

# Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2021-2022)

24 Febbraio 2022

$$(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m})$$

**Problema 1** (8 punti) Sulla superficie esterna di un cilindro conduttore cavo infinito, a sezione circolare con raggio interno  $a = 1$  cm e raggio esterno  $b = 2a$  è presente una densità di carica uniforme  $\sigma = 10^{-6}$  [C/m<sup>2</sup>]. Il cilindro infinito è rivestito da un guscio concentrico di materiale dielettrico di costante dielettrica relativa  $\epsilon_r = 2$  e raggio esterno  $c = 3a$  (Fig 1). Sapendo che il potenziale elettrostatico nel punto  $B$  sulla superficie interna del conduttore cavo è  $V(B) = 3000$  V, si calcoli la distanza  $R_0 > c$  dall'asse del punto  $C$  in cui il potenziale elettrostatico è nullo,  $V(R_0) = 0$ .

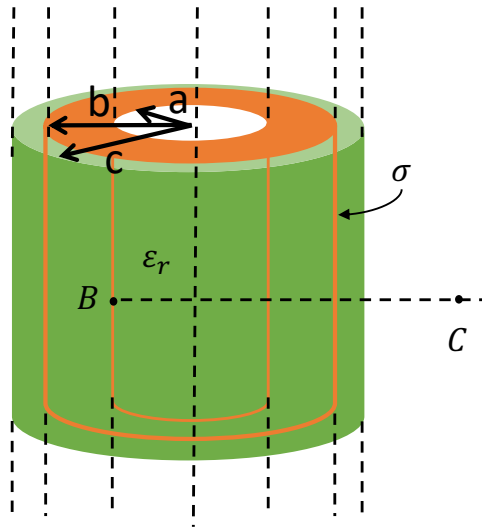


Figura 1: Geometria del problema 1

## Soluzione del problema 1

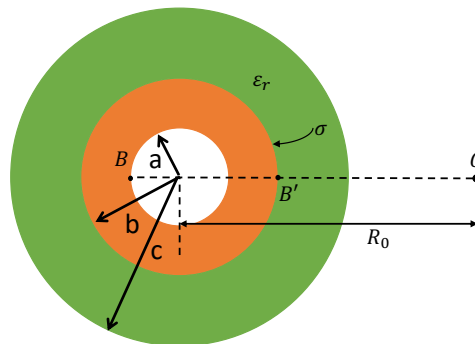


Figura 2: Geometria del problema 1

Si consideri un sistema di riferimento cilindrico  $(\rho, \phi, z)$  con asse  $z$  coincidente con l'asse del cilindro cavo. In figura 2 è mostrata la geometria del problema in sezione. La densità di carica elettrica superficiale uniforme si localizza sulla superficie esterna del conduttore ( $\rho = b$ ). All'equilibrio, il campo elettrostatico sia nella cavità che all'interno del conduttore è nullo. Essendo inoltre il conduttore una

regione equipotenziale, il potenziale in  $B$  sarà lo stesso del punto  $B'$ . Si tratta quindi di calcolare il campo elettrostatico nella regione di dielettrico ( $b < \rho < c$ ) e in aria ( $\rho > c$ ), e determinare la differenza di potenziale tra il punto  $C$  e il punto  $B'$  tramite integrazione su un cammino rettilineo.

- Campo elettrostatico nella regione in aria  $\rho > c$

Si consideri una superficie di Gauss cilindrica di altezza  $L$  e raggio  $\rho > c$ . Poiché la densità superficiale di carica è distribuita uniformemente il campo elettrico in tutti i punti della superficie laterale del cilindro ha solo la componente radiale  $\underline{E}(\rho) = E_0 \hat{\rho}$  e costante su tutta la superficie. Applicando il teorema di Gauss

$$E_0 2\pi \rho L = \frac{\sigma 2\pi b L}{\epsilon_0} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (1)$$

da cui

$$\underline{E}(\rho) = E_0(\rho) \hat{\rho} = \frac{\sigma b}{\epsilon_0 \rho} \hat{\rho} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (2)$$

- Campo elettrostatico nella regione di dielettrico  $b < \rho < c$

Si consideri anche per questo caso una superficie di Gauss cilindrica di altezza  $L$  e raggio  $\rho$  con  $b < \rho < c$ . La superficie si trova all'interno del dielettrico. Poiché la densità superficiale di carica è distribuita uniformemente il vettore induzione elettrica in tutti i punti della superficie laterale del cilindro ha solo la componente radiale  $\underline{D}(\rho) = D_\rho \hat{\rho}$  e costante su tutta la superficie. Applicando il teorema di Gauss e ricordando che nel dielettrico  $\underline{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}_d$  si ha

$$D_\rho 2\pi \rho L = \sigma 2\pi b L \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (3)$$

da cui

$$\underline{E}_d(\rho) = E_d(\rho) \hat{\rho} = \frac{\sigma b}{\epsilon_0 \epsilon_r \rho} \hat{\rho} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (4)$$

La differenza di potenziale si calcola integrando lungo una linea radiale da un punto a distanza generica  $\rho > c$  al punto  $B$  il campo elettrostatico determinato ai punti precedenti.

$$V_B - V(\rho) = - \int_{\rho}^b \underline{E}(\rho') \cdot d\rho' = \int_b^{\rho} E(\rho') d\rho' \quad (5)$$

$$= \int_b^c E_d(\rho') d\rho' + \int_c^{\rho} E(\rho') d\rho' \quad (6)$$

$$= \int_b^c \frac{\sigma b}{\epsilon_0 \epsilon_r \rho'} d\rho' + \int_c^{\rho} \frac{\sigma b}{\epsilon_0 \rho'} d\rho' \quad (7)$$

$$= \frac{\sigma b}{\epsilon_0 \epsilon_r} \left[ \epsilon_r \ln \left( \frac{\rho}{c} \right) + \ln \left( \frac{c}{b} \right) \right] \quad \text{V} \quad (8)$$

$$(9)$$

Si ottiene quindi che l'espressione del potenziale elettrostatico in un punto a distanza  $\rho > c$  è

$$V(\rho) = V_B - \frac{\sigma b}{\epsilon_0 \epsilon_r} \left[ \epsilon_r \ln \left( \frac{\rho}{c} \right) + \ln \left( \frac{c}{b} \right) \right] \quad (10)$$

$$= V_B - \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \left[ 2 \ln \left( \frac{\rho}{3a} \right) + \ln(1.5) \right] \quad \text{V} \quad (11)$$

$$(12)$$

Imponendo la condizione  $V(R_0) = 0$  si ha

$$V_B = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \left[ 2 \ln \left( \frac{R_0}{3a} \right) + \ln(1.5) \right] \quad (13)$$

(14)

Risolvendo rispetto a  $R_0$

$$\ln \left( \frac{R_0}{3a} \right) = \frac{\epsilon_0}{\sigma 2a} V_B - \frac{1}{2} \ln(1.5) \quad (15)$$

(16)

da cui

$$R_0 = 3a \exp \left[ \frac{\epsilon_0}{\sigma 2a} V_B - \frac{1}{2} \ln(1.5) \right] \quad \text{m} \quad (17)$$

(18)

(19)

Sostituendo i valori si ottiene  $R_0 = 9.24 \text{ cm}$ .

**Problema 2** (8 punti) Un condensatore piano ideale, in aria, con armature quadrate di lato  $a = 30$  cm e distanza  $d = 2$  cm è costruito in modo tale che lo spazio tra le armature possa essere riempito da alcol etilico ( $\epsilon_r = 25$ ) tramite un tubo posizionato sulla parete laterale dell'intercapedine. La differenza di potenziale tra le armature è mantenuta costante da un generatore di tensione al valore  $\Delta V_0 = 2000$  V. Calcolare il livello  $h$  che deve raggiungere l'alcol etilico affinché l'energia potenziale immagazzinata dal condensatore sia  $U = 153.24 \cdot 10^{-6}$  J.

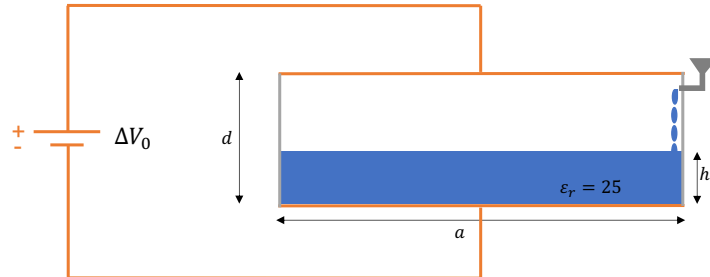


Figura 3: Geometria del problema 2

## Soluzione del problema 2

Il condensatore è equivalente alla serie di due condensatori di capacità :

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 a^2}{(d - h)} \quad \text{F} \quad (20)$$

per la parte in aria e

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r a^2}{h} \quad \text{F} \quad (21)$$

per la parte riempita di alcol etilico.

La capacità totale è quindi:

$$C_T = \frac{C_0 C_1}{(C_0 + C_1)} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r a^2}{h} \frac{\epsilon_0 a^2}{(d - h)} \frac{1}{\left[ \frac{\epsilon_0 \epsilon_r a^2}{h} + \frac{\epsilon_0 a^2}{(d - h)} \right]} \quad (22)$$

$$= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r a^2}{[\epsilon_r (d - h) + h]} \quad (23)$$

$$= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r a^2}{[\epsilon_r d + h(1 - \epsilon_r)]} \quad \text{F} \quad (24)$$

L'energia elettrostatica immagazzinata  $U(x)$  è data da:

$$U(h) = \frac{1}{2} C_T \Delta V_0^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r a^2}{[\epsilon_r d + h(1 - \epsilon_r)]} \Delta V_0^2 \quad \text{J} \quad (25)$$

da cui si ricava che

$$h = \frac{1}{(1 - \epsilon_r)} \left[ \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r a^2}{U(h)} \Delta V_0^2 - \epsilon_r d \right] \quad \text{J} \quad (26)$$

Sostituendo i valori si ottiene  $h = 1$  cm

**Problema 3** (8 punti) Nel vuoto, due conduttori cilindrici, molto lunghi, paralleli, a sezione circolare, entrambi di raggio esterno  $b = 2$  cm, posti a notevole distanza  $2d = 20b$  l'uno dall'altro sono percorsi dalle correnti stazionarie  $\underline{I}_1 = I_1 \hat{z}$  e  $\underline{I}_2 = -I_2 \hat{z}$ , rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano con l'origine nel punto mediano tra i due assi come in figura 4. Il conduttore A è cavo all'interno, con raggio della superficie interna della cavità  $a = b/2$ , essendo questa concentrica alla superficie esterna. Il conduttore B è a sezione piena. Le due correnti sono distribuite uniformemente sulle due sezioni dei conduttori. Sapendo che la circuitazione di  $\underline{B}$  lungo il cammino  $\Gamma_1$  indicato in figura 4 è  $\Gamma_1(\underline{B}) = 0$  e che l'induzione magnetica  $\underline{B}(0)$  misurata nell'origine è  $\underline{B}(0) = \frac{7}{3} \cdot 10^{-5} \hat{y}$  T, determinare l'intensità delle due correnti.

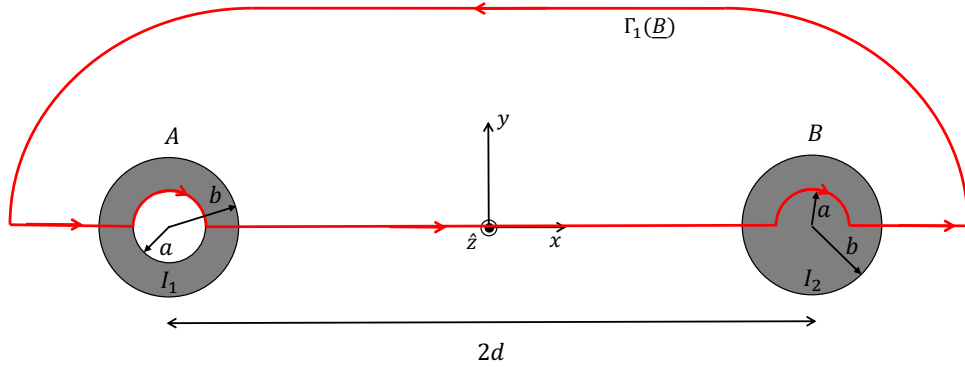


Figura 4: Geometria del problema 3

### Soluzione del problema 3

Poichè le due correnti sono distribuite uniformemente sulle sezioni dei due conduttori, le relazioni tra correnti e densità di corrente sono:

$$I_1 = J_1 \pi (b^2 - a^2) = J_1 \pi (4a^2 - a^2) = J_1 3\pi a^2 \quad (27)$$

$$I_2 = J_2 \pi b^2 = J_2 4\pi a^2 \quad (28)$$

Consideriamo la circuitazione lungo il cammino  $\Gamma$ . Tenendo conto del verso delle correnti e del verso di percorrenza della circuitazione, per il teorema della circuitazione di Ampere si ha:

$$\mu_0 \left[ J_1 \frac{\pi (b^2 - a^2)}{2} - J_2 \frac{\pi (b^2 - a^2)}{2} \right] = 0 \quad (29)$$

da cui si ottiene:

$$J_1 = J_2 \quad (30)$$

Utilizzando la (27) e la (28) dalla precedente si ottiene:

$$I_1 = \frac{3}{4} I_2 \quad (31)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti il vettore induzione magnetica nel punto mediano è la somma delle induzioni generate dalle singole correnti. Essendo le densità di corrente uniformi, per simmetria circolare il vettore induzione generato dalle due correnti nell'origine è pari a quello generato da due fili di corrente posti sull'asse e percorsi dalla stessa corrente, per cui,

$$\underline{B}_1(d) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \hat{y} \quad \text{T} \quad (32)$$

$$\underline{B}_2(d) = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \hat{y} \quad \text{T} \quad (33)$$

L'induzione magnetica a distanza  $d$  è quindi:

$$\underline{B}(d) = \underline{B}_1(d) + \underline{B}_2(d) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{(I_1 + I_2)}{d} \hat{y} \quad (34)$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{7}{3} \frac{I_1}{d} \hat{y} \quad \text{T} \quad (35)$$

L'intensità di  $I_1$  è

$$I_1 = \frac{6\pi d}{7\mu_0} |\underline{B}(0)| \quad \text{A} \quad (36)$$

Sostituendo i valori

$$|\underline{I}_1| = 10 \quad \text{A} \quad (37)$$

$$|\underline{I}_2| = \frac{3}{4} I_1 = \frac{40}{3} \cong 13.333 \quad \text{A} \quad (38)$$

**Problema 4** (8 punti) Un filo conduttore rettilineo infinito, coincidente con l'asse  $y$  di un sistema di riferimento cartesiano, è percorso da una corrente stazionaria  $\underline{I} = I_0(-\hat{y})$ . Una sbarretta rettilinea di materiale conduttore di lunghezza  $L = 0.5$  m si muove a velocità  $\underline{v} = v_0\hat{x}$  costante. Considerando come istante iniziale  $t = 0$  l'istante in cui la sbarretta è posizionata sull'asse  $y$  e sapendo che dopo  $\Delta t = 10$  secondi la differenza di potenziale  $\Delta V_{PQ}(t)$  tra i capi  $P$  e  $Q$  della sbarretta in è  $\Delta V_{PQ}(\Delta t) = 2 \cdot 10^{-6}$  V, determinare il valore della corrente  $I_0$ .

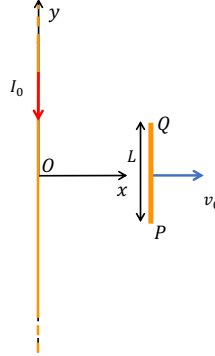


Figura 5: Geometria del problema 4

## Soluzione del problema 4

### Procedimento 1)

Data la posizione della sbarretta all'istante  $t = 0$ , indichiamo con  $x(t) = v_0 t$  la distanza della sbarretta di conduttore dal filo conduttore all'istante  $t$ . Il campo di induzione magnetica  $\underline{B}[x(t)]$  generato dal filo a distanza  $x(t)$  è dato da:

$$\underline{B}[x(t)] = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0}{x(t)} \hat{z} \quad \text{T} \quad (39)$$

Poiché il campo di induzione magnetica è uniforme su tutta la sbarretta ad ogni istante  $t$ , su ciascuno degli elettroni liberi della sbarretta in moto nel campo  $\underline{B}[x(t)]$  agisce la forza di Lorentz

$$\underline{F}_L(t) = (-e)(v_0\hat{x}) \times \underline{B}[x(t)] = (-e)v_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0}{x(t)} (-\hat{y}) \quad \text{N} \quad (40)$$

Esiste quindi un campo elettromotore uniforme, presente ovunque all'interno della sbarretta dato da:

$$\underline{E}_{em}(t) = \frac{\underline{F}_L(t)}{(-e)} = v_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0}{x(t)} (-\hat{y}) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0}{t} (\hat{y}) \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (41)$$

L'accumulo di cariche negative all'estremo  $Q$  e quello di cariche positive all'estremo  $P$  genererà un campo elettrostatico  $\underline{E}_S(t)$  all'interno del conduttore, opposto al campo elettromotore. All'equilibrio

$$\underline{E}_S(t) = -\underline{E}_{em}(t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0}{t} \hat{y} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (42)$$

La differenza di potenziale tra gli estremi  $P$  e  $Q$  all'equilibrio sarà dunque

$$\Delta V_{PQ}(t) = V_P(t) - V_Q(t) = - \int_Q^P \underline{E}_S(t) \cdot (-\hat{y}) dy = \int_P^Q \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0}{t} dy = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0}{t} L \quad \text{V} \quad (43)$$

$$I_0 = \frac{\Delta V_{PQ}(t) 2\pi t}{\mu_0 L} \quad \text{A} \quad (44)$$

Sostituendo i valori

$$I_0 = 200 \quad \text{A} \quad (45)$$

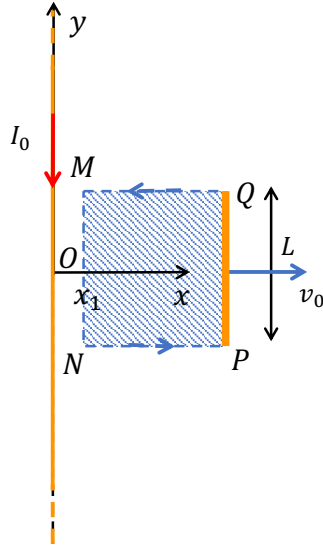


Figura 6: Circuitazione per il calcolo del flusso 4

### Procedimento 2)

Con riferimento alla figura 6 si consideri il cammino orientato  $PQMNP$ , dove il tratto di cammino  $PQ$  trasla insieme alla sbarretta a velocità costante  $\underline{v}$ . All'istante  $t$  la posizione di questo lato rispetto all'asse  $y$  è data da  $x(t) = v_0 t$ . Il tratto  $MN$  si trova ad una distanza  $x_1 > 0$  dall'asse  $y$  in modo da evitare la singolarità del campo di induzione magnetica nel calcolo del flusso, che renderebbe l'integrale di flusso divergente. Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, la circuitazione del campo elettrico lungo il cammino orientato  $PQMNP$  è equivalente alla variazione di flusso attraverso una superficie aperta che si appoggia al contorno, ad esempio quella tratteggiata di figura di normale  $\hat{n} = \hat{z}$ . Si ha quindi

$$\oint_{PQMNP} \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{c} = -\frac{d}{dt} \left[ \iint_S \underline{B}(\underline{r}) \cdot \hat{n} ds \right] \quad (46)$$

Per il flusso di  $\underline{B}(\underline{r})$  si ha:

$$\Phi[\underline{B}(\underline{r}), t] = \int_{x_1}^{x(t)} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0}{x'(t)} \hat{z} \cdot \hat{z} dx' dy' = L \int_{x_1}^{x(t)} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0}{x'(t)} dx' \quad (47)$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} L I_0 [\ln(x(t)) - \ln(x_1)] = \frac{\mu_0}{2\pi} L I_0 [\ln(v_0 t) - \ln(x_1)] \quad \text{Wb} \quad (48)$$

Derivando rispetto al tempo la precedente, dalla (46) si ottiene

$$\oint_{PQMNP} \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{c} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0}{t} L \quad (49)$$

La circuitazione al primo membro della (49) equivale a tutta la forza elettromotrice che si stabilisce lungo il cammino. Questa è calcolata su quattro tratti rettilinei. Sui tratti  $QM$ ,  $MN$  e  $NP$  il campo elettrico è nullo, per ipotesi. L'unico tratto su cui il campo elettrico è diverso da zero è il tratto  $PQ$  all'interno della sbarretta, dove si ha un accumulo di cariche negative in  $Q$  e positive in  $P$  dovuto al campo elettromotore (fem indotta) che tenderebbe a far circolare una corrente che si oppone all'aumento del flusso. Si avrà quindi che la ddp tra i punti  $PQ$  corrisponde alla forza elettromotrice che si sviluppa lungo la sbarretta per cui:

$$\Delta V_{PQ}(t) = \int_Q^P \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0}{t} L \quad \text{V} \quad (50)$$

che equivale all'espressione (43).