

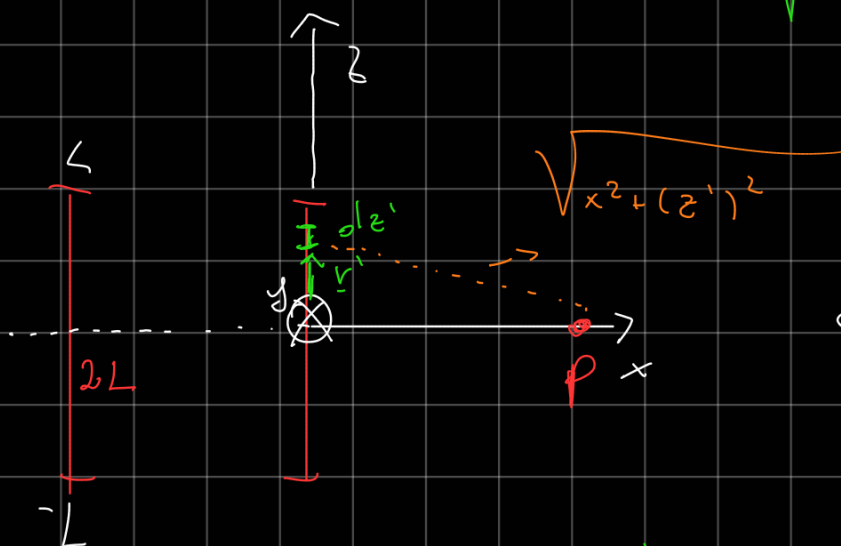
Calcolo Potenziale per distribuzioni finite

distribuzione lineare uniforme

$$\lambda = C/m$$

$$\lambda = C/m$$

Distanza presa su un piano perpendicolare al filo



$$\underline{r} = x \hat{x} + 0 \hat{y} + z \hat{z}$$

$$\underline{r}' = z' \hat{z}$$

posizione sorgente

$$Q = \lambda 2L$$

$$-L < z' < L$$

z deve variare per tutto il filo, variabile di integrazione

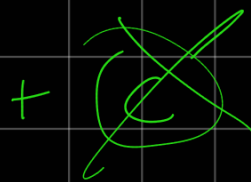
$$V(r) = K_e \int \frac{\lambda(z') dz'}{|r - r'|} + C$$

qui λ uniforme

contributo elementare

$$dV(x, 0, 0) = \frac{K_e \lambda dz'}{\sqrt{x^2 + (z')^2}}$$

potenziale



distribuzione finita $V(\infty) = 0$

$$V(x, 0, 0) = K_e \lambda \int_{-L}^L \frac{dz'}{\sqrt{x^2 + (z')^2}} =$$

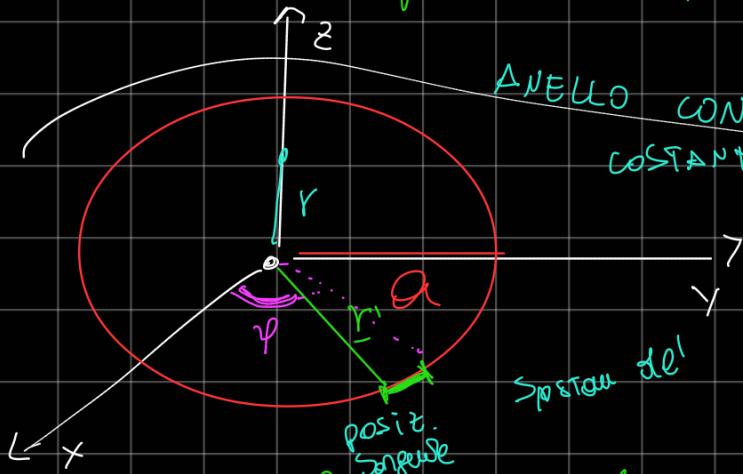
$$= \int \frac{dV}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \ln \left[x + \sqrt{x^2 + z^2} \right] + C$$

applico la regola

$$= k_e \lambda \left[\ln(L + \sqrt{L^2 + x^2}) - \ln(-L + \sqrt{L^2 + x^2}) \right]$$

$$V(x, 0, 0) = V(x) \ln \left[\frac{\sqrt{L^2 + x^2} + L}{\sqrt{L^2 + x^2} - L} \right]$$

Valore solo per il piano che rappresenta la corda



ANELLO CON DISTRIBUZIONE LINEARE DI CARICA COSTANTE

• $P = (0, 0, z)$ punto oss.

$z > 0$ • $\underline{r} = z \hat{e}$

• $\underline{r}' = a \cos \varphi \hat{x} + a \sin \varphi \hat{y}$

posto elementare di carica, calcolo contributo, e somministrazione

devo parametrizzare la corda. $Q = 2\pi a \lambda$

$a = \lambda \left[\frac{c}{v} \right]_{\text{tot}}$

Devo individuare $d\ell'$, devo numerare φ'

• $[d\ell' = a d\varphi'$ muovendo φ individua l'intera l. circ
 $|\underline{r} - \underline{r}'| = \sqrt{a^2 + z^2}$

ad ogni elemento φ' associa un carica infinitesimale

$dq = \lambda a d\varphi'$ $\underline{r}' = a \cos \varphi' \hat{x} + a \sin \varphi' \hat{y}$ vediamo se

trovato potendo
 sull'asse, con grad.
 nuovo campo el

$|\underline{r} - \underline{r}'| = \sqrt{a^2 + z^2}$

carica su tratto finita, pot. all'infinito è 0
 rif. è +0

$dV(z) = \frac{k_e \lambda a d\varphi'}{\sqrt{a^2 + z^2}}$

$\Rightarrow$ pot. conosciuto
 la derivata.

$$= \int \frac{k_e \lambda a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi' =$$

φ' va da 0 a 2π

pot. sull'asse

$$V(z) = \frac{k_e (2\pi a \lambda)}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

dipende solo da z

Carica totale
di tutto l'anello

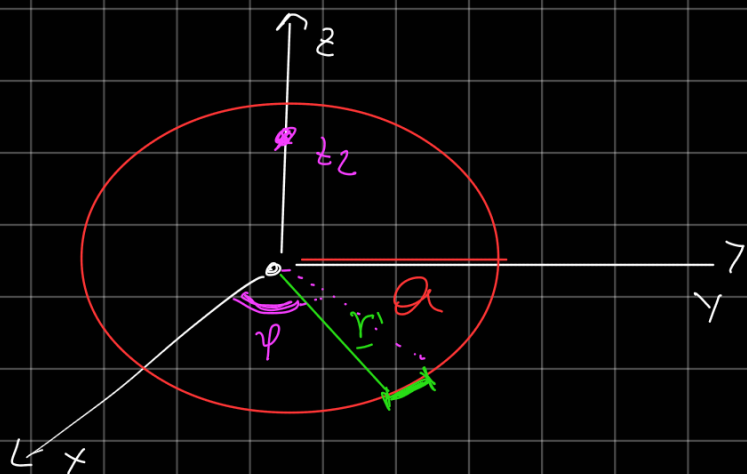
$$+ C \quad V(z \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow C = 0$$

lavoro in piena

dell'anello (che genera un campo elett. con perfetta
simmetria) che serve base per calcolare le forze
di campo lungo qualsiasi percorso
lavoro che bisogna fare per portare una carica Q
non uniforme

$$L = Q \cdot V(z)$$

il lavoro su Q
trasformato in
energia potenziale
elettrostatica



Se vogliamo portare

la carica Q da z_1 a z_2

$$L_{z \rightarrow z_2} = Q [V(z_2) - V(z)]$$

l'energia elettrostatica generata solo in z

$$Q V(z_2)$$

potenziale che
il sistema ha nel

Se sottoposto la carica Q_2 , trasformo l'energia cinetica in potenziale

$$dV = -\vec{E}(r) \cdot d\vec{\ell}$$

il lavoro che faccio lungo $\vec{\ell}$ per uno spostamento infinitesimo

Se mi sposto da

$$A(x, y, z)$$

$$B(x + dx, y + dy, z + dz)$$

variazione
del potenziale
incremento del potenziale
infinitesimo

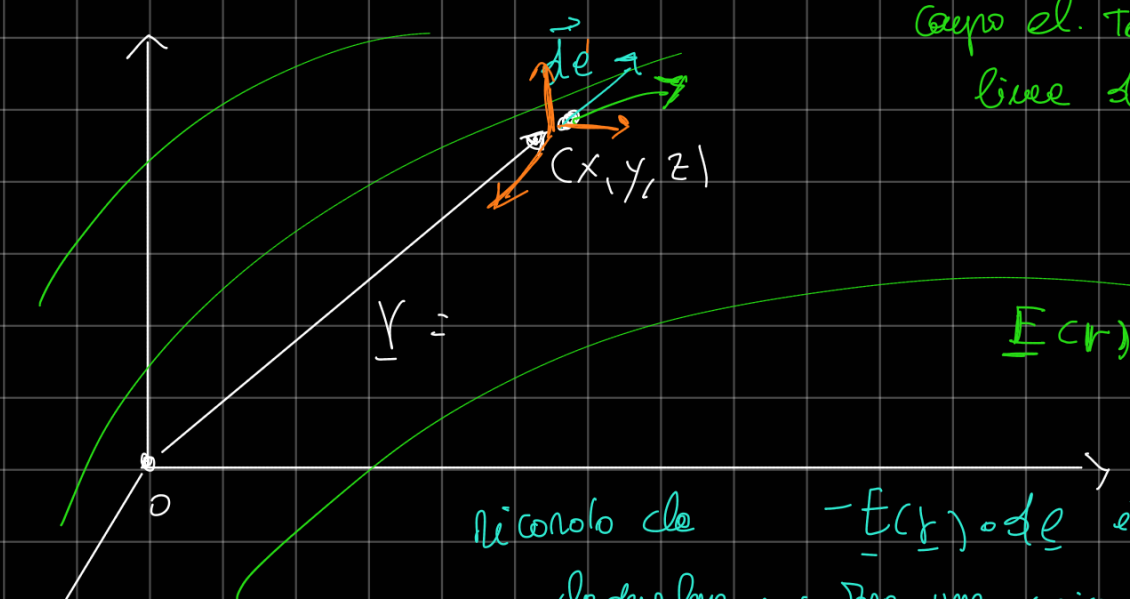
RELAZ TRA POTENZIALE e CAMPO ELETTRICO

Mi muovo con $d\vec{\ell}$ solo lungo direzione $\vec{x}$

$$d\vec{\ell} = dx \hat{x}$$

faccio uno spostamento infinitesimo

campo el. tangente alle linee di Forza



ricordo che $-\vec{E}(r) \cdot d\vec{\ell}$ è il lavoro infinitesimo
che devo fare per spostare una carica infinitesima lungo la
forza del campo lavoro che faccio, più negativa potenziale

Descrivo il campo elettrico

$$\Rightarrow dV = - \underline{E}(r) \cdot d\vec{r}$$

considero un $d\vec{r}$ anche nel punto di osservazione.

$$\underline{E} = E_x(x, y, z) \hat{x} + E_y(x, y, z) \hat{y} + E_z(x, y, z) \hat{z}$$

Lavoro elementare

de' spostamento

$$d\vec{r} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

$$dV(x, y, z) = - \left(E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z} \right) \cdot dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

per componenti.

$$= - E_x(x, y, z) dx$$

Prendo componente lungo x
e moltiplico per dx.

Se divido tutto i membri per dx!

$$\Rightarrow dV = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

SE MI SPOSTASSI SOLO LUNGO x? $dV_x = -E_x(r) dx$

$$-E_x(x, y, z) = \frac{dV(x, y, z)}{dx} = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} = -E_x(x, y, z)$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial V_x}{\partial x} = E_x(r)$$

variazione lungo y

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} = -E_y(x, y, z)$$

$$-\frac{\partial V_y}{\partial x} = E_y(r)$$

variaz. lungo z

ovviamente il pot dipende da r

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} = -E_z(x, y, z)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = E_z(r)$$

le componenti del campo si possono trovare derivando
rispetto al potenziale

ovvero $\Rightarrow$ BT è l'integrale del campo el. il campo el. ma solo la direzione

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}) = - \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} \hat{x} - \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} \hat{y} - \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} \hat{z}$$

Campo el. ottenuto derivando potenzialità in un punto dello spazio il potenziale

Relazione tra funzione potenziale e campo elettrico

$$\psi(x, y, z)$$

oper. differenziale

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{z} = \text{grad}(\psi) = \nabla \psi$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) \psi(x, y, z)$$

Campo el. = - gradiente del potenziale

$$\underline{E}(\underline{r}) = - \nabla V(x, y, z)$$

è un vettore il gradiente

e ovviamente utile per calcoli

$$\frac{V}{m}$$

Perché? il campo elettrico è un campo conservativo

Il campo elettrostatico ma e^-

$$\frac{V}{m}$$

invece di

$$\frac{V}{C}$$

dal potenziale per un campo el non dipende

dal cambio di percorso ha solo del valore int. e finito. lavoro ha speso del percorso

Altre conseguenze?

LAVORO DI UN CIRCUITO
CHIUSO E' NULLO

Facciamo un problema completo. da nulla
Trova del diff. totale

$$= -(\vec{E}_x \hat{x} + \vec{E}_y \hat{y} + \vec{E}_z \hat{z}) \cdot (dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z})$$

$$dV(x, y, z) = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

L'incremento che subisce la ϕ scalare di V
e' uguale alla somma delle 3 componenti

Se la dir. di incremento e' perpendicolare
alla dir. del gradiente, il
prodotto scalare vale 0.

Le dir. perpendicolari al gradiente

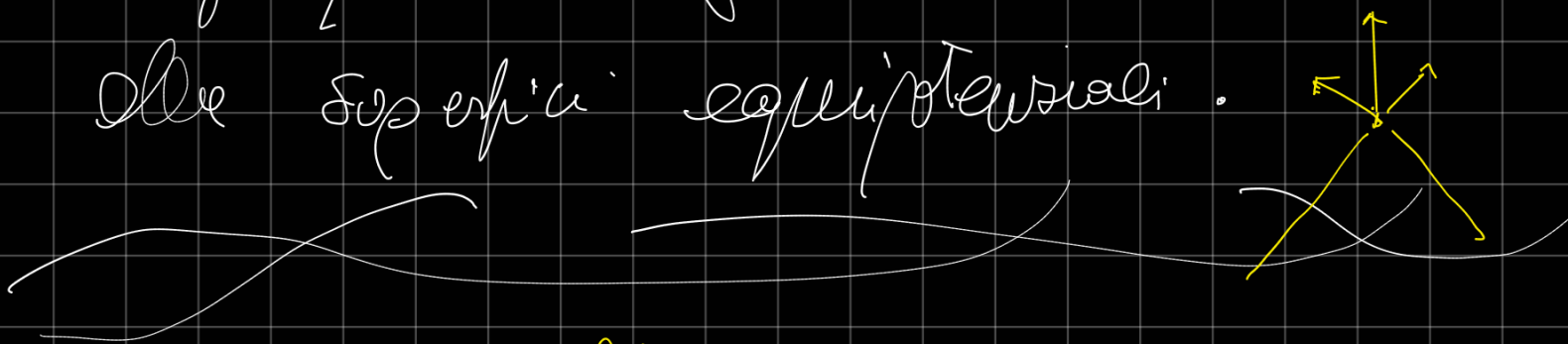
Sono direzioni in cui la funzione

non varia, e' una SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE

Le direzioni perpendicolari al gradiente,

mi muovo lungo una superficie Equipotenziale.
 Se invece mi muovo lungo ∇V ,
 perpendicolare al gradiente
 ho la massima variazione.

In ogni punto il gradiente è normale
 alle superficie equipotenziali.



campo elettrostatico diretto verso z

Riprendiamo l'anella. ^{il tutto è simmetrico}

come varia il campo elettrostatico?

(qui ho trovato una dipendenza
 solo da z)

$$V(z) = -k_e \lambda 2\pi a (a^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = k_e \lambda 2\pi a \frac{1}{2} (a^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} z$$

facciamo $\Rightarrow E_z(x,y,z) = - \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}$

derivate parziali
lungo z

$$= \frac{\partial V(z)}{\partial z} = \frac{k_e \lambda 2\pi \alpha a}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$\left[E(z) = - \frac{k_e \lambda 2\pi \alpha a z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} \right] \quad \text{va con } \frac{1}{z^2}$$

Carica Tot

Spero e' qui semplice calcolare
il potenziale e poi il campo
altre volte no.

NOTA

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right)$$

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \right)$$

DIVERGENZA è UNO SCALARE

$$\nabla \cdot A$$

divergenza di un vettore, trasforma vettore in scalare
GRADIENTE è un vettore

$$\nabla \cdot \psi$$

problema scalare

Consideriamo una regione dello spazio
in cui e' definito un campo elettrostatico
e una funzione potenziale

vado da A a B e

CIRCOLAZ. del campo elettrico ritorno, percorso chiuso

Lavoro 0

integrabile lungo una
linea chiusa

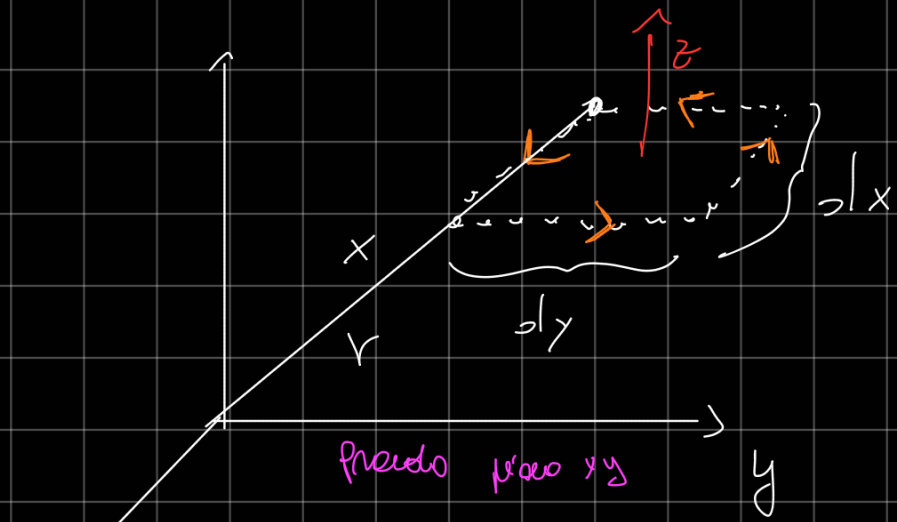
Lavoro fatto lungo la
forza del campo è 0
per spostamento conica unitaria

linea
chiusa

$$\oint_C \underline{E}(r) \cdot d\vec{e} = 0$$

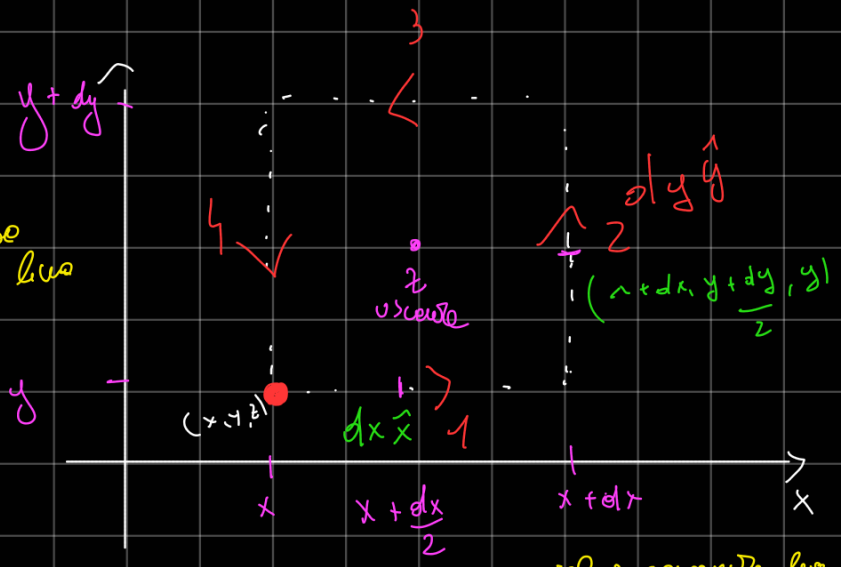
un punto r in un punto $\vec{r}$ avremo un campo $\underline{E}(x, y, z)$
per cui 3 circonferenze di raggio secondo verso della normale

z è la normale,
e per conto
il percorso con
la regola
della mano
testata



Essendo il campo el. un
campo conservativo, $\oint \underline{E} \cdot d\vec{e} = 0$
in un punto
chiuso

ipotesi:
valore campo el
costante = valore
campo lungo la linea



Proviamo a calcolare
la circolazione
del campo elettrico
del percorso

ipotesi, sviluppo Taylor

$$\oint \underline{E} \cdot d\vec{e}$$

selez. componente lungo x , ho individuato lungo x

$$\Delta_1 = \underline{E}(x + \frac{dx}{2}, y, z) \cdot \frac{dx}{2} \hat{x} = \underline{E}_x(x + \frac{dx}{2}, y, z) \frac{dx}{2}$$

$$\Delta_2 = \underline{E}(x + \frac{dx}{2}, y + \frac{dy}{2}, z) \cdot d\vec{y} \hat{y} = \underline{E}_y(x + \frac{dx}{2}, y + \frac{dy}{2}, z) dy$$

$$\Delta_3 = \underline{E}(x + \frac{dx}{2}, y + \frac{dy}{2}, z) \cdot (-dx \hat{x}) = -\underline{E}_x(x + \frac{dx}{2}, y + \frac{dy}{2}, z) dx$$

$$\Delta_4 = \underline{E}(x, y + \frac{dy}{2}, z) \cdot (dy \hat{y}) = \underline{E}_y(x, y + \frac{dy}{2}, z) dy$$

sviluppo con Taylor
al 1° ordine

Come pero si scrive?
 SVILUPPO CON TAYLOR

$$\Delta_1 = \left[\underline{E}_x(x, y, z) + \frac{\partial \underline{E}_x(x, y, z)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dx$$

$$\Delta_2 = \left[\underline{E}_y(x, y, z) + \frac{\partial \underline{E}_y(x, y, z)}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{\partial \underline{E}_y(x, y, z)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dy$$

$$\underline{E}_y(x + dx, y, z) = \underline{E}_y(x, y, z) + \frac{\partial \underline{E}_y(x, y, z)}{\partial x} dx$$

$$\Delta_3 = - \left[\underline{E}_x(x, y, z) + \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx$$

$$\Delta_4 = - \left[\underline{E}_y(x, y, z) + \frac{\partial \underline{E}_y(x, y, z)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dy$$

Per calcolare circolato. calcolo somma

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$$

circulato: zero
 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$\cancel{\underline{E}_x dx} + \cancel{\underline{E}_y dy} + \cancel{\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} dx dy} - \cancel{\underline{E}_x dx} - \cancel{\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} dx dy} - \cancel{\underline{E}_y dy}$$

Circuitos de
de cor
normale
z

calcolo nel punto di osservazione

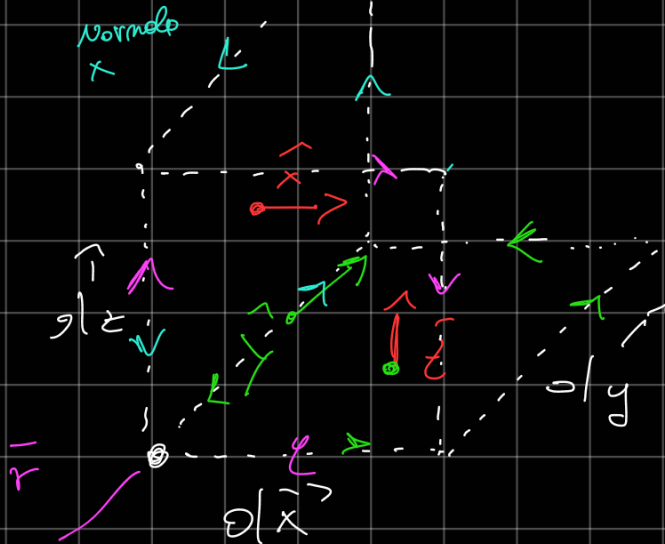
$$\Delta_z = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dx dy$$

area della
superficie

Circuitazione con z normale

solo area xy con normale z

Potendo allora anche con normale x



considero 3 facce
di un cubo
con normale $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

Circuitazione del campo
el. lungo un cubettino

$$\Delta_x = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) dy dz$$

$$\Delta_y = \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) dx dz$$

Circuitazione
con y normale

Costruisco ora un vettore

introduco vettore F
 $F(x, y, z)$ valore in $\vec{r}$

$$\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z} =$$

Δ_x Δ_y Δ_z

$$F_x = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \quad F_y = \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)$$

$$F_z = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

definito nelle

in un punto $\vec{r}$ dove lo vettore campo el. $\vec{E}$ è
definito il vettore $\vec{F}$ che ha come componenti le derivate
parziali.

stesso punto di
osservazione

Se voglio la circulazione

Mi dirò quanto è il FLUSSO lungo le aree?

es. lungo
 $dx dy$
con normale $\hat{z}$

(flusso
sup. quella)

$$\left[\vec{F} \cdot \hat{z} dx dy \right] = \Delta z$$

Rappresenta il

Flusso di $\vec{F}$

attraverso l'area $dx dy$

Flusso $\iint \vec{A} \cdot \vec{n} ds$

Se voglio calcolare la circula.

lungo $dx dy$ è sufficiente

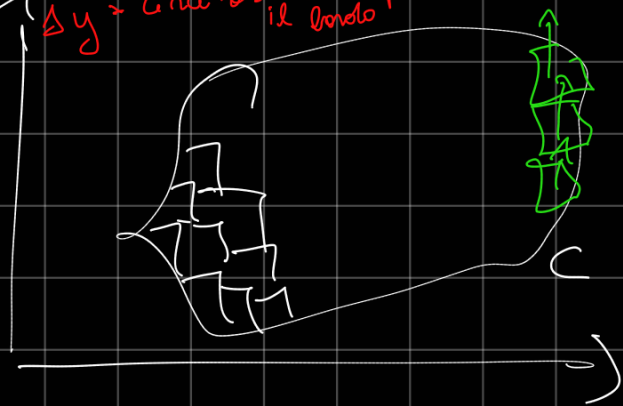
calcolare il flusso lungo $\vec{F}$ attraverso
la normale $\hat{z}$

la circula. elementare lungo
 $dx dy$ è UGUALE al FLUSSO
elementare del vettore $\vec{F}$

Ma una sup. calcol. Flusso di $\vec{F}$
e mi trovo la circula. del
campo elettrico lungo il bordo

Supponiamo il circuito in tante piccole

es. $\vec{F} \cdot d\vec{r} = \hat{z} dy = \Delta y$ = circula. del campo lungo il bordo



avendo . Vogli' dire

la circolazione di F lungo C

$$\int_C F = \oint_C$$

per ogni punto p lungo la circolazione elementare
sono tutti contributi che si cancellano,
solo quelli esterni rimangono

la sovrapposizione dei circuiti elementari
mi dà (sul piano) la circolazione
lungo il bordo di C

Flusso in 3 componenti. (in 2D)

Se sono nello spazio ↓

$$\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{\ell} = \iint_S \underline{F} \cdot \hat{n} \, dS$$

Bordo C è il bordo
su cui si appoggia S ,
percorso con regola mano destra
rispetto ad $\hat{n}$

integrare lungo il
bordo

TEOREMA DI STOKES

il vettore $\mathbf{F}$ si chiama **ROTOR** di

$\mathbf{E}$.

Prende $\mathbf{E}$ e ne costruisce un altro vettore

Prende un vettore e ne fa la diff delle deriv. parziali.

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{E} \quad (V)$$

ROTOR
di $\mathbf{E}$

CIRCUITAZ del
CAMPO ELETTRICO

FLUSSO ROTORE del CAMPO ELETTROSTATICO
otteniamo una 100% APERTA

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{n} \, dS$$

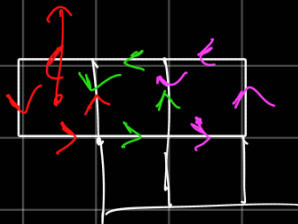
$\rightarrow$ Bordo su cui si appoggia S

Stokes: dato un corpo (derivativo) e data una superficie qualsiasi S , stabilita una NORMALE e data una direzione, calcolo la CIRCUITAZ dividendo la superficie in **infinitesimi** circuitini, ognuno con la propria normale

$\rightarrow$ l'infinitesimo calcolo il flusso del corpo del vettore $\mathbf{F}$ che in un punto $\mathbf{e}$ fanno la diff delle deriv. parziali, OTTENERE LA CIRCUITAZ del corpo a un punto

(da fare in 3 linee.)

$\Rightarrow$ quando vedo in mezzo i CONTRIBUTI intermedi si annullano



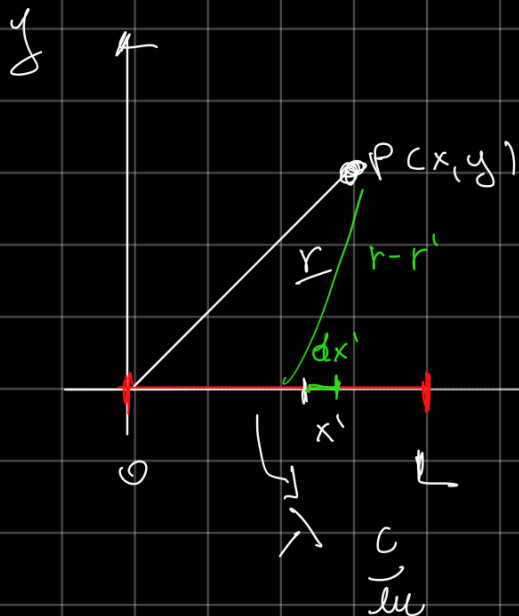
ho 2 contributi piccoli e grandi

MINIMANDO SOLO I
CONTRIBUTI del BORDO

Calcolo Flusso di $\mathbf{F} =$ Calcolo circuiti. lungo il BORDO del corpo el.

Esercizio videobor. 11/02/2021

DISTRIBUZIONE LINEARE di Carica



$$\underline{r} = x \hat{x}' + y \hat{y}$$

$$\underline{r}' = x' \hat{x}$$

carica associata a dx'

$$dq = \lambda dx' \quad \text{costante } \lambda$$

$$\text{pot } \phi = 0$$

$$dV(x, y) = \frac{k_e \lambda dx'}{|r - r'|}$$

(integro)

$$= \frac{k_e \lambda dx'}{\sqrt{(x - x')^2 + y^2}}$$

contributo di dx' alla V

ESSENDO UNA DISTRIB.
FINITA, NON HO UNA
SIMP. CILINDRICA

MA HO UN PIANO DI
SIMMETRIA

$$V(x, y) = \int_0^L \frac{k_e \lambda dx'}{\sqrt{(x - x')^2 + y^2}}$$

caso di
variable

per caso di dx'

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left\{ u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\} + \text{cost}$$

$$u = x - x' \quad \rightarrow \text{quando } x' = 0, u = x$$

$$du = -dx' \quad x' = L, u = x - L$$

Tolgo il $\ominus$ riprendo

$$V(x, y) = \int_{x-L}^x \frac{k_e \lambda du}{\sqrt{u^2 + y^2}} = k_e \lambda \ln \left[u + \sqrt{u^2 + y^2} \right]_{x-L}^x$$

$$= k_e \lambda \left[\ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) - \ln(x - L + \sqrt{(x - L)^2 + y^2}) \right]$$

Prop. del

$$\Rightarrow V(x,y) = k e \lambda \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{x-L + \sqrt{(x-L)^2 + y^2}} \right)$$

ho potenziale in un punto generico,
mi calcolo campo el. con il gradiente
infor.

potenziale
che ho in
quelli i
punti dello spazio
dato la densità
 λ

$$\underline{E}(x,y) = - \frac{\partial V(x,y)}{\partial x} \hat{x} - \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} \hat{y}$$