

$\frac{A}{m}$

Dielettrici: DIV. campo el. no solo da cariche libere e dipolizzati.

CHE DIPENDE SOLO DA CORR. DI CONDUZIONE



$$\oint_C \underline{B}(\underline{r}) \cdot d\underline{e} = \mu_0 \iint_S \underline{j}(\underline{r}) \cdot d\underline{m} \, ds$$

↓ con la differenziale della legge di Ampere

$$\nabla \times \underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 \underline{j}(\underline{r})$$

Se sono in presenza di un materiale magnetizzato, possibile calcolare delle correnti di magnetizzazione

$$\nabla \times \underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 \underline{j}(\underline{r}) + \mu_0 \underline{j}_m(\underline{r}) = \text{dove } \underline{j}_m \text{ sono le correnti di magnetizzazione.}$$

Se sostituisco con il vettore

$$= \underbrace{\mu_0 \underline{j}(\underline{r}) + \mu_0 \nabla \times \underline{M}(\underline{r})}_{\mu_0} = \nabla \times \underline{B}(\underline{r}) = \underline{j}(\underline{r}) + \nabla \times \underline{M}(\underline{r})$$

$$= \nabla \times \left[\frac{\underline{B}(\underline{r})}{\mu_0} - \underline{M}(\underline{r}) \right] = \underline{j}(\underline{r})$$

Vettore campo magnetico $\underline{H}(\underline{r})$

$\frac{A}{m}$

≠ vettore induzione magnetica

$$\Rightarrow \nabla \times \underline{H}(\underline{r}) = \underline{j}(\underline{r})$$

Campo vettoriale la cui circuizione dipende solo dalle correnti di conduzione
Conclusione

nel solenoide il campo magnetico è lo stesso se c'è o no il materiale o no, quello che cambia è che cambia il nucleo di induzione di corrente

→ legge circuiz. generale, vale se ho un materiale o no

Legge della circuitazione di Ampere in presenza di materiali magnetizzati

convergi condiz: l'idea di un raggio di curvatura NON è stato modificato

- ✓ La forma differenziale della legge della circuitazione di Ampere in presenza di correnti di conduzione $\underline{J}(\underline{r})$ e materiali magnetizzati è:

$$\left[\nabla \times \underline{H}(\underline{r}) = \underline{J}(\underline{r}) \right] \quad \left[\nabla \cdot \underline{D} = \rho_{free} \right]$$

= 0 fuori dal materiale

- ✓ Nel vuoto, dove il vettore di magnetizzazione è nullo $\underline{M} = 0$, si ha

$$\underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 [\underline{H}(\underline{r}) + \underline{M}(\underline{r})] \quad \left[\underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 \underline{H}(\underline{r}) \right]$$

rebas. COSTITUTIVA

rebas. lineare, due vettori collineari

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$

- ✓ Data la semplice relazione di proporzionalità, tutte le leggi ricavate nel vuoto per $\underline{B}$, valgono anche per il vettore $\underline{H}$.

- ✓ Flusso del rotore attraverso una superficie aperta S di contorno orientato C
- rebas. l'una VETT campo magn. e VETTORE INDUT. magnetica
- legge integrale

$$\iint_S \nabla \times \underline{H}(\underline{r}) \cdot \hat{n} \, ds = \iint_S \underline{J}(\underline{r}) \cdot \hat{n} \, ds$$

Flusso

- ✓ Applicando il teorema di Stokes all'integrale di sinistra

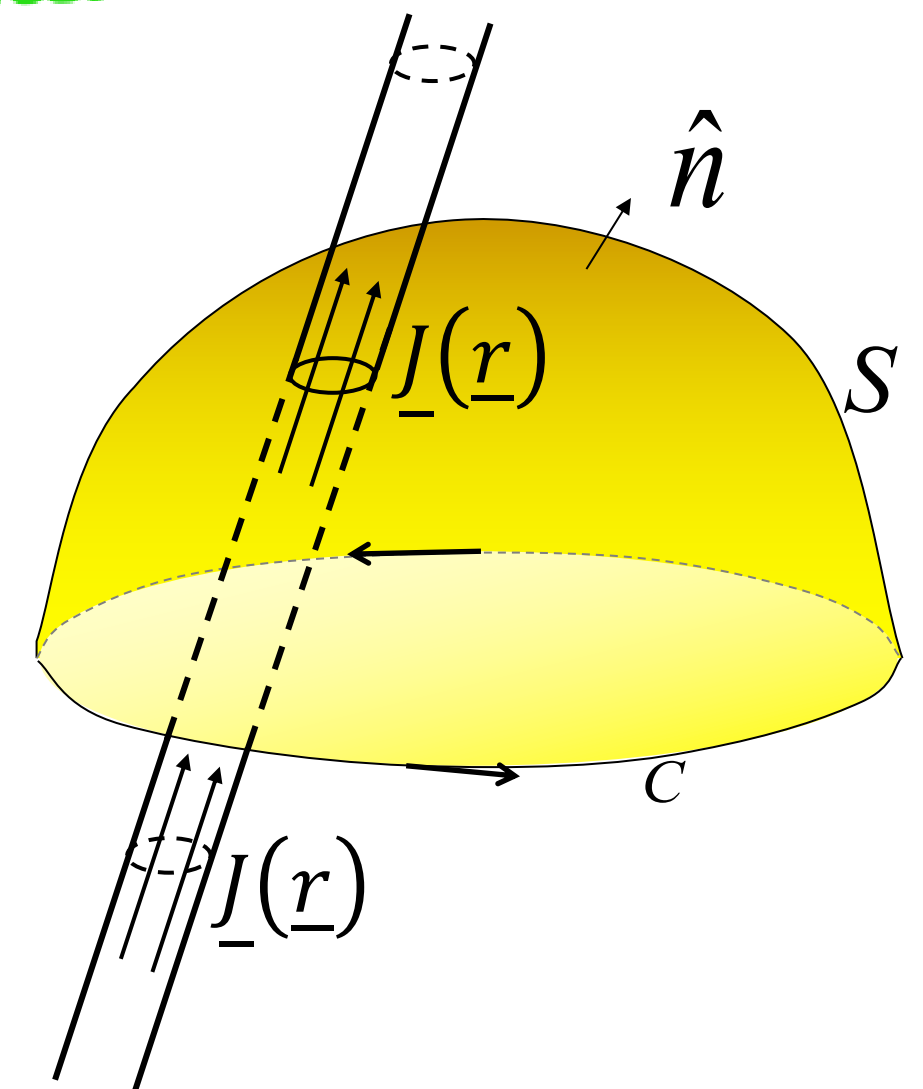
data una sup. aperta orientata che si appoggia su un contorno

C, $\hat{n}$ data dalla regola mano destra

$$\oint_C \underline{H}(\underline{r}) \cdot d\underline{l} = I$$

LA CIRCUITAZIONE AMPERE espressa per VETT CAMPO MAGN. = Σ con. totale che fluisce attraverso la sup.

CIRCUITAZ. VETTORE CAMPO MAGNETICO = CORRENTE TOT che fluisce sulla sup aperta



Vettore campo magnetico

Prima versione che

$$\oint_C \underline{B} \cdot d\underline{l} = \mu_0 I \text{ se concorrente o no} \Rightarrow \oint_C \underline{H} \cdot d\underline{l} = I$$

- ✓ La circuitazione del vettore campo magnetico lungo un circuito chiuso orientato che costituisce il bordo di una superficie aperta dipende solo dalle correnti di conduzione, anche in presenza di materiali magnetizzati.
- ✓ Per la descrizione del magnetismo sono sufficienti i vettori $\underline{B}$ e $\underline{M}$ ed $\underline{H}$ non è un vettore indipendente. Tuttavia l'importanza di questo vettore è che il suo rotore e la sua circuitazione, anche in presenza di materiali magnetizzati, dipende solo dalle correnti di conduzione $\underline{J}$, senza esplicito riferimento alle correnti di magnetizzazione.
- ✓ Le espressioni generali delle leggi di Ampere (integrale e differenziale), valide anche in presenza di mezzi materiali magnetizzati sono quindi

$$\nabla \times \underline{H}(\underline{r}) = \underline{J}(\underline{r})$$

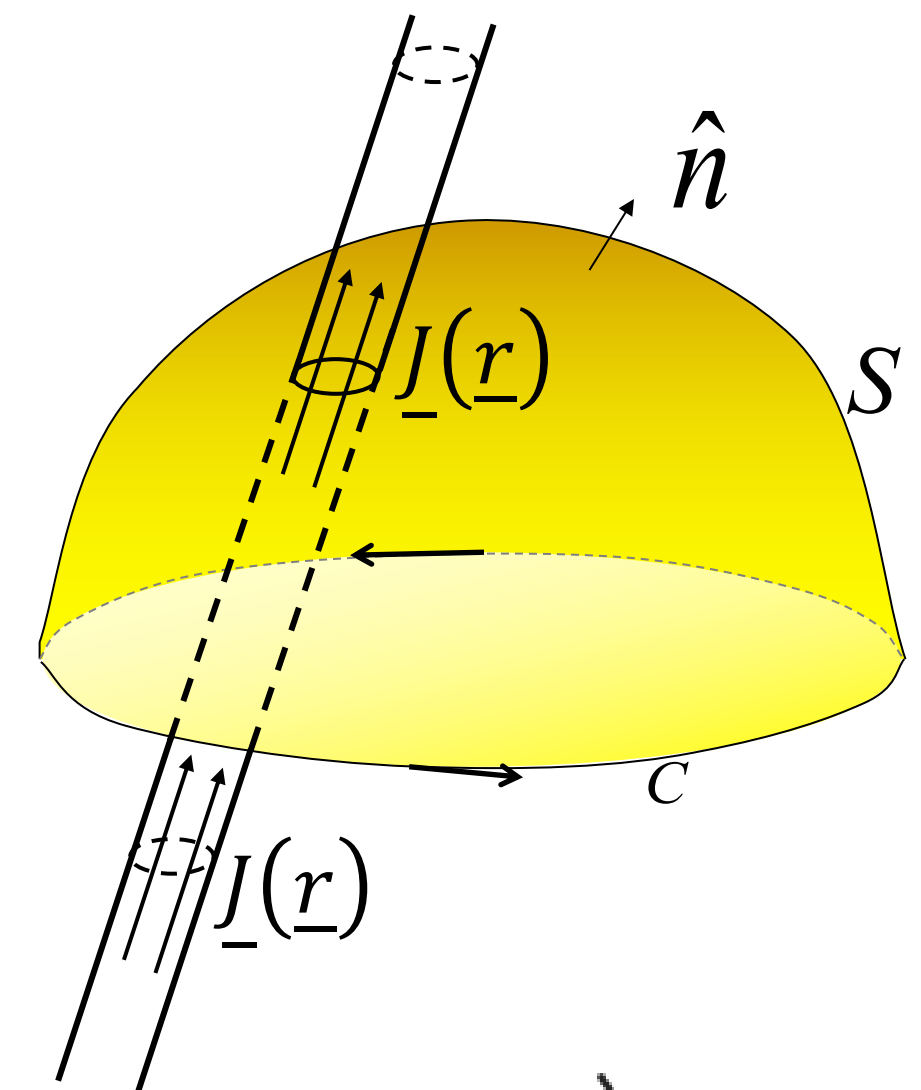
$$\nabla \times \underline{H}(\underline{r}) = \underline{J}(\underline{r})$$

$$\oint_C \underline{H}(\underline{r}) \cdot d\underline{l} = I$$

$$\text{con } \underline{M}(\underline{r}) = \frac{\underline{B}(\underline{r})}{\mu_0} - \underline{H}(\underline{r})$$

$$\oint_C \underline{H}(\underline{r}) \cdot d\underline{l} = \iint_S \underline{J}(\underline{r}) \cdot \hat{n} \, ds = I$$

per materiali mag. lin. isotr.



$$\underline{B}(\underline{r}) = \chi_m \underline{H}(\underline{r})$$

↑ costante di suscettività magnetica

$$\underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 \mu_r \underline{H}(\underline{r})$$

Equazioni differenziali del campo magnetostatico

$$\underline{H}(\underline{r}) = \frac{\underline{B}}{\mu_0} - \underline{M}(\underline{r}) \Rightarrow$$

- ✓ Le equazioni ^{DIFF} che descrivono il campo magnetostatico sono
- ed anche $\underline{H} = \frac{\underline{B}}{\mu_0} - \underline{M} = \frac{\mu_0 \mu_r \underline{H}}{\mu_0} - \underline{M} = \mu_r \underline{H} - \underline{M} =$
- $\Rightarrow \underline{M} = \mu_r \underline{H} - \underline{H} = (\mu_r - 1) \underline{H}$
- ✓ $\oint_S \underline{B} \cdot \hat{n} dS = 0$ NON CI SONO QUANTITÀ MAGN. LIBERE. FLUSSO SU UNA SVP. È ZERO $\Rightarrow \nabla \cdot \underline{B}(\underline{r}) = 0$
- ✓ $\nabla \times \underline{H}(\underline{r}) = \underline{J}(\underline{r})$
- ✓ La prima equazione deve valere anche all'interno dei materiali, visto che il campo di induzione $\underline{B}(\underline{r})$ è generato da correnti (conduzione e magnetizzazione) e non da cariche (carica magnetica isolata).
- ✓ A questa equazione va aggiunto la relazione strutturale (relazione costitutiva) che per ogni materiale, lega i vettori $\underline{B}$, $\underline{M}$ e $\underline{H}$.
- ✓ La presenza e la configurazione dei mezzi materiali si esplica, oltre che dalla relazione costitutiva, attraverso le condizioni al contorno (o di continuità) nel passaggio attraverso le interfacce tra materiali diversi).

$$\oint_C \underline{H}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = \iint_S \underline{J}(\underline{r}) \cdot \hat{n} dS$$

↑
percorso orientato

Relaz. tra $\underline{B}$ e $\underline{H}$?

Condizioni al contorno per $\underline{B}$

Ho 2 MAT.

- ✓ Può essere facilmente ricavata considerando che il flusso di $\underline{B}$ uscente da qualunque superficie chiusa è nullo.

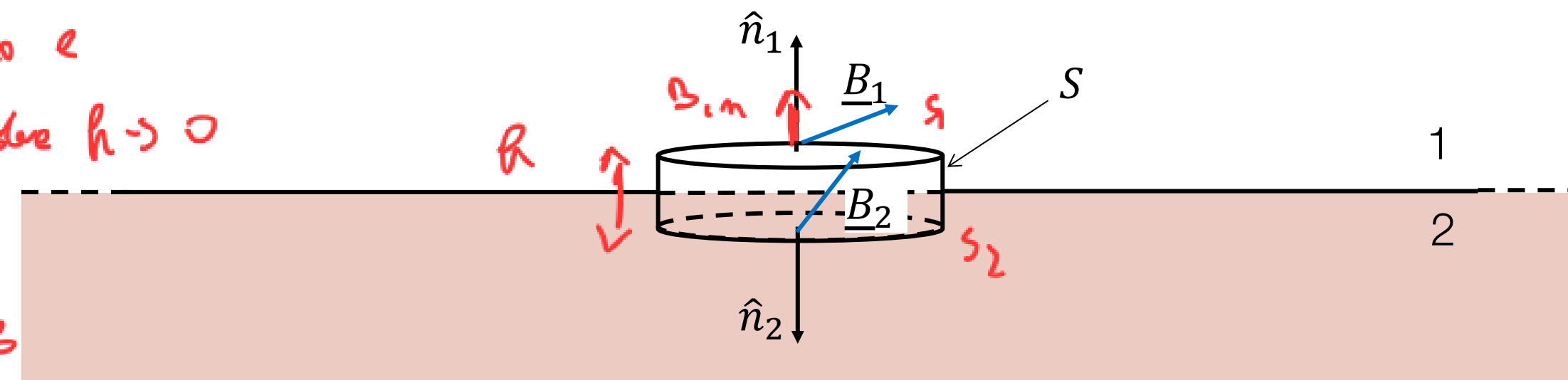
linee di campo, escono. No linee magnetiche

$$\oiint_S \underline{B} \cdot \hat{n} ds = 0$$

- ✓ Cilindretto molto piccolo di superficie S attraversato dalla superficie di separazione tra due mezzi diversi

calcolo flusso e
faccio tendere $h \rightarrow 0$

ho contributi
del flusso solo
da S_1 e S_2 .



interfaccia di
sep. tra 2 mezzi

B_2, B_1 sono considerati solo sulla normale S_1 e S_2

- ✓ Facendo tendere a zero l'altezza del cilindretto in modo da limitare il calcolo al flusso dalle due basi si ottiene

LE induz. normali sono
costanti all'interfaccia

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$B_1(r) \cdot \hat{n} S = B_{1n} S$$

$$B_{2n} S$$

B_1 e B_2 costanti sulla
sup.

- ✓ Attraverso la superficie di separazione tra due mezzi materiali la componente normale alla superficie del vettore induzione magnetica è continua

$$\hat{m}_1 = -\hat{m}_2$$

$$B_{1n} S - B_{2n} S = 0$$

$$E_t = E_2 t$$

$$D_{1n} = D_{2n}$$

Condizioni al contorno per $\underline{H}$

- ✓ Può essere facilmente ricavata considerando che la circuitazione di $\underline{H}$ attraverso una superficie aperta che si concatena con una corrente di conduzione è pari al flusso della densità di corrente attraverso la superficie.

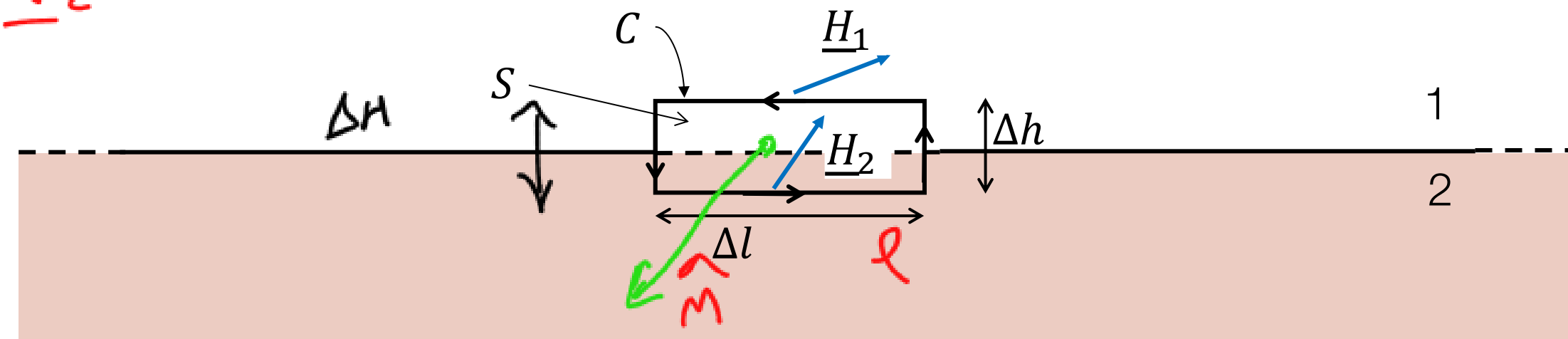
adesso S finisce $\frac{A}{m^2}$. se $\Delta R \rightarrow 0$
 suppongo entra una derivata
 come se sup. $\frac{A}{m}$

$$\oint_c \underline{H} \cdot d\underline{l} = \iint_S \underline{J} \cdot \hat{n} \, ds$$

Preso sup S , una normale $\hat{n}$ ad S e un valore C di $\hat{S}$ appropriato

- ✓ Superficie S delimitata dal contorno orientato C attraversata dalla superficie di separazione tra due mezzi diversi

$$\oint_{\text{superficie Tangente alla sup.}} \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} - \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{j} \cdot \mathbf{\hat{m}} dS$$



N_1 costante lungo il braccio 1
 N^2 21 4 braccio 2

- ✓ Facendo tendere a zero l'altezza Δh e considerando H uniforme sui tratti infinitesimi Δl si ottiene

- ✓ La superficie S non concatena alcuna corrente di conduzione superficiale

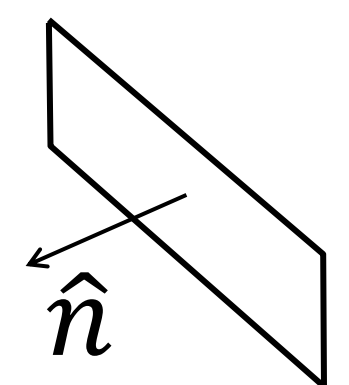
 $H_{1t} = H_{2t}$

considero
la deriv.
corrente sup.

- ✓ La superficie S è attraversata da una densità di corrente superficiale di conduzione J_s (A/m), depositata sull'interfaccia e *normale* alla superficie stessa

→ $H_{1t} - H_{2t} = J_s$

Se α sono correlati
canali è. Sup. il non è
compreso



⇒ VETT. CAMPO MAGNETICO, OTTENUTO UNA SUP. SEPARAZIONE E LA LINEA LA LIPON. TANGENTE DI H SE NON CI SONO

Recap.

Legge GAUSS

$$\nabla \cdot \underline{B}(\underline{r}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_S \underline{B}(\underline{r}) \cdot \hat{n} dS = 0$$

LEGGE AMPERE

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{H}(\underline{r}) &= \underline{J}(\underline{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \underline{H}(\underline{r}) \cdot d\underline{\ell} = \iint_S \underline{J}(\underline{r}) \cdot \hat{n} dS \\ \nabla \times \underline{B}(\underline{r}) &= \mu_0 \underline{J}(\underline{r}) \\ \oint_C \underline{B} \cdot d\underline{\ell} &= \mu_0 I \end{aligned}$$

LEGGE 2 COSTITUTIVA

$$\underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 \left[\underline{H}(\underline{r}) + \underline{M}(\underline{r}) \right]$$

CONDIZ. di CONTINUITA

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$H_{1t} - H_{2t} = \int \underline{J}_s \cdot d\underline{\ell} \quad \left(\frac{A}{m} \right) \quad \text{induce Corr. superf.$$

suscezzibilita' magnetica

poiche' $\underline{M}(\underline{r}) = \chi_r \underline{H}(\underline{r})$

$\chi_r = (1 + \chi_r)$

$\underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 \mu_r \underline{H}(\underline{r})$

μ_r permeabilita' magnetica rel. sec

$\mu_r = 1$ nel vuoto, no magnetizz.

$\mu_r < 1$ mat. diamagnetica
no dipolo

Materiali
ideali isotropi

come $\mu + 1$ μ_r

Suscettività e permeabilità magnetica

- ✓ I materiali diamagnetici e paramagnetici presentano una debole magnetizzazione e un comportamento lineare quando si applica un campo magnetico esterno. *Dipoli magnetici comp. campo*

- ✓ Per materiali lineari ed isotropi si introduce la relazione sperimentale

es. gli pi. elmi $\vec{u}$

*vetture polarizzate
proporz. al campo el. qual'cos*

$$\underline{M}(\underline{r}) = \chi_m \underline{H}(\underline{r})$$

*costante
h_{op}*

*vetture magnetizzate
proporzionale al campo magnet. applicato
linearmente*

- ✓ χ_m è una quantità adimensionale che prende il nome di suscettività magnetica.
- ✓ Il legame tra $\underline{B}$, $\underline{M}$ e $\underline{H}$ diventa

$$\underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 (\underline{H}(\underline{r}) + \underline{M}(\underline{r})) = \mu_0 (\underline{H}(\underline{r}) + \chi_m \underline{H}(\underline{r})) = \mu_0 (1 + \chi_m) \underline{H}(\underline{r}) = \mu_0 \mu_r \underline{H}(\underline{r})$$

μ_r

- ✓ La quantità $\mu_r = (1 + \chi_m)$ è una quantità adimensionale che prende il nome di permeabilità magnetica relativa.

- ✓ Infine si può scrivere

$$\underline{B}(\underline{r}) = \mu \underline{H}(\underline{r})$$

- ✓ La quantità $\mu = \mu_0 \mu_r$ prende il nome di permeabilità magnetica assoluta ed ha le dimensioni di $\Omega \cdot \text{sec}/\text{m}$.

Sostanze diamagnetiche

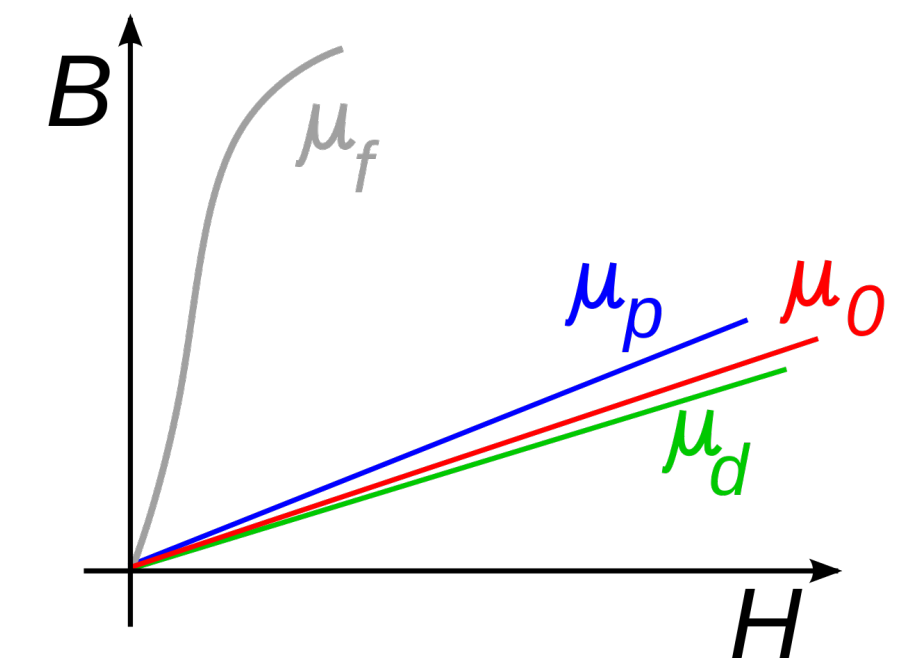
susceptibilità negativa

- ✓ χ_m è negativo con valori molto piccoli ($\mu_r < 1$).
- ✓ Il momento magnetico indotto nel materiale è diretto in verso opposto rispetto al campo inducente. m indotto negativo
- ✓ la suscettività magnetica delle sostanze diamagnetiche appare essere generalmente indipendente dalla temperatura T .
- ✓ Le sostanze diamagnetiche non presentano alcun tipo di saturazione: χ_m è indipendente dai campi applicati, anche per campi molto intensi.
- ✓ Considerato che $|\chi_m| \leq 10^{-4}$ nelle sostanze diamagnetiche, la permeabilità assoluta μ si discosta per meno di una parte su diecimila rispetto al caso del vuoto. $\mu = 1 + \chi_m$
- ✓ La perturbazione portata alla configurazione dei campi dalla presenza di questi materiali può pertanto essere, di norma, trascurata.

$$\underline{B(r)} \approx \mu_0 \underline{H(r)}$$

SOSTANZE DIAMAGNETICHE

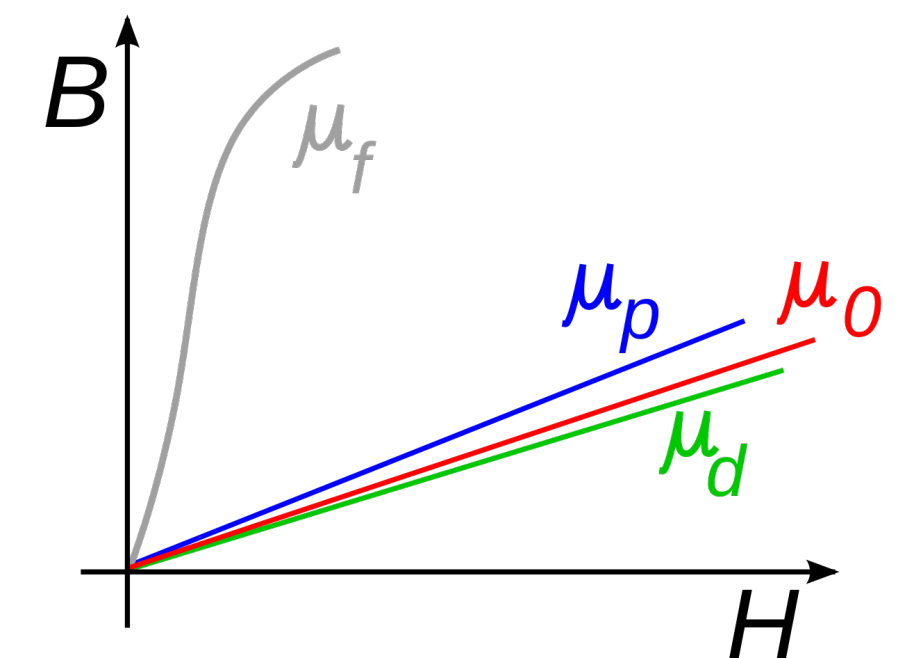
Sostanza	χ_m
Ag	$-26,4 \cdot 10^{-6}$
Au	$-36,3 \cdot 10^{-6}$
Bi	$-166 \cdot 10^{-6}$
C (grafite)	$-99 \cdot 10^{-6}$
Cu	$-9,6 \cdot 10^{-6}$
H ₂	$-2,1 \cdot 10^{-9}$
He	$-1,0 \cdot 10^{-9}$
Hg	$-32,0 \cdot 10^{-6}$



Sostanze paramagnetiche

- ✓ χ_m è positivo con valori molto piccoli ($\mu_r > 1$).
- ✓ Il momento magnetico indotto nel materiale è concorde e parallelo al campo inducente.
- ✓ E' dovuto sostanzialmente all'orientamento dei momenti magnetici propri degli atomi o delle molecole del materiale.
- ✓ la suscettività magnetica delle sostanze paramagnetiche dipende dalla temperatura T e dalla densità ρ del materiale secondo la legge di Curie $\chi_m = C\rho/T$ con C coefficiente di Curie.
- ✓ A temperature standard la suscettibilità è molto piccola $|\chi_m| \leq 10^{-4}$
- ✓ La permeabilità assoluta μ si discosta pochissimo rispetto al caso del vuoto e la perturbazione portata alla configurazione dei campi dalla presenza di questi materiali può pertanto essere, di norma, trascurata. $\mu \approx \mu_0$
- ✓ Al discendere della temperatura, con l'avvicinarsi allo zero assoluto la suscettività magnetica dei materiali paramagnetici aumenta rapidamente.
- ✓ A bassa temperatura (dell'ordine del grado K), e per campi molto intensi (alcuni tesla) è stata osservata una pressoché completa saturazione del vettore magnetizzazione corrispondente all'orientamento secondo il campo di oltre 99% dei dipoli magnetici elementari.

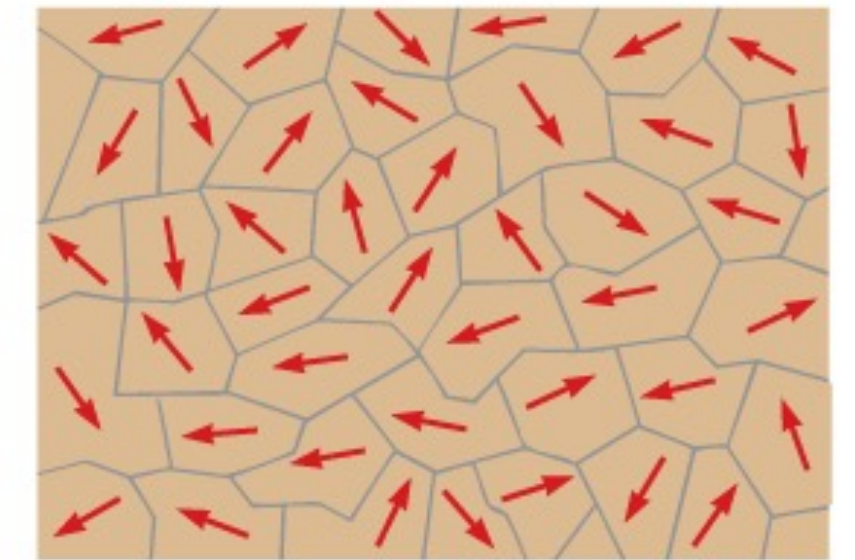
SOSTANZE PARAMAGNETICHE	
Sostanza	χ_m
Al	$22 \cdot 10^{-6}$
Cr	$312 \cdot 10^{-6}$
FeCl ₂	$3020 \cdot 10^{-6}$
Gd ₂ O ₃	$12.080 \cdot 10^{-6}$
O ₂	$1,9 \cdot 10^{-6}$
Pd	$820 \cdot 10^{-6}$
Pt	$295 \cdot 10^{-6}$



Sostanze ferromagnetiche

Materiale NON LIN. CON MEMORIA

- ✓ Fenomeno complesso per cui non esiste una spiegazione classica. L'interazione quantistica degli spin produce ^{H₀} domini (domini di Weiss) con una magnetizzazione spontanea.



- ✓ I valori di χ_m e di μ_r non solo dipendono in modo non lineare dall'intensità $\underline{H}$ del campo magnetico applicato, ma dipendono anche dalla storia magnetica (materiali con memoria), cioè dal modo con cui un dato valore viene raggiunto.

- ✓ Possono presentare valori di suscettibilità molto elevata se confrontata con gli altri materiali, dell'ordine di $10^3 - 10^4$ ma può arrivare in casi particolare anche a 10^6 .

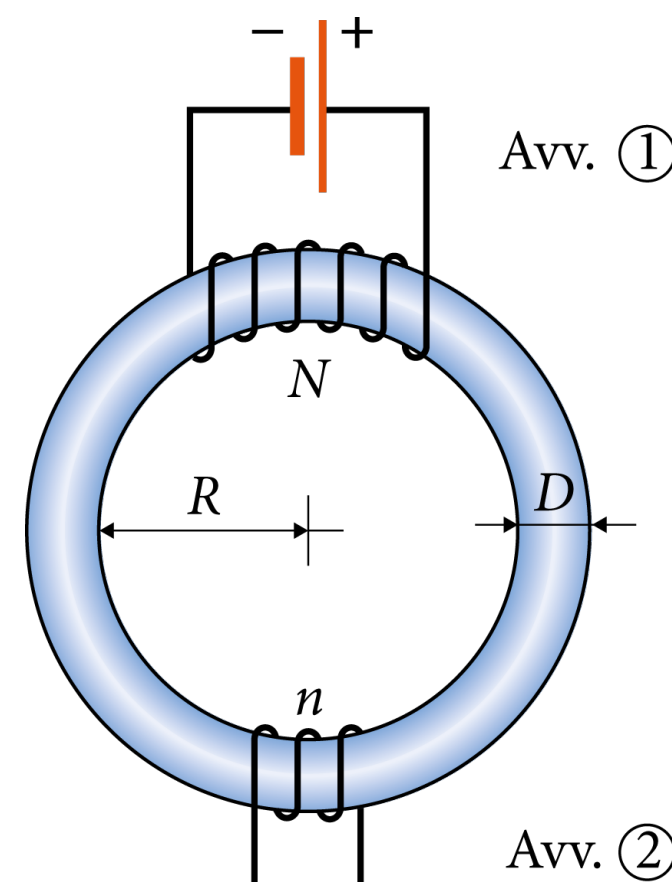
se applico $\underline{H}$ molto piccolo,
si allineano tutti i domini con $\underline{H}$

- ✓ Sono sostanze cristalline (ferro, cobalto, nichel e loro leghe)

- ✓ Si procede alla caratterizzazione sperimentale della relazione che lega $\underline{B}$ ad $\underline{H}$.

- ✓ La curva $\underline{B} = \underline{B}(\underline{H})$ si può utilizzare un solenoide toroidale in cui il toroide è formato dalla sostanza da analizzare.

specie



genero campo $\underline{H}$

$$\Delta H = \frac{N \Delta I}{2\pi R}$$

$$\Delta B = \frac{\Delta \phi}{nS}$$

Su 2 misuro flusso $\underline{B}$

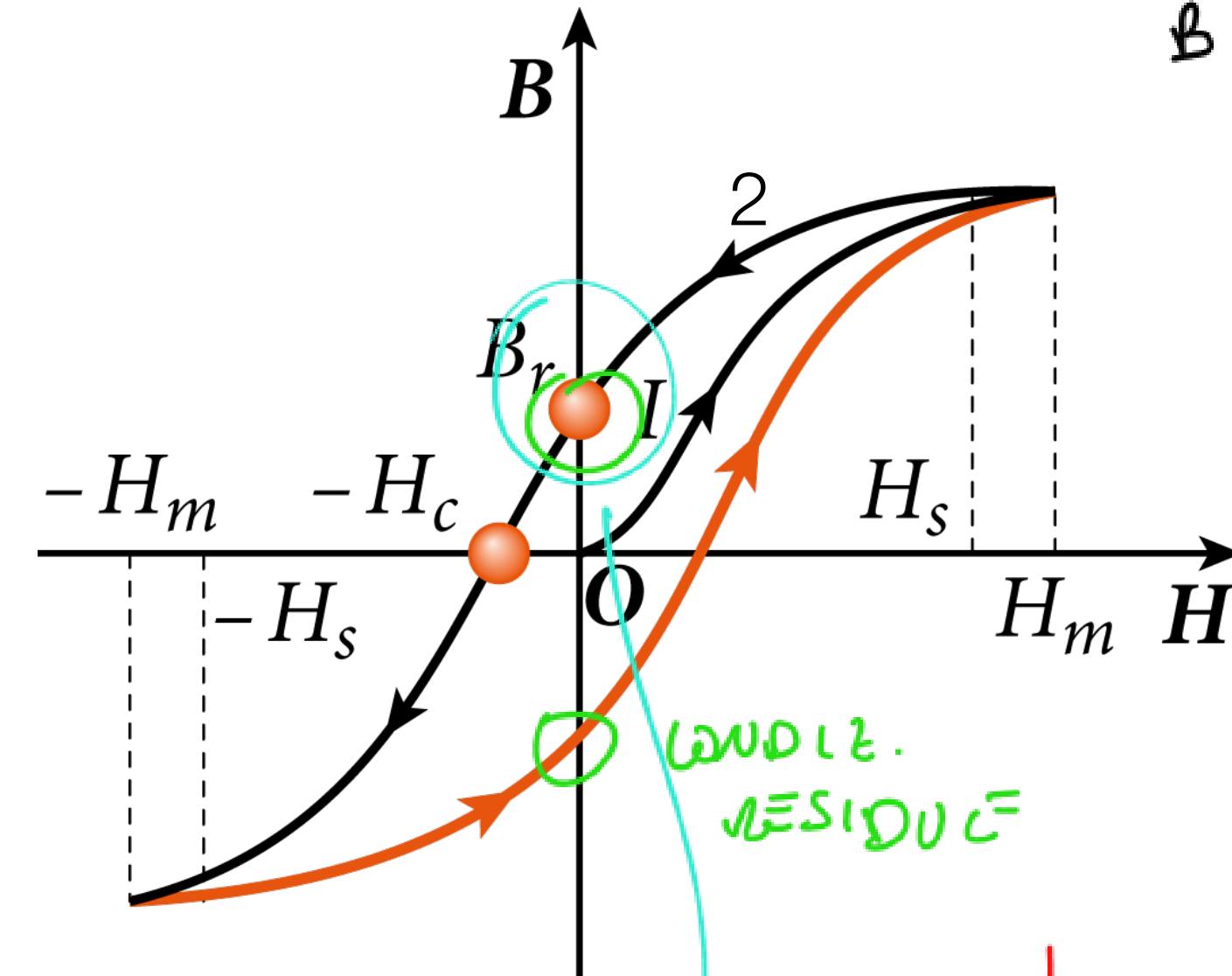
$\underline{B}$ confinato nel toroide

Ciclo di isteresi

1) non da materiale superconduttore, no H_{ext} , non no $\underline{H}$, no $\underline{B}$

2) quello H , aumenta B . B aumenta molto

- ✓ Indichiamo con $|\underline{B}| = B$ e $|\underline{H}| = H$ le intensità dei vettori induzione magnetica e campo magnetico
- ✓ Partendo dalla situazione $B = H = 0$, B aumenta all'aumentare di H , seguendo un andamento del tipo della curva 1 (curva di *prima magnetizzazione*).
- ✓ Inizialmente per piccoli valori H si ha un grande aumento di B
- ✓ Da un certo valore massimo H_m in poi, B prende ad aumentare solo proporzionalmente a $\mu_0 H$: ricordando che $B = \mu_0 M + \mu_0 H$ significa che per $H = H_m$ l'intensità di magnetizzazione M raggiunge praticamente il suo massimo valore asintotico (valore di *saturation* M). Tutti i domini sono orientati allineati al campo applicato.



B diminuisce non come prima, un po' di questi magneti sono orientati!

anche con $H = 0$, no campo est

no $B \neq 0$ no $H \neq 0$ anche senza campo

- ✓ Facendo diminuire H , B diminuisce seguendo la curva 2, sopra la curva 1.
- ✓ Quando H è di nuovo nullo, si ha una induzione residua $B_r > 0$.
- ✓ Invertendo il senso di H ed aumentando il valore si raggiunge un valore H_c chiamato campo coercitivo in cui l'induzione si annulla (ma $M \neq 0$). La curva si chiama di demagnetizzazione DEVO APPLICARE CAMPO INVERSO PER SMAGNETIZZ.
- ✓ Per $H < -H_c$ anche B diventa negativo, fino a raggiungere la saturazione per il campo inverso.
- ✓ Facendo variare, con regolarità e continuità, H fra $-H_m$ e H_m la curva si assesta su una forma ciclica piuttosto ben riproducibile detta ciclo di isteresi. RAPPORTO TRA B e H NON E' LINEARE

Ciclo di isteresi

MATEMATICA MA MEMORIA

però H_c , posso avere 3 valori diversi di B

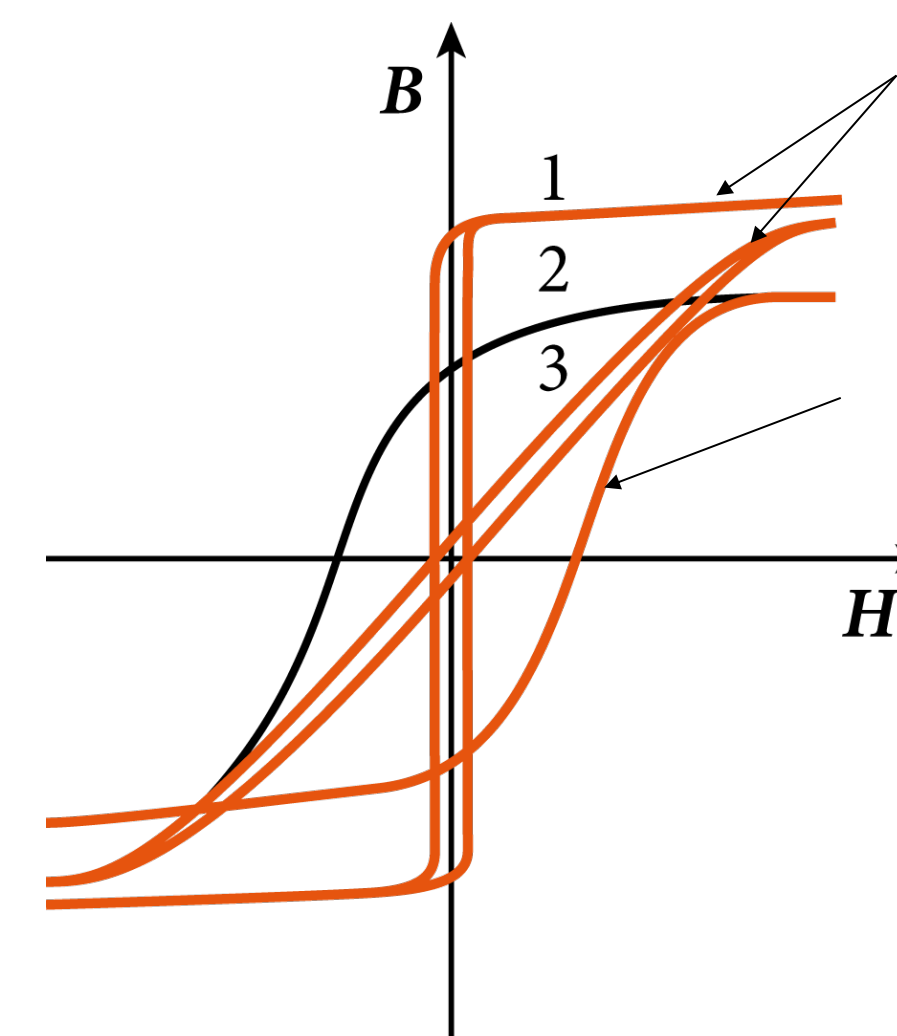
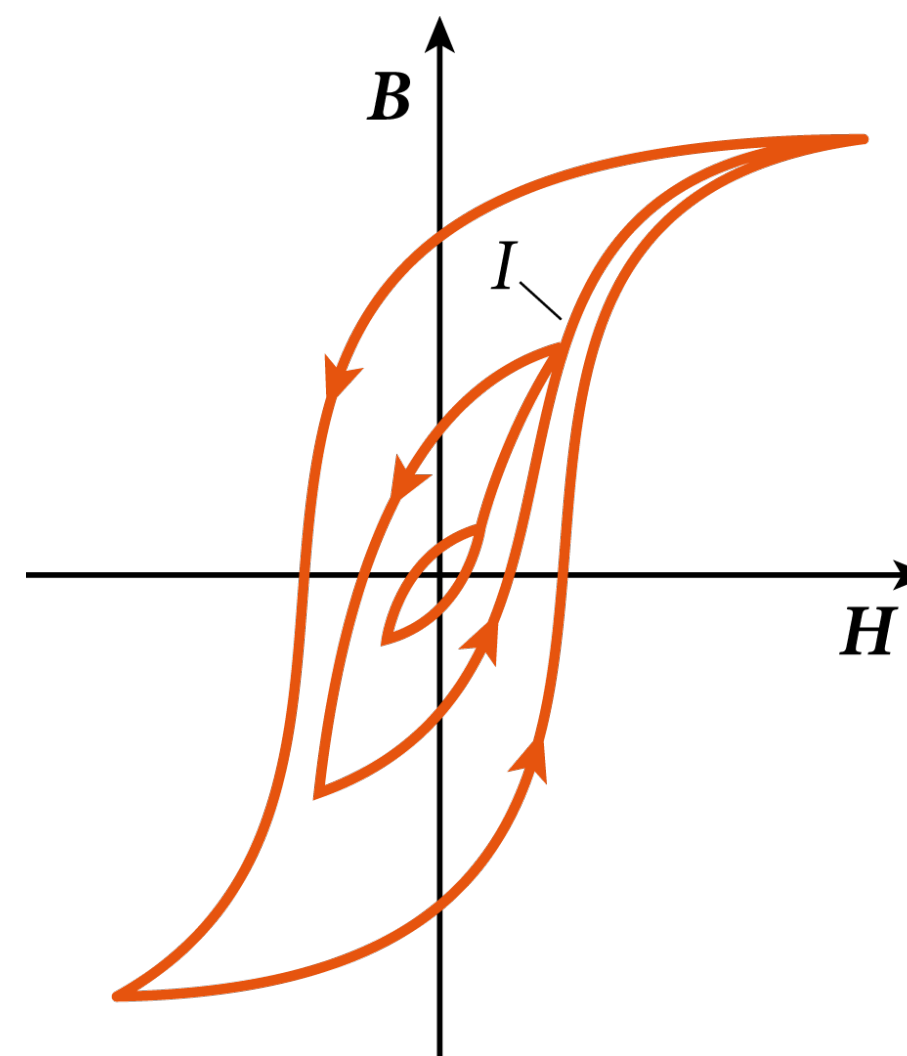
- ✓ per un materiale ferromagnetico, la permeabilità magnetica $\mu = B/H$ non solo non è costante (non è indipendente da H), ma non è nemmeno univocamente definita.
- ✓ A partire dalla condizione di materiale smagnetizzato, per piccoli valori H si ha un grande aumento di B
- ✓ Se H varia entro un intervallo più ristretto (e sempre simmetrico rispetto a zero), si ottengono dei cicli più piccoli, sempre simmetrici rispetto all'origine.
- ✓ La smagnetizzazione completa si può ottenere percorrendo i cicli di isteresi per valori di H sempre più piccoli, fino ad arrivare a 0.
- ✓ Il ciclo di isteresi dipende dal tipo di materiale e dal valore di H_m .

SMAGNETIZZO CON CICLO DI ISTERESI

CON H sempre più piccoli

- ✓ per un materiale ferromagnetico, la permeabilità magnetica $\mu = B/H$ non solo non è costante (non è indipendente da H), ma non è nemmeno univocamente definita.
- ✓ A partire dalla condizione di materiale smagnetizzato, per piccoli valori H si ha un grande aumento di B
- ✓ Se H varia entro un intervallo più ristretto (e sempre simmetrico rispetto a zero), si ottengono dei cicli più piccoli, sempre simmetrici rispetto all'origine.
- ✓ La smagnetizzazione completa si può ottenere percorrendo i cicli di isteresi per valori di H sempre più piccoli, fino ad arrivare a 0.
- ✓ Il ciclo di isteresi dipende dal tipo di materiale e dal valore di H_m .

H_1



dolce (H_c basso)

duro (H_c alto)

molle
dello
duro

si vede subito
se smagnetizza
o no

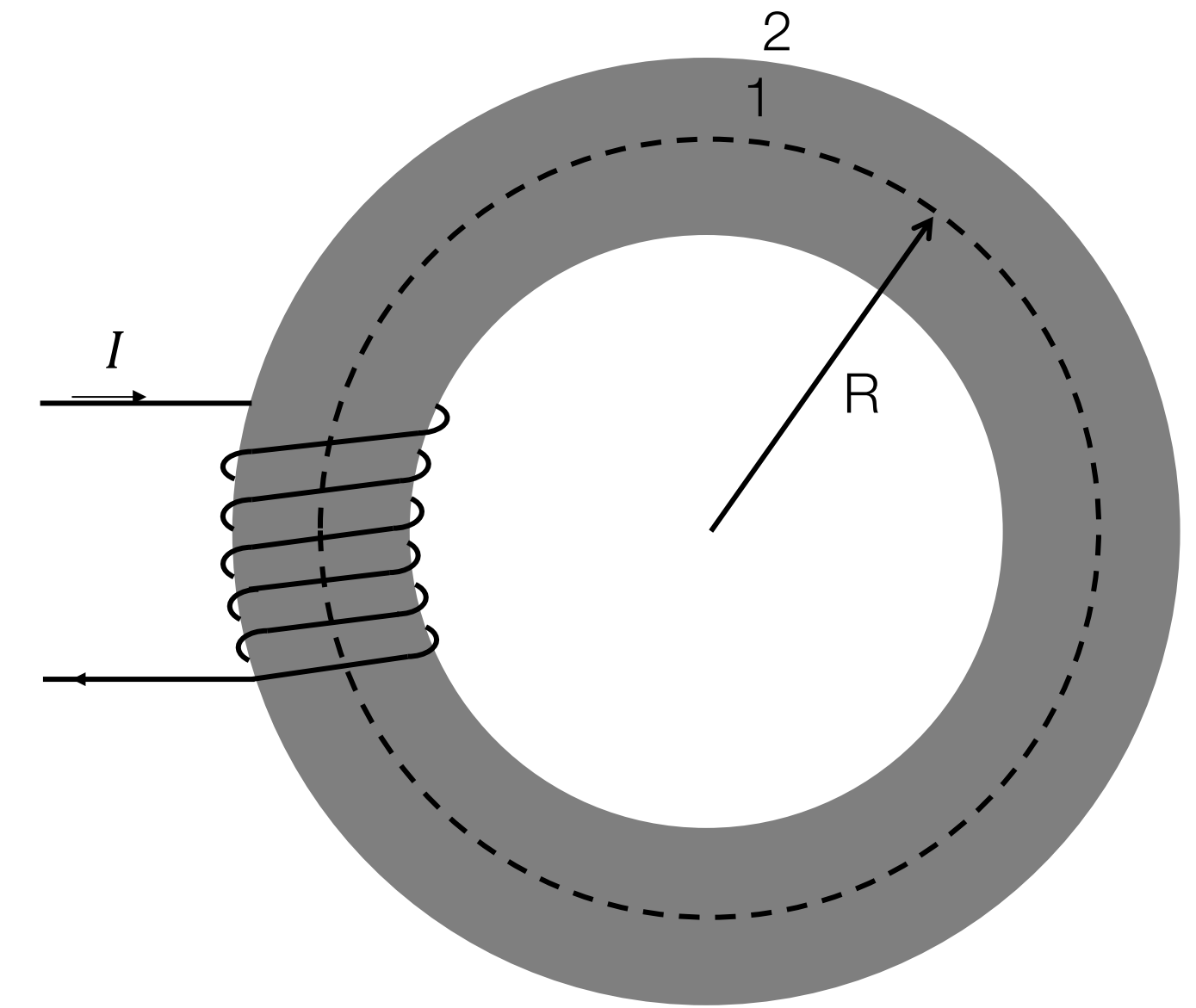
MAT. DIA O PARAMAGN POSSO caratterizzare μ_r con un numero. CON FERROMAGN-
MI SERVE GRAFICO

Linee di forza di $\underline{B}$ e permeabilità magnetica

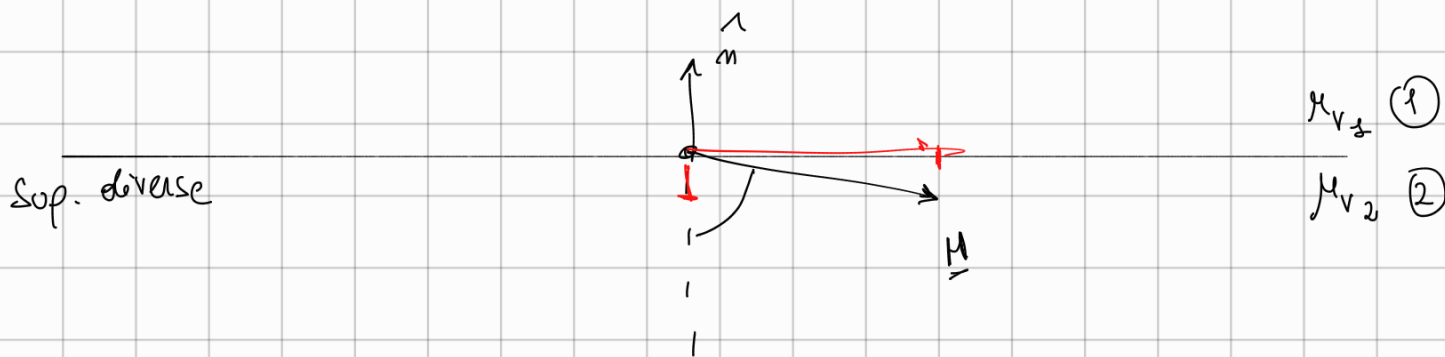
- ✓ Toroide di materiale ferromagnetico sul quale è avvolta una bobina di N spire.
- ✓ All'interno del toroide ferromagnetico si sviluppa un campo magnetico che in prima approssimazione vale, almeno nel centro,
 $H = \frac{NI}{2\pi R}$
- ✓ In assenza di correnti di conduzione sulla superficie di separazione aria-materiale si ha oppure

$$H_{1t} = H_{2t} \quad \longrightarrow \quad \frac{B_{1t}}{\mu_0 \mu_{r1}} = \frac{B_{2t}}{\mu_0} \quad \longrightarrow \quad \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \mu_{r1}$$

- ✓ Dato l'alto valore di μ_{r1} ($10^3 - 10^4$), B_{1t} è molto più grande di B_{2t} per cui il numero di linee di forza nel materiale è molto più alto che nel secondo.
- ✓ Le linee di forza di $\underline{B}$ tendono *ad addensarsi all'interno del corpo con permeabilità magnetica più alta*.
- ✓ Nel caso del toroide ferromagnetico tendono a rimanere tutte confinate all'interno, così che il flusso disperso in aria si può considerare nullo
- ✓ All'interno il flusso rimane costante su ogni sezione.



DA VIDEOLEZ.



nel mezzo 2 ho un campo magnetico in (2) QUASI TANGENTE
componente NORMALE PICCOLA, TANGENTE GRANDE

Mezzo cond. se resta costante

μ_0, μ_r costanti;

$$\underline{B}_2 = \mu_0 \mu_{r2} \underline{H}_2$$

Se sup. NON ci sono densità sup. di corrente

condiz

$$\underline{H}_{1t} = \underline{H}_{2t}$$

← ci sarà un campo magnetico anche nel mezzo 1

$$\underline{B}_1 = \mu_0 \mu_{r1} \underline{H}_1$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{B}_{1T}}{\cancel{\mu_0 \mu_{r1}}} = \frac{\underline{B}_{2T}}{\cancel{\mu_0 \mu_{r2}}}$$

$$\underline{B}_{1T} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \underline{B}_{2T}$$

ma se $\left[\mu_{r1} \ll \mu_{r2} \right]$

SUPPONIAMO CHE (2) SIA
UN METTO ALTA PERMEAB.
MAGNETICA

$$B_{1T} \ll B_{2T}$$

$$\text{ma } B_{1m} = B_{2m}$$

e H_{2m} era
piccolo



globalmente

$$B_1 \gg B_2$$

$\Rightarrow$ I MEZZI ad alta permeabilità sono MEZZI IN
CUI SI CONCENTRANO LE LINEE di FORZA
DEL CAMPO INDUZ. MAGNETICA

esempio classico del TOROIDE

$\hookrightarrow$ VEDI FINE o ALTRA SLIDE