

Recap.

$$V(r) \quad \underline{E}(r) = -\nabla V(r)$$

• Campo elettrostatico è ^{campo} conservativo, quindi ^{Lavoro lungo percorso chiuso = 0} $\oint \underline{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Se faccio circuitazione

se calcolo lavoro alla circuitazione.

$$\oint_C \underline{E}(r) \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \text{Flusso della sup-} \\ \text{le si applica a } \underline{E} \\ \text{C del ROTORE di } \underline{E} \text{ è nullo}$$

Teo di Stokes al campo elettrostatico

Data una sup^s qualunque orientata su un

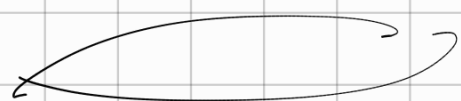
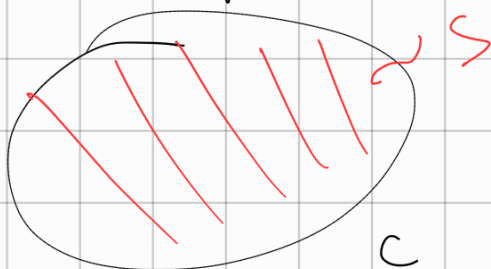
contorno C dove esiste un campo elettrostatico,

allora la circuitazione del campo lungo

il percorso chiuso = calcolo

del flusso del rotore del

Campo elettrostatico $\oint_C \underline{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla \times \underline{E} \cdot \vec{n} dS$
 $= 0$



$$\oint_C \underline{E} \cdot d\underline{e} = \iint_S \nabla \times \underline{E}_x(\underline{r}) \cdot \hat{n} \, dS$$

contorno orientato superficie del contorno

manuale diretta con regola mano destra

1) Il campo elettrostatico è conservativo, la
circulazione $\oint \underline{E} \cdot d\underline{e} = 0$, e ciò vale per qualunque

contorno chiuso. Allora $\forall$ percorso chiuso

l'integrale $\oint_S \nabla \times \underline{E} \cdot \hat{n} \, dS = 0$, qualunque

sia la superficie che se è appoggiata sul
 contorno

vale per ogni circuito
 chiuso

$$\oint_C \underline{E} \cdot d\underline{e} = \iint_S \nabla \times \underline{E}_x(\underline{r}) \cdot \hat{n} \, dS = 0$$

possibile solo se in ogni punto $\underline{r}$

$$\nabla \times \underline{E}_x(\underline{r}) = 0$$

CAMPO IRROTAZ. IN OGNI

Forma sferica della
 circolazione
 di Stokes

PUNTO DELLO SPAZIO

Punto per punto il valore del campo elettrico

è 0.

In ogni punto dello spazio
il rotore è nullo

$\Rightarrow$ IL CAMPO ELETTROSTATICO

Come si calcola il rotore? Con $\vec{E}$

IN OTTAZIONALE

determinante simbolico

WABLA

$$\Rightarrow \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

USO DETERMINANTE

SIMBOLO

per prodotto vettoriale
divergenza = flusso vettore sp.
di uso

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x(r) & E_y(r) & E_z(r) \end{vmatrix}$$

FLUSSO ROTORE = 0 UNITA².

in terza matrice; simbol. dei vettori

1^a riga, componenti di $\vec{\nabla}$

3^e riga, componenti di $\vec{E}$... È calcolato
il determinante

Calcolo con Laplace

ATTENTO.

GRAD, ROTORE E DIVERGENZA DIPENDONO
DALLE COORDINATE USATE!

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} \cdot \bar{E}_z(r) - \frac{\partial}{\partial z} \cdot \bar{E}_y(r) \right) \hat{x} \quad \text{---}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{E}_z(r) - \frac{\partial}{\partial z} \bar{E}_x(r) \right) \hat{y} \quad +$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{E}_y(r) - \frac{\partial}{\partial y} \bar{E}_x(r) \right) \hat{z}$$

Una proprietà di un ROTORE

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$$

ROTORE DI
QUALSIASI
GRADIENTE $\vec{E}' = 0$

Vettore con divergenza

nullo = solenoide

Vettore rotore nullo = irrotazionale

FINIS RETA

due cariche ugual. di segno opposto

$$\underline{E}(\rho, \varphi, z)$$

come calcoliamo i vettori ecc
usando der
SAR

$$\nabla \times \underline{E}(\rho, \varphi, z) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho} +$$

$$\left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) \hat{\varphi} +$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho E_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{z}$$

Del ROL

ELETTROSTATICO

↑
geol. e quote

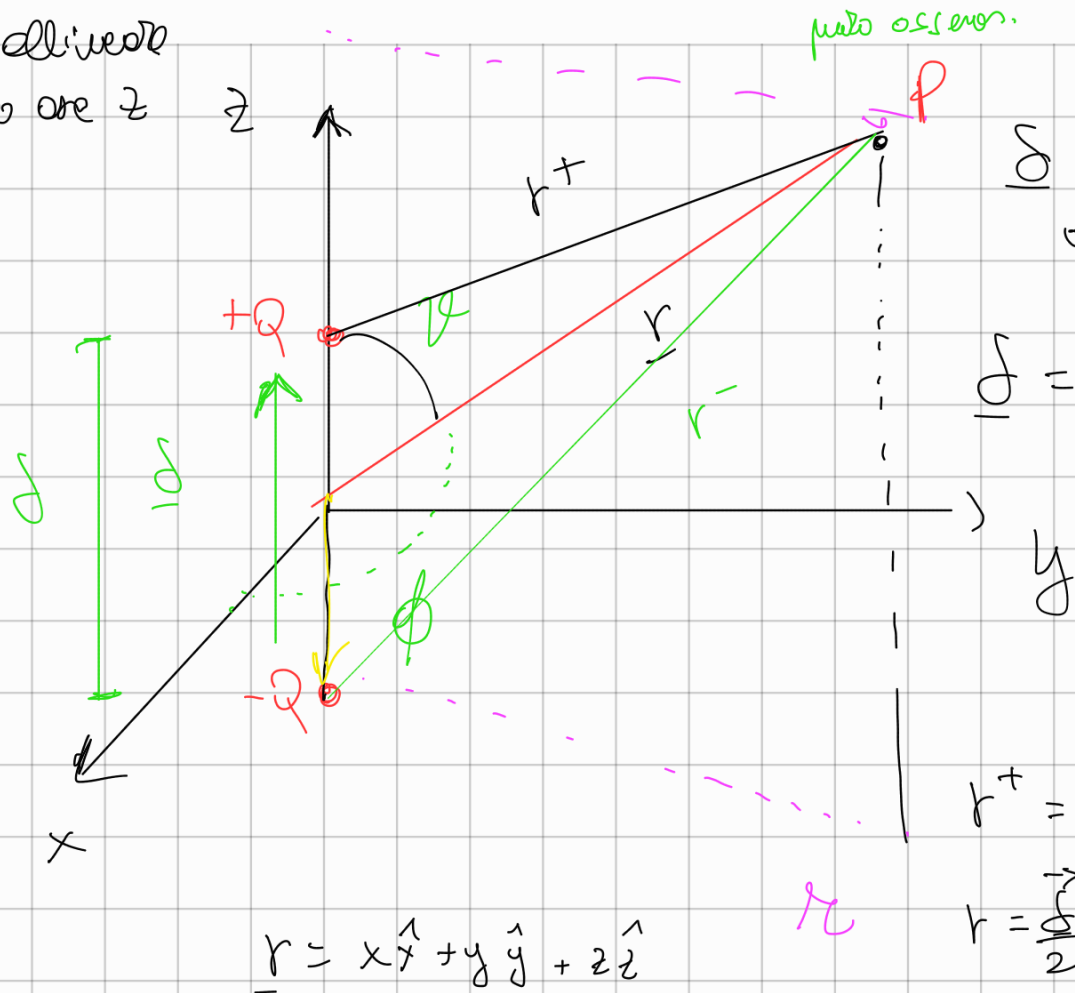
Ho 2 coride nello spazio separare di δ

Voglio calcolare il campo elettrostatico

modo vicino ~~to~~ loro... che succede a grande
DISTANZA?

modo SAR a $\delta/2$, al centro

$Q, -Q$ allineati
lungo l'asse z



δ veduto da
da $-Q$ e $+Q$

$\delta = \delta \hat{z}$ in
questa cos

$$\vec{r}^+ = \vec{r} - \frac{\delta \hat{z}}{2}$$

$$\vec{r} = \frac{\delta \hat{z}}{2} + \vec{r}^+$$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

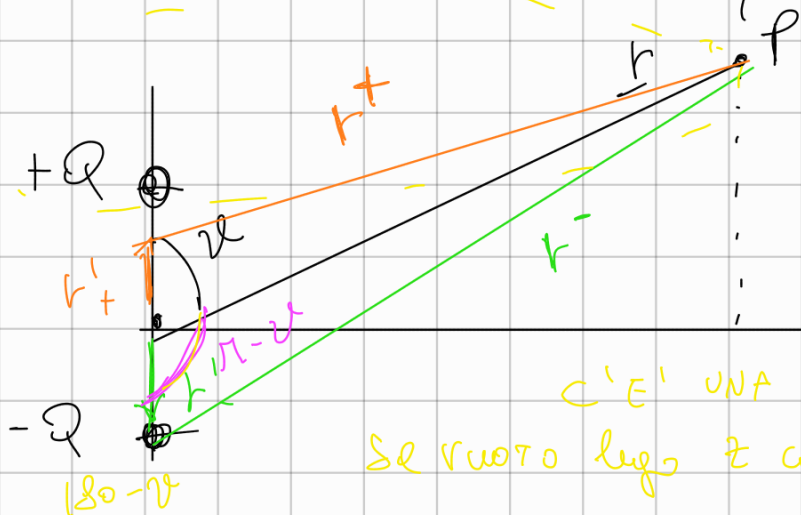
Se cambio $\vec{r}$ non cambia niente del corpo elettrico.
cambio il piano

Ci poniamo nel piano π che contiene
l'asse z e il punto

$$\frac{d}{2} \hat{z}$$

$$\frac{d}{2} (-\hat{z})$$

Mi sono messo sul piano che contiene P



$$\vec{r}^- = \frac{d}{2} \hat{z} + \vec{r}$$

$$= -\frac{d}{2} (-\hat{z}) + \vec{r}$$

C'E' UNA SIMMETRIA LUNGO L'ASSE z
Se ruoto lungo z cost, $\vec{r}^+$ e $\vec{r}^-$ rimangono uguali
in geometria

come calcolo il potenziale?

$$V(\underline{r}) = F_e \frac{Q}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$\underline{r}'$ vettore della
Sorgente al

$$\underline{r}'_+ = \frac{\delta}{2} \hat{z}$$

introduco allora angolo ϑ
(angolo tra sfera e sferico)

$$\underline{r}'_- = -\frac{\delta}{2} \hat{z}$$

MODULO COST

vettore posizione
della sorgente

$|\underline{r}^+|$

Modulo di $\underline{r}^+$

$$|\underline{r}^+| = |\underline{r} - \underline{r}'_+| = \left| \underline{r} - \frac{\delta}{2} \hat{z} \right| = \text{Teorema di CANON}$$

(generalizzare a 3D)

$$= \sqrt{r^2 + \frac{\delta^2}{4} - 2r \frac{\delta}{2} \cos \vartheta}$$

$$\left[\sqrt{r^2 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + 2r \frac{\delta}{2} \cos \vartheta} \right] = |\underline{r}^+|$$

angolo compreso

tra i due vettori

$$|\underline{r}^-| = |\underline{r} + \underline{r}'_-| = \left| \underline{r} + \frac{\delta}{2} \hat{z} \right| =$$

$$\sqrt{r^2 + \frac{\delta^2}{4} - 2r \frac{\delta}{2} \cos(\pi - \vartheta)} =$$

"

$$\cos(\pi - \vartheta) = -\cos(\vartheta)$$

$$|\underline{r}^-| = \sqrt{r^2 + \frac{\delta^2}{4} + 2r \frac{\delta}{2} \cos \vartheta}$$

$|\underline{r}^+|, |\underline{r}^-|$ rimangono
costanti a 0
costanti

POTENZIALE COME SOMMA

$$V(\underline{r}) = k_e \frac{Q}{r^+} - k_e \frac{Q}{r^-} =$$

$$V(r) = K e Q \left[\frac{1}{r^+} - \frac{1}{r^-} \right] \quad \text{il potenziale}$$

Diplo, lo pensavo come due coriche molto vicine tra loro. Se mi allontano, l'ampiezza del valore di osservazione è molto più grande della distanza tra loro

solito $r \gg \delta$.

Cosa succede se mi allontano?

dal punto di vista matematico

molto fuori

$$\sqrt{r^2 + \underbrace{\delta^2}_4 - 2r \frac{\delta}{2} \cos \vartheta} = r \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{r^2} - \frac{\delta}{r} \cos \vartheta}$$

approssimazione

$$r^+ = r \sqrt{1 - \frac{\delta}{r} \cos \vartheta} \quad \text{sviluppo Taylor } 1^{\text{o}} \text{ ordine } x < 1$$

$$r^- = r \sqrt{1 + \frac{\delta}{r} \cos \vartheta}$$

$\frac{\delta}{r} < 1$
 $\cos \vartheta \leq 1$

Provo a sviluppare la radice con Taylor

TAYLOR $\Rightarrow \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ $|x| < 1$ Cond. 2.

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

$$|x| < 1$$

Cond (2)

$$= r \left(1 - \frac{s}{2r} \cos \varphi \right)$$

$$r = r \left(1 + \frac{\delta}{2r} \cos \alpha \right)$$

r moltiplico per r

e tempo che quanto sono si prende
gli anni del diplo

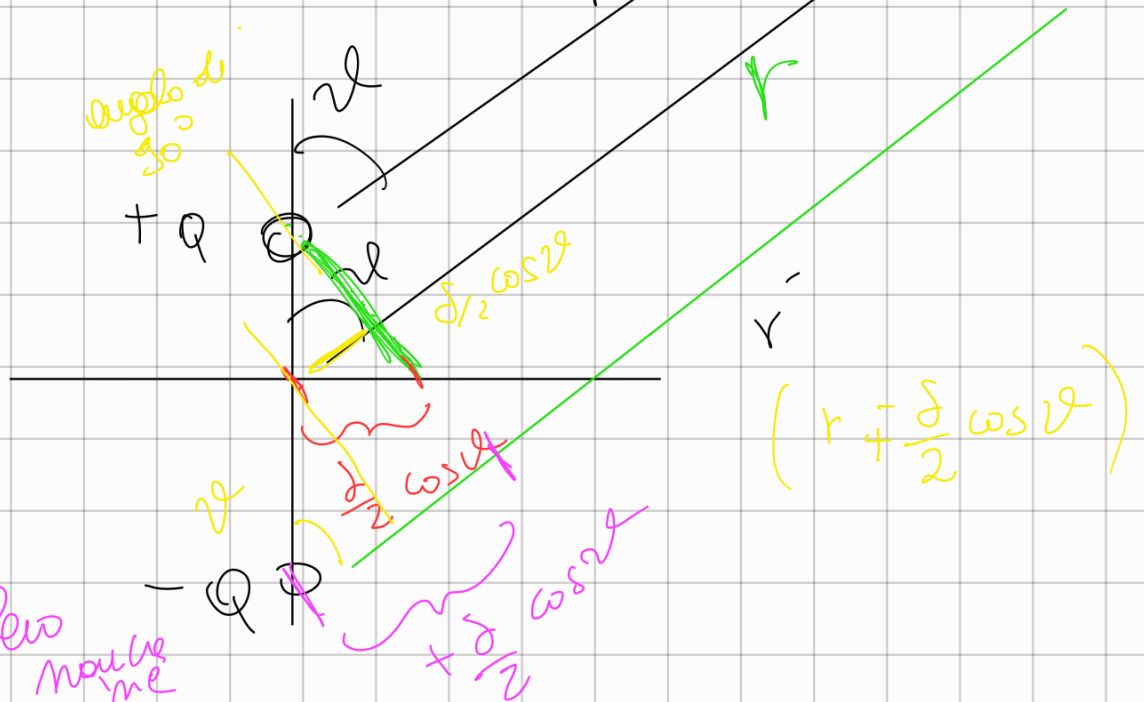
$$\begin{aligned} r^+ &\approx r - \frac{f}{2} \cos \vartheta \\ r^- &\approx r + \frac{f}{2} \cos \vartheta \end{aligned}$$

9) P_{contour}

problemi
ad r
come opposizioni.

Ma Geometrie

interpretación
geométrica
multip. de ψ



1. Spring $\rightarrow$ low
 2. penetration $\rightarrow$ the machine
 3. low $\rightarrow$ came &
 4. losses

come se quei due vettori (a lega stitese) fossero tra loro paralleli.

Come si diventa il potenziale?

- Sostituiamo dentro il calcolo del potenziale

$$V(r) \approx K_e Q \left[\frac{1}{r - \frac{\delta}{2} \cos \vartheta} - \frac{1}{r + \frac{\delta}{2} \cos \vartheta} \right] =$$

$$K_e Q \left[\frac{\cancel{r} + \frac{\delta}{2} \cos \vartheta - \cancel{r} + \frac{\delta}{2} \cos \vartheta}{(r - \frac{\delta}{2} \cos \vartheta)(r + \frac{\delta}{2} \cos \vartheta)} \right]$$

$$\approx K_e Q \left[\frac{\delta \cos \vartheta}{r^2 - \left(\frac{\delta \cos \vartheta}{2} \right)^2} \right]$$

2^a

approssimazione

SICOL

$$V(r) \approx K_e Q \frac{\delta \cos \vartheta}{r^2} \quad \begin{array}{l} \text{POTENZIALE A} \\ \text{GRANDE DISTANZA} \\ \text{DAL DIPOLIO} \end{array}$$

si è perso un ordine

Espressione logica del sistema di rif. e a come ho messo il dipolo (asse z)

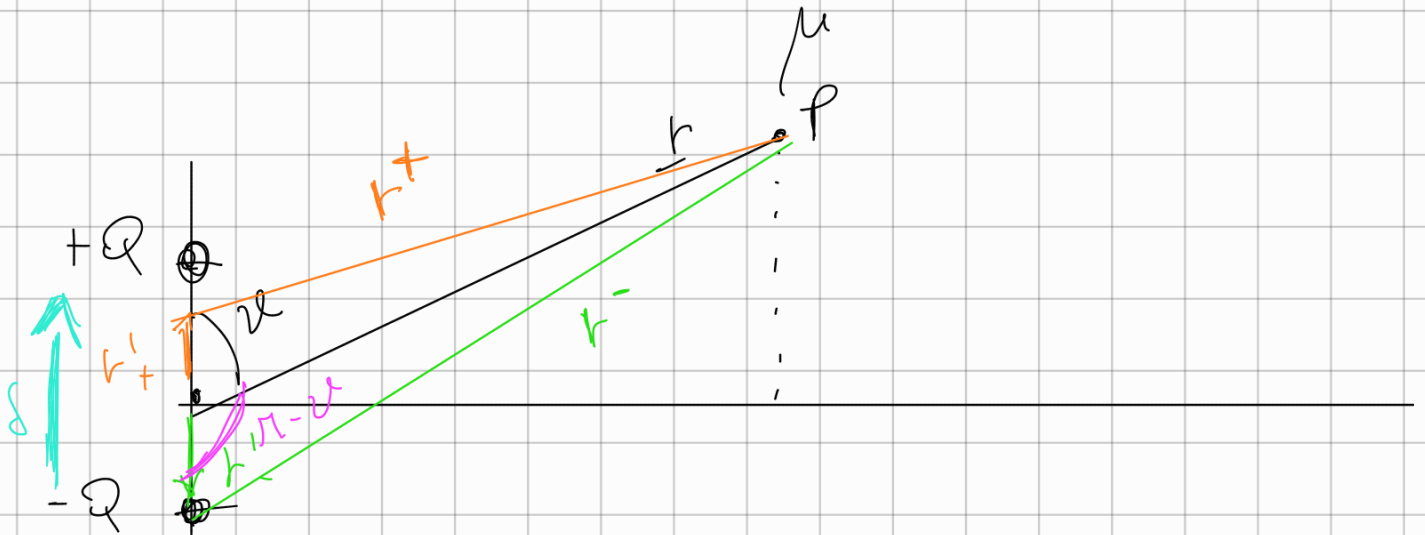
Formula che non vale in generale, uso tutte per regola generale

Il Dipolo mi genera un potenziale
che è $\frac{1}{r^2}$, non $\frac{1}{r}$, è
più veloce il decaimento.

Forma più generale

$$V(r) = \frac{k_e Q \delta r \cos \alpha}{r^3}$$

definiamo un valore che va dalla
carica negativa a positiva, e lo
chiameremo δ



δ = $\delta \hat{z}$ qui ha solo componente lungo $\hat{z}$

ora moltiplico (colonne) per $\underline{r}$

$$\underline{\delta} \cdot \underline{r} = |\underline{\delta}| |\underline{r}| \cos \vartheta = \delta r \cos \vartheta$$

voltaggio

moltiplico e divido per r

$$V(r) = k_e Q \frac{\underline{\delta} \cdot \underline{r}}{r^3}$$

[Com]

→ lo posso pensare
come proiezione del vettore
 $\underline{P}$ su $\underline{r}$

$$\underline{P} = Q \underline{\delta} = \text{MOMENTO DI DIPLO ELETTRICO}$$

DIREZIONE
verso la
 $Q^+ \text{ e } Q^-$

voltaggio analizzato sulla linea

del dipolo, moltiplicato

per il voltaggio che ha
i due poli

POTENZIALE

$$V(r) = k_e \frac{\underline{P} \cdot \underline{r}}{r^3}$$

[Vet]

è il vettore
che parte dal
centro del dipolo
con la direzione
osservazione

con $r \gg \delta$

Formula che funziona anche

Se dipolo non allineato con asse z

Espressione dipende solo da ϑ , non φ .

• Potenziale ha SIMMETRIA

Geometria, le variabili r e ϑ

equi-

$$E(r) = -\nabla V(r)$$

NOTO POTENZIALE,
calcolo il campo elettrostatico

LO FACCIAMO IN SFERICHE. Ma r, ϑ e φ sono cartesiane

grad. in sferiche

$$\nabla f = \hat{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\vartheta} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \hat{\varphi} \dots \rightarrow \text{non c'è influenza, pot. con coulomb by } \varphi$$



pendono alla sup. conica che passa per P

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-2k_e q \delta \cos \vartheta}{r^3}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{-k_e q \delta \sin \vartheta}{r^3}$$

$$\Rightarrow \underline{E(r)} = \frac{2k_e q \delta \cos \vartheta}{r^3} \hat{r} + \frac{k_e q \delta \sin \vartheta}{r^3} \hat{\vartheta}$$

$\underbrace{\quad \quad \quad}_{E_r(r)} \quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{E_\vartheta(r)}$

$$E_\varphi(r) = 0$$

Campo elettrico a

lunga distanza non c'è la variazione

$$\frac{1}{r^3}$$

$$\text{es. } v = \pi/2$$

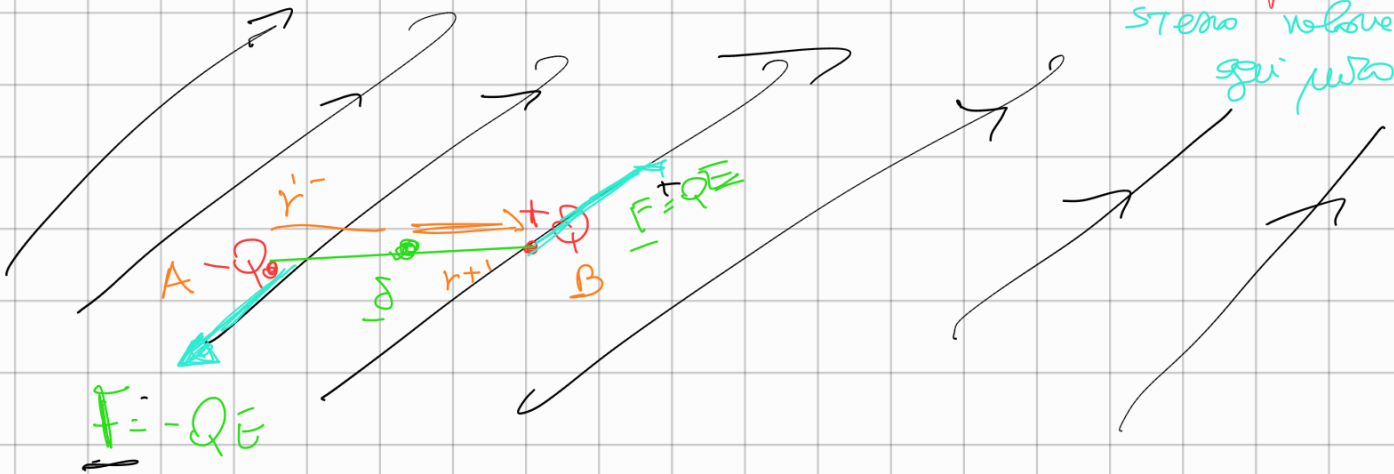
$$E_{nl} = k_e \frac{qV}{r^3}$$

$$E_{r=0}$$

$$E_{nl} = k_e \frac{qV}{r^3}$$

Ho un campo elettrico uniforme

stessa valore in
ogni punto



Metto dipolo nel campo elettrico, dip. non
perturba il campo esterno. sul dip.
agiscono forze

e ci mette dentro un dipolo. Su Q^+ agisce una
forza elettrostatica dovuta alla presenza del campo.

anche su Q^- , uguale e opposta, opposte

Abbiamo una coppia di forze che agisce
sul sistema. Possiamo calcolare
il momento. Ho una coppia

Ruota il centro di massa

r_- , r_+ vet. rispetto
al centro

Momento tot del sist. di punti

$$\underline{M} = \underline{r}_+ \times \underline{F}^+ + \underline{r}_- \times \underline{F}^- =$$

$\underline{F}_1 = -\underline{F}_2$

$$\underline{r}_+ \times Q \underline{E} + \underline{r}_- \times (-Q \underline{E}) =$$

$$= \underline{r}_+ \times (Q \underline{E}) - \underline{r}_- \times (Q \underline{E})$$

proprietà vett.

$$= (\underline{r}_+ - \underline{r}_-) \times (Q \underline{E})$$

Vettore dip è $\underline{\delta}$

parte da $-Q$ e va a Q^+ ... è $\underline{\delta}$!

NON MECCANICO
che agisce su un dip.
in un campo el. UNIF
= Prodotto vett. Po

$$\underline{M} = \underline{\delta} Q \times \underline{E} = \underline{P} \times \underline{E}$$

MOM di dipolo Vale anche se non è UNIF

Momento massimo quando i due vettori
sono perpendicolari; nullo se
paralleli. $|\underline{M}| = Q \delta |\underline{E}| \sin \alpha$
 $= 0$ quando $\alpha = 0$

Open dipolo che mettiamo, Teniamo
a dirla verso il campo
elettrico, come ago di una
bussola.

AGISCE UN MOM. MECC SUL DIPOLO FINCHÉ IL MOM DI DIP ($\underline{\delta}$)
NON È ALLINEATO CON IL CAMPO (equilibrio)

2 comolite di eq.

STABILE P e E sono IDENTICI
INSTABILE con Q opposta

Se immergo il dipolo in un campo
non uniforme, allora
le sue forze non sono
opposte, differiscono di un p'.

Ci sarà allora anche la

risultante che lo sposta. DIREZIONE
MOMENTO

DIPOLLO

TRASLA E RUOTA

ENERGIA POTENZIALE DIPOLLO IN UN CAMPO

potrei calcolare l'energia poten.

elettrostatica del dipolo.

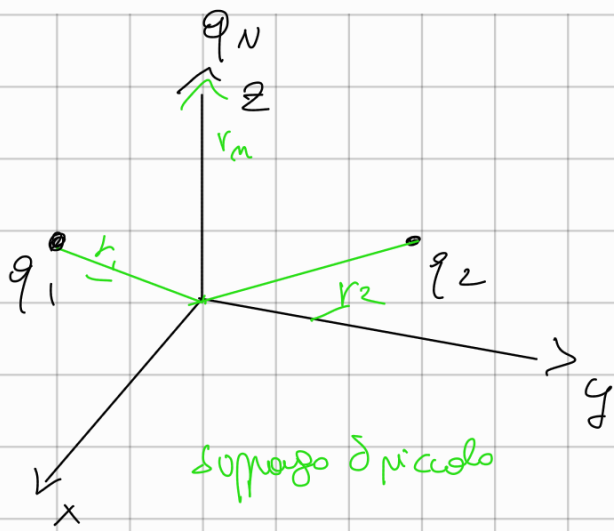
in tutti i punti, se c'è LA UNICA PER POTENZIALE LE CARICHE
IN UNA POSIZIONE

un campo, c'è il potenziale.

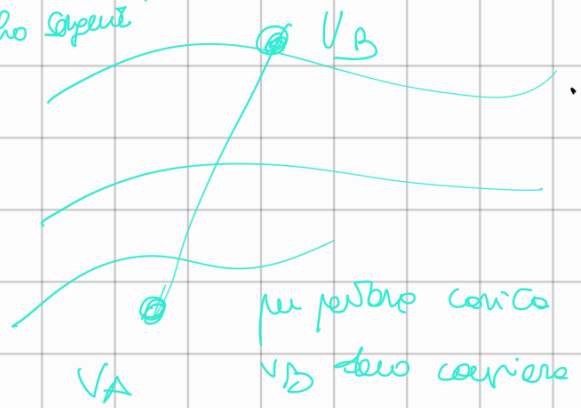
Se assemblo il dipolo, faccio
un lavoro, che ritroverò sotto forma

di energia potenziale
proviamo a calcolare.

MA UN POTENZIALE
FUNZIONE DELLO SPAZIO



sta quel da
parte ho capito



$$U^+ = q V(B)$$

$$U^- = -q V(A)$$

energ. potera. elettrostatica si un

$$U_{\text{tot}} = q(V(B) - V(A)) [J]$$

energia
pot tot

Sys. di N cariche

$$U = \frac{1}{2} k_e \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{|r_i - r_j|}$$

non cambia
2 volte

ma questo e' il potenziale

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left(\sum_{j=1}^N \frac{q_j k_e}{|r_i - r_j|} \right) =$$

mi metto nel punto r_i dove

c'è la carica q_i , e faccio la somma

delle espressioni cariche delle $N-1$ cariche

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(r_i) \sim \text{potenziale in quel punto}$$

$$-Q = A$$

$$+Q = B$$

$$V = Q V(B) - Q V(A) = Q (V(B) - V(A))$$

Q valore potenziale in B - Q valore potenziale in A
perché non è subito che il campo sia uniforme

e facciamo ipotesi che, dato che mi

ipof. ∇ varia linearmente lungo $\vec{s}$ verso B

$$V(B) = V(A) + \left. \frac{\partial V(r)}{\partial s} \right|_A \cdot \delta$$

esprimendo la distanza
come se
variasse in
modo LINEARE
variaz. lungo δ

$$V(B) - V(A) = \left. \frac{\partial V(r)}{\partial s} \right|_A \delta$$

quindi il potenziale diventa

è la derivata
direzionale

dove

$$\frac{\partial V(r)}{\partial s}$$

$$= \nabla V(r) \cdot \underline{\underline{s}}$$

variaz. lungo $\vec{e}_3$
direz.

variaz. lungo una
direz.

derivata
direzionale

derivata rispetto

ad una direzione

= gradiente · direzione

SOSTITUISCO

nell'equazione

$$V = Q \left[V(A) + \frac{\partial V(A)}{\partial s} \delta - V_A \right] = Q \delta \frac{\partial V}{\partial s}$$

potenziale

$$= - \underline{E}(r) \cdot \underline{\hat{s}}$$

$$= - \underline{P} \cdot \underline{E}(r)$$

$$= \underline{q} \delta \underline{\nabla V} \cdot \underline{\hat{s}}$$

$$= - q \delta (- \underline{E}(r) \cdot \underline{\hat{s}})$$

$$\underline{\nabla V}(r) \cdot \underline{\hat{s}} = \underline{E}(r) \cdot \underline{\hat{s}}$$

Momento di dipolo, in un caso, anche se

non uniforme $\Rightarrow$

$$\underline{P} = q \underline{\hat{s}}$$

Mag. Mecc.

$$\underline{M}(r) = \underline{P} \times \underline{E}(r)$$

Energia Pot. elettrostatica

$$V = - \underline{P} \cdot \underline{E}(r)$$

Energia pot. elettrostatica

$\hookrightarrow$ conta la posizione di $\underline{P}$ rispetto ad $\underline{E}$.

Se $\underline{P}$ ed $\underline{E}$ sono perpendicolari,

l'energia pot è nulla, ma momento è massimo



extra: risultante F su un punto se
campo, e' variabile
el.



$$\underline{F_A} = -q \underline{E_A}(x, y, z) \quad (-q)$$

$$F_B = q E_A(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$$

Δx ecc. ecc.
da spostamento δ

$$\delta = \Delta x \hat{x} + \Delta y \hat{y} + \Delta z \hat{z}$$

Campo cambia poco

$$\underline{R} = \underline{F_A} + \underline{F_B}$$

uso solo cartes. ortog.

sv. lupo 1° ordine

$$R_x = -q \cancel{E_x(x, y, z)} + q \left(\cancel{E_x(x, y, z)} + \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial E_x}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial E_x}{\partial z} \Delta z \right)$$

$$R_x = q \left(\Delta x \frac{\partial E_x}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial E_x}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial E_x}{\partial z} \right)$$

$$q \underline{\delta} = q \Delta x \hat{x} + q \Delta y \hat{y} + q \Delta z \hat{z}$$

$$\underline{P} = P_x \hat{x} + P_y \hat{y} + P_z \hat{z}$$

$$R_x = \left(\underline{P} \cdot \underline{\nabla} \right) E_x(x, y, z) \quad \underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

$$\underline{\nabla} E = \frac{\partial E_x}{\partial x} \hat{x} + \dots + \frac{\partial E_z}{\partial z} \hat{z}$$

$$R_y = (\rho \cdot \nabla) E_y(x, y, z)$$

$$R_z = (\rho \cdot \nabla) E_z(x, y, z)$$

$\Rightarrow$ Forza che si esercita
su un dipolo immerso in un
campo elettrico

$$(\rho \cdot \nabla) E(x, y, z)$$

Operatore che si applica a E_x, E_y, E_z

NON ESISTE IL GRADIENTE
DI UN VETTORE.
Per il grad si usa invece