

Matteo
Mercoledì

ore 16:15 - 17:45

alla 145

Tutor di Fisica 2

Prima equazione di Maxwell
(nel caso elettrostatico)

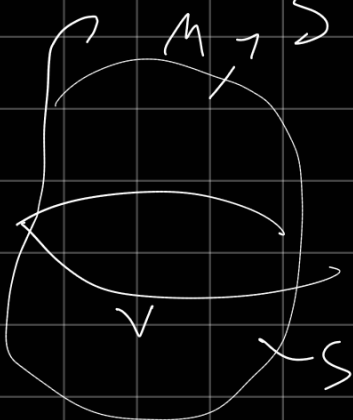
è la forma differenziale del Teo di Gauss (chiamata anche Maxwell in forma integrale)

HO una
elettricità
in tutto lo
spazio
mi costruisco un
volume

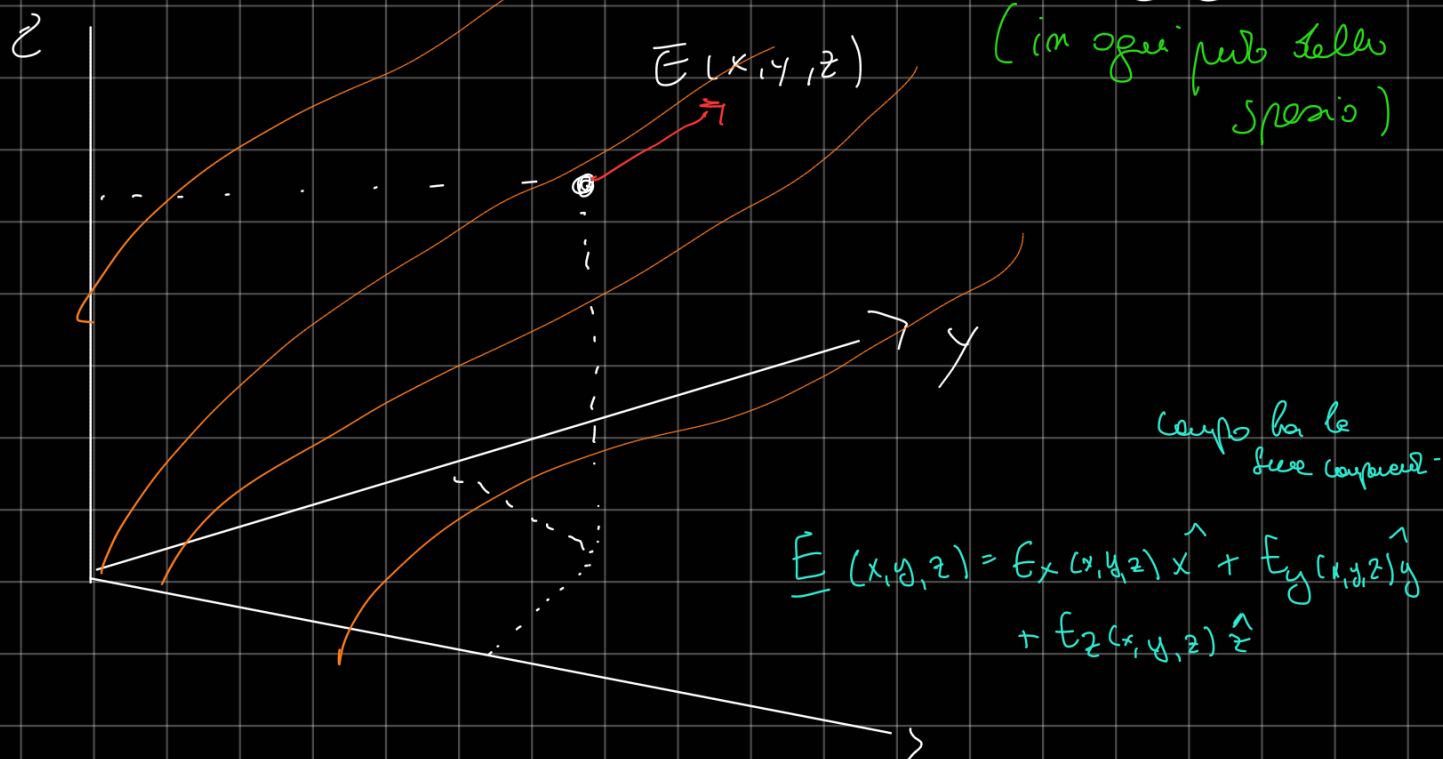
↳ scelta una sup. S che
includa un volume V ,
fissato il campo e il può dimensionare,
la legge ci dice che il
flusso totale del campo elettrostatico
è pari a $\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \text{carica netta}$
carica netta

$$\oint E(r) \cdot \vec{n} \, ds = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(r) \, dV$$

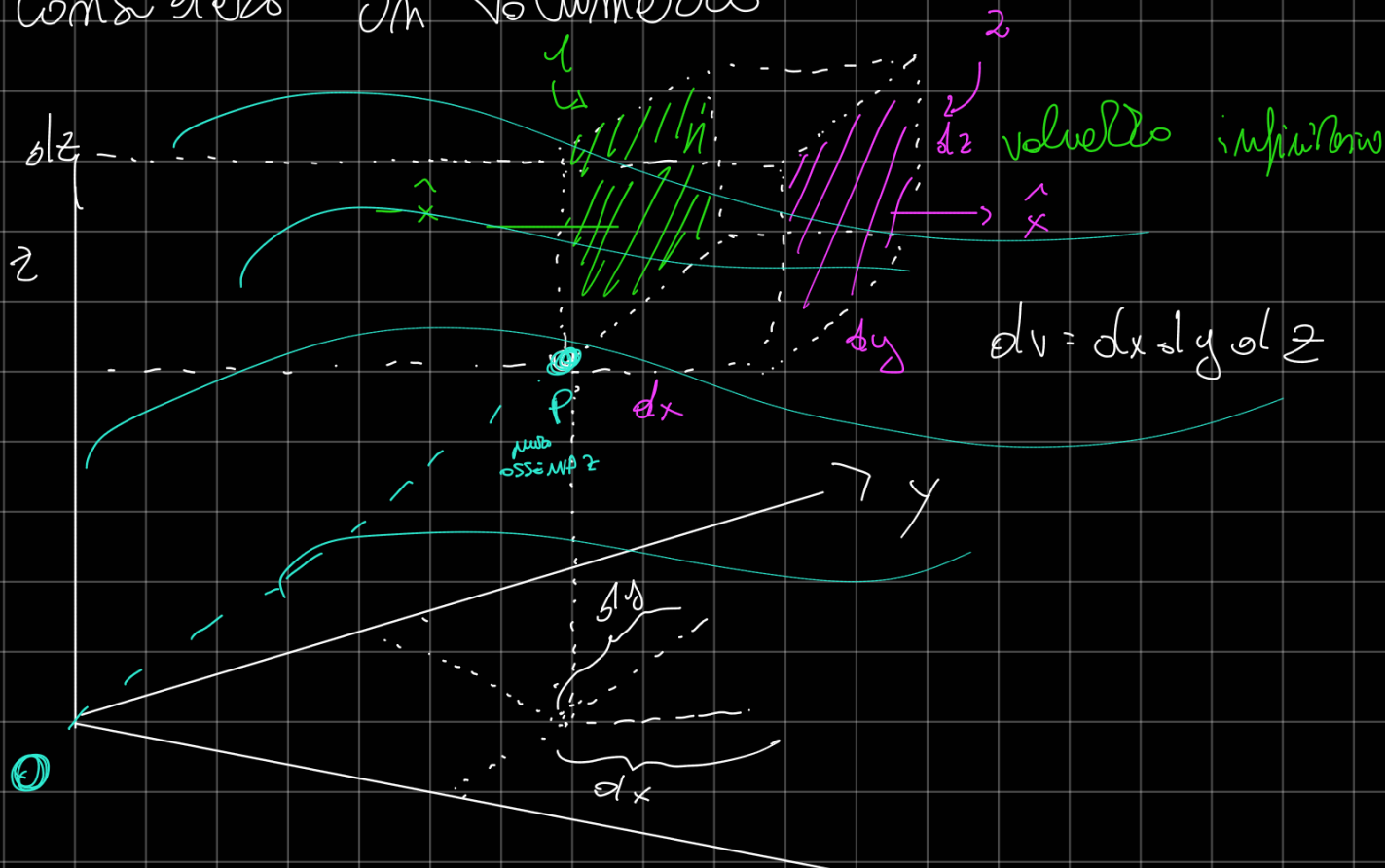
↳ normale
alla sup.



Regione dello Spazio in cui esiste
un campo di forze
Dato un punto P , dove esiste il vettore campo
elettrico
(in ogni punto dello
spazio)



considero un volume



mi metto in un punto dell'ossatura x e in quel
punto costruisco un volume infinitesimo le
coordinate di esso

il valore è racchiuso da una superficie
(6 facce del cubo)

1) ha come normale $-\hat{x}$
2) ha normale $\hat{x}$

Prendiamo 2 facce del cubo, opposte
una che ha come normale $\hat{x}$, e
l'altra $-\hat{x}$

IPOTESI: dV infinitesimo. Campo $(u(1), 2)$ uguale a P

di posto P (faccia 1) è:

$$y + \frac{dy}{2}, z + \frac{dz}{2}$$

Il punto medio sarà:

1)
$$\left(x, y + \frac{dy}{2}, z + \frac{dz}{2} \right) = (x, \bar{y}, \bar{z})$$

faccia
2)
$$\left(x + dx, y + \frac{dy}{2}, z + \frac{dz}{2} \right) =$$

$$= \left(x + dx, \bar{y}, \bar{z} \right)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 y medio z medio

l'area della faccia 1 = $dy dz$

2 = $dy dz$

Ipotesi: facciata è strettamente piano
da sì che il valore del campo
è costante e uguale su tutta
la faccia, come P

①
$$\Phi_1 = \int (x, \bar{y}, \bar{z}) \cdot (-\hat{x}) \, dy \, dz$$

e $\underline{E}(x, \bar{y}, \bar{z}) = \underline{E}(x, y, z)$ il campo $\underline{E}$
 campo uguale ovunque faccia
 e può di osservazione
 è uguale a quello
 del può di osserv.

$$\Phi_1 = \underline{E}(x, y, z) \cdot (-\hat{x}) dy dz$$

Scegliamo la componente lungo x del
 campo

Flusso totale attraverso quella
 faccia (sup. aperta)

$$\Phi_1 = -E_x(x, y, z) dy dz$$

rimane del
 prodotto scalare
 solo la componente
 lungo x

Normale punto 2) è $\hat{x}$

②

$$\Phi_2 = \underline{E}(x + dx, \bar{y}, \bar{z}) \cdot (\hat{x}) dy dz$$

mi sono
 spostato

il campo del flusso elettrico lo considero
 costante per tutta l'area

o campo costante
 sulla faccia ma
 se mi sposto di
 dx stesso
 consid. il cambiamento

$$\underline{E}(x + dx, \bar{y}, \bar{z}) = \underline{E}(x + dx, y, z) =$$

Componente lungo x del campo

$$\Phi_2 = E_x(x + dx, y, z) dy dz =$$

1° ordine
 $x = x + dx$
 $x_0 = x$

sviluppo
 Taylor
 1° ordine

$$= \left[E_x(x, y, z) + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right] dy dz$$

Spostamento fatto
 per calcolare da x a $x + dx$

Tutta variazione di x lungo x

→ Componente lungo x del campo Elettrostatico

①

$$\Phi_1 = -\underline{E}(x, \bar{y}, \bar{z}) \cdot (-\hat{x}) dy dz$$

$$\textcircled{2} \quad \Phi_2 = E_x(x, y, z) \, dy \, dz + \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} \, dx \, dy \, dz$$

Saremo in grado di calcolare il flusso totale di questo due facce

Flusso TOTALE attraverso la 2 facce
FACCE X

$$\Phi_x = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} \, dV$$

il flusso attraverso la faccetta lungo l'asse x è pari alla derivata parziale rispetto ad x · il volume
Il flusso delle 2 faccette con normale la stessa x

i termini di E_x si annullano, rimane solo la derivata parziale

IL FLUSSO È LEGATO ALLA VARIAZIONE DEL CAMPO ELETTROSTATICO · VOLUME

Quanto vale il flusso totale, calcolando le altre facce?
analogamente

$$\Phi_y = \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} \, dV \quad \text{come varia il campo elettrostatico lungo y · volume}$$

$$\Phi_z = \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} \, dV$$

il flusso totale, sommando

flusso vettore infinitesimo

Se ho un corpo el. carico calcolo flusso lungo o volume infinit.

$$\Rightarrow \Delta \Phi = \left(\frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x,y,z)}{\partial z} \right) dV$$

Costa che fanno la somma delle derivate

PRIMA EQ DI MAXWELL

Flusso infinit. di un corpo vettoriale è un'oper. diff.

Se ho partito partendo il volume, ho calcolato il flusso sul volume, ed ho trovato che è $\propto$ derivata parziale - volume

Volume attorno ad un punto di osservazione
Flusso $\rightarrow$ corpo su una superficie

Usiamo gli operatori differenziali.

VEETTORE NABLA

OPERATORE SIMBOLICO

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

derivata parziale lungo qualcosa

• vettore che, fin tanto che non lo applico, non ha significato.

$$\text{Vettore } \underline{A}(x,y,z) = \begin{matrix} A_x(x,y,z) \hat{x} + \\ A_y(x,y,z) \hat{y} + \\ A_z(x,y,z) \hat{z} \end{matrix}$$

componenti

Sia ∇ che A li allineo definito secondo un'sys di rif. cartesiane

applico metodo scalare

$$\nabla \cdot \underline{A}(x, y, z) =$$

NOTA: scalare A

$$\left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} \right) \cdot \left(A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \right)$$

prodotti intermediari valgono 0

$$= \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z}$$

Divergenza di A ^{valore} divergenza del
 valore A

operazione differenziabile, estrae le

derivate delle componenti di A.

IL RISULTATO È UNO SCALARE

$$\oint \underline{\Phi} = \left(\frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} \right) dV$$

$$\oint \underline{\Phi} = \nabla \cdot \underline{E}(x, y, z) dV$$

Salvo derivata possibile delle componenti

$\underline{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}$

abbiamo fatto
 la divergenza del campo
 e moltiplicato per volume

FLUSSO = DIVERGENZA CAMPO · VOLUME

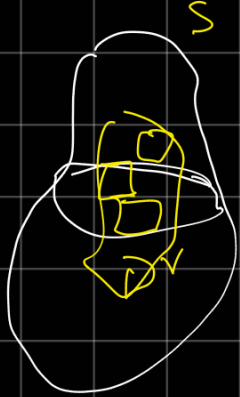
INFINITO in un punto attorniato da volume infinitesimo

ELETTROSTATICO

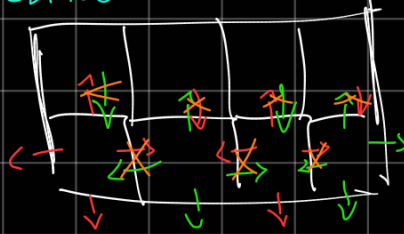
IL PRENDO DA UNA SUP CHiusa del
 con NORMALE ESTERNA all
 VOLUME

Di Torniamo al teo di Gauss
 visto calcolare flusso di un vettore in una superf.
 immaginaria che il volume interno possa essere
 riempito da infiniti volumi.

FLUSSO
 TOTALE
 Usando divergenza
 molto più facile



SI ANNULLANO I FLUSSI delle FACCE INTERNE
 e rimane solo
 il flusso di quelle esterne



Prendiamo una faccetta, in spazio e vedo campo

Teorema della Divergenza

flusso campo elettrico attraverso la sup.
 su tutto il volume

$$\Phi = \oint_S \underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}) \, dV$$

$\oint_S$ ∇ racchiuso nelle sup. CHIUSA S
 $\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r})$ calcolo di divergenza $\cdot dV$ $\neq$ punto nel volume

Flusso della superficie
 chiusa che contiene

Integrale del valore delle
 divergenze del
 campo

TEO DIV. il volume

FLUSSO VETTORE ATTAV. UNA SUP. CHIUSA = DIVERGENZA DEL VETTORE
 usando il teo delle div. il teo di Gauss

Gauss

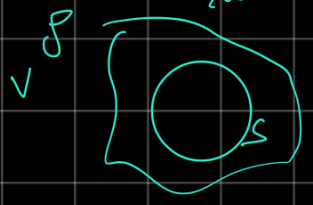
$$\oint_S \underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}) \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(\underline{r}) \, dV$$

ρ $\frac{C}{m^3}$ e punto nel
 sup chiusa
 anche dentro il
 il volume
 e lo stesso
 DIVERGENZA, $\neq$ punto, STO
 cost. di ogni punto

blue > qualunque, dentro, fuori o a ρ qual si sia, che non val.

multo multo

Teorema di divergenza =



Dato un punto, se $\rho \neq 0$, allora

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(x,y,z)}{\epsilon_0}$$

DIVERG. CAMPO EL

Prima equaz. di Maxwell in forma diff.

per che ρ di V carica elettrica

$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ fluo ϵ_0 elettrico

FLUSSO = $\frac{\text{carica}}{\epsilon_0}$, GAUSS

Si basa su una operazione di flusso

Se moltiplico per volume dV , diventa il flusso infinitesimo

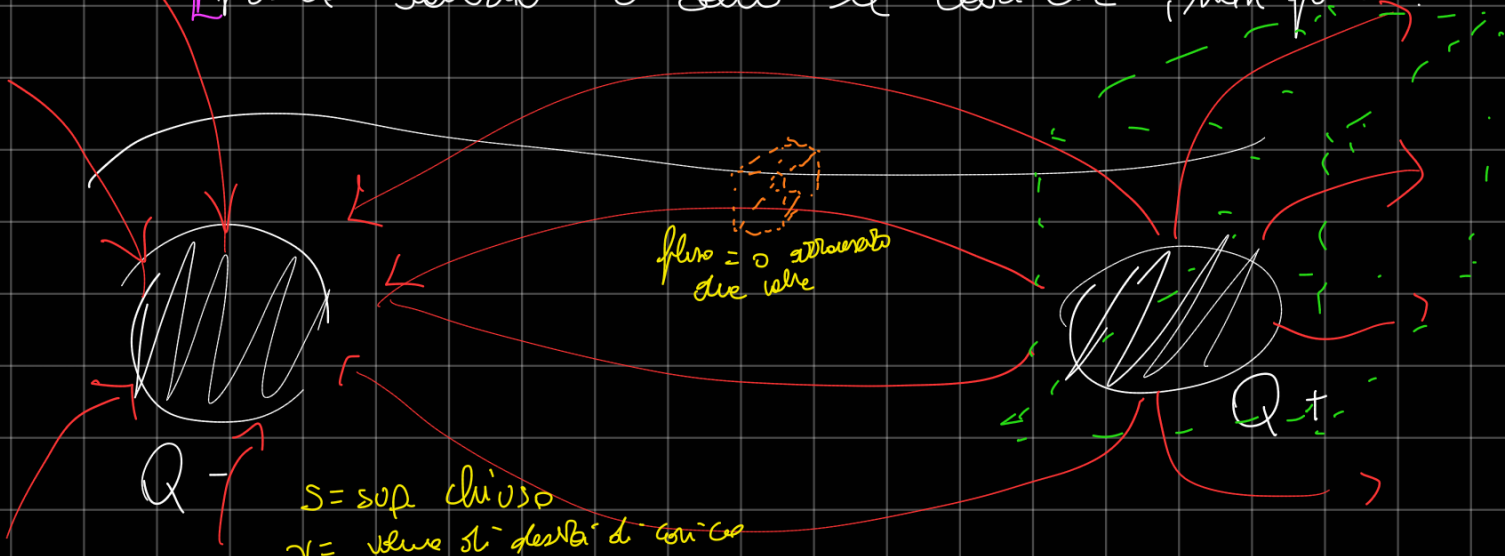
DIVERGENZA VETT Campo elettrico = densità di carica totale nel punto / ϵ_0 . Se non c'è carica, $\nabla \cdot \vec{E}$ è 0

Quando faccio la divergenza in un punto fuori dal volume, la divergenza è 0. (densità di carica $\rho = 0$)

es. palla con densità di carica uniforme.

Se sono lontano dal punto, c'è il campo ma la divergenza è 0. C'è $\neq 0$ solo se sono dentro la palla

Perché dentro ci sono le cariche, non fuori.



può essere ridotto nel campo

in un punto con ρ di carica, vedo a fare il flusso e con $\neq 0$, da di potrei dire di forza.

ma in cui non c'è carica elettrica... flusso = 0 non c'è carica, linee di forza entrano ed escono

Se n linee di forza che entrano e -
= a quelle che escono, la divergenza è 0.

Se considero un volume immaginario sulla carica Q^+ escono moltissime linee di F , Flusso $\neq 0$

la divergenza è associata ai punti in cui partono le linee di forza

Divergenza associata al flusso e alle linee di forza che entrano o escono

Dimensione della divergenza

$$E_x \left[\frac{N}{C} \right]$$

Div.

$$\nabla \cdot \underline{E}(r) \left[\frac{N}{C \cdot m} \right]$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} \left[\frac{N}{C} \frac{1}{m} \right]$$

-

Se moltiplico per m^3

$$E_x dy dz = \frac{N}{C} m^2 \text{ che è l'unità di mis. del Flusso}$$

Altri operatori lineari:

$$\underline{A}(x, y, z)$$

$$\nabla \cdot \underline{A}(x, y, z) = \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z}$$

è un scalare

Ma qui siamo presso entrambe le coordinate cartesiane

Se problemi sys rif. sferico e cilindrico

e ciò si riflette sulla divergenza

da quale è diversa se la calcoliamo in un
modo o nell'altro.

$$\nabla \cdot \underline{A}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial [\rho A_\rho(\rho, \varphi, z)]}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

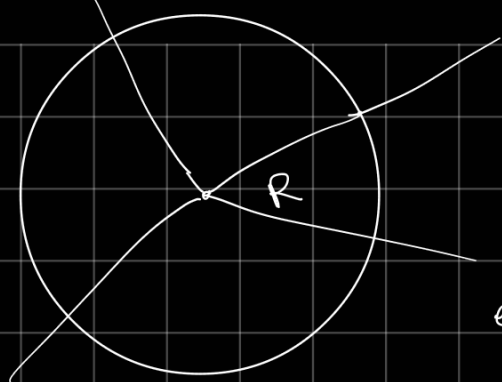
Divergenza coord.
cilindriche

ATTENTO
alla DIV.
con coord.
cilindriche

Sferiche NO.

La divergenza non calcolabile ma serve
per ricavare a come equiamo
le coordinate. Sono necessari
altri coordinate

Es



$$r > R$$

$$\underline{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(p \frac{4}{3} \pi r^3) \hat{r}}{r^2}$$

è come se tutti st'anno

$$\underline{E}(r) = E_r(r) \hat{r} + 0 \hat{\theta} + 0 \hat{\phi}$$

Se voglio calcolare la divergenza, posso farlo

$$\nabla \cdot \underline{E}(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 E_r)}{\partial r}$$

$r^2 E_r$ deve essere costante

$$\frac{d}{dr} = 0 \quad r > R \text{ infatti sono fuori del volume}$$

$$\underline{E}(r) = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}$$

Se voglio convertire

$$\hat{r} = \sin \vartheta \cos \varphi \hat{x}$$

$$\underline{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \sin \vartheta \cos \varphi}{x^2 + y^2 + z^2} \hat{x} +$$

le stesse forme
 $\nabla \cdot \underline{E}(r)$

devo rispetto a x

$$+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \sin \vartheta \sin \varphi}{x^2 + y^2 + z^2} \hat{y} +$$

devo rispetto a y

$$+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cos \vartheta}{x^2 + y^2 + z^2} \hat{z}$$

devo rispetto a z

è r^2 la derivazione, non c'è la costante

Se sono dentro $r < R$

$$\underline{E}(r) = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho r \hat{r}$$

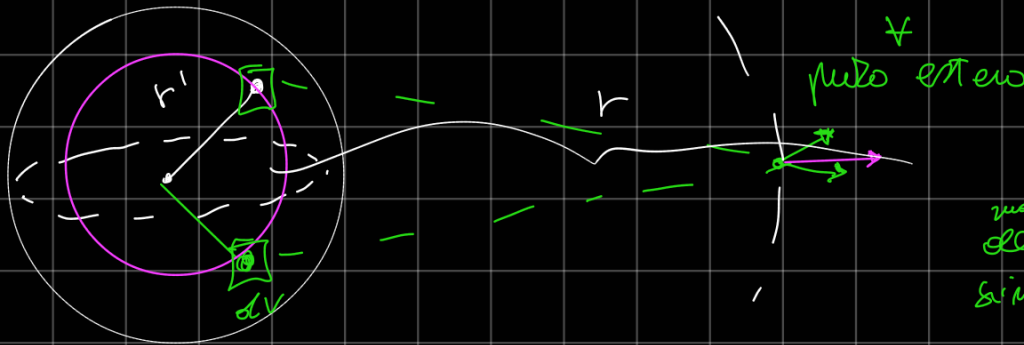
Quo es, una distrib. carica volume

$$\rho(r) = A r^r$$

$\subseteq \mathbb{M}^3$

no simm. sferica

corpo el. interno e esterno.



anno, solo
una circ. interna
della sfera, che punti
simm. c.

non ho infiniti di più

Sono alla stessa distanza r' dal centro, carica quadrifera

quadrifera

Trovo sempre 2 punti che mi danno questo corpo el
per cui ho il corpo el. solo radiale.

Volevo ad integrare, ottengo solo simmetria. di condutture che
mi da un vettore corpo el. di linea. perpendicolare alla sfera
passante per r

$$\Rightarrow \underline{E}(r) = E_r \hat{r} \quad \text{considero la sup } r \text{ come di Gauss}$$

$\Rightarrow$ Flusso

E_r costante, r cost

$$\oint \underline{E}_r \cdot \hat{r} \cdot \hat{r} dS = E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Q ? distrib. variabile

$$Q = \iiint_V \rho(r') dV' = \text{coord. sferiche}$$

$$dV' = r'^2 \sin \vartheta' dr' d\vartheta' d\varphi'$$

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \underbrace{A r'}_{\vartheta} (r')^2 \sin \vartheta' dr' d\vartheta' d\varphi'$$

$$Q = \Delta \int_0^R r'^3 dr' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\vartheta' d\vartheta'$$

$$Q = \Delta 4\pi \int_0^R r'^3 dr' = \Delta \pi R^4 \quad [C] \quad \text{carica TOT.}$$

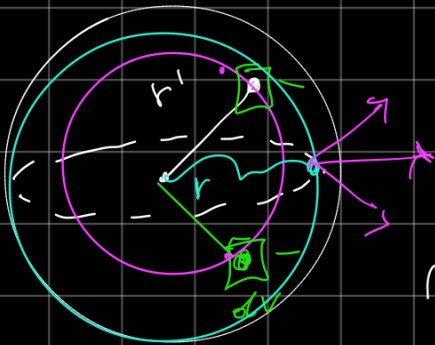
$$\Rightarrow E_r 4\pi r^2 = \frac{\Delta \pi R^4}{r^2}$$

$$\vec{E}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta \pi R^4}{r^2} \hat{r} \quad \text{con } r > R$$

Pseudo ora

$$0 < r < R$$

Pseudo sup. di Gauss



internamente posso sempre prendere due punti TC il campo el. è radiale in ogni punto e normale alla sup. di Gauss.

secondo che CONTA LA CARICA INTERNA a GAUSS sferica

$\Rightarrow$ Per Q ora conta la carica interna fino a r

$$Q = \Delta \int_0^r r'^3 dr' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\vartheta' d\vartheta' = \Delta \pi r^4$$

$$\vec{E}_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta \pi R^4}{r^2} \quad r > R$$

$$\Phi = E_r 4\pi r^2$$

$$r < R$$

$$\Rightarrow \vec{E}_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \pi \Delta r^2$$

$$\vec{E}_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \pi \Delta r^2 \hat{r}$$

APPLICAZIONE DIVERG. in una reg. sferica sferica e'
def. un campo elettrico, cui attribuiamo un valore

$$\text{Flusso el} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\underline{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\nabla E(r) = \frac{q(r)}{\epsilon_0}$$

φ

$$r > R = 0$$

$$\varphi(r < R) = Ar$$

verifico la divergenza per coordinate
cilindriche

DENTRO

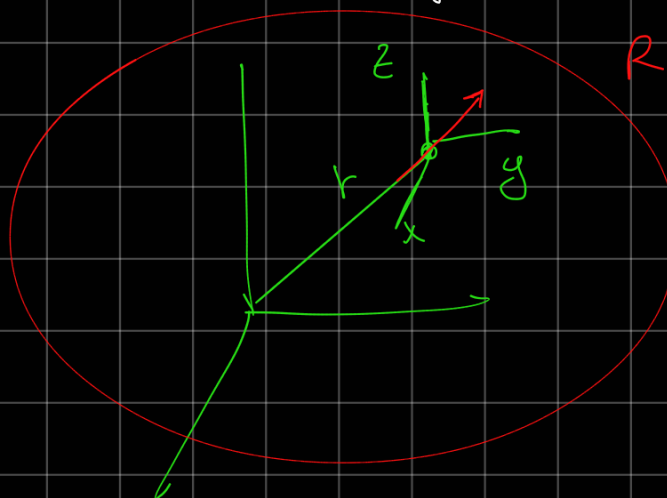
$$\underline{E} = k_e \pi A r^2 \hat{r} = k_e \pi A r \vec{r} = k_e \pi A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})$$

$$\Rightarrow E_x = k_e \pi A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} x$$

$$E_y = k_e \pi A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} y$$

$$E_z = k_e \pi A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} z$$

DIFFICILITÀ
da cui si deduce
il campo è
radiale



$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

$$x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$\Rightarrow$ Calcolo divergenza

$$\nabla \cdot \underline{E}(r) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = k_e \pi A \left[\frac{x^2}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \sqrt{x^2+y^2+z^2} \right]$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = k_e \pi A \left[\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \sqrt{x^2+y^2+z^2} \right]$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = k_e \pi A \left[\frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \sqrt{x^2+y^2+z^2} \right]$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = k_e \pi A \left[\frac{x^2}{r} + r \right]$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = k_e \pi A \left[\frac{y^2}{r} + r \right]$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = k_e \pi A \left[\frac{z^2}{r} + r \right]$$

$$\Rightarrow \nabla E(r) = \overset{\text{somma}}{k_e \pi A} \left[\overset{r^2}{\frac{r^2}{r}} + 3r \right] = k_e \pi A 4r$$

$$= \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \rho(r) = \epsilon_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \pi A 4r = Ar$$

densità di carica

→ Gauss DIFF. - Se so il campo elettrico posso per

può, quando vale la f derivata di $\cos$

Se varia $\cos$ di $\perp$ il $\cos$ elettrico significa
che il flusso è ϕ , non $c^2 \phi^2$ come