

$$E(r) = k_e \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|r-r_i|^3} (r-r_i)$$

campo elettrico generato da più cariche puntiformi

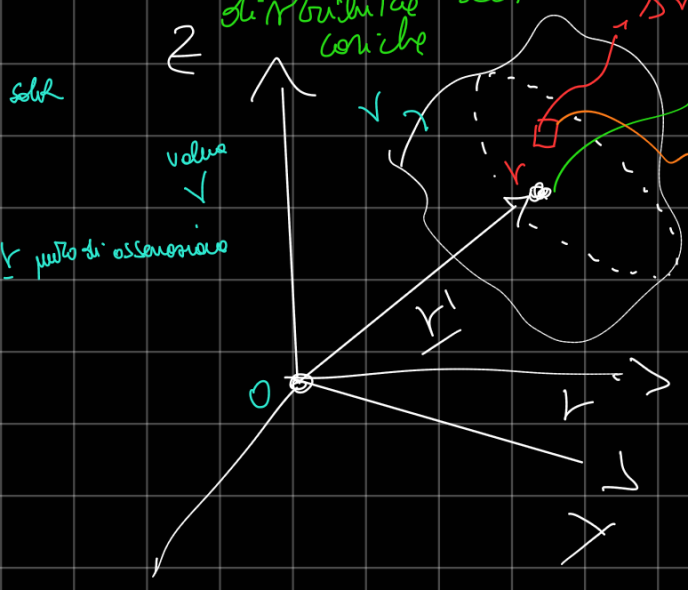
14/10/22

Nella pratica non abbiamo cariche puntiformi, ma cariche distribuite
DISTRIBUZIONE continua di cariche

1 mm³ volume = $2,5 \cdot 10^8$ e (elettroni)

nel volume sono distribuite cariche

le cariche possono essere distribuite su una Superf. o un volume o una linea



$$\rho(x', y', z') \Delta V = \Delta Q$$

quantità totale di carica

il punto di osservazione nel volume abbiamo distribuite delle cariche ΔQ

DENSITA' VOLUMETRICA DI CARICA ELETTRICA

Densità volumetrica delle cariche elettriche

$$\rho(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

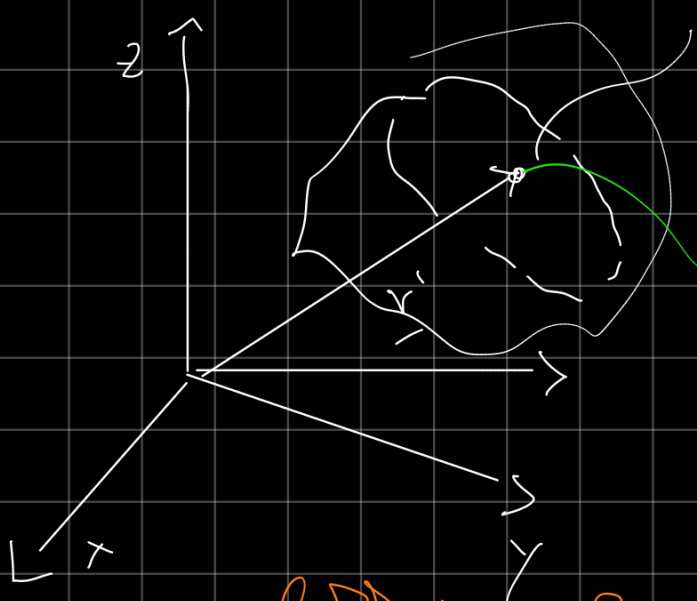
di più del punto di osservazione

$$\left[\frac{C}{m^3} \right]$$

distribuzione, densità continua
 ΔV suff. piccola per cui la densità è costante

densità che varia in base al punto di osservazione

Volume



$$dq = \rho(x', y', z') dv$$

nel punto di osservazione

la approssimo ad una carica puntiforme dq
Carica Totale contenuta nel volume infinitesimo

$$\rho(x', y', z') dv = dq$$

$\rho(r) \rightarrow$ densità di carica volumetrica

Che campo elettrico produce questa densità? ρ ?
dq produce un campo elettrico infinitesimo

Campo elettrico elementare = $\int \rho(r') dv'$

r = punto di osservazione

$$dE(r) = k_e \frac{dq}{|r-r'|^3} (r-r') =$$

Contributo infinitesimo del campo elettrico

integrale vettoriale con 3 componenti

$$= \frac{\rho(r') dv' (r-r')}{|r-r'|^3}$$

Somma su tutti i volumi elementari: integro su dq

r fisso
 r' sposta lungo il volume

$$E(r) = \iiint_V k_e \rho(r') \frac{(r-r')}{|r-r'|^3} dv'$$

Integrale

Campo EL. DATO DA UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA DI DENSITA' DI CARICA VOLUMETRICA

$|r-r'|$ e' un vettore e sta forte sulle 3 componenti x,y,z

r' deve coprire tutti i punti del volume

Carica elettrica distribuita su una Superficie

Somma tutte le cariche per superficie

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S}$$

Capacita' =

$$= \sigma(x,y,z) \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

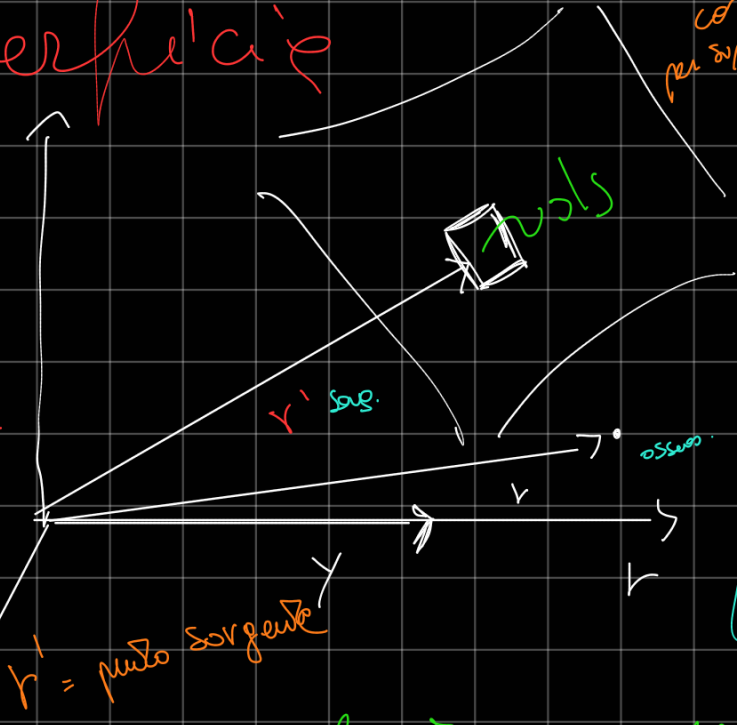
$$dQ = \sigma(r') ds'$$

quantita' di carica puntiforme

σ = densita' superficiale di carica elettrica

CARICA SUPERFICIALE

r punto di osservazione



$r' =$ punto sorgente

Contributo elementare campo elettrico nel punto di oss. r dovuto a r'

$$dE(r) = k_e \frac{\sigma(r') ds' (r-r')}{|r-r'|^3}$$

cio si integra nella sup di r'

Campo elettrico generato da una sup

Somma tutti i

DISTANZA

$$E(r) = \iint_S k_e \frac{\sigma(r') (r-r')}{|r-r'|^3} ds'$$

Contributo

area elementare in r'

$$\left[\frac{N}{C} \right]$$

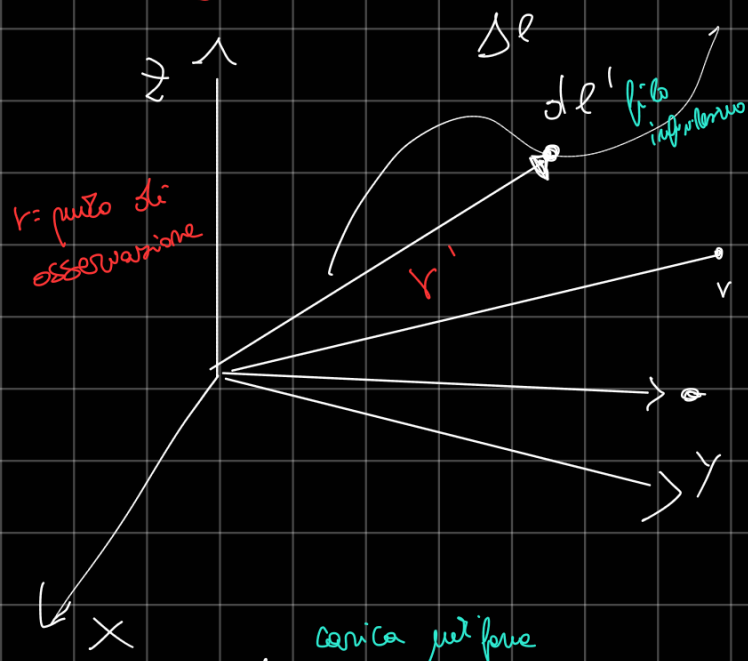
lunghezza

Filo conduttore

Distribuzione lineare di carica

Somma tutte cariche elettriche

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \lambda(x, y, z) \left[\frac{C}{m} \right]$$



Distribuzione / densità lineare di carica elettrica per unità di lunghezza

Voglio calcolare campo elettrico.

- 1) punto di osservazione r
- 2) r' = valore della lunghezza

$$\Delta Q = \lambda(r') \Delta l'$$

carica puntiforme

$$dE(r) = k_e \frac{\lambda(r') \Delta l'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

carica dl

senza fare 3 integrali, uno per ogni coord.

$$\underline{E}(r) = \int \frac{k_e \lambda(r') (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} dl' \left[\frac{N}{C} \right]$$

integrale di linea

Integrale vettoriale

uno per ogni coordinata.

Esempi di DISTRIBUZIONE DI CARICA

Infinita, rettilinea, uniforme (stesso valore in tutti i punti), nel vuoto.

Distribuzione uniforme = stesso valore in ogni punto ρ costante

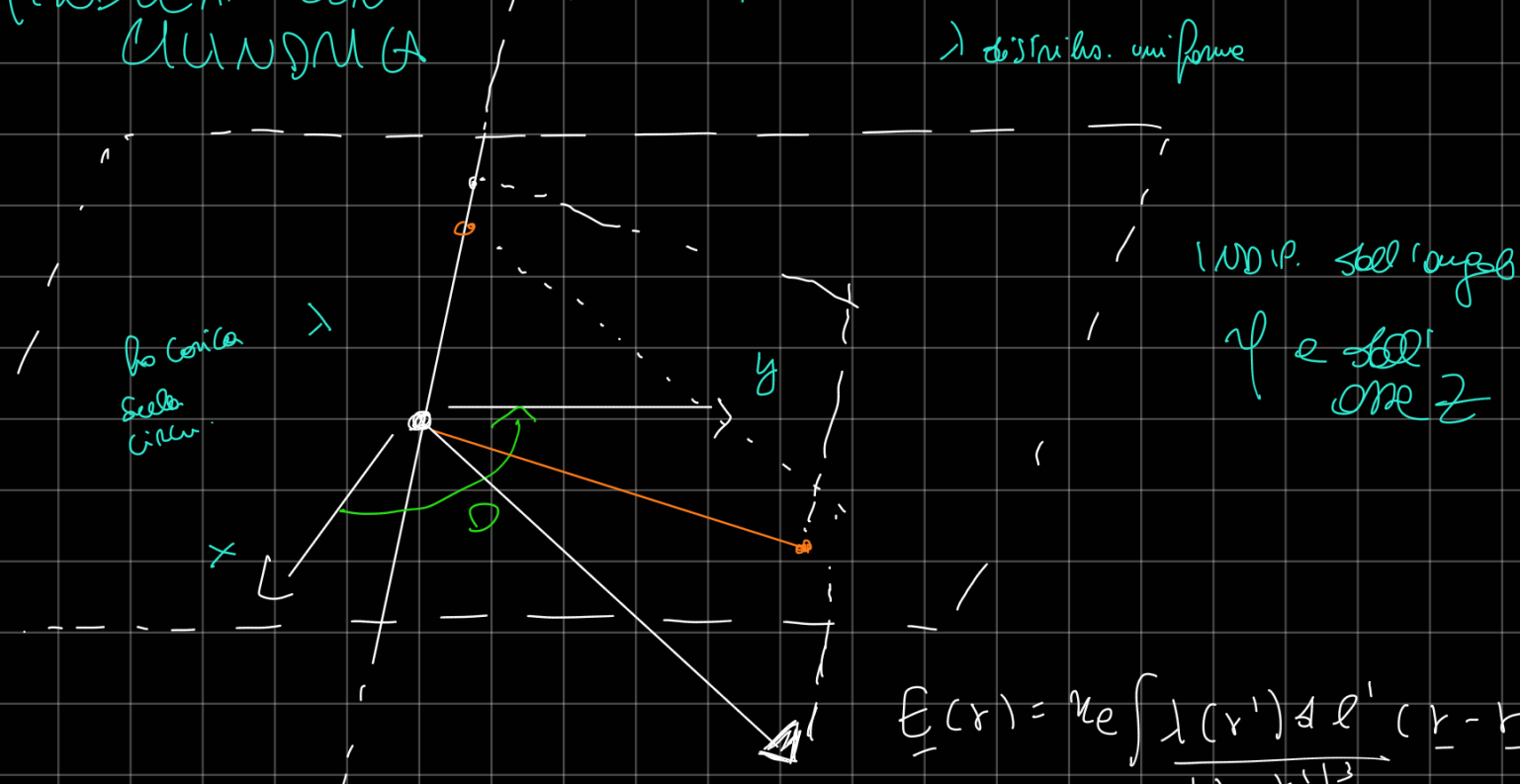
Se λ uniforme, λ è una costante

$$\lambda(r') = \lambda \left[\frac{c}{m} \right] \rightarrow \text{costante, è una nuova distribuzione uniforme}$$

• Supponiamo di dover calcolare il campo elettrico di un punto $\rightarrow$ Se cambio il punto ma sto alla stessa distanza, il campo elettrico non varia $\rightarrow$ il campo elettrico non

ha una dipendenza dalla posizione (lungo Y , forse?) r uguale

PROBLEMA CON SIMMETRIA CILINDRICA



$$E(r) = k_e \int \frac{\lambda(r') d\ell' (r - r')}{|r - r'|^3}$$

Esempio 1
DISTRIBUZIONE
UNIFORME
SU TUTTO
ASSE z
 λ di conica

$$= k_e \lambda \int \frac{d\ell (r - r')}{|r - r'|^3}$$

all'infinito

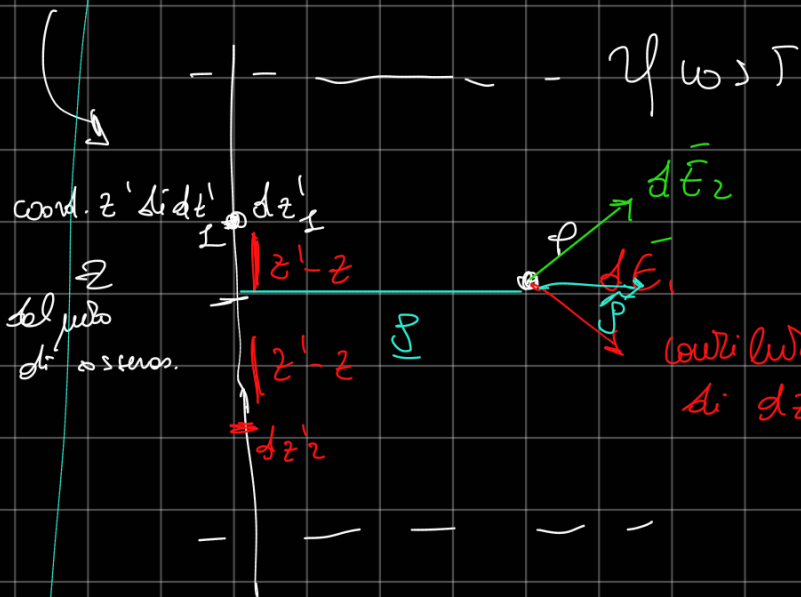
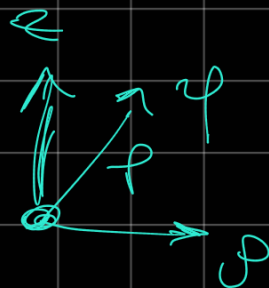
$$E(r) = k_e \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{|r-r'|^3} (r-r')$$

con $r' = z' \hat{z}$ direzione lungo z

$$dQ = \lambda dz'$$

NOTO UNA SIMMETRIA

questo piano ψ costante (condizione asse z e r)



contributo conica el. di dz'_1

se li sommo ... a 2 a 2

ho un corpo elettrico elementare solo alla somma, lungo y e la componente lungo z cancella

$\forall dz'_2$ ci sarà un elemento simmetrico dz'_1 la cui distanza da P è la stessa. $\Rightarrow$ stessa conica, stessa distanza ... Attraverso corpo el. e la stessa

Possò far variare dz' lungo solo in una direzione. ($0, +\infty$) piccolo a 2 a 2 per avere il doppio della z (E_{py})

però ho già la stessa, è il mio versione ϕ dello stesso

Se posto p non varia la questione.

nono' sempre i 2 contributi

mi scoglio un po' semplice $\underline{r}$
so ci fare integrale

linea $\Delta l \rightarrow 0$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta l} = \lambda(x, y, z) \frac{c}{m}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

piano a ρ costante

$$\lambda(\underline{r}_1) = \lambda \quad c/m$$

$$\underline{r} = \rho \hat{\rho} \quad \underline{r}' = z' \hat{z}$$

carica elementare q

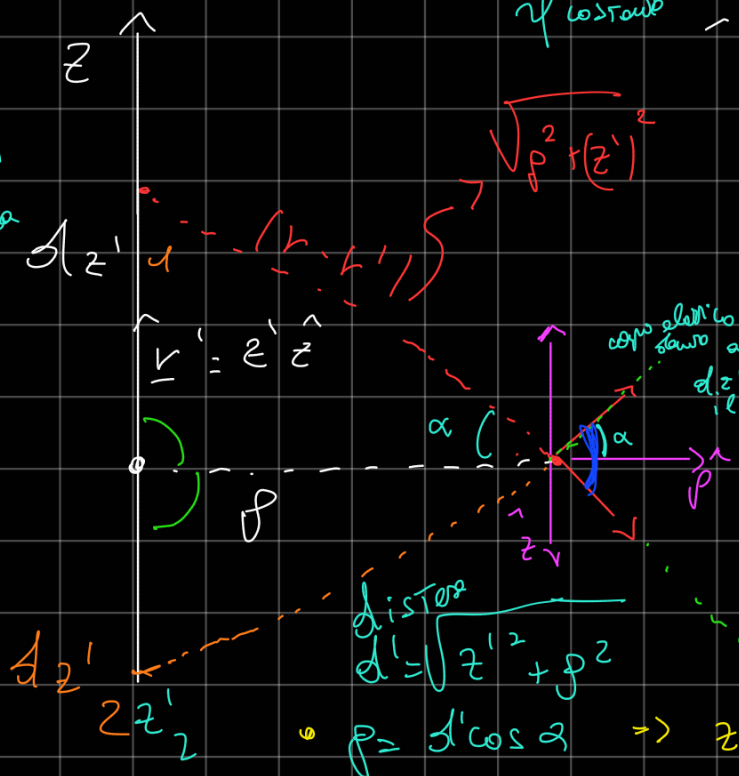
$$dq = \lambda dz'$$

per passare tutto il filo

$$-\infty < z' < +\infty$$

contributo elementare del
campo elementare

una sua componente
lungo $\underline{z}$, o una componente $\underline{\rho}$



$$\rho = d \cos \alpha \Rightarrow z' = d \sin \alpha = \rho \tan \alpha$$

ora so che c'è una carica
il campo elettrostatico
campo elettrico
infinitesimo

per il punto $\underline{r}$

carica $\cos \alpha \hat{\rho}$

appross

$$d\vec{E}_1(\underline{r}) = \frac{k_e \lambda dz' (\rho \hat{\rho} - z' \hat{z})}{\left(\sqrt{\rho^2 + (z')^2} \right)^3}$$

$$\underline{r} = \rho \hat{\rho}$$

$$\underline{r} - \underline{r}' = \rho \hat{\rho} - z' \hat{z}$$

DISTANZA

per qui elemento di linea z' c'è un
elemento speculare, la distanza è
la stessa, quindi la carica è la stessa
contributo $\underline{r} - \underline{r}'$

$$d\vec{E}_2(\underline{r}) = \frac{k_e \lambda dz' \cos \alpha}{\rho^2 + z'^2}$$

all'infinito, a capo se convergono
in direzione $\underline{z}$

invece la componente lungo ρ
 si somma.
 per campo elettrico $\vec{E}$ calcola solo
 componente ρ

$$E(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{k_e \lambda dz' \rho \cos \alpha}{(\rho^2 + (z')^2)^{3/2}} =$$

da considerare generale

$$= 2k_e \lambda \rho \int_0^{+\infty} \frac{dz' \cos \alpha}{[\rho^2 + (z')^2]^{3/2}}$$

uso del

$$\frac{z'}{\rho} = \tan \alpha$$

perché $z' = \rho \tan \alpha$
 $\rho = \rho \cos \alpha$

$$\Rightarrow \sqrt{\rho^2 + (z')^2} \cdot \cos \alpha = \rho$$

ipotesi

$$\sqrt{\rho^2 + (z')^2} = \frac{\rho}{\cos \alpha}$$

derivando
 v. rispetto a α

$$z' = \rho \tan \alpha$$

$$\frac{dz'}{d\alpha} = \rho \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow dz' = \frac{\rho d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

Sostituisce

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{z'}{\rho}$$

$$z' = \rho \tan \alpha$$

$$\frac{dz'}{d\alpha} = \frac{\rho}{\cos^2 \alpha} = \frac{\rho d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

variando z' , varia anche la distanza
 e di conseguenza l'angolo

Come posso scrivere il tensore di densità di carica nell'interpolo?

carica
vest.

$$\vec{E}_p(\underline{r}) = 2k_e \lambda \int_0^{\pi/2} \frac{\rho d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{2k_e \lambda}{\rho} \int_0^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha$$

questo α tende a infinito
 α tende a $\pi/2$

$$\sqrt{\dots} = \rho \cos \alpha$$

ho fatto un cambio di variabile. ora varia α

$$\frac{\cos^3 \alpha}{\rho}$$

da 0 a $\pi/2$
invece da z' da 0 a $+\infty$

oppure

$$\vec{E}_p(\underline{r}) = \frac{2k_e \lambda}{\rho} \int_0^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha$$

ora dipende da ρ

$$= \frac{2k_e \lambda}{\rho} \hat{\rho}$$

La carica, solo
perpendic. al filo
e rimane costante con ρ .
non dipende da ρ e z (campione)
 $\rho = \sin \pi/2 - \sin 0 = 1$

Campo elettrostatico
generato da una distrib. rettilinea
di carica elettrica

dipolo
di ρ

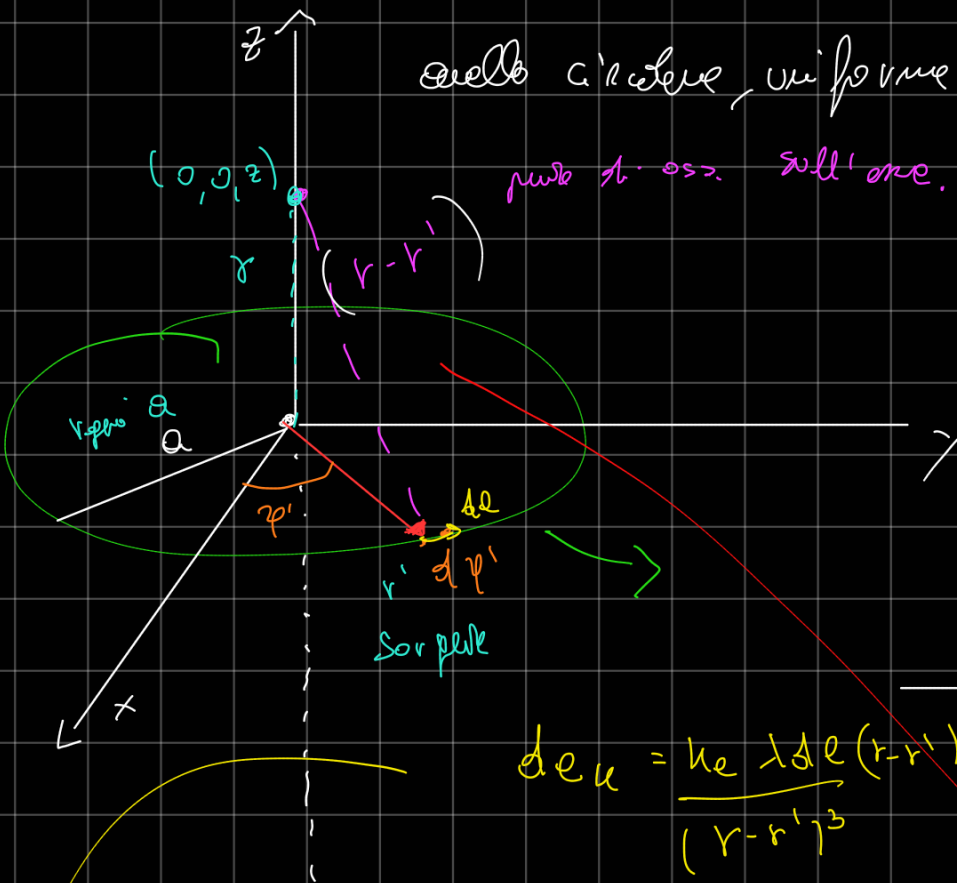
Esercizio 2

DISTRIBUZIONE
DI CARICA
SU UNA
CIRCONFERENZA

anello circolare, uniforme λ [C/m]

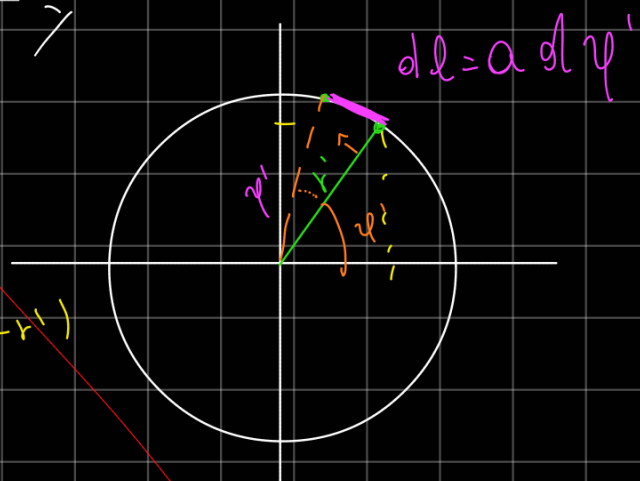
punto di oss. sull'asse.

$$\underline{r} = z \hat{z}$$



$$d\vec{E} = k_e \lambda d\vec{r} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

uso coord. cilindriche



Campo elettrostatico generato da questo anello?

r è fisso
 r' deve variare
 su tutta la
 circonferenza

• $[d\ell' = a d\varphi']$

r' deve spazzolare tutto
 l'anello

• $r' = a \cos \varphi' \hat{x} + a \sin \varphi' \hat{y} + 0 \hat{z} \leftarrow \text{proiezione}$
 faccio variare φ' da

$0 < \varphi' < 2\pi$

Punto di osservazione sull'asse

• $r = z \hat{z}$

$dE(r) = k_e \frac{\lambda a d\varphi' (r-r')}{|r-r'|^3}$

mi calcolo

$(r-r') = -a \cos \varphi' \hat{x} - a \sin \varphi' \hat{y} + z \hat{z}$

↑
 vettore che dalla circonferenza
 punta verso il
 punto di osservazione

calcolo il modulo

$\sin^2 + \cos^2 = 1$



$|r-r'| = \sqrt{a^2 + z^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi' + a^2 \cos^2 \varphi' + z^2}$

proiezione lungo gli assi

$dE(r) = k_e \lambda a d\varphi' \frac{[-a \cos \varphi' \hat{x} - a \sin \varphi' \hat{y} + z \hat{z}]}{(\sqrt{a^2 + z^2})^3} = r-r'$

voglio spazzolare tutto

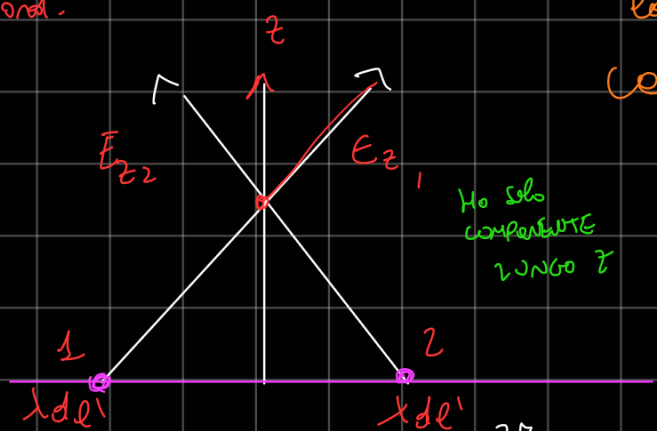
l'intero l'integrale

$E(r) = k_e \lambda a \int_0^{2\pi} \frac{-a \cos \varphi' \hat{x} - a \sin \varphi' \hat{y} + z \hat{z}}{(\sqrt{a^2 + z^2})^3} d\varphi'$

$\Rightarrow$ ho 3 integrali

$E_x = k_e \lambda \frac{(-a^2)}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi'$

In gen. punto
facciamo vedere che
lo solo coord.
 E_z



$E_y = \frac{k_e \lambda (-a^2)}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin \varphi' d\varphi'$
la parte x e y del
campo elettrico si
annullano, le componenti
lungo z si sommano
Si va dappria

INTEGRALE
SENO z
COSENO da
 0 a 2π è 0

A q e
la stesse

$$E_z(x) = k_e \lambda a$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{z \cos \varphi'}{(\sqrt{a^2 + z^2})^3} d\varphi'$$

$\rightarrow$ è costante

Se z è 0 , lo stesso nell'origine,
il campo è 0 . Se aumenti z ,
il campo elettrico aumenta

$$E_{(x)} = k_e \lambda a 2\pi \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

SOLO COMP. lungo z

COMPONENTO ASINTOTICO
 $\approx k_e \frac{\lambda a 2\pi}{z^2}$
a grandi distanze
 $z \gg a$

$$\left[\frac{N}{C} \right]$$

$$\frac{1}{2\pi a} = \frac{C}{m} \cdot m = \text{Carica totale contenuta lungo la circonferenza}$$

$\lambda 2\pi a = Q$
è come se la circonferenza
si concentrasse nell'origine
come una carica puntiforme.
il suo campo ha componenti
lungo z

