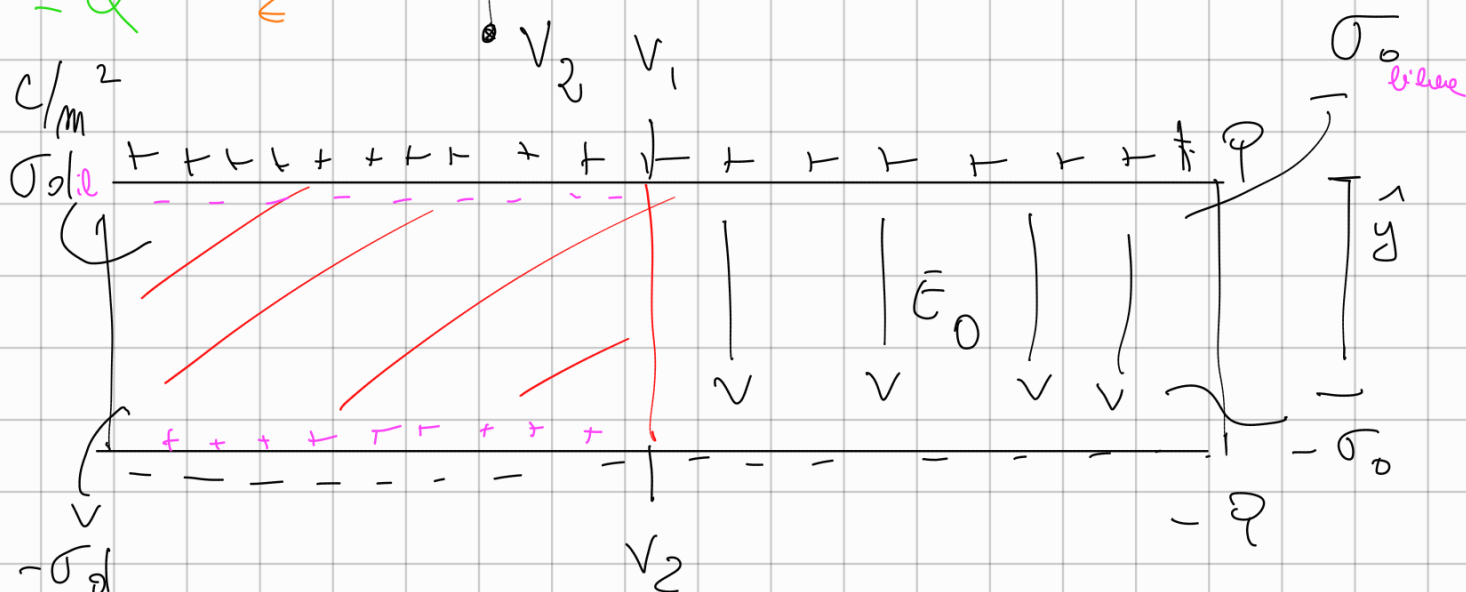


~~★~~ MANCA LEZIONE 19



$$\left\{ \begin{aligned} \bar{t}_0 &= \bar{E}_0 (-\hat{y}) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (-\hat{y}) \\ \bar{E}_1 &= E_1 (-\hat{y}) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} (-\hat{y}) \end{aligned} \right.$$

superficie del conduttore è una regione equipotenziale
 , dovunque la densità la sola è uguale , ^{Sup.} _{equipotenziale}
 il bene è lo stesso

$$E_1 = E_2 \Rightarrow E_0 = E_0 \Rightarrow \sigma_0 = \frac{\sigma_0}{E_1} \quad \text{with } \rho_0$$

$$\sigma_d = \epsilon_r \sigma_0$$

$$\begin{cases} D_d = -\sigma_d \hat{y} \\ D_0 = -\sigma_0 \hat{y} \end{cases} \quad \underline{D} = \epsilon_0 \epsilon_r E$$

$$Q = Q_0 + Q_d = \sigma_0 (a-x) b + \sigma_d \underbrace{[x] b}_S$$

$$\Delta V = E \cdot l \quad \text{campo totale}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma_0 (a-x) b}{\Delta V} + \frac{\sigma_d x b}{\Delta V}$$

$$\rightarrow \sigma_0 = \epsilon_0 E$$

$$\sigma_d = \epsilon_0 \epsilon_r E$$

ΔV è uguale all'intera $E \cdot l$

$$C = \frac{\epsilon_0 E (a-x) b}{E l} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r E x b}{E l}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 (a-x) b}{l} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r x b}{l}$$

specifiche dell'
area che
si affaccia al
vuoto
equivalente
ovvero

condensatore
completamente
riempito
di dielettrico

$$C \equiv \frac{1}{\frac{l}{\epsilon_0 S}}$$

$$S = (a-x) b$$

$$\frac{\epsilon_0 S}{l}$$

$$C \equiv \frac{1}{\frac{l}{\epsilon_r S}} \quad S = x b$$

come 2 condensatori in parallelo

$$\Rightarrow C_0 = \frac{\epsilon_0 (a-x)b}{\ell}$$

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r (xb)}{\ell}$$



- Il sistema equivale ad un sistema in parallelo di due condensatori, uno vuoto totalmente di dielettrico e l'altro di aria.

(questo quando serve solo il valore ϵ_r con un dielettrico)

Se dielettrico è isotropo

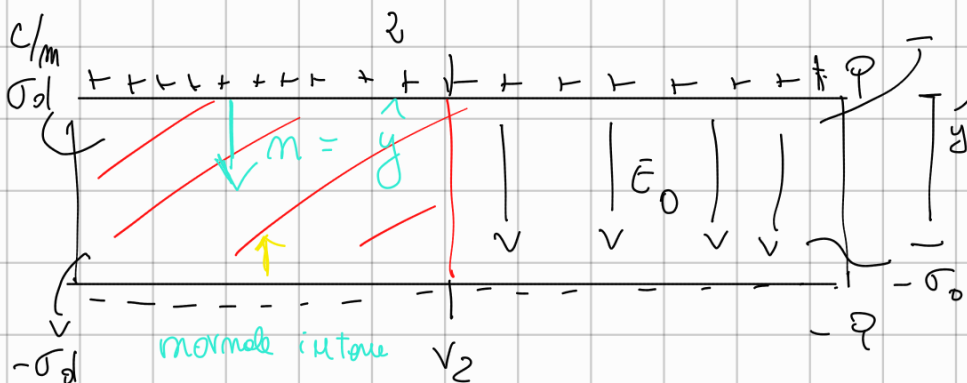
$$\underline{S} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \underline{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} (-\hat{y})$$

valore per ϵ_r

$$\underline{P} = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \sigma_0 (-\hat{y})$$

$$\underline{P} = \epsilon_0 \chi_e \underline{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \underline{E}$$

$$\underline{E} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$



Carica di polim. sup. e inferiore

$$\sigma_p^- = \underline{P} \cdot (\hat{y}) = \frac{-(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \sigma_d$$

$$\sigma_p^+ = -\sigma_p^- = \underline{P} \cdot \hat{y} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma_d$$

$$(\epsilon_r \sigma_o = \sigma_d) \text{ da cui si capisce}$$

$$Q = Q_o + Q_d = \sigma_o(a-x)b + \sigma_d(xb) =$$

$$= \sigma_o ab - \sigma_o xb + \epsilon_r \sigma_o xb =$$

$$= \sigma_o [ab + (\epsilon_r - 1)xb] = \sigma_o b [a + (\epsilon_r - 1)x] = Q$$

$$\sigma_o(x) = \frac{Q}{b [a + (\epsilon_r - 1)x]}$$

Varia in

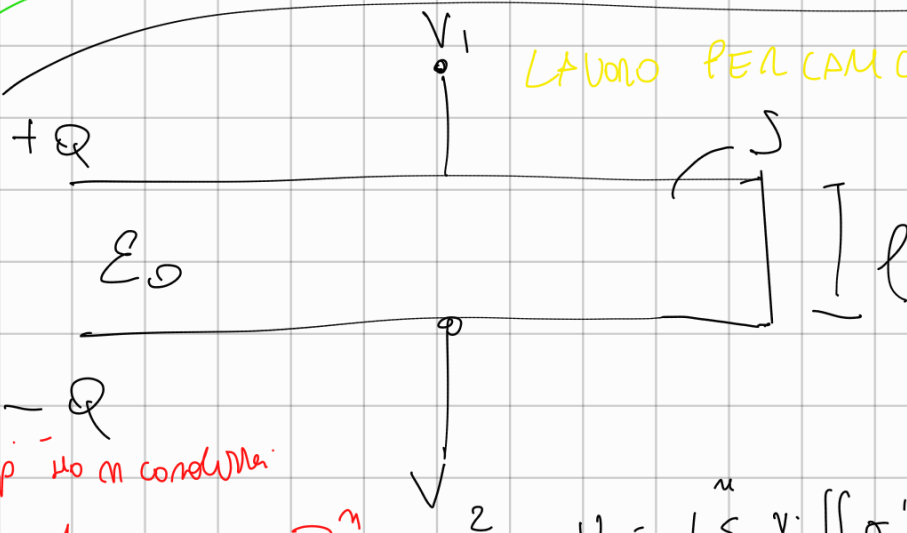
funzione di x

alla proporzionalità
del dielettrico

Prevedo i casi limite

$$\sigma_o(a) = \frac{\epsilon_r Q}{b [a + (\epsilon_r - 1)a]}$$

LAVORO PER CAMPIRE CONDENSATORE
CON DIELETTRICO



$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N V_i Q_i$$

Esercizio
per esempio
Sist. di cariche

Se lo considero

$$= \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

$$\frac{Q}{\Delta V} = C$$

in cap. ho in conduttore

1. --- 2.

$$U_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i \iint_{S_i} \sigma_i' dS_i'$$

σ, γ regioni equipot
 $\gamma_m \sigma_m$ derivata di carica

$$= \frac{1}{2} \sum_i \epsilon v_i q_i$$

Forma generale cond. Campo nei conduttori con U data: volume e campo elettrostatico

Energia elettrostatica

Cost generale $U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \underline{E}(r) \cdot \underline{E}(r) dV$
 in cond. nel vuoto

Prendiamo ora un dielettrico.

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V |\underline{E}|^2 dV$$

J/m^2

equival.

$$U = \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon_0 |\underline{E}|^2 dV$$

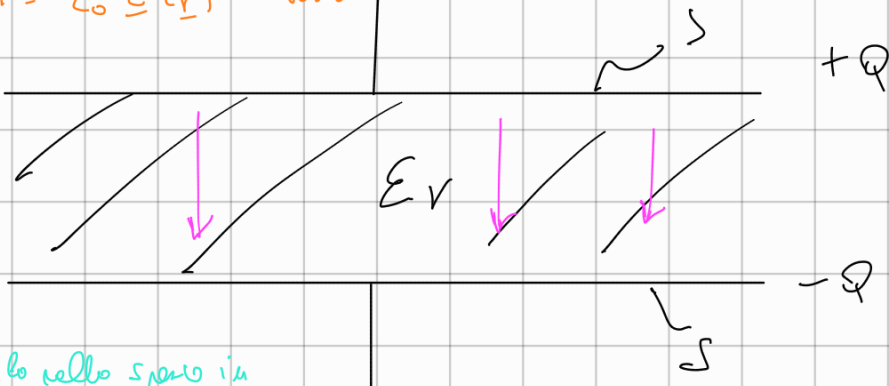
integrando nel volume dove il campo $\neq 0$

possa generalizzare se ci sono dielettrici e non nel vuoto

So che nel vuoto

$$\underline{D}(r) = \epsilon_0 \underline{E}(r)$$

$\underline{D}(r)$ nel vuoto



$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

$$\underline{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} (-\hat{y})$$

$$\underline{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}$$

$$\underline{D} = -\sigma (-\hat{y})$$

si può solo sapere = $\underline{D} = -\sigma (-\hat{y})$
 Cariche libere, σ

$$\underline{D}(r) = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}(r)$$

derivata volume di energia

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{l}$$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \underline{D}(r) \cdot \underline{E}(r) dV$$

$$U = \int_V \frac{1}{2} \underline{D}(r) \cdot \underline{E}(r) dV$$

$\frac{Q}{C} = \Delta V$

dove $(V_1 - V_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} l$

in ogni punto $U(r) = \frac{1}{2} \sigma \hat{y} \cdot \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \hat{y} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0 \epsilon_r}$

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{l} \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} l \right)^2 =$$

U costante... U

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \right)^2 S l$$

così complessione facile più

$$U = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 - Q_2 V_2) \quad C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{l}$$

$$= \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} Q \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} l$$

$$= \frac{1}{2} Q \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} l = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 S l}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

$$q = \sigma S$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \right) \sigma S l$$

FORMULA

GENERALE
CALCOLO
ENERGIA
POT. SE HO DIEL.

Quanto corpo
elettronico

UGUACI

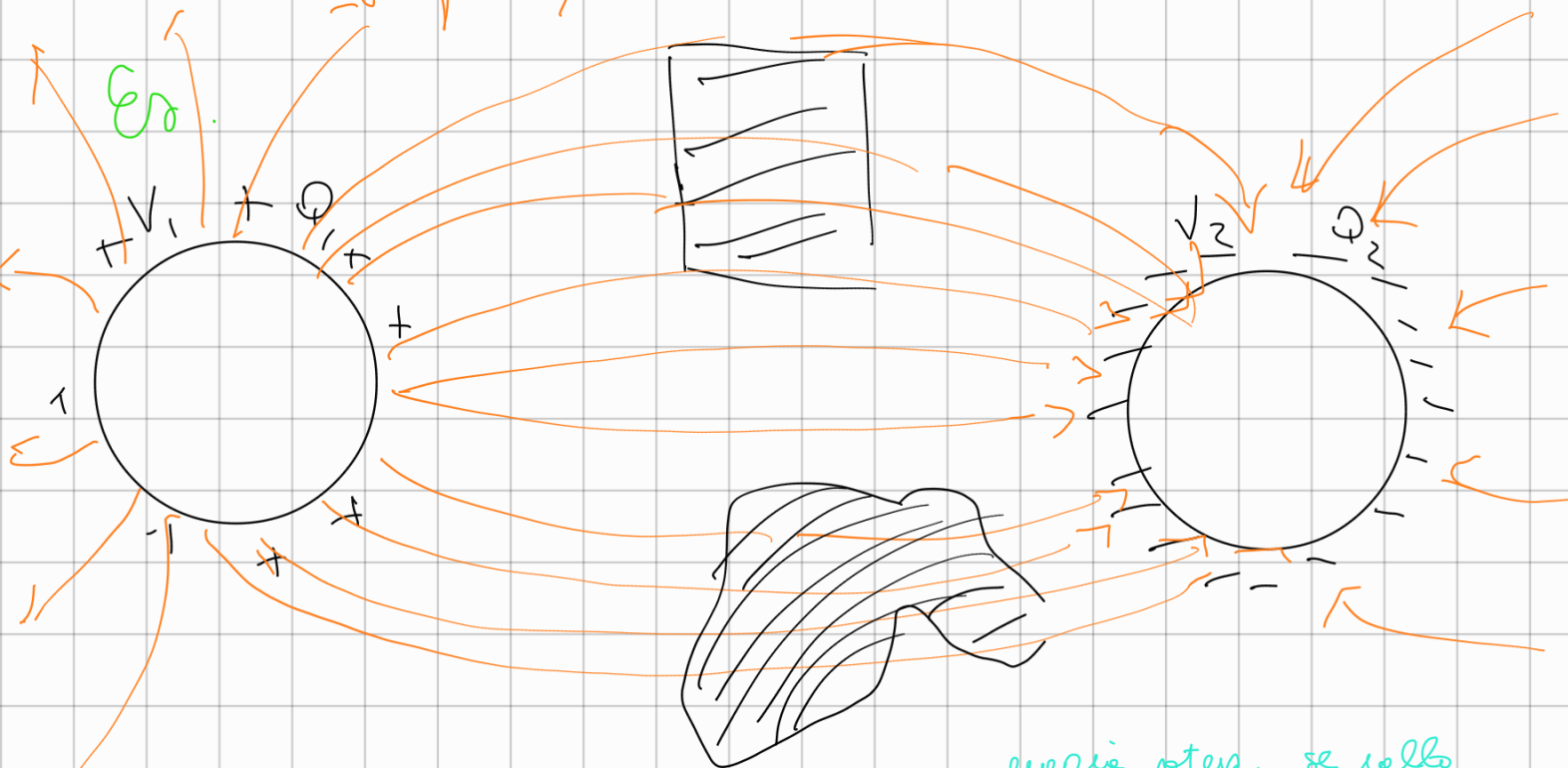
energia di
TUTTO corpo al 70

e se non costante

$$w = \frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{D} = \frac{1}{2} \underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{D}(\underline{r})$$

Vera equazione
della densità di
energia elettrostatica con dielettrica

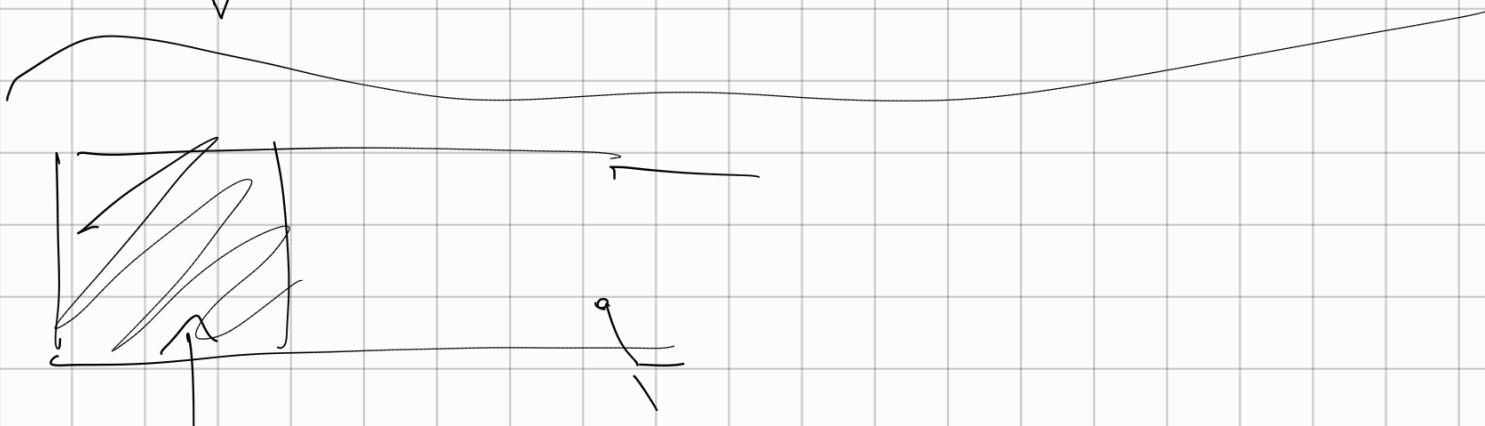
Funzione scalare, sia nel vuoto che nel dielettrico



energia potens. se tutto
spazio ha
dielettrico

$$W(\underline{r}) = \frac{1}{2} \underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{D}(\underline{r})$$

$$U = \iiint_V w \, dV$$

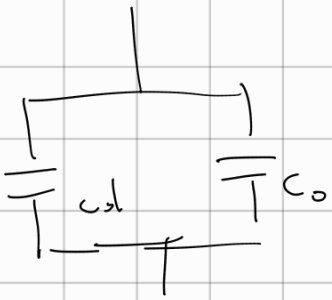


$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_v |\vec{E}|^2$$

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 |E|^2$$

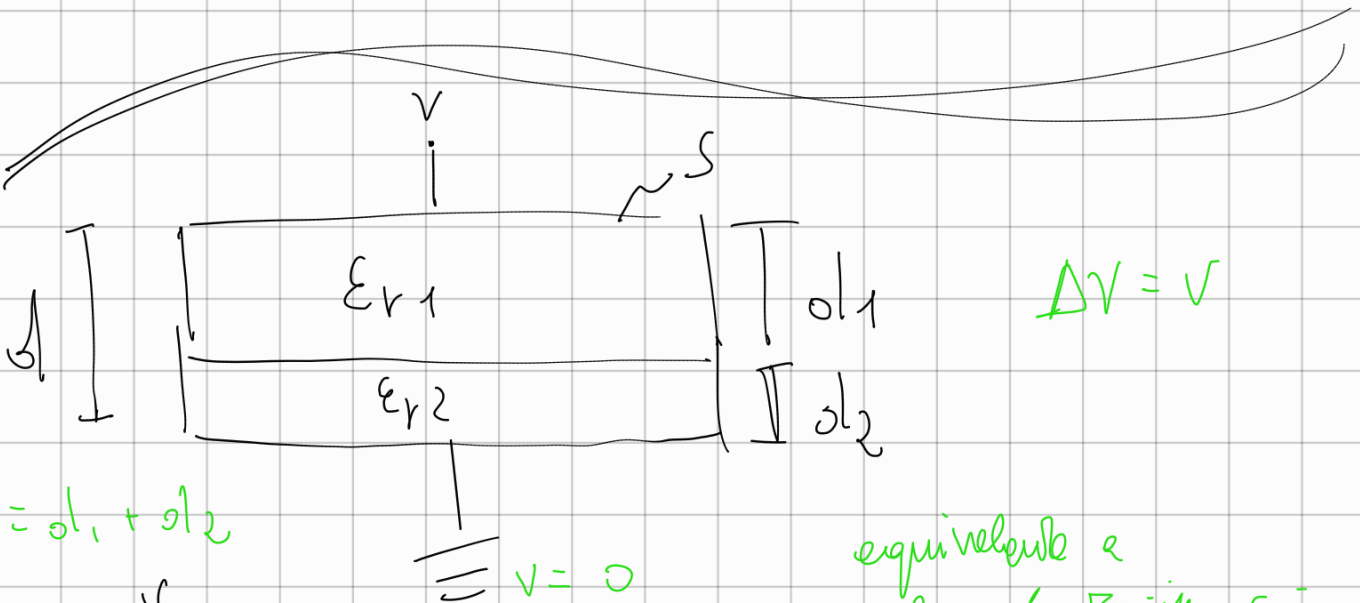
$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\underline{E}|^2 (a \cdot x) b \cdot l + \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r |\underline{E}|^2 x \cdot b \cdot l$$

$$|\underline{E}| = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{\epsilon_0 b [a + (\epsilon_r - 1)x]}$$



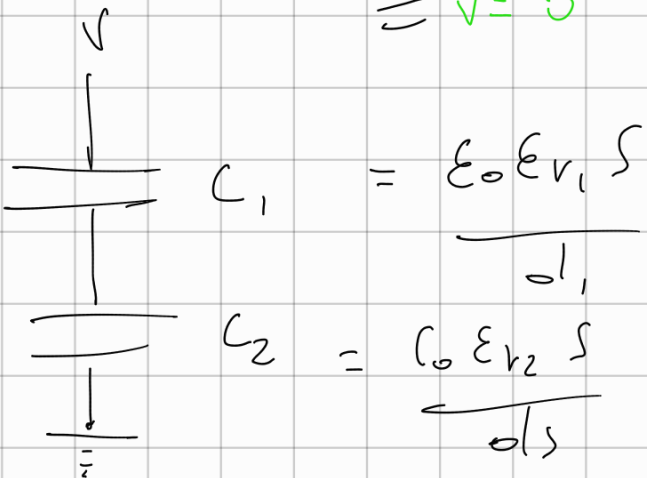
$$U = \frac{1}{2} C_0 \Delta V^2 + \frac{1}{2} C_d \Delta V^2 =$$

$$= \frac{1}{2} (C_0 + C_d) \Delta V^2$$



$$\Delta v = v$$

$$A = a_1 + a_2$$



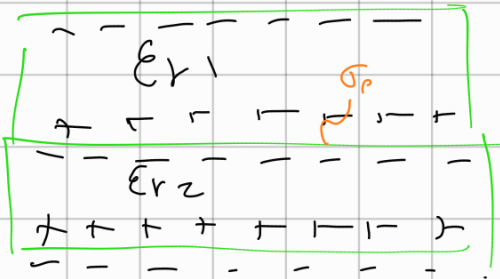
equivalent a
2 conservation in serie

$$\frac{1}{C_3} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$= \frac{d_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S} + \frac{d_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2} S}$$

$$= \frac{\epsilon_{v2} d_1 + \epsilon_{v1} d_2}{\epsilon_0 \epsilon_{v1} \epsilon_{v2} S}$$

$$C_S = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{v1} \epsilon_{v2} S}{\epsilon_{v2} d_1 + \epsilon_{v1} d_2}$$



$$P_1 = \epsilon_0 (\epsilon_{v1} - 1) \underline{E}_1$$

$$P_2 = \epsilon_0 (\epsilon_{v2} - 1) \underline{E}_2$$

$$D_1 = D_2 = \sigma = \frac{Q}{S} \quad D = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}$$

$$\frac{1}{C_S} \quad U = \frac{1}{2} C_S (V)^2$$

Esercizio 6

$$\epsilon_{v1} = 2$$

$$d_1 = 5 \text{ mm}$$

$$\epsilon_{v2} = 4$$

$$d_2 = 7 \text{ mm}$$

RIGINTO' ETTICA

a forza di andare il
= campo elettrico, il dielettrico
si divide e lo con che vanno

$$\bar{E}_{R1} = 10^7 \text{ V/m}$$

V_{max}

$$\bar{E}_{R2} = 2 \cdot 10^7 \text{ V/m}$$

30000 V/millimetri

Nipoli di dell'aria: $\bar{E}_R = 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ aria

$$\bar{E}_R = 4.6 \cdot 10^7 \text{ V/m}$$

velocità

$$Q = C_s V$$

$$\sigma_s = q V$$

$$\sigma = \frac{C_s V}{S}$$

$$10^7 \text{ V/m}$$

Porcell

$$\underline{D}_1 = D_1 (-\hat{y}) = -\sigma \hat{y}$$

$$\bar{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} =$$

$$\underline{D}_2 = D_2 (-\hat{y}) = -\sigma \hat{y}$$

$$\bar{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} =$$

$$\bar{E}_1 = \frac{C_s V S}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} \epsilon_1 S V}{\epsilon_{r2} d_1 + \epsilon_{r1} d_2} \cdot \frac{1}{\cancel{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S}}$$

$$\bar{E}_2 = \frac{C_s V S}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} = \dots$$

max V
che può applicare!

$$\bar{E}_1 = \frac{\epsilon_{r2} V}{\epsilon_{r2} d_1 + \epsilon_{r1} d_2} \Rightarrow V'_{MAX} = \frac{\bar{E}_{1R} (\epsilon_{r2} d_1 + \epsilon_{r1} d_2)}{\epsilon_{r2}}$$

11
85 kV

$$\bar{E}_2 = \frac{\epsilon_{r1} V}{\epsilon_{r2} d_1 + \epsilon_{r1} d_2} \Rightarrow V^2_{MAX} = \frac{\bar{E}_2 R (\epsilon_{r2} d_1 + \epsilon_{r1} d_2)}{\epsilon_{r1}}$$

11
340 kV

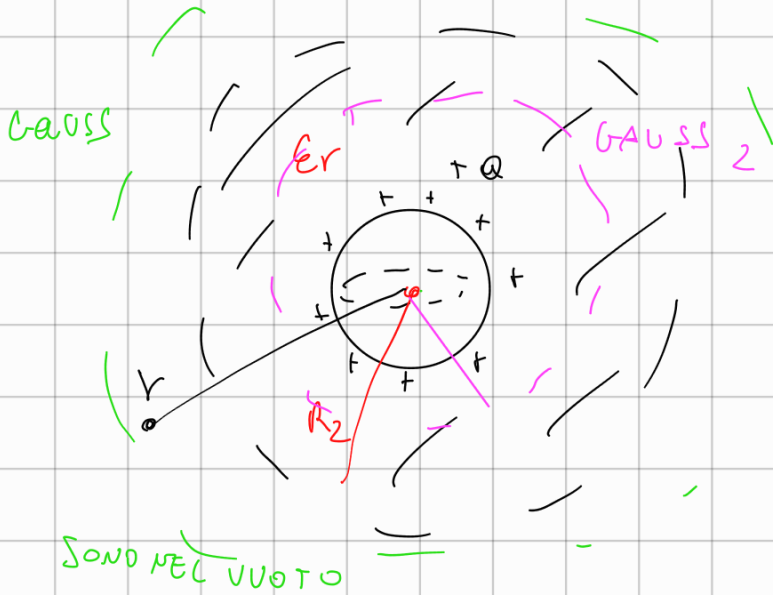
Fine parte elettrica

Eserciti da videoles.

Ho un gas di ϵ_r

Sfera carica $E_{int.} = 0$
Carica σ alla superficie
UNIF

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R_1^2} \quad \frac{C}{m^2}$$



• Campo el. all'interno e all'esterno
e potenz.

• σ ρ carica di polarizz.

• C costante

• U per portare Q sul conduttore

• Sfera sferica, uso GAUSS
per $r > R_2$ alla stessa distanza

il campo è lo stesso



Campo radiale

• GAUSS NO DIEL, SONO NEL VUOTO
 $r > R_2$

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q + \cancel{Q_p}}{\epsilon_0}$$

cariche polarizz. = 0 globalmente
PIELETTRICO era scarico
prima e ci rimane

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

• DENTRO IL DIELETTRICO

GAUSS DIEL.

$$R_1 < r < R_2$$

Conico LIBERA

$$D_r 4\pi r^2 = Q \quad \leftarrow$$

$$\underline{D}_r(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

Si conserva

alternativa... Sono in aria $r > R_2$

$$\underline{D}(r) = \epsilon_0 \underline{E}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

Condizione di
CONTINUITÀ...

Si conserva COMP. NORMALE VETTORE

INDICE ELETTROSTATICA nel proprio

NON HO CAMBIO LIBERIE
AL CONTORNO

D è radiale, ha componente normale

$$D_{on} = D_{in} \quad \text{Si conserva}$$

è LA COMPONENTE NORMALE

$R_1 < r < R_2$ $\underline{D}(r) = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}(r)$

$$\underline{E}_{diel} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \hat{r}$$

$\underline{E}$ non si conserva

• continua componente tangente del VETTORE CAMPO EL.

=> QUI CAMPO EL È NORMALE, CONTINUO

↳ Campo EL non è CONTINUO, SUBISCE
DISCONTINUITÀ
DEMINO è più piccolo

potenziali!

$r \geq R_2$

lungo percorso radiale

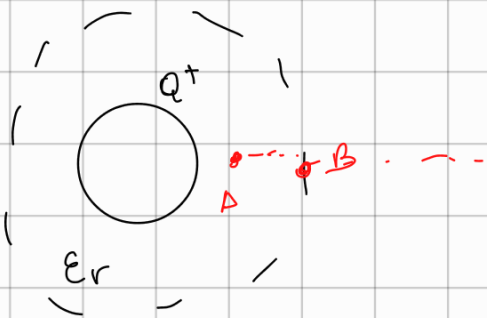
$$V(r) = - \int_{\infty}^r \overset{dr \hat{r}}{E(r')} \cdot d\vec{e} + \overset{DISTRIBUITA}{\cancel{V(\infty)}} \quad \text{FINITA}$$

$$= - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r} = V(r)$$

$$R = R_2 \quad V(R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

• ALL'INTERNO POT. CAMPO, prendo 2 punti A e B nel dielettrico

• Tutti i punti della sfera concentrica. e DIEL, a V cost, sono EQUIPOT. PRENDO UN CAMMINO RADIALE



$$V(A) - V(B) = - \int_B^A E_d(r) \cdot dr'$$

$$= - \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r'^2} dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right]$$

A punto interno a distanza r

LAVORO POSITIVO

$$V_p(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (V(B))$$

POTENZIALE ALL'INTERFACCIA
DEVE ESSERE UGUALE

$$V_p(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{1}{R_2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\epsilon_r r} - \frac{1}{\epsilon_r R_2} + \frac{1}{R_2} \right]$$

IL DIELETTRICO MODIFICA IL POTENZIALE

Esempio POT. inopportuna (Lavoro speso per caricare tutta la sfera di carica Q)

$$V = \frac{1}{2} Q V(n_1) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\epsilon_r n_1} - \frac{1}{\epsilon_r n_2} + \frac{1}{n_1} \right]$$

Capacità del CONDUTTORE

e' tutto un unico conduttore

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \left[\frac{1}{\epsilon_r n_1} - \frac{1}{\epsilon_r n_2} + \frac{1}{n_1} \right]}$$

Capacità del CONDUTTORE FOIATE

IMMAGAZINO PIU' COMPLE

Deriva sop e velocità di polarizzazione

Not del. omogeneo ...

VETI. POLARIZZAZ. in ogni punto ...

$$\underline{P}(r) = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \underline{E}(r)$$

comp
Macrosopico

$$E_d(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \hat{r}$$

nel die

$$\underline{P}(r) = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad n_1 < r < n_2$$



anche P e' radiale e
va come $\frac{1}{r^2}$

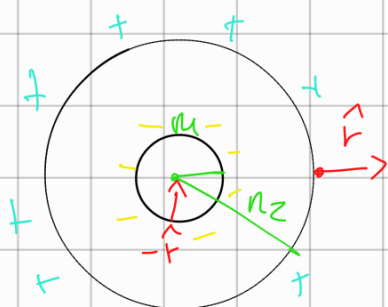
P non e' UNIF, VARIA

$$\sigma_p = P \cdot \hat{n}$$

No 2 interfacce dielectriche

una a raggio n_1 e una a raggio n_2

NORMA ESTERNA?



- r esterna di questo

densità carica sup. positiva sulla sup

$$\sigma_{P_2} = \frac{P \cdot \hat{r}}{r=r_2} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi r_2^2} \quad \text{POSITIVE E UNIF} \quad \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

$$\sigma_{P_1} = \frac{P \cdot (-\hat{r})}{r=r_1} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{-Q}{4\pi r_1^2} \quad \text{NEGAT.}$$

Sono diverse σ_{P_1} e σ_{P_2}

σ_{P_1} è più intensa ma Q è UGUALE

Q quantità di carica LEGATA, uguale
perché DIEL
glob. neutro

$$Q_1 = Q_2 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} Q$$

densità volum. carica indotta

$$\rho_P = -\nabla \cdot P(r)$$

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

P ha solo componente vettoriale $\hat{r}$

$$-\nabla \cdot P(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi r^2} \right) = 0$$

Solo densità sup.

