

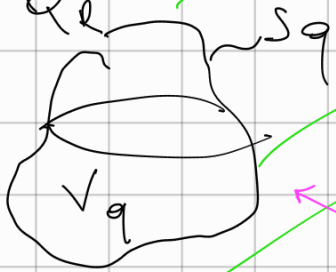
costante

$$P(r) = \epsilon_0 \chi_e E(r)$$

valutata

Carica nel conduttore

Sup. uel. conduttore



immerso in un dielettrico infinito

carica distribuita sulla superficie

separato da esso un dielettrico isotropo e un materiale conduttore e che si presenta una carica libera Q_f e sappiamo che il conduttore sia immerso in un dielettrico isotropo

Poiché il conduttore sarà

carico, ci sarà un campo elettrico nel dielettrico, il quale lo polarizzerà e ci saranno momenti interni.

Prendiamo una superficie materica (di Gauss)

che racchiude conduttore e sta nel dielettrico

$$\oint E(r) \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_f}{\epsilon_0} + \frac{Q_p}{\epsilon_0}$$

Quesiti i punti della sup. di Gauss

carica libera + cariche polarizzate.

Neop dato volume dV e $P(r)$

$$dP(r) = P(r) dV$$

infer

$$V(r) = \int_V P(r) \cdot \hat{n} dS + k_e \int_V \frac{P(r) \cdot \hat{n}}{|r-r'|} dV$$

infer o est

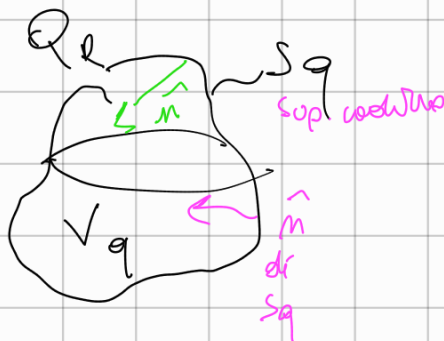
r' impunto

P dip. da campo esterno e costante

campo elettrostatico polarizzato dielettrico

Anno' dunque un vettore polarizzato punto punto

Anno' cariche legate σ e ρ



Sup. uel. conduttore

Sup. uel. conduttore

Cariche

SOP Gauss DIEL = SOP a calcolo con condiz

libere

$$Q_p = \oint_{S_q} \sigma_p(r') dS' + \iiint_{V-V_q} \rho(r') dV' =$$

$$\rho(r') \cdot \hat{n}$$

$$V - V_q - \nabla' \cdot \rho(r')$$

$V_{tot} - V_{condiz}$
DOVE VERT $\rho \neq 0$

$$= \oint_{S_q} \rho(r') \cdot \hat{n} dS' - \iiint_{V-V_q} \nabla \cdot \rho(r') dV'$$

normale
esterna, diretta
verso conduttore

2 superfici,
superficie S e S_q

associata
ad S

$V - V_q$
 S_q
Teo diverg.

divergenza =
vettore in un volume

Flusso del vettore in
quella superficie

↓ sono integrali V, V_q

~~$$Q_p = \oint_{S_q} \rho(r') \hat{n} dS' - \oint_{S_q} \rho(r') \cdot \hat{n} dS'$$~~

Sop. fuori

~~$$= \oint_S \rho(r') \cdot \hat{n} dS'$$~~

SOP Gauss DIEL
interna al
conduttore

$$Q_p = - \oint_S \rho(r') \cdot \hat{n} dS$$

carica
positiva

Sop. Gauss

$$\oint_S \underline{E}(r') \cdot \hat{n} dS' = \frac{Q_p}{\epsilon_0} + \frac{Q_p}{\epsilon_0}$$

moltiplico per ϵ_0

flusso capo el.

cariche lib. - flusso sup. Gauss vet. polarizz.

$$\epsilon_0 \oint_S \underline{E}(\underline{r}') \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_S \underline{P}(\underline{r}') \cdot \hat{n} dS$$

GAUSS PER DIELETTICI

Fatti dalla stessa sup.

$$\oint_S [\epsilon_0 \underline{E}(\underline{r}') + \underline{P}(\underline{r}')] \cdot \hat{n} dS = Q$$

D(r) prima quindi in presenza
il flusso $\epsilon_0 \underline{E}(\underline{r}') + \underline{P}(\underline{r}')$ sulla sup. Gauss

$\vec{E}$ = alla carica LIBERE DENTRO.

Vettore induzione ELETTROSTATICA

D(r)

$$\underline{D}(\underline{r}') = \epsilon_0 \underline{E}(\underline{r}') + \underline{P}(\underline{r}')$$

GAUSS in presenza di Dielettrici

$\left[\frac{C}{m^2} \right]$

vet. ind. el.

$$\Rightarrow \oint_S \underline{D}(\underline{r}') \cdot \hat{n} dS = Q$$

solo cariche libere

Il flusso del vettore induzione elettrica attraverso
una superficie chiusa S dipende solo dalle cariche
libere racchiuse dalla superficie

Da fare

Materiali dielettrici LINEARI, OMOGENEI,
ISOTROPICI.

$$\underline{P}(\underline{r}) = \epsilon_0 \chi_e \underline{E}(\underline{r})$$

$$\underline{D}(\underline{r}) = \epsilon_0 \underline{E}(\underline{r}) + \underline{P}(\underline{r}) = \epsilon_0 \underline{E}(\underline{r}) + \epsilon_0 \chi_e \underline{E}(\underline{r}) =$$

$$= \epsilon_0 (1 + \chi_e) \underline{E}(\underline{r})$$

$$\epsilon_r > 1$$

ϵ permittività elettrica,
sempre maggiore di 1

Relazione costitutiva

$$\underline{D}(\underline{r}) = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}(\underline{r}) \quad \text{costitutiva}$$

$$\epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}(\underline{r}) - \epsilon_0 \underline{E}(\underline{r}) = \underline{P}(\underline{r})$$

$$\underline{P}(\underline{r}) = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \underline{E}(\underline{r})$$

Valore per
materie
LINEARI,
omogenee,
isotrope

$$\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \frac{\rho(\underline{r})}{\epsilon_0}$$

GAUSS NO ISOTROPIA

applica l'eq. di Gauss alla rouscia

$$\nabla \cdot \underline{D}(\underline{r}) = \rho_f(\underline{r})$$

GAUSS DIELETTRICI

densità di carica
libera

anche aria e'
dielettrica

$$\text{IN ARIA} \quad \underline{D}(\underline{r}) = \epsilon_0 \underline{E}(\underline{r})$$

$$\text{dove } \epsilon_r \text{ (e quindi } \underline{P}(\underline{r})) = 1$$

Da videotes. . . supposto che nella sup. G è presente Q distribuita con densità ρ

$$Q_L = \iiint_{V_c} \rho(r') dV'$$

volume dove carica $\neq 0$



$$\oint_S \underline{D}(r) \cdot \hat{n} dS = \iiint_{V_c} \rho dV'$$

sup. di Gauss

volume dove carica $\neq 0$

applico Teo di V

$$\iiint_{V_{\text{Gauss}}} \nabla \cdot \underline{D}(r) dV = \iiint_{V_c} \rho(r) dV$$

V_{Gauss}

$V_c \in V_{\text{Gauss}}$

poss. estendere V_c tutto fuori $\rho = 0$

$\Rightarrow$ FORMA DIFF. TEO GAUSS

TEO DIVERG. PER DIEL.

$$\Rightarrow \nabla \cdot \underline{D}(r) = \rho(r)$$

È una delle 4 eq. Maxwell

$\underline{D}$ nel indiv. elettro

che anche se non c'è solo dielettrici picchi in quel caso

$$\underline{D}(r) = \epsilon_0 \underline{E}(r) + \underline{P}(r) \Rightarrow$$

TEO GAUSS

NEL VUOTO

relaz. line

$$\underline{D}(r) = \epsilon_0 \underline{E}(r)$$

nel vuoto

flusso $\underline{D}$ dip. dalle cariche libere

$$\oint \underline{D}(r) \cdot \hat{n} dS = Q_L$$

valgo legge $\underline{D}$ al corpo E

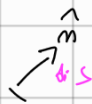
Se non sono nel vuoto devo sapere $\underline{P}$, e devo sapere allora il corpo E a cui riferire.

Dato Dielettrico, avo' in versione xdonitz

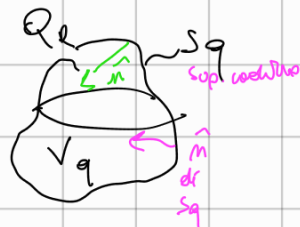
banal

$P(x,y,z)$

$E(x,y,z)$



Dato $P(r)$, il corpo vede E
per conoscere E devo trovare P
e viceversa



Sup. q

V die Sup. per r

Voglio trovare MATRICI PER CUI POTRE
LEGARE

P VETTORI DIRETTAMENTE ad E corp. el.

E TOT = corpo el. estero + corpo di poli. interni

corpo polarizz. statico, quel. si polarizza e
vuole il corp. esterno

P prop. ad E SPERIMENTALM.

$$\underline{P}(\underline{r}) = \epsilon_0 \chi(|E|) \underline{E}(\underline{r})$$

in ogni pnto

funzione di E

adimensionale

corpo totale in
quel pnto

P dipende da E in
quel pnto

avendo E, avremo P

$\chi(|E|) =$ SUSCETTIVITA' DIELETTICA

nel vuoto $\underline{D}(\underline{r}) = \epsilon_0 \underline{E}(\underline{r})$

χ intrinseco di ogni molecola,
come il materiale si polarizza
dov' $\underline{E}$ $\chi_E \geq 0$ scala +

MATERIE DIELETRICI, se ϵ non è troppo, χ è r. meno costante

$$\text{MATERIALE LINEARE} = \chi \text{ COST}$$

$$\left(\begin{array}{l} \underline{P}(\underline{r}) = \epsilon_0 \chi_E \underline{E}(\underline{r}) \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \chi_E \text{ COST} \\ \text{ADIMENSIONALE} \\ \text{cost. del Materiale} \end{array}$$

• Se χ_E cambia in base ad $\underline{r}$, MATERIALE NON OMOG. $\chi_E(\underline{r})$

MATERIALE OMOG. LIN. ISOTROPO

$$\underline{P}(\underline{r}) = \epsilon_0 \chi_E \underline{E}(\underline{r})$$

Se $\underline{P}$ ed $\underline{E}$ non sono allineati, χ_E è una MATRICE 3×3
MEZZO ANISOTROPO

$\Rightarrow$ se ho MAT OMOG LIN, ISOTROPO $\underline{P}(\underline{r})$

$$\underline{D}(\underline{r}) = \epsilon_0 \underline{E}(\underline{r}) + \epsilon_0 \chi_E \underline{E}(\underline{r})$$

$$\underline{D}(\underline{r}) = \epsilon_0 (1 + \chi_E) \underline{E}(\underline{r})$$

$\epsilon_r \text{ COSTANTE}$

relaz. tra $\underline{D}$ INDUT e campo elettrostatico

DIELETTRICA RELATIVA

$$\underline{D}(\underline{r}) = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}(\underline{r})$$

relaz. COSTITUTIVA

~~MATERIA LINEARE OMOG. ISOTROPO~~

$\epsilon_r \text{ COST}$

in ogni punto $\underline{D}$ è allineato con il campo elettrostatico e sono PROPORZIONALI

$$\Rightarrow \underline{P}(\underline{r}) = \underline{D}(\underline{r}) - \epsilon_0 \underline{E}(\underline{r})$$

$$= (\epsilon_0 \epsilon_r - \epsilon_0) \underline{E}(\underline{r})$$

$$\Rightarrow \underline{P}(\underline{r}) = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \underline{E}(\underline{r})$$

veDove
Polarizzaz

$\Rightarrow$ QUINDI PER UN DIELETTRICO

GAUSS

$$\oint_S \underline{D}(\underline{r}) \cdot \hat{n} d\underline{s} = Q_{\text{free}}$$

veDove INDOT

VECT. POLA.

$$\underline{D}(\underline{r}) = \epsilon_0 \underline{E}(\underline{r}) + \underline{P}(\underline{r})$$

ELETTRICA

DIVIDENDO

$$\nabla \cdot \underline{D}(\underline{r}) = \rho(\underline{r})$$

PERMITTIVITA'

MAT. LIN. OMOG. ISOTROPO

ϵ_r, χ_e COST

COST DIEL.
RELATIVA

$$\underline{D}(\underline{r}) = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}(\underline{r})$$

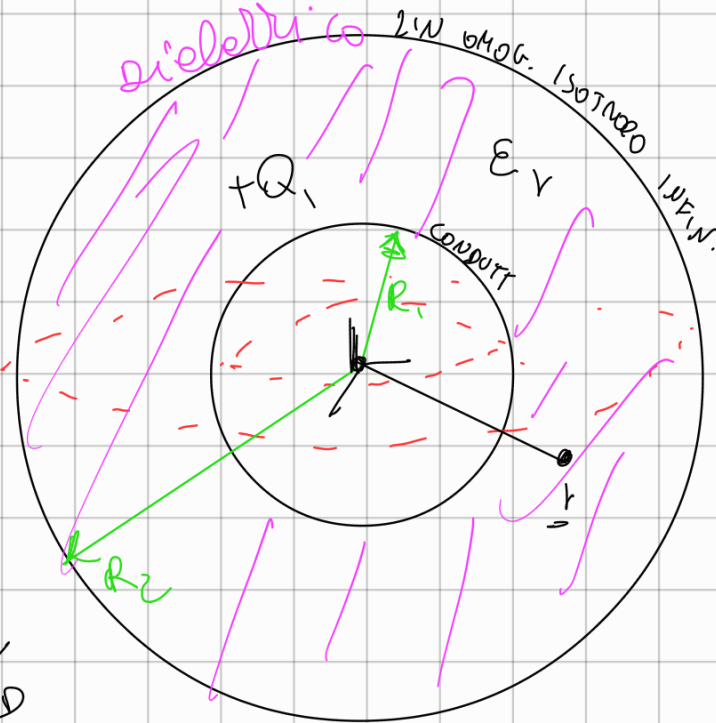
$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \geq 1$$

$$\underline{P}(\underline{r}) = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \underline{E}(\underline{r})$$

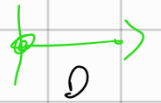


Esercizio

Voglio calcolare campo all'interno della regione conduttrice all'interno di un dielettrico nel vuoto
Sfera carica Q_1



Superficie di Gauss



su r

contiene i 2 corpi

$\underline{D}$ parallelo ad $\underline{E}$

il dielettrico non è carico, è globalmente neutro, le cariche sono sulle cariche di polveri e metallo

mi calcolo l'induzione elettrica, che dipende da

uso GAUSS, anche $\underline{D}$ radiale come $\underline{E}$

in ogni punto, sulla superficie di Gauss sono costanti

a posto la stessa area.

• 9 generi corpi, polarizzabili
DIEL non in uno stato polarizz.
Dato un punto

Carica libera

$$\oint_{SG} \underline{D}(\underline{r}) \cdot \hat{n} dS = D_r(r) \underbrace{\int \hat{r} \cdot \hat{r} dS}_{4\pi r^2} = Q_1$$

campione ind. elettrica

sup. gauss

$$\underline{D}_r(r) = \frac{Q_1 \hat{r}}{4\pi r^2}$$

" $r > R_2$ Fuori DIEL.

Componente radiale del vettore induzione

$$\underline{E}_r(r) = \frac{\underline{D}_r(r)}{\epsilon_0} = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$\epsilon_r = 1$

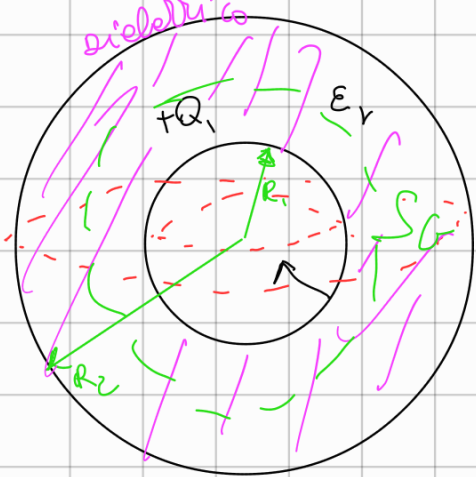
il dielettrico si polarizza ma è globalmente neutro.

ora fuori il dielettrico, ora esterno alla superficie di Gauss.

$$R_1 < r < R_2$$

uso ora Gauss in presenza di dielettrici,
valore effetti solo cariche libere

costante ϵ_r costante,
senza distorsioni



$$\oint_{SG} \vec{D}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} =$$

$$Q_r(\vec{r}) \cdot \hat{r} \cdot \hat{r} \cdot 4\pi r^2 = Q_1$$

Densità o flusso il Dielettrico, per $\vec{D}(\vec{r})$
non cambia niente

$$D_r(r) = \frac{Q_1}{4\pi r^2} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}(r)$$

$$\vec{E}_r(r) = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \hat{r}$$

è radiale

NEL DIELETTRICO

Campo minore di $1/\epsilon_r$

D_r è uguale alla carica, e la
componente normale di D_r , addossando
il dielettrico, non cambia.

La componente radiale del campo elettrico, attraversando il dielettrico, è discontinua.

Passa da un valore più grande a uno più piccolo, di ϵ_r . Quanto

vale la discontinuità?

Calcolo $\underline{P}(r)$

Un passo calcolare $\underline{P}(r)$ oppure
 poiché $\underline{P}(r) = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \underline{E}(r)$

inferire nell'aria

no vett polarizz

$$r > R_2 \quad \underline{P}(r) = 0$$

$$\text{perché } \epsilon_r = 1 \quad \underline{E}(r)$$

$$R_1 < r < R_2 \quad \underline{P}(r) = \cancel{\epsilon_0} (\epsilon_r - 1) \frac{Q_1}{4\pi \cancel{\epsilon_0} \epsilon_r r^2} \hat{r}$$

$$\underline{P}(r) = \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \frac{Q_1}{4\pi R_1} \hat{r}$$

Posso ora calcolare le cariche di polarizz. sulla sfera

sup. dove ho σ_p , sup. fisica, è nel conduttore

$$\sigma_p = \frac{P(r)}{r^2} \cdot \hat{r} \Big|_{r \in S} = \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \frac{Q_1}{4\pi R_2^2} \leq \frac{Q_1}{4\pi R_2^2} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}$$

(r) (r)
normale interna r sta sulla superficie sferica quantità di carica positive

quindi sulla superficie, c'è carica positiva

infatti, se ci muoviamo all'interno di sfera R_1 interna, sulla superficie con la $-\hat{r}$ sfera

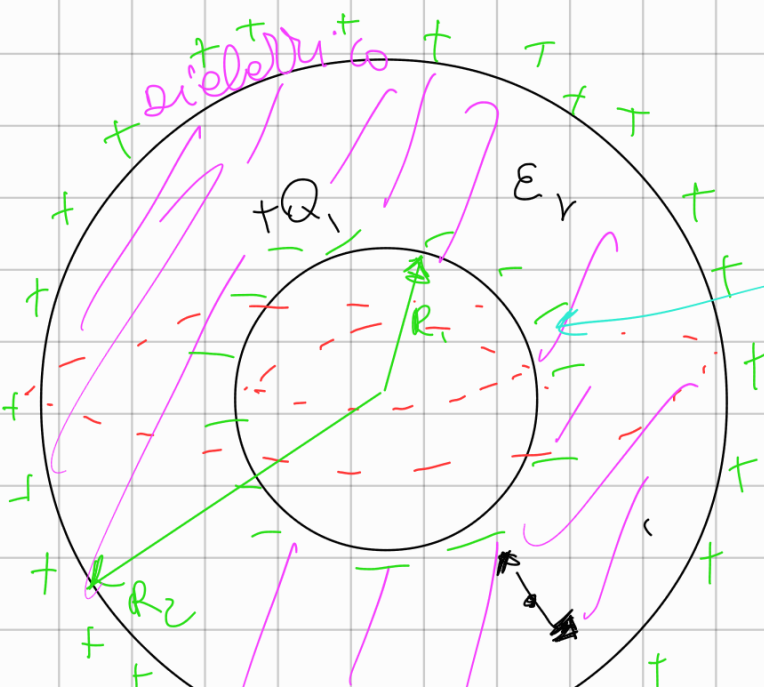
$r = R_1$

$$\sigma_p = \frac{P(r)}{r^2} \cdot \hat{n} \Big|_{r \in S_{in}} = \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} \hat{r} (-\hat{r})$$

$$\sigma_p \rightarrow = - \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \frac{Q_1}{4\pi R_1^2}$$

$r = R_1$
 carica polarizzata sulla sup. sferica

carica polarizzata sulla sfera interna



poiché sfera conduttrice è carica +Q, polarizzandosi il dielettrico presenta carica di segno opposto

$$\sigma_{free} = \frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

$$\sigma_{pl.} = - \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q_1}{4\pi R_1^2}$$

segno della sup. interna sotto la sfera

$$\sigma_{TOT} = \sigma + \sigma_p = -\frac{1}{\epsilon_r} \frac{q_1}{4\pi R_1^2}$$

potrebbe
come se
avessi Q_{TOT}
diviso $\frac{1}{\epsilon_r}$
↑
ho campo
più piccolo
di ϵ_r

• Il dielettrico influenza anche il potenziale
perché nel dielettrico il campo elettrico
è ridotto di un fattore $1/\epsilon_r$

→ come se avessi

$$\sigma_{TOT} = \frac{1}{\epsilon_r} \sigma$$

ci sono anche
cariche volumiche, ρ_p

CONDIZIONI

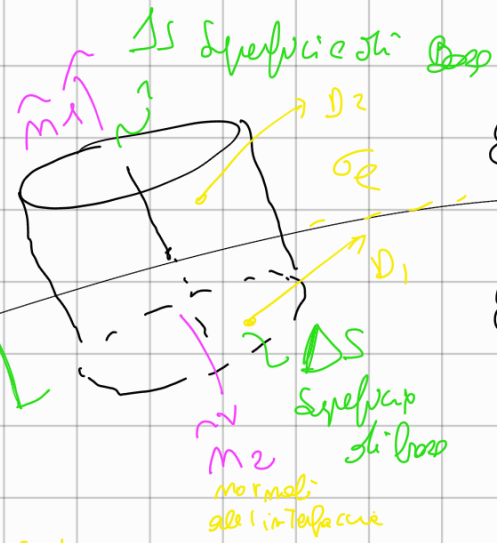
CONTORNO quando
2 interface
INIZIO IN FONDO = 0

$$P_p = -\nabla \cdot P(r)$$

il campo elettrostatico
TOTALE CONTRIBUISCE
SOLO le cariche superf.

$$\oint_S \underline{D}(r) \cdot \hat{n} ds = Q_p$$

Prendo un cilindretto,
 Δh molto piccolo
tali da considerare il
costante lungo cilindro Δh
INTERFACCIA SEPARATE



interfaccia 2
media
cilindretto
di
altezza
di
figura
ho 2 valori
inclusi
nel mezzo 1 e 2

Supponiamo ci sia
carica libera all'interfaccia
(e che non c'è, al meno
c'è carica di polarità)

$$\oint \underline{D}(r) \cdot \hat{n} ds = Q_p \Rightarrow$$

Contributi
fanno pareti esterne

$$\Rightarrow \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \underline{D}_1 \cdot \hat{n}_1 \Delta S + \underline{D}_2 \cdot \hat{n}_2 \Delta S + A_1 + B_2$$

flusso laterale → ho solo flusso sup. e inferiore

Se possibile

$$D_1 \cdot \hat{n}_1 \Delta S + D_2 \hat{n}_2 \Delta S = \sigma \Delta S$$

$$\hat{n}_2 = -\hat{n}_1 \Rightarrow \left[\underline{D_1^{(r)}} \cdot \hat{n}_1 - \underline{D_2^{(r)}} \cdot \hat{n}_1 = \sigma_{free}^{(r)} \right]$$

come si comporta $\underline{D}$ all'interfaccia

all'interfaccia di due dielettrici, la componente normale delle cariche elettriche, è DISCONTINUA

$\underline{D_1} \cdot \hat{n}$ proies. di $\underline{D}$ su $\hat{n}$
Componente NORMALE DI $\underline{D}$

ma se la carica libera non c'è

$$D_1 \cdot \hat{n}_1 = D_2 \cdot \hat{n}_1 \Rightarrow D_{1n}(r) - D_{2n}(r) = \sigma_{libera}$$

Se non c'è carica libera all'interfaccia

CONDIZIONE DI CONTINUITA' D_{1n} e D_{2n} all'interfaccia non sono continui se c'è carica libera

$$\underline{E}^1 \times \hat{n}_1 = \underline{E}^2 \times \hat{n}_1$$

$$D_{1t} = D_{2t}$$

Componente tangente all'interfaccia si conserva

$$E_{1t} = E_{2t}$$

Tangente
la componente tangente del campo elettrico statico, si conserva

CONDIZIONI DI CONTINUITA'

sia definisci le condizioni, proprietà
elettriche descritte da

legge circuitali.

(campo elettrostatico è conservativo)

$$\oint_C \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = 0$$

linee
chiusa

DIFF

$$\text{rotore } \underline{E} = 0$$

$$\nabla \times \underline{E} = 0$$

legge far

$$\oint_S \underline{D}(\underline{r}) \cdot \hat{n} d_s = Q_r$$

DIFF

$$\nabla \cdot \underline{D}(\underline{r}) = \rho(\underline{r})$$

densità
nel volume

legge per
vol.

→ a questo si sono unite le

RELAZ. COSTITUTIVA

relaz. tra $\underline{D}$ e $\underline{E}$

RETTI LIN. ISOTROP. OMOG.

$$\underline{D}(\underline{r}) = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}(\underline{r})$$

cost. mat.
relativa

come si

comportano all'interfaccia?

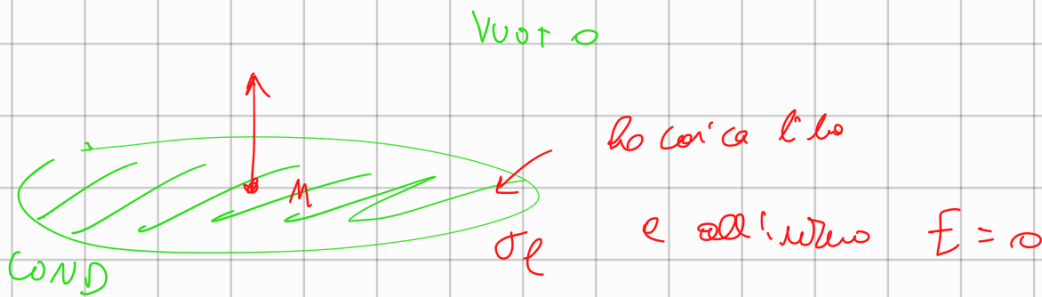
RETORNA

soluzioni

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{n} = \vec{D}_2 \cdot \vec{n}$$

$$\vec{D}_{1n}(r) = \vec{D}_{2n}(r) \quad \text{CONDIZIONE DI CONTINUITÀ / CONTINUITÀ}$$

Esempio, CONDUTTORE a VUOTO



$$\vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n} = \sigma_{free} \quad \vec{D}_{1n} = \sigma_{free} \quad TE \circ \text{COULOMB}$$

nel vuoto

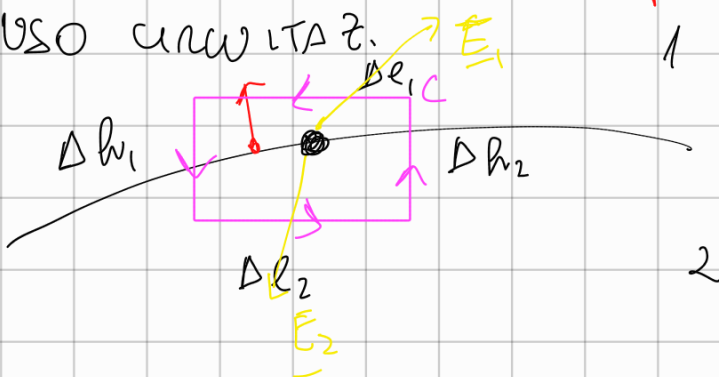
$$\epsilon_0 E_{1n} = \sigma_2$$

in un conduttore la carica normale alla superficie

$$\Rightarrow E_{interfaccia \text{ conduttore}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Come si comporta il Campo Elettrico al contorno?

USO CIRCUITAZIONE

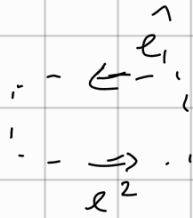


percorso C chiuso

considero su ΔL
i campi COSTANTI

circuito con $\Delta h \rightarrow 0 \Rightarrow$ solo i contributi $\Delta \epsilon_1, \Delta \epsilon_2$

$$\oint_C \underline{E} \cdot d\underline{C} = 0$$



$$\underline{E}_1 \cdot \Delta l_1 \hat{l}_1 + \underline{E}_2 \cdot \Delta l_2 \hat{l}_2 = 0$$

lineare = 0, campo conservativo
 $\hat{l}_1$ e $\hat{l}_2$ sono uguali e opposti

$$\underline{E}_1 \cdot \Delta l_1 \hat{l}_1 - \underline{E}_2 \cdot \Delta l_2 \hat{l}_1 = 0$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_2$$

$$\Delta l \left[\underline{E}_1 \cdot \hat{l}_1 - \underline{E}_2 \cdot \hat{l}_1 \right] = 0$$

componente di $\underline{E}$ lungo $\hat{l}$, componente tangente al corpo.

$$\Rightarrow \underline{E}_1 \cdot \hat{l}_1 = \underline{E}_2 \cdot \hat{l}_1$$

$$\Rightarrow \left[E_{1,t} = E_{2,t} \right] \text{ da punto per punto generalizzato } \left[\underline{E}_1(r) \cdot \hat{l}_1 = \underline{E}_2(r) \cdot \hat{l}_1 \right]$$

all'interfaccia tra 2 mezzi, la componente tangente del campo elettrostatico si conserva nel passaggio

$\Rightarrow$ ho 2 condizioni al contorno

$$\left[\begin{array}{l} D_{1n} - D_{2n} = \sigma_l = 0, \text{ se carica} \\ E_{1,t} = E_{2,t} \end{array} \right]$$

condizione al contorno