

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2021-2022)

9 Febbraio 2022

$$(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m})$$

Problema 1 (8 punti) Due anelli circolari, concentrici, sono disposti simmetricamente a distanza d dall'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e parallelamente al piano $x - y$ (vedi figura 1). L'anello con centro $z_a = d$ di raggio $a = d$ è carico con una densità lineare uniforme di carica elettrica λ_a [C/m] mentre l'anello con centro $z_b = -d$ di raggio $b = 2d$ è carico con una densità lineare uniforme di carica elettrica λ_b [C/m]. Determinare la costante di proporzionalità tra le densità di carica λ_a e λ_b affinché nell'origine il potenziale elettrostatico totale sia nullo.

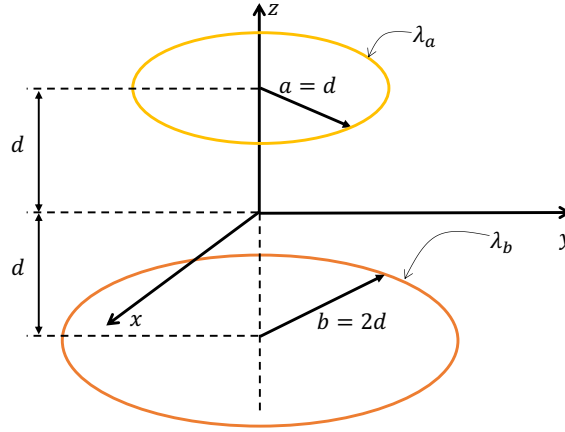


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

Consideriamo un anello generico posto sul piano $x - y$ di un sistema di riferimento cartesiano con centro nell'origine e consideriamo il sistema di riferimento cilindrico associato. Al generico elementino lineare di anello $dl' = R d\phi'$ con $R = a, b$ è associata la carica elementare $dq = \lambda_{a,b} R d\phi'$. Il potenziale elementare in un punto a distanza $\pm z$ sull'asse dell'anello dato da questa carica elementare è

$$dV(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_{a,b} R d\phi'}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (1)$$

Integrando su tutto l'anello

$$V_R(\pm z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_{a,b} 2\pi R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (2)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti il potenziale totale è la somma dei due potenziali per cui, essendo entrambi a distanza d dall'origine e considerando che $a = d$ e $b = 2d$:

$$V(0) = V_a(0) + V_b(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\lambda_a 2\pi d}{\sqrt{d^2 + d^2}} + \frac{\lambda_b 2\pi 2d}{\sqrt{4d^2 + d^2}} \right] \quad (3)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\lambda_a \sqrt{2}\pi + \frac{\lambda_b 4\pi}{\sqrt{5}} \right] \quad (4)$$

Imponendo la condizione $V(0) = 0$ si ha:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\lambda_a \sqrt{2}\pi + \frac{\lambda_b 4\pi}{\sqrt{5}} \right] = 0 \quad (5)$$

da cui:

$$\sqrt{5}\lambda_a + 2\sqrt{2}\lambda_b = 0 \quad (6)$$

ed infine

$$\lambda_a = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\lambda_b \quad (7)$$

Problema 2 (8 punti) Un condensatore cilindrico, ideale, in aria, a sezione circolare e di lunghezza L è costituito da un'armatura cilindrica esterna di raggio $b = 3a$ coassiale ad un'armatura interna cilindrica di raggio a . Il condensatore viene caricato fino a raggiungere una differenza di potenziale tra le due armature di ΔV_0 [V], e quindi isolato. Successivamente vengono introdotti due gusci cilindrici di materiale dielettrico, omogeneo, isotropo di costante dielettrica relativa ϵ_{r1} ed $\epsilon_{r2} = 2\epsilon_{r1}$ rispettivamente, che riempiono totalmente l'intercapedine tra le due armature ai due lati del condensatore per una lunghezza $d = L/3$ (vedi figura 2). Determinare l'espressione il rapporto σ_i/σ_f tra la densità superficiale di carica iniziale σ_i e la densità superficiale di carica finale σ_f localizzate sull'armatura esterna del condensatore *che si affacciano nella parte centrale in aria* di dimensione $L/3$.

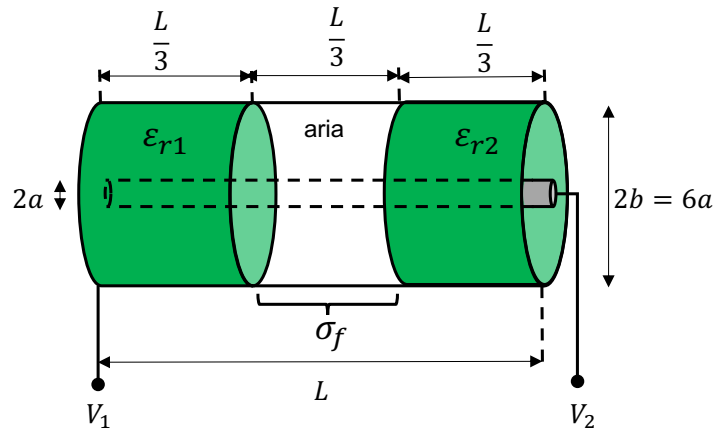


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

La capacità del condensatore cilindrico in aria è:

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(3)} \quad \text{F} \quad (8)$$

La carica iniziale Q_i sulle armature del condensatore piano può essere calcolata ricordando che $Q_i = C_0 \Delta V_0$ per cui

$$Q_i = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(3)} \Delta V_0 \quad \text{C} \quad (9)$$

La carica totale si distribuisce uniformemente sulle armature del condensatore per cui la densità di carica superficiale iniziale è sul conduttore esterno è ovunque

$$\sigma_i = \frac{Q_i}{2\pi 3aL} = \frac{\epsilon_0}{3a \ln(3)} \Delta V_0 \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (10)$$

Un volta introdotte le due parti di dielettrico la carica totale sulle armature rimane invariata perché il condensatore è isolato. La nuova differenza di potenziale δV_f che si stabilisce tra le armature dipende dalla capacità del condensatore dopo l'introduzione delle parti di dielettrico. In questo caso il condensatore può essere visto come il parallelo di tre condensatori cilindrici (vedi figura 3). Le capacità dei singoli condensatori sono

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}L}{3\ln(3)} \quad \text{F} \quad (11)$$

$$C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{3\ln(3)} \quad \text{F} \quad (12)$$

$$C_3 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}L}{3\ln(3)} \quad \text{F} \quad (13)$$

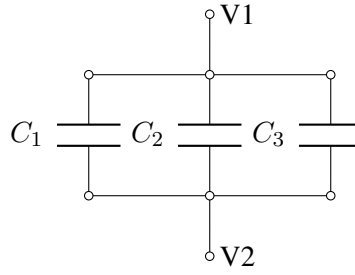


Figura 3: Circuito equivalente del problema 2

La capacità totale di tre condensatori in parallelo è la somma delle capacità per cui si ha:

$$C_T = C_1 + C_2 + C_3 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}L}{3\ln(3)} + \frac{2\pi\epsilon_0L}{3\ln(3)} + \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}L}{3\ln(3)} \quad (14)$$

$$= \frac{2\pi\epsilon_0L}{3\ln(3)} (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2} + 1) \quad (15)$$

$$= \frac{2\pi\epsilon_0L}{3\ln(3)} (3\epsilon_{r1} + 1) \quad \text{F} \quad (16)$$

La differenza di potenziale ΔV_f nella nuova configurazione è

$$\Delta V_f = \frac{Q_i}{C_T} = \frac{C_0}{C_T} \Delta V_0 \quad \text{V} \quad (17)$$

$$(18)$$

La quantità di carica che si localizza sulle armature del condensatore in aria C_2 è

$$Q_2 = C_2 \Delta V_f = \frac{C_2 C_0}{C_T} \Delta V_0 \quad \text{C} \quad (19)$$

La densità di carica superficiale σ_f su questa parte di armature è uniforme e può essere calcolata come:

$$\sigma_f = \frac{Q_2}{2\pi 3a \frac{L}{3}} = \frac{C_2 C_0}{2\pi a L C_T} \Delta V_0 \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (20)$$

Il rapporto tra la densità di carica iniziale e finale è

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_f} = \frac{C_T}{C_2 C_0} \frac{2\pi\epsilon_0 L}{3\ln(3)} = \frac{1}{3} \frac{C_T}{C_2} \quad (21)$$

Sostituendo le espressioni di C_2 , C_0 , e C_T si ottiene:

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_f} = \frac{1}{3} \frac{C_T}{C_2} = \frac{1}{3} \frac{2\pi\epsilon_0 L}{3\ln(3)} (3\epsilon_{r1} + 1) \frac{3\ln(3)}{2\pi\epsilon_0 L} \quad (22)$$

$$= \frac{(3\epsilon_{r1} + 1)}{3} \quad (23)$$

Problema 3 (8 punti) Una spira piana di filo conduttore è formata da due quarti di circonferenza di raggio a collegati da due tratti rettilinei di lunghezza $2a$ e $4a$ come in figura 4. La spira è percorsa da una corrente stazionaria I e si trova immersa in un campo magnetico uniforme di induzione $\underline{B} = 0.5\hat{y}$ [T]. Calcolare il valore della corrente I sapendo che il momento meccanico che agisce sulla spira nella posizione di figura è $\underline{M} = 3\hat{x}$ [N · m] e che la forza che agisce sul solo tratto rettilineo AB è $\underline{F}_{AB} = -8.2\hat{z}$ [N], determinare

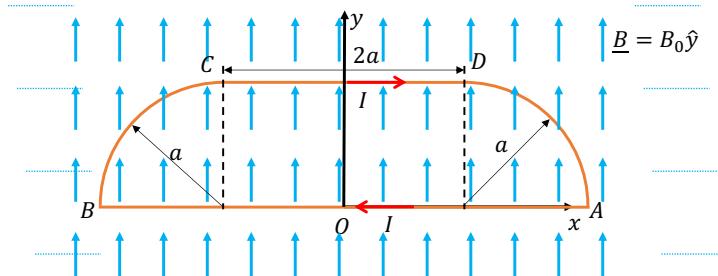


Figura 4: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

Per il tratto AB, dall'espressione della forza di Lorentz, possiamo scrivere:

$$\underline{F}_{AB} = I4a(-\hat{x}) \times B_0\hat{y} = -B_0I4a\hat{z} \quad \text{N} \quad (24)$$

Confrontando con i dati del problema si ha quindi

$$B_0I4a = 8.2 \quad (25)$$

da cui segue la relazione

$$Ia = 4.1 \quad (26)$$

Il momento magnetico della spira è $\underline{m} = IS\hat{n}$ dove $\hat{n}$ vede circolare la corrente in senso antiorario. Dato il verso di percorrenza della corrente si ha $\hat{n} = -\hat{z}$ e per l'area della spira:

$$S = 2a^2 + \frac{1}{2}\pi a^2 = a^2 \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{m}^2 \quad (27)$$

per cui il momento magnetico è

$$\underline{m} = -Ia^2 \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \hat{z} \quad \text{A} \cdot \text{m}^2 \quad (28)$$

Il momento meccanico che agisce sulla spira è dato da $\underline{M} = \underline{m} \times \underline{B}_0$ da cui

$$\underline{M} = \left[-Ia^2 \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \hat{z}\right] \times (B_0\hat{y}) = B_0Ia^2 \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \hat{x} \quad \text{N} \cdot \text{m} \quad (29)$$

Confrontando con i dati del problema si ha

$$B_0Ia^2 \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \quad (30)$$

Utilizzando la (26) si ottiene

$$a = \frac{3}{B_0Ia \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)} = 0.41 \quad \text{m} \quad (31)$$

Infine, utilizzando ancora la (26) si ottiene

$$I = \frac{4.1}{0.41} = 10 \quad \text{A} \quad (32)$$

Problema 4 (8 punti) Una bobina in aria, costituita da $N = 1000$ spire circolari compatte, di raggio $a = 3.3547$ [cm] e resistenza totale trascurabile è chiusa su una resistenza $R = 20$ [Ω] (vedi figura 5). La bobina è posta in una zona di spazio dove è presente un campo di induzione magnetica $\underline{B}(t)$ uniforme, perpendicolare alla sezione della bobina. Il campo $\underline{B}$ varia nel tempo aumentando linearmente da zero al valore $B_0 = 0.8$ [T] in un tempo Δt_1 [s], per poi tornare a zero, sempre linearmente, in un intervallo di tempo Δt_2 [s]. Trascurando i fenomeni di autoinduzione e sapendo che il lavoro totale speso in ciascuno degli intervalli di tempo è $W_1 = 0.04$ [J] e $W_2 = 0.1$ [J], rispettivamente, calcolare la durata dei due intervalli di tempo.

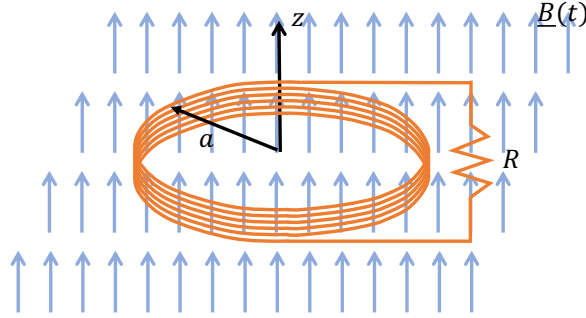


Figura 5: Geometria del problema 4

Soluzione del problema 4

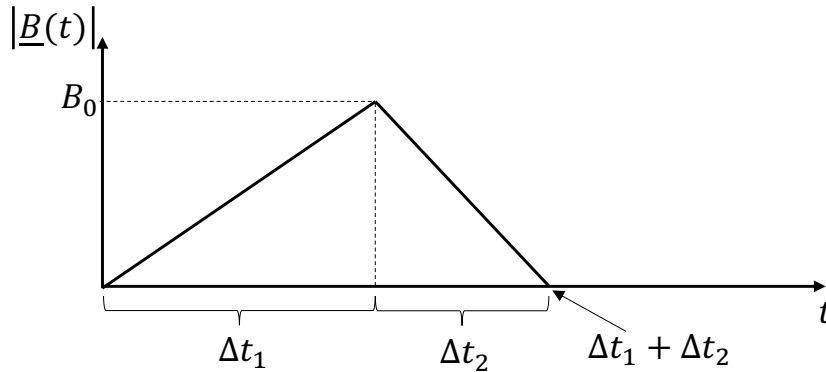


Figura 6: Andamento nel tempo dell'ampiezza del vettore induzione magnetica

Con riferimento alla figura 6, la variazione nel tempo del campo di induzione magnetica $\underline{B}(t)$ è descritta da:

$$\underline{B}(t) = \begin{cases} \frac{B_0}{\Delta t_1} t \hat{z} & 0 \leq t < \Delta t_1 \\ \left[-\frac{B_0}{\Delta t_2} t + \frac{B_0}{\Delta t_2} \Delta t_1 + B_0 \right] \hat{z} & \Delta t_1 \leq t < (\Delta t_1 + \Delta t_2) \end{cases} \quad (33)$$

Poiché il campo di induzione magnetica è uniforme e perpendicolare alla sezione di ogni spira, il flusso totale concatenato con la bobina nei due intervalli di tempo considerati è :

$$\Phi_1(t) = N B(t) \pi a^2 = N \pi a^2 \frac{B_0}{\Delta t_1} t \quad \text{Wb} \quad (34)$$

$$\Phi_2(t) = N B(t) \pi a^2 = N \pi a^2 \left[-\frac{B_0}{\Delta t_2} t + \frac{B_0}{\Delta t_2} \Delta t_1 + B_0 \right] \quad \text{Wb} \quad (35)$$

Dove t denota il tempo trascorso dall'inizio del fenomeno. Conseguentemente l'ampiezza della forza elettromotrice indotta nel circuito sarà:

$$|\mathcal{E}_1^i(t)| = \left| -\frac{d\Phi_1(t)}{dt} \right| = \frac{N\pi a^2 B_0}{\Delta t_1} \quad \text{V} \quad (36)$$

$$|\mathcal{E}_2^i(t)| = \left| -\frac{d\Phi_2(t)}{dt} \right| = \frac{N\pi a^2 B_0}{\Delta t_2} \quad \text{V} \quad (37)$$

La forza elettromotrice indotta è costante nel tempo in entrambi gli intervalli di tempo. L'ampiezza della corrente costante indotta nei due intervalli di tempo è

$$I_1^i = \frac{|\mathcal{E}_1^i|}{R} = \frac{N\pi a^2 B_0}{R\Delta t_1} \quad \text{A} \quad (38)$$

$$I_2^i = \frac{|\mathcal{E}_2^i|}{R} = \frac{N\pi a^2 B_0}{R\Delta t_2} \quad \text{A} \quad (39)$$

Il flusso aumenta nel tempo durante Δt_1 e diminuisce nel tempo durante Δt_2 per cui la corrente costante indotta nella spira dalla forza elettromotrice circolerà rispettivamente in senso *orario* e in senso *antiorario* rispetto all'asse $\hat{z}$ di figura.

Poiché la forza elettromotrice indotta è costante nel tempo, il lavoro speso $W_{1,2}$ nei due intervalli di tempo può essere calcolato come:

$$W_{1,2} = \Delta q_{1,2} W_{1,2} \quad \text{J} \quad (40)$$

dove $\Delta q_{1,2}$ è la quantità di carica totale che transita nella bobina durante l'intervallo di tempo $\Delta t_{1,2}$. Essendo $I = dq/dt$ si ottiene

$$\Delta q_1 = \int_0^{\Delta t_1} I_1^i dt = I_1^i \Delta t_1 = \frac{N\pi a^2 B_0}{R} \quad \text{C} \quad (41)$$

$$\Delta q_2 = \int_{\Delta t_1}^{\Delta t_1 + \Delta t_2} I_2^i dt = I_2^i \Delta t_2 = \frac{N\pi a^2 B_0}{R} \quad \text{C} \quad (42)$$

Si osservi che, come era lecito attendersi, la quantità di carica che transita nei due intervalli di tempo è la stessa. Il lavoro speso nei due intervalli di tempo è

$$W_1 = \Delta q_1 |\mathcal{E}_1^i(t)| = \frac{(N\pi a^2 B_0)^2}{R\Delta t_1} \quad \text{J} \quad (43)$$

$$W_2 = \Delta q_2 |\mathcal{E}_2^i(t)| = \frac{(N\pi a^2 B_0)^2}{R\Delta t_2} \quad \text{J} \quad (44)$$

$$(45)$$

Risolvendo rispetto agli intervalli di tempo si ottiene

$$\Delta t_1 = \frac{(N\pi a^2 B_0)^2}{RW_1} \quad \text{J} \quad (46)$$

$$\Delta t_2 = \frac{(N\pi a^2 B_0)^2}{RW_2} \quad \text{J} \quad (47)$$

$$(48)$$

Sostituendo i valori numerici

$$\Delta t_1 = 10 \quad \text{s} \quad (49)$$

$$\Delta t_2 = 4 \quad \text{s} \quad (50)$$