

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2020-2021)

5 Febbraio 2021.

Problema 1 (8 punti) Due cariche sono distribuite linearmente, su due filamenti di sezione trascurabile e di lunghezza $L = 3a$ con una densità lineare di carica uniforme λ . I due filamenti sono disposti uno lungo l'asse x e l'altro lungo l'asse y di un sistema di riferimento cartesiano, entrambi con un estremo a distanza a dall'origine, come in figura. Determinare:

- l'espressione analitica del potenziale elettrico totale in funzione di λ nell'origine del sistema di riferimento.
- il valore del vettore campo elettrostatico nell'origine del sistema di riferimento, se $a = 1 \text{ cm}$ e $\lambda = 0.1 \text{ } \mu\text{C}/\text{m}$.

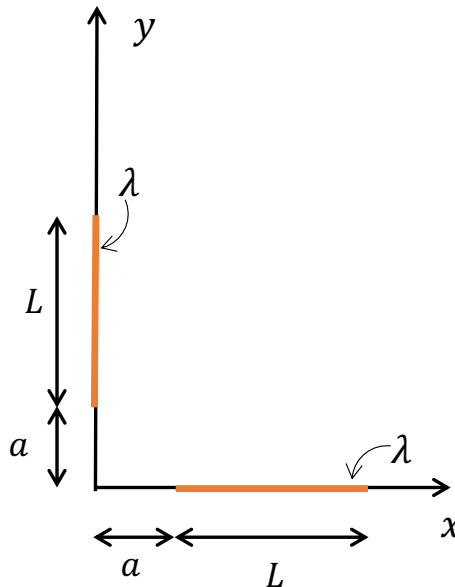


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

a)

Il potenziale $V(\underline{r})$ generato in $\underline{r}$ da una distribuzione lineare l di densità di carica è dato dall'espressione:

$$V(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda(\underline{r}') d\ell'}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (1)$$

Per la distribuzione lineare lungo l'asse delle x positive, essendo $d\ell' = dx'$ e $\underline{r}' = x'\hat{x}$, il potenziale generato nell'origine ($\underline{r} = 0$) è:

$$V^x(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{a+L} \frac{\lambda dx'}{x'} \quad (2)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(a+L)}{a} \right] \quad (3)$$

Analogamente, il potenziale generato nell'origine dalla distribuzione sull'asse delle y positive è:

$$V^y(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{a+L} \frac{\lambda dy'}{y'} \quad (4)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(a+L)}{a} \right] \quad (5)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti

$$V(0) = V^x(0) + V^y(0) = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(a+L)}{a} \right] \quad (6)$$

$$= \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln(4) = \frac{\ln(2)}{\pi\epsilon_0} \lambda \quad (7)$$

b)

Il campo elettrostatico $\underline{E}(\underline{r})$ generato in $\underline{r}$ da una distribuzione lineare l di densità di carica è e:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} (\underline{r} - \underline{r}') d\ell' \quad (8)$$

Il campo elettrostatico generato nell'origine dalla distribuzione sull'asse delle x positive è :

$$\underline{E}^x(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{(a+L)} \frac{\lambda}{|x'|^3} (-x' \hat{x}) dx' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(a+L)}^a \frac{\lambda}{(x')^2} dx' \hat{x} \quad (9)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{x'} \right]_{(a+L)}^a \hat{x} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(a+L)} - \frac{1}{a} \right] \hat{x} \quad (10)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{a(a+L)} \hat{x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\lambda}{4a} \hat{x} \quad (11)$$

Per simmetria si avrà che il campo elettrostatico generato nell'origine dalla distribuzione sull'asse delle y positive è:

$$\underline{E}^y(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{(a+L)} \frac{\lambda}{|y'|^3} (-y' \hat{y}) dy' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(a+L)}^a \frac{\lambda}{(y')^2} dy' \hat{y} \quad (12)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{y'} \right]_{(a+L)}^a \hat{y} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(a+L)} - \frac{1}{a} \right] \hat{y} \quad (13)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{a(a+L)} \hat{y} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\lambda}{4a} \hat{y} \quad (14)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti il campo elettrico totale nell'origine è:

$$\underline{E}(0) = \underline{E}^x(0) + \underline{E}^y(0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\lambda}{4a} (\hat{x} + \hat{y}) \cong -67.4 \cdot 10^3 (\hat{x} + \hat{y}) \text{ V/m} \quad (15)$$

Problema 2 (8 punti) Un conduttore cilindrico idealmente infinito, di sezione circolare e raggio a , si trova all'interno di un guscio cilindrico, anch'esso infinito, di materiale dielettrico, di costante dielettrica relativa ϵ_r . Il guscio dielettrico, di sezione circolare, raggio interno a e raggio esterno $b = 2a$ è concentrico al conduttore cilindrico (vedi figura). Il conduttore interno è uniformemente carico con densità superficiale di carica elettrica σ [C/m^2]. Determinare:

- l'espressione analitica del vettore campo elettrico all'interno del guscio dielettrico ($a < r_c < b$) ed esternamente a questo ($r_c > b$).
- l'espressione delle densità superficiale di cariche di polarizzazione, funzione della sola variabile σ , sulla superficie esterna e su quella interna del guscio dielettrico, se $\epsilon_r = 4$.

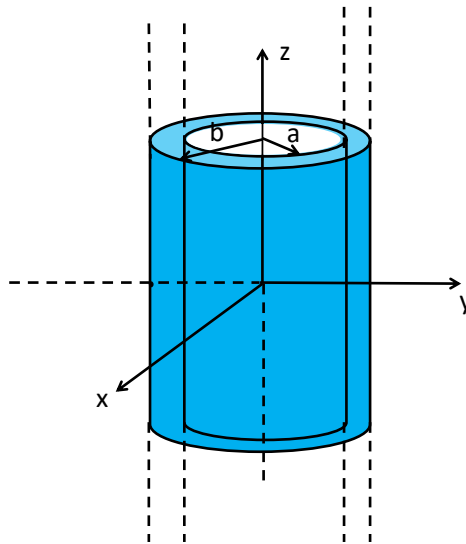


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

a)

Consideriamo una superficie cilindrica di raggio r_c con $a < r_c < b$ e di altezza h concentrica al conduttore. Per ragioni di simmetria cilindrica il vettore induzione elettrica sarà in ogni punto diretto normalmente alla superficie cilindrica ed avrà in tutti i punti la stessa intensità D_{r_c} . Applicando quindi il teorema di Gauss in presenza di dielettrici alla superficie cilindrica considerata si può scrivere:

$$D_{r_c} 2\pi r_c h = Q_f = \sigma 2\pi a h \quad (16)$$

da cui

$$D_{r_c} = \frac{\sigma a}{r_c} \quad (17)$$

Essendo all'interno del dielettrico $\underline{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}$ si ha

$$E_{r_c} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 \epsilon_r r_c} \quad (18)$$

e quindi

$$\underline{E} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 \epsilon_r r_c} \hat{r}_c \text{ [V/m]} \quad (19)$$

Considerando invece una superficie cilindrica di raggio r_c e altezza h esterna al guscio, ($r_c > b$) ed applicando il teorema di Gauss in presenza di dielettrici si ha, per le stesse ragioni precedenti:

$$D_{r_c}^0 2\pi r_c h = Q_f = \sigma 2\pi a h \quad (20)$$

da cui

$$\underline{E}^0 = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r_c} \hat{r}_c \text{ [V/m]} \quad (21)$$

b)

All'interno del dielettrico il vettore di polarizzazione è $\underline{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\underline{E}$ per cui

$$\underline{P} = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{\sigma a}{r_c} \hat{r}_c \quad [C/m^2] \quad (22)$$

La densità di carica di polarizzazione sulla superficie esterna è

$$\sigma_p^{ext} = \underline{P} \cdot \hat{n}|_{r_c=b} = \underline{P} \cdot \hat{r}_c|_{r_c=b} = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{\sigma a}{b} = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{\sigma}{2} = \frac{3}{8} \sigma \quad [C/m^2] \quad (23)$$

La densità di carica di polarizzazione sulla superficie interna è

$$\sigma_p^{int} = \underline{P} \cdot \hat{n}|_{r_c=a} = \underline{P} \cdot -\hat{r}_c|_{r_c=b} = -\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{\sigma a}{a} = -\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \sigma = -\frac{3}{4} \sigma \quad [C/m^2] \quad (24)$$

Problema 3 (8 punti) Una spira circolare di raggio $R = 10a$, giace sul piano $x - y$ di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, con centro nell'origine. La spira è percorsa da una corrente variabile $I_1(t)$, orientata come in figura, che nell'intervallo di tempo di $\Delta t = 0.001 \text{ sec}$ cresce linearmente da $I_{min} = 1 \text{ A}$ a $I_{max} = 10 \text{ A}$. Una seconda spira circolare, coassiale con la prima, di raggio a giace con il centro posto sull'asse z a distanza $d = 10\sqrt{3}a$ dall'origine ed è inclinata in modo tale che la normale al piano della spira formi un angolo di $\alpha = 45^\circ$ con l'asse z , come in figura. Nell'ipotesi che il campo di induzione magnetica prodotto dalla spira di raggio R sia costante su tutto il piano della spira di raggio a determinare:

- l'espressione analitica del coefficiente di mutua induzione tra le due spire, in funzione della sola variabile a ;
- l'intensità della corrente indotta nella spira di raggio a se $a = 2 \text{ cm}$ e la resistenza della spira è $R_s = 100 \Omega$;

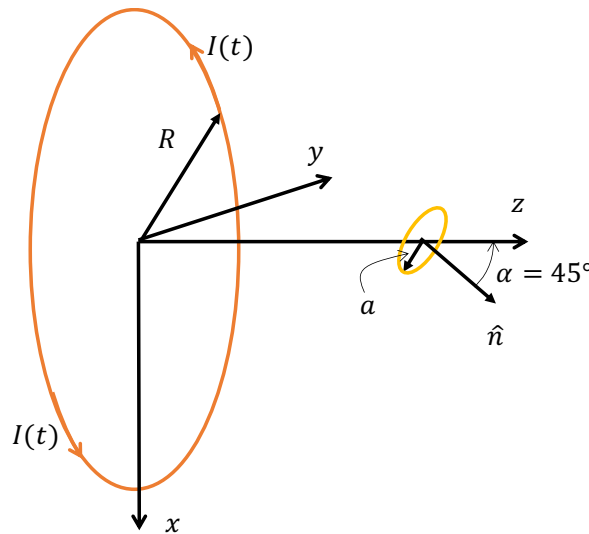


Figura 3: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

a)

Il campo di induzione magnetica generato dalla spira di raggio R sull'asse a distanza d è ricavabile dalla seconda legge di Laplace ed è dato da:

$$\underline{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_1(t) R^2}{(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} = \frac{\mu_0}{160} \frac{I_1(t)}{a} \hat{z} \quad (25)$$

Considerando il campo magnetico costante su tutto il piano della spira a distanza d , il flusso totale concatenato con la seconda spira è:

$$\Phi(B, I_1) = \underline{B}(z) \cdot \hat{n} S = \frac{\mu_0}{160} \frac{I_1(t)}{a} \hat{z} \cdot \hat{n} (\pi a^2) \quad (26)$$

$$= \frac{\mu_0}{160} I_1(t) \pi a \cos 45^\circ = \frac{\mu_0}{160\sqrt{2}} I_1(t) \pi a \quad (27)$$

Il coefficiente di mutua induzione è quindi:

$$M = \frac{\Phi(B, I_1)}{I_1(t)} = \frac{\mu_0 \pi a}{160\sqrt{2}} \quad (28)$$

b)

La forza elettromotrice indotta nella seconda spira è data da

$$\mathcal{E}_i = -M \frac{dI_1(t)}{dt} \quad (29)$$

Essendo

$$I_1(t) = \frac{(I_{max} - I_{min})}{\Delta t} t + I_{min} \quad (30)$$

si ha:

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = \frac{(I_{max} - I_{min})}{\Delta t} \quad (31)$$

per cui

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\mu_0}{\sqrt{2}} \frac{a\pi}{160} \frac{(I_{max} - I_{min})}{\Delta t} \cong -(3.49 \cdot 10^{-10})(9000) \cong -3.14 \cdot 10^{-6} \text{ V} \quad (32)$$

L'intensità della corrente nella spira di raggio a , durante l'intervallo di tempo considerato è

$$|I_s| = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R} \cong 3.14 \cdot 10^{-8} \text{ A} \quad (33)$$

Problema 4 (8 punti) Il circuito elettrico mostrato in figura è formato da un filo conduttore composto da tre tratti rettilinei (PQ, QM e MN) e da un arco di circonferenza di raggio R e centro nell'origine del sistema di riferimento che collega i punti N e P . Il tratto QM si trova ad una distanza h dall'origine del sistema di riferimento ed è parallelo all'asse x . I tratti MN e PQ si trovano sui due raggi dell'arco di circonferenza NP e sono inclinati fra loro di $\alpha = 90^\circ$. Il circuito è percorso da una corrente stazionaria I e si trova immerso in un campo magnetico uniforme di induzione $\underline{B}_0 = B_0 \hat{y}$.

- Calcolare l'espressione analitica delle forze magnetiche che agiscono sui 4 tratti e verificare che la risultante che agisce sul circuito chiuso è nulla.
- Determinare il momento meccanico che agisce sul circuito chiuso, nell'ipotesi che $h = R/2$ con $R = 4 \text{ cm}$, $B_0 = 1.167 \text{ T}$ e $I = 10 \text{ A}$;

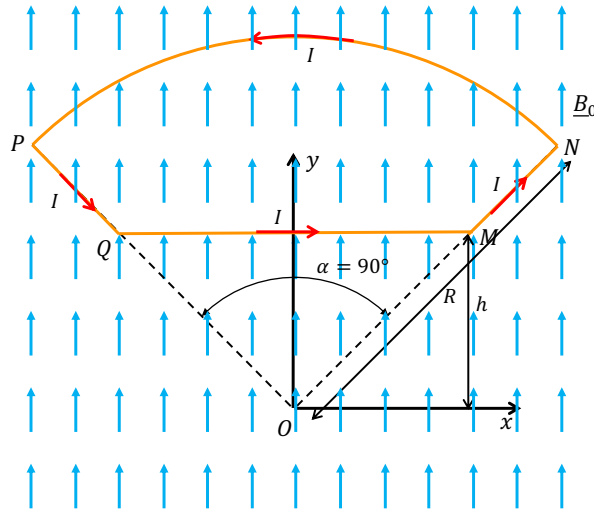


Figura 4: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 4

a)

La forza magnetica che agisce su un cammino aperto c percorso da corrente I immerso in un campo magnetico uniforme è

$$\underline{F} = I \underline{OS} \times \underline{B} \quad (34)$$

dove $\underline{OS}$ è il segmento orientato che unisce gli estremi del cammino c , orientato da O a S se la corrente percorre il cammino da O a S .

La forza magnetica che agisce sul cammino rettilineo MN , rappresentato dal vettore orientato $\underline{l}_{MN} = (R - h\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x} + \hat{y})$ è

$$\underline{F}_{MN} = I(R - h\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x} + \hat{y}) \times (B_0 \hat{y}) = I(R - h\sqrt{2})B_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{z} \quad (35)$$

$$= B_0 I \frac{R}{\sqrt{2}} \hat{z} - B_0 I h \hat{z} \quad (36)$$

La forza magnetica che agisce sul cammino rettilineo PQ , rappresentato dal vettore orientato $\underline{l}_{PQ} = (R - h\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x} - \hat{y})$ è

$$\underline{F}_{PQ} = I(R - h\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x} - \hat{y}) \times (B_0 \hat{y}) = I(R - h\sqrt{2})B_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{z} \quad (37)$$

$$= B_0 I \frac{R}{\sqrt{2}} \hat{z} - B_0 I h \hat{z} = \underline{F}_{MN} \quad (38)$$

La forza magnetica che agisce sul cammino curvilineo NP , il cui vettore orientato che unisce gli estremi è $\underline{l}_{NP} = -R\sqrt{2}\hat{x}$, è data da

$$\underline{F}_{NP} = IR\sqrt{2}(-\hat{x}) \times (B_0\hat{y}) = -B_0IR\sqrt{2}\hat{z} \quad (39)$$

La forza magnetica che agisce sul cammino curvilineo QM , il cui vettore orientato che unisce gli estremi è $\underline{l}_{QM} = 2h\hat{x}$, è data da

$$\underline{F}_{QM} = I2h\hat{x} \times (B_0\hat{y}) = B_0I2h\hat{z} \quad (40)$$

Sommando le forze sui 4 tratti:

$$B_0I2h\hat{z} - B_0IR\sqrt{2}\hat{z} + 2 \left[B_0I\frac{R}{\sqrt{2}}\hat{z} - B_0Ih\hat{z} \right] = 0 \quad (41)$$

b)

Il momento meccanico che agisce sul circuito chiuso è dato da $\underline{M} = \underline{m} \times \underline{B}$ dove $\underline{m} = IS\hat{n}$ è il momento magnetico, S è l'area racchiusa dal circuito e $\hat{n}$ la normale al piano del circuito che vede circolare la corrente in senso antiorario. L'area del circuito chiuso è

$$S = \frac{\pi R^2}{4} - h^2 = (\pi - 1)\frac{R^2}{4} \cong 8.56 \cdot 10^{-4} m^2 \quad (42)$$

Il momento magnetico è quindi:

$$\underline{m} = I(\pi - 1)\frac{R^2}{4}\hat{z} \cong 8.56 \cdot 10^{-3} A \cdot m^2 \quad (43)$$

e infine il momento meccanico è

$$\underline{M} = \underline{m} \times \underline{B} = I(\pi - 1)\frac{R^2}{4}\hat{z} \times (B_0\hat{y}) = -B_0I(\pi - 1)\frac{R^2}{4}\hat{x} \cong -0.01\hat{x} N \cdot m \quad (44)$$