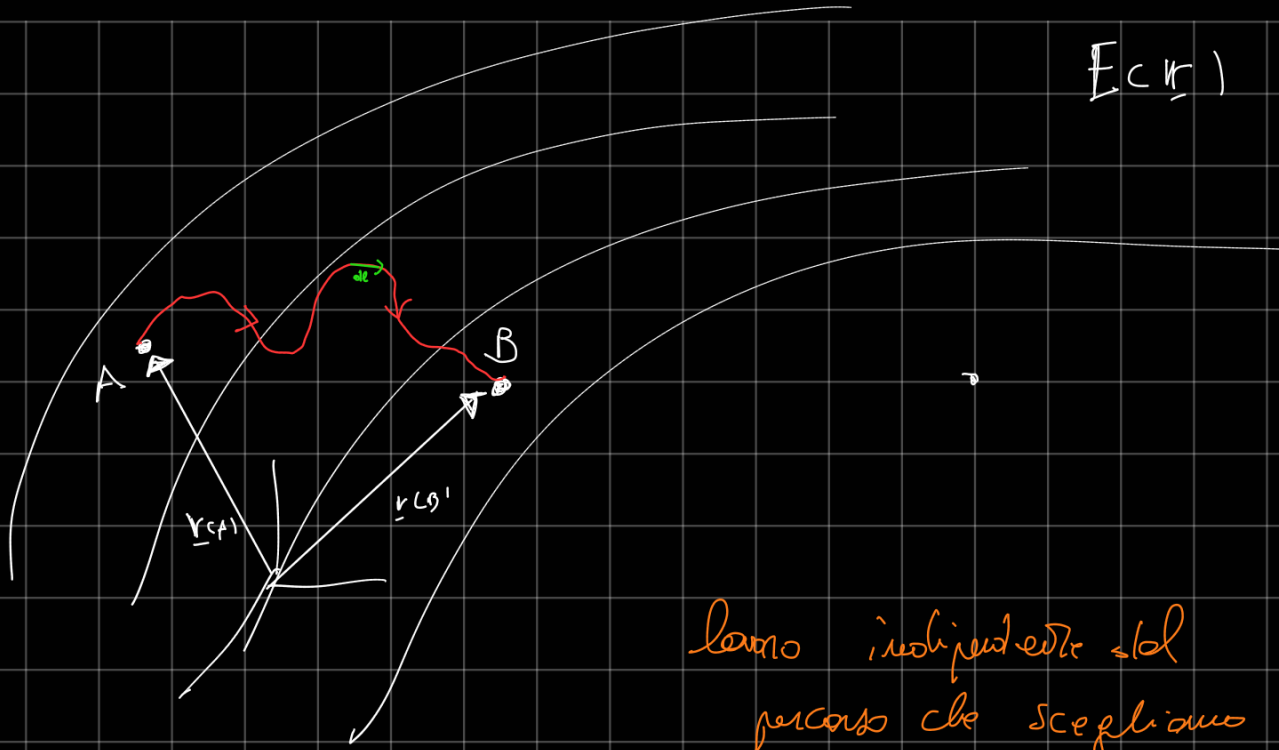


$E(r)$



lavoro indipendente dal
percorso che scegliamo

$$W_{AB} = - \int_A^B \underline{E}(r) \cdot d\underline{l} = \int_{\infty}^A \underline{E}(r) \cdot d\underline{l} - \int_{\infty}^B \underline{E}(r) \cdot d\underline{l}$$

$= V(B) - V(A) \quad \text{Volt} \quad \left[\frac{J}{C} \right]$

Lavoro con dipende dal percorso ma solo
differenza su 2 punti

Il potenziale stesso
è definito o no si usa
costante

$$dL = -E \cdot dl$$

$$V(B) = \int_{\infty}^B \underline{E}(r) \cdot d\underline{l} + C$$

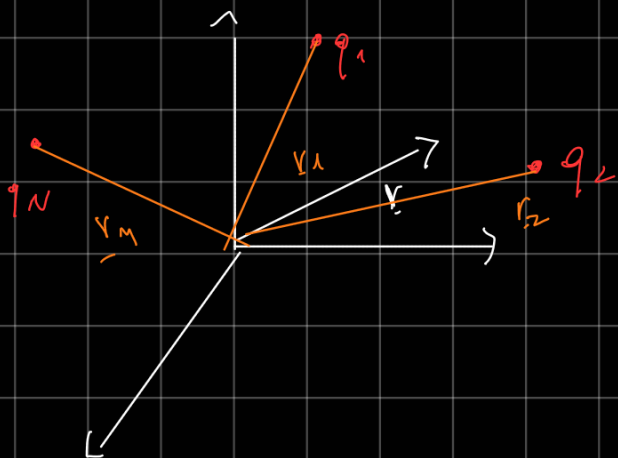
Costante
arbitraria
iniziale

con distribuzione di cariche fisse, non possono essere
 $V(\infty) = 0$

$N \quad q_1, q_2, q_3 \dots q_N$

$r_1, r_2 \dots r_N$

Voglio calcolare
l'energia potenziale
nel punto di
osservazione r



valore Sovrapp. effetti:

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r) + \dots +$$

$$V_N(r) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|r-r_i|} + C$$

dove C è il potenziale di un punto di riferimento

Il potenziale è una operazione scalare, e dunque ha una
distesa

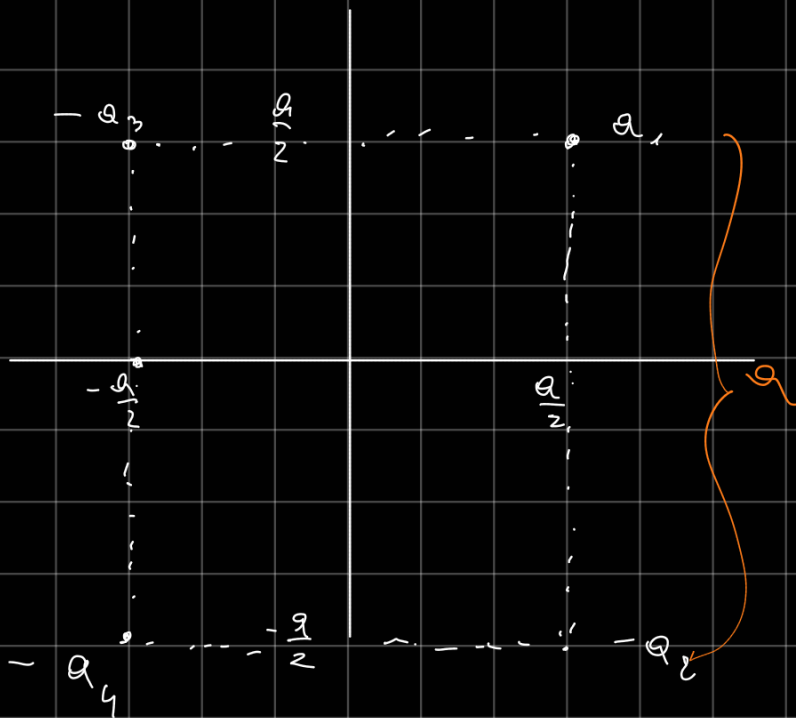
Ex. 12 Esercizi di riologia.

$$r_1 = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0 \right)$$

$$r_2 = \left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, 0 \right)$$

$$r_3 = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0 \right)$$

$$r_4 = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, 0 \right)$$



Portiamo la prima carica all'inf. per al P. vuoto $\emptyset$ perche' solo lei.

Porto la 2^a carica a distanza a dalla prima

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{k_e q^2}{a} \quad a \leftarrow \text{distanza tra le 2 cariche}$$

Spento la 3^a, lavoro con solo carica 1 e poi solo carica 2

$$U = \underbrace{\frac{k_e q^2}{a}}_{\text{quelle di prima}} + \frac{k_e (-q)^2}{a} + \frac{k_e (-q)^2}{\sqrt{2} a}$$

↑
distanza tra q_3 e q_2

Spento la 4^a

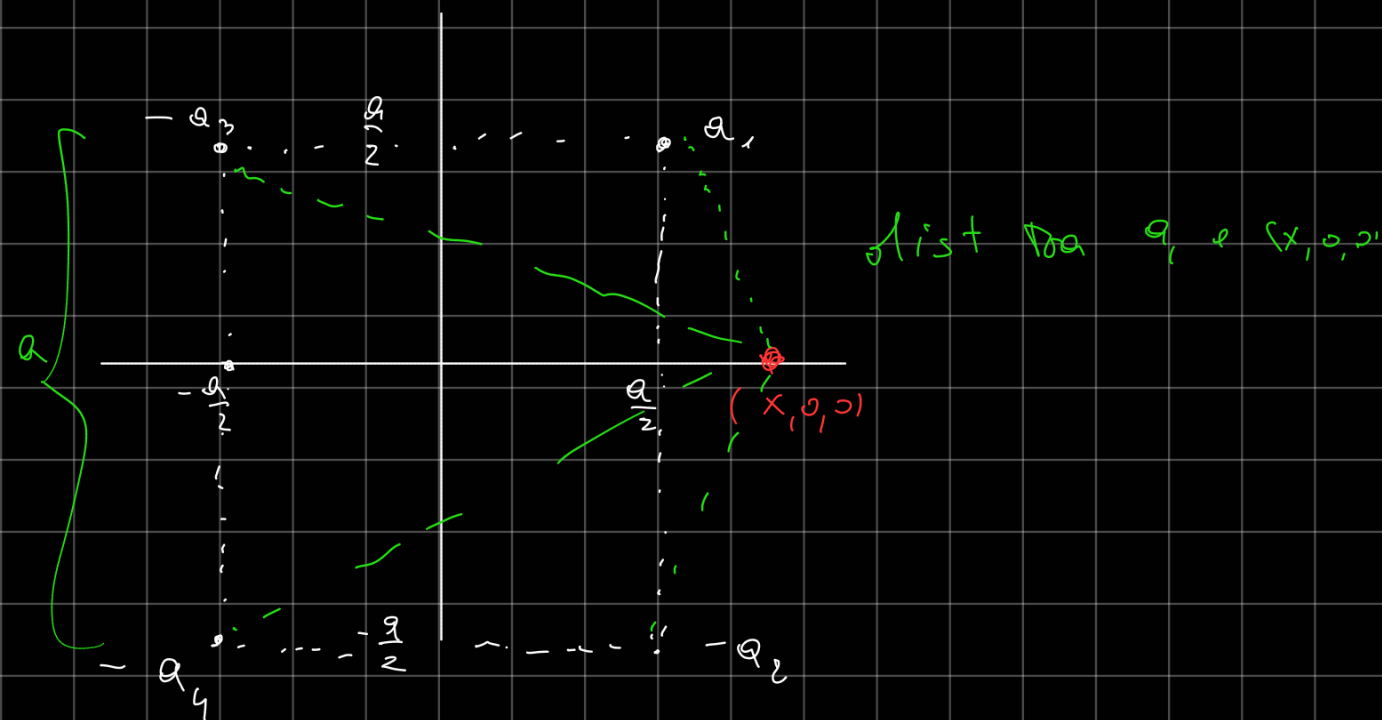
$$U_{\text{Tot}} = \cancel{\frac{k_e a^2}{a}} + \cancel{\frac{k_e (-q)^2}{a}} + \frac{k_e (-q)^2}{\sqrt{2} a} + \cancel{\frac{k_e (-q)^2}{\sqrt{2} a}} + \cancel{\frac{k_e q^2}{a}} =$$

$$= \frac{-2 k_e q^2}{\sqrt{2} a} = \frac{-\sqrt{2} k_e q^2}{a}$$

Calcoliamo il potenziale in $(x, 0, 0)$

$$\underline{V} = x \hat{x} + 0 \hat{y} + 0 \hat{z} \quad \text{il pt. sta sulla di 4 pot.}$$

$$V(x, 0, 0) = V_1(x, 0, 0) + V_2(x, 0, 0) + V_3(x, 0, 0) + V_4(x, 0, 0)$$



$$V_1(x, 0, 0) = \frac{k_e Q}{\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}}}$$

$$V_2(x, 0, 0) = \frac{k_e Q}{\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}}}$$

$$V_1 + V_2 = \frac{2 k_e Q}{\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}}}$$

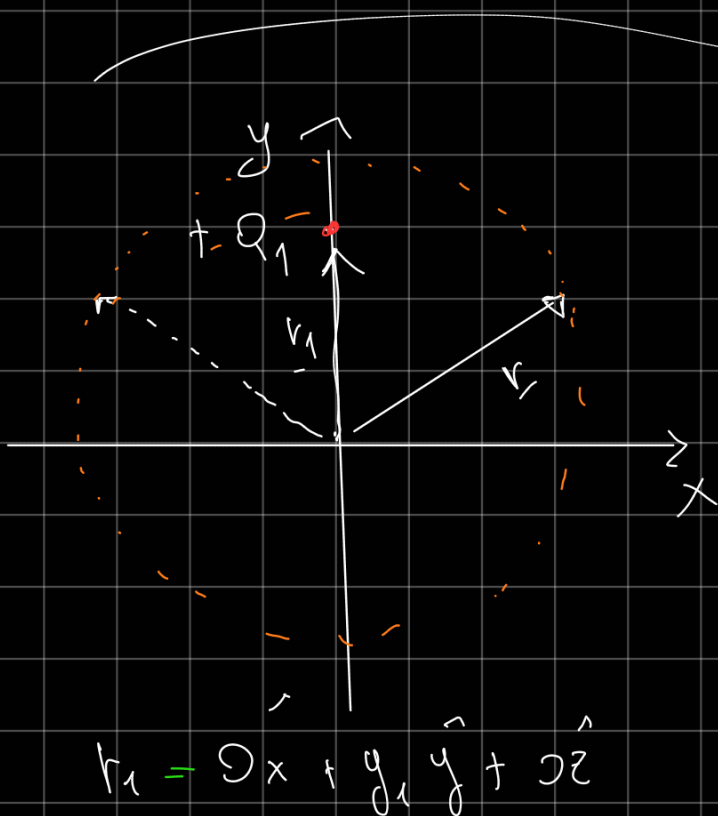
$$V_3(x, 0, 0) = \frac{k_e (-Q)}{\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}}}$$

$$V_4(x, 0, 0) = \frac{k_e (-Q)}{\sqrt{\left(x + \frac{Q}{2}\right)^2 + \frac{Q^2}{4}}}$$

$$V_3 + V_4 = \frac{2k_e (-Q)}{\sqrt{\left(x + \frac{Q}{2}\right)^2 + \frac{Q^2}{4}}}$$

$$V_{\text{tot}} = 2k_e Q \left[\frac{1}{\sqrt{\left(x - \frac{Q}{2}\right)^2 + \frac{Q^2}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{\left(x + \frac{Q}{2}\right)^2 + \frac{Q^2}{4}}} \right] + C$$

distribuzione di carica finita



$$E(r) = \frac{k_e Q_1}{|r - r_1|}$$

$$|r - r_1| = \sqrt{x^2 + (y - y_1)^2 + z^2}$$

Tutti i punti su questa circonferenza hanno lo stesso potenziale

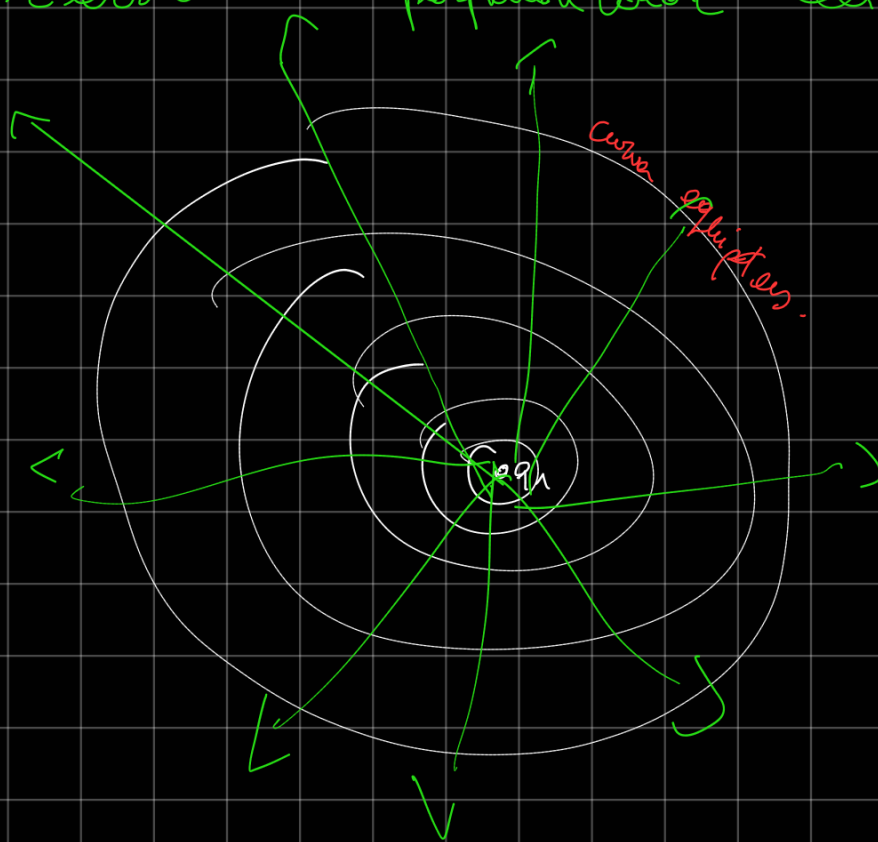
Su un piano, disegnare curve di livello e potenziale costante

Curve di livello = curve / superfici dove se mi posto sopra la curva, la differenza di potenziale è nulla e quindi faccio lavoro

Le curve a pot. costante sono punti in cui il campo elettrico

$\vec{e}$ perpendicolare alla curva

Il C.E. è perpendicolare alle eq.



Il punto centrale è esattamente il centro, il punto scelto
 sorgente, e quindi il potenziale tende all'infinito
 $|r - r_0| \rightarrow 0$

Nello spazio le superf. equipotenziali sono
sferiche
 con due centri

$$V(x, y, z) = \frac{k_e Q_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}} + \frac{k_e Q_2}{\sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2}}$$

Comunque le linee di forza del campo el.

Sono perpendicolare

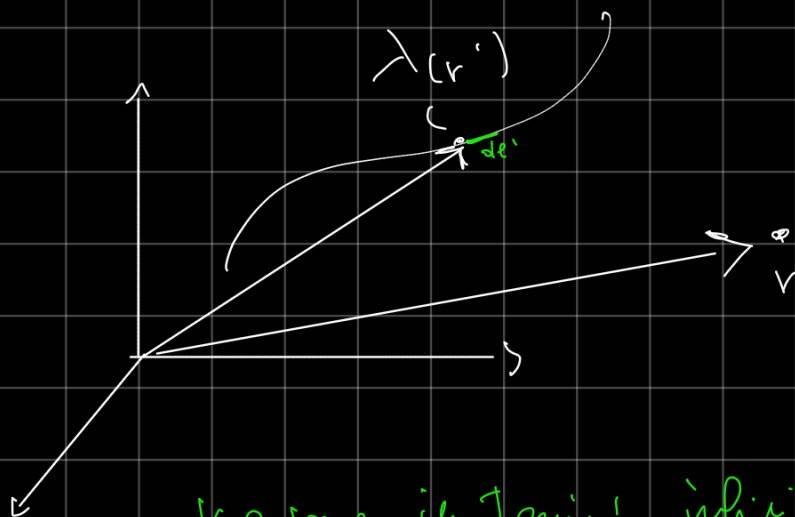
alle curve
di pot. costanti

vedi PDF su PT.

di $\lambda(r')$ linee

$$dL = - \int \epsilon(r) \cdot d\vec{l}$$

$\lambda(r')$ C/m
curva



quanto vale il
potenziale per
partire con carica
vicino al filo?

ragione in termini infinitesimi

da

$$dV(r) = k_e \frac{\lambda(r') dl}{|r - r'|}$$

contributo elementare
del potenziale

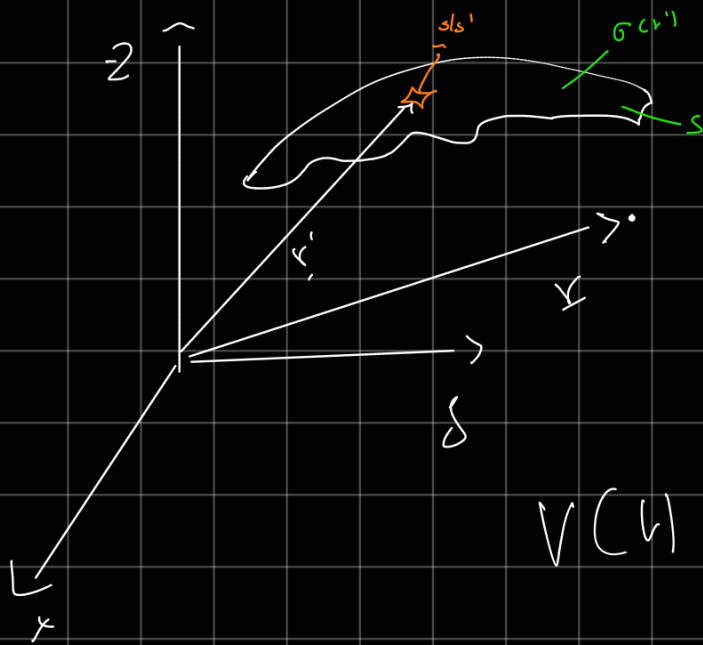
Poi uso la sovrapposizione degli effetti facendo la somma
i contributi dei fili

$$V(r) = \int \frac{k_e \lambda(r') dl'}{|r - r'|} + C$$

Se abbiamo invece una superficie con

$\sigma(r')$ C/m²

Prendiamo area



$$dV(r) = \frac{k_e \sigma(r') ds'}{|r - r'|}$$

sovrapposizione degli effetti

$$V(r) = \iint_S \frac{k_e \sigma(r') ds'}{|r - r'|}$$

Se abbiamo volume

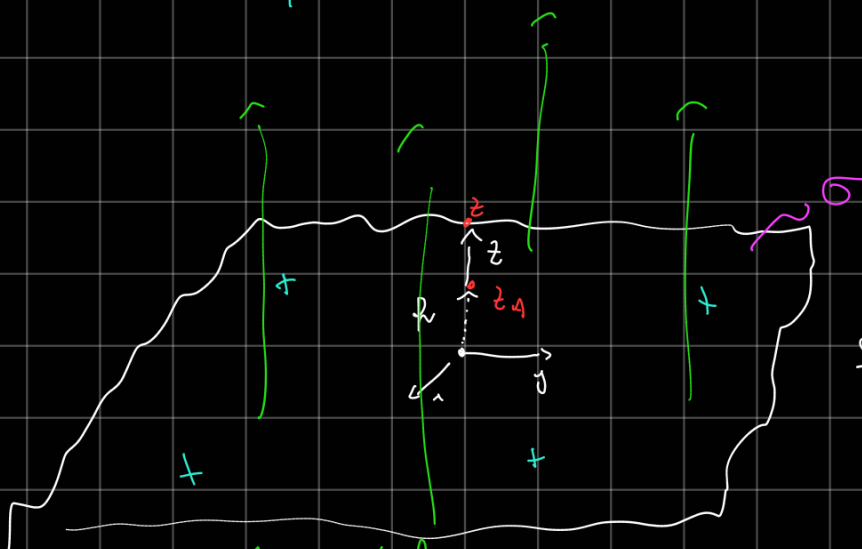
$\rho(r')$

$$V(r) = \iiint_V \frac{k_e \rho(r') dv'}{|r - r'|}$$

Come calcolare il potenziale?
generalmente da una distribuzione infinita piana

1.13

distribuzione
piana di carica
 σ , piano
infinito, la densità
UNIFORME



so più che

$$E(r) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z$$

non dipende da alcuna peculiarità

non dipende
da alcuna
peculiarità
del piano

linee di forza
e campo

dist. infinita

Poiché non ha importanza il cammino che faccio e

le linee di forza sono perpendicolari.

Potenziale conoscendo il campo elettrico

SCELGO CAMMINO LUNGO UNA CURVA DI FORZA

Scelgo 2 punti lungo una traiettoria che coincide con una linea di forza

$$V(z) - V(z_A) = - \int_{z_A}^z \underline{E}(r) \cdot (\hat{z} dz) = -$$

il spostamento da z_A a z

$$\rightarrow \int_{z_A}^z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \underbrace{\hat{z} \cdot \hat{z}}_1 dz = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} (z - z_A)$$

$$V(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (z - z_A) + V(z_A)$$

← Distrib. carica infinita

$V(\infty)$ non è 0, ma devo prendere

come riferimento la piastra (il piano)

devo come riferimento che

esercizio mi dà un punto in cui il potenziale è 0

INFO:

sul piano $V(0) = 0$
 $z=0 \quad V(0)=0$

$$\Rightarrow V(0) = \frac{+\sigma}{2\epsilon_0} z_A + V(z_A) = 0$$

$$\left[V(z_A) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z_A \right]$$

$$V(z) = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} z + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z_A - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z_A = \left[\frac{-\sigma}{2\epsilon_0} z = V(z) \right]$$

> lavoro per punto da cui
 dell'infinito a 0
 prendendo come riferimento $V(0)$

STUDIO POTENZIALE

DALLA DISTRIBUZIONE di carica

Se non so nulla del campo elettrico

$$V(\underline{r}) = k_e \iint_S \frac{\sigma dS'}{|\underline{r} - \underline{r}'|} + C$$

punto $r_0 = 0$ come
 riferimento e dire che
 $V(r_0) = 0$

per $r=r_0(z_A) \Rightarrow C = - \int_{V=0}^{\infty} \frac{k_e \sigma(r) dS'}{|r_0 - r'|}$
 punto dove gli elettroni si trovano

Un punto di questo modo è solo del
 volume r'

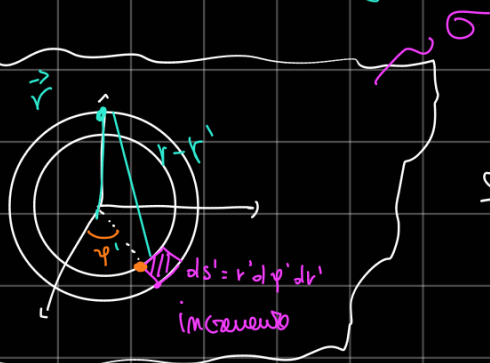
Prendendo un punto su cui posso usare un S.R. cartes. oppure uso coord. cilindriche

PANAZIA??

usando coord.

Sferiche

faccio 2 incrementi
 uno su dr' e
 l'altro su $d\varphi'$



$\underline{r}$
 $\underline{r}'$

linee di forza

$\underline{r} = z \hat{z}$ in cilindriche

non

Stango di una incanuto

AREOLA

$$ds' = r' dr' d\varphi'$$

laterale in 0,
 tutti i punti della
 corona di r. sono
 alla stessa dist.

$$V(r) = k_e \int \frac{\sigma r' dr' d\varphi'}{\sqrt{(r')^2 + z^2}} + C$$

conica dell'areola

areolina ds' genero

contributo areolina

z non è variabile
 di integr.

$$\frac{1}{\sqrt{r_1^2 + z^2}}$$

di posto solo su r'

Capo tutti
i punti

un potenziale
 $dV'(z)$ in z

φ' non dipende

$$= k_e 2\pi\sigma \int_0^\infty \frac{r' dr'}{\sqrt{(r')^2 + z^2}} + C =$$

$\rightarrow |r-r'|$

Primitiva

$$h = \sqrt{(x^2 + a^2)}$$

↑ Primitiva

$$\frac{dh}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$= k_e 2\pi\sigma \left[\sqrt{(r')^2 + z^2} \right]_0^\infty + C$$

potenziale va all'infinito

Scegliamo per questo
il riferimento
 $r' \rightarrow \infty$ a zero
all'infinito

Usiamo lo stesso riferim.
di prima

$$V(0) = k_e 2\pi\sigma \left[r' \right]_0^\infty + C = 0$$

$$C = -k_e 2\pi\sigma \left[r' \right]_0^\infty$$

e ora

Sostituendo

$$V(z) = k_e 2\pi\sigma \left[\sqrt{(r')^2 + z^2} - r' \right]_0^\infty$$

controlliamo gli
ordini di m.

all'infinito vale valore
costante

$$= -k_e 2\pi \sigma z$$

ma sostituisco k_e

$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} 2\pi \sigma z = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} z$$

lim $\left[\sqrt{(r')^2 + z^2} - r' \right]$ $\infty - \infty$
 $r' \rightarrow \infty$

allo sviluppo e studio per la radice

$$= \lim_{r' \rightarrow \infty} = \frac{\left(\sqrt{(r')^2 + z^2} - r' \right) \left(\sqrt{(r')^2 + z^2} + r' \right)}{\left(\sqrt{(r')^2 + z^2} + r' \right)}$$

$$= (r')^2 + z^2 - (r')^2 = z^2$$

Da calcolare poi

$$I_1 = k_e \sigma 2\pi \left[\sqrt{r'^2 + z^2} \right]_0^{\infty}$$

$$I_2 = k_e \sigma 2\pi \left[\sqrt{r'^2 + z_P^2} \right]_0^{\infty}$$

$$V(r) = I_1 - I_2 = k_e \sigma 2\pi \left\{ \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\sqrt{r'^2 + z^2} - \sqrt{r'^2 + z_P^2} \right] + z_P - z \right\}$$

razionalizzo... $\frac{(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$ si vede che $\rightarrow 0$

$$V(r) = k_e \sigma 2\pi (z_p - z)$$

infatti $\mu \quad z_p = 0 \quad V(z_p) = 0$

$$V(r) = -k_e \sigma 2\pi z = -\frac{1}{2 \cancel{4\pi\epsilon_0}} \sigma 2\pi z = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z$$

POTENZIALE DEFINITO A MEWO DI UNA COSTANTE. E CON DISTRIBUZIONE infinita obliquo trovato.

INOLTRE se è possibile, (CALCOLA IL POT. sapendo il campo el.

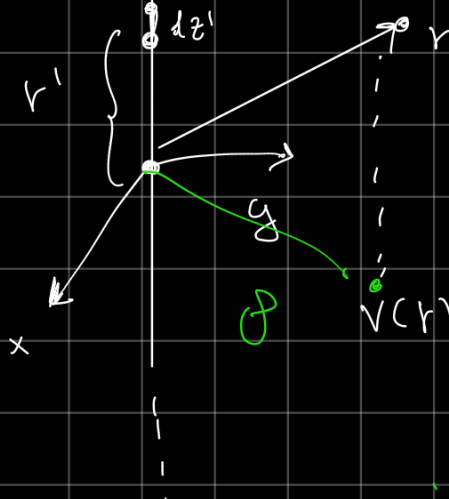
ALTRO ESEMPIO... POTENZIALE DISTRIBUZIONE INFINITA LINEARE DI CANTINUM DENSITA' USARE CAMPO EL.

$$V(r) = k_e \int_{r_0}^r \frac{\lambda(r') dr'}{|r-r'|} + V(r_0)$$

NO SIMMETRIA CILINDRICA

USO SDR cilindrico $\vec{E}$ radiale, ρ, r', z'

calcolo potenziale sapendo solo la distribuzione Sopra su z'



$$V(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_e \lambda(r') dr'}{|r-r'|} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_e \lambda(r') dr'}{|r_0-r'|}$$

in r_0 $V(r_0) = 0$

dist. inf.

r_0 è il riferimento

λ costante

$$\underline{r}' = z' \hat{z}'$$

$$\underline{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

Considero

l'incremento dz' che possiede una carica $\lambda dz'$

$$|\underline{r} - \underline{r}'| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2} = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$$

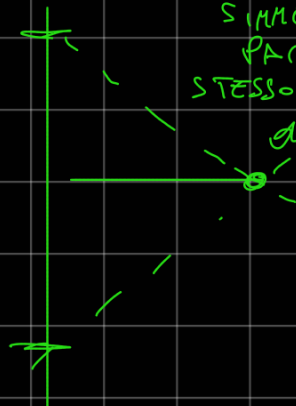
ρ^2 in coordinate
distanza del punto
osserv. dall'asse z

z' va da $-\delta$ a δ

$$\Rightarrow V(r) = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{k_e \lambda dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} + \dots$$

SIMMETRIA CILINDRICA

SIMMETRIA
PARI,
STESSO CARICAMENTO
di POTEN?



$$\Rightarrow U = z - z'$$

$$U \rightarrow \delta \quad z' \rightarrow -\delta$$

$$dU = -dz' \quad \rightarrow -\delta \quad z' \rightarrow \delta$$

$$\int_{\delta}^{-\delta} \frac{k_e \lambda (-dU)}{\sqrt{\rho^2 + U^2}} = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{k_e \lambda dU}{\sqrt{\rho^2 + U^2}}$$

FUNZIONE
pari in U

$$f(U) = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + U^2}} = f(-U) \quad \text{funzione pari in } U$$

$$= 2 k_e \lambda \int_0^{\delta} \frac{dU}{\sqrt{\rho^2 + U^2}} = 2 k_e \lambda \ln \left[U + \sqrt{\rho^2 + U^2} \right]_0^{\delta}$$

$$I_1 = 2k_e \lambda [C_1 - \ln r]$$

NON DIPENDE
da z

con $C_1 = \lim_{v \rightarrow \infty} \ln [v + \sqrt{r^2 + v^2}]$

$$I_2 = 2k_e \lambda [C_2 - \ln r_A]$$

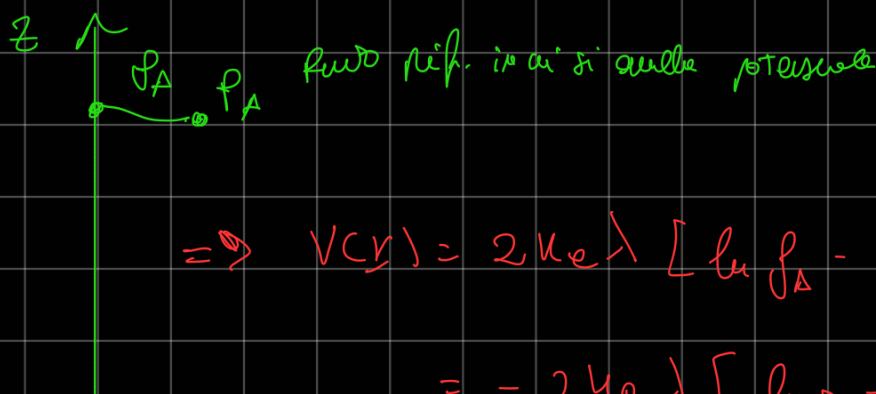
$$r_A = \rho_A \hat{\rho} + z_A \hat{z}$$

$$C_2 = \lim_{v \rightarrow \infty} \ln [v + \sqrt{\rho_A^2 + v^2}]$$

$$\ln(1) = 0$$

$$V(r) = I_1 - I_2 = 2k_e \lambda [C_1 - C_2 - \ln r + \ln r_A]$$

(ρ_A) distanza dell'ore del punto di riferimento



$$\Rightarrow V(r) = 2k_e \lambda [\ln r_A - \ln r]$$

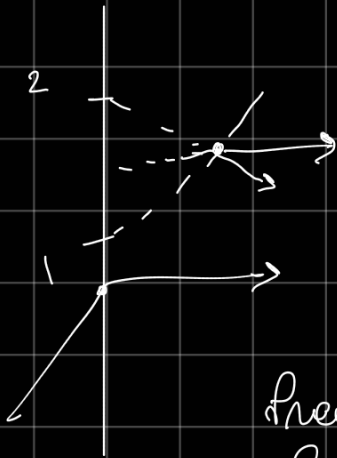
$$= -2k_e \lambda [\ln r - \ln r_A]$$

$$= -2k_e \lambda \left[\ln \frac{r}{r_A} \right]$$

Pot. nel punto di osserv. e
dipende solo della distanza del filo

a r_A il pot vale 0

→ POTENZIALE supposto il CAMPO elettrico

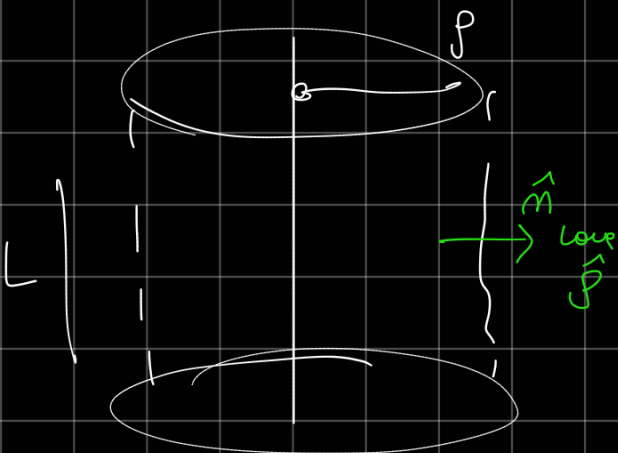


campo elettrico fornito come ρ

$$\underline{E}(\underline{r}) = E_r(\rho) \hat{\rho}$$

Prendo come sup di Gauss una sup. de
che il vettore ortog. alla sup

Prendo un cilindro di altezza L



$$\oint_S \underline{E}(\underline{r}) \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

" $\oint E_r(\rho) \hat{\rho} \cdot \hat{\rho} dS$
cost per p h'io

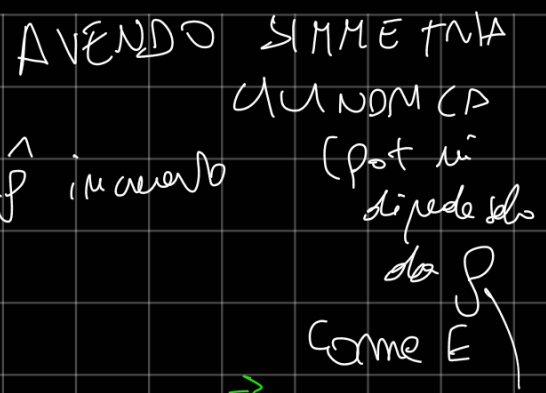
$$E_p 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$E_p(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \rho} \hat{\rho}$$

$$V(\underline{r}) = V(\underline{r}_0) - \int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}} \underline{E}(\underline{r}') \cdot d\ell'$$

non

mi muovo
lungo una
linea di forza
che incrementa a
d


$$V(\underline{r}) = - \int_{\rho_A}^{\rho} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \hat{\rho} \right) \cdot \hat{\rho} d\rho + V(\underline{r}_0)$$

$$V(r) = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_A}\right) + C$$

Impungo $\nabla(f_p) = 0$

$$V(p_A) = 0$$

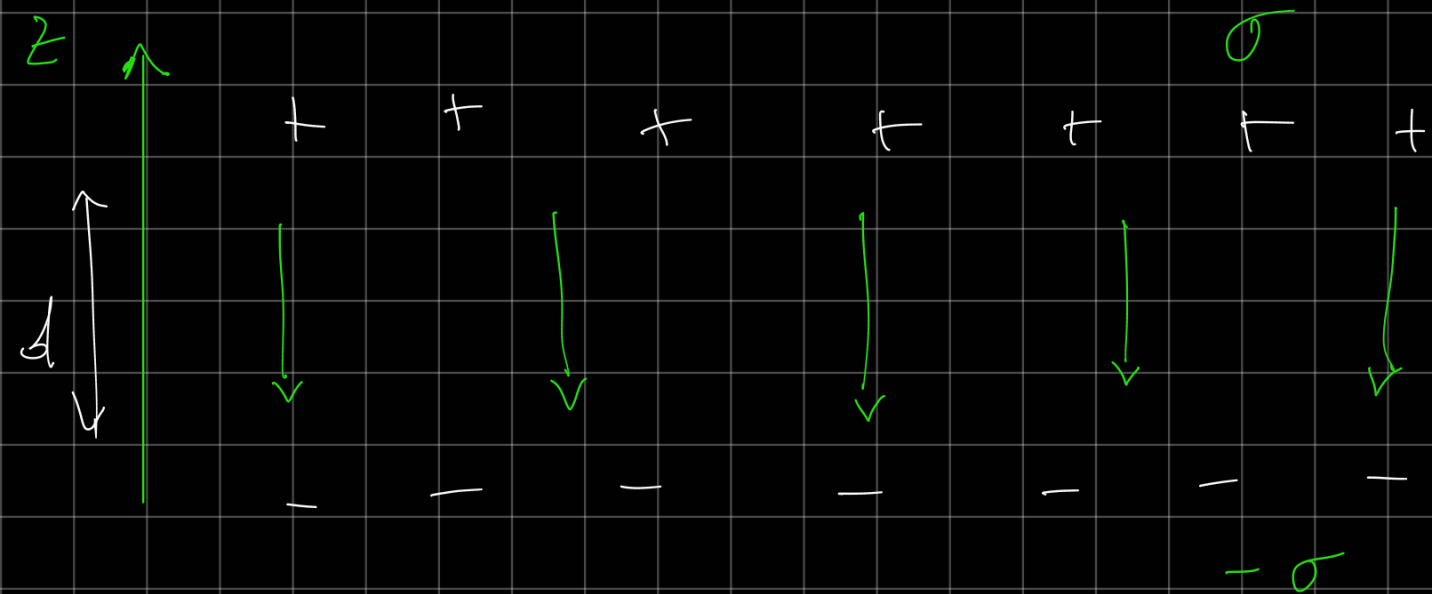
$$\Rightarrow V(\rho) = \underbrace{-\frac{1}{2\pi\epsilon_0}}_{\text{costante}} \ln \frac{\rho}{\rho_A} \Rightarrow \rho_A \text{ è lo zero in cui } V(\rho_A) = 0$$

DOPPIA DISTRIBUZIONE CARICHE EL infinite piani UNIT-

$$V(r) = - \int_{r_0}^r E(r') dr' + V(r_0)$$

campo totale sopra e sotto r' nella.

linee di forza perpendicolari, campo ed $\vec{E}$ uniformi



$$E = - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z} \quad 0 < z < d$$

Integrale? mezzo z_A come upper. $z = 0 \rightarrow z_A$

$$V(z) = - \int_0^z \left(- \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) \hat{z} \cdot \underbrace{\hat{z} dz}_{dz} + C$$

$$= \int_0^z \frac{\sigma}{\epsilon_0} dz + C = 0$$

$$V(z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} z + C \Rightarrow V(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$V(z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} z \quad \text{con ipotesi che si annulla per } z=0$$

campo el. costante nella regione ma
POTENZIALE avendo LINEARMENTE

$$\Rightarrow V(d) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

→ ATTENZIONE! segue sempre campo el.

NULLO ma non POTENZIALE

nella parte superiore, rimane costante.

$$V(z) \quad z > d \Rightarrow V(z) = C$$

potrebbe o' integr. del campo el.

$$\begin{array}{ccc} \text{per continuità} & \downarrow C & \text{altrimenti } C = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d \\ z=d & & \\ \uparrow & V(d) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d & \end{array}$$

