

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2021-2022)

12 Aprile 2022

$$(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m})$$

Problema 1 (8 punti) Due cariche puntiformi $Q_1 = +Q$ e $Q_2 = -Q$ sono poste sull'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale rispettivamente in $P_1 = (0, -2, 0)$ m e $P_2 = (0, 2, 0)$ m. Sul piano xz è presente una distribuzione superficiale di carica elettrica con densità uniforme σ [C/m²]. Sapendo che il lavoro fatto contro le forze del campo W_{AB} per portare una carica $Q_0 = 10^{-6}$ C dal punto $A = (0, 4, 0)$ al punto simmetrico dalla parte opposta $B = (0, -4, 0)$ m è $W_{AB} = 1700$ J, e che il campo elettrostatico totale nel punto A è nullo, calcolare il valore della densità di carica incognita σ .

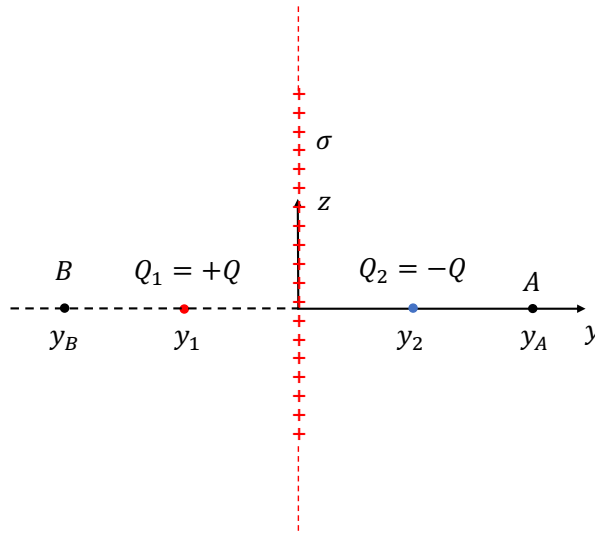


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

Figura 2: Geometria del problema 1

Il lavoro W_{AB} fatto contro le forze del campo per spostare la carica dal punto A al punto B è esprimibile come $W_{AB} = Q_0[V(B) - V(A)]$ dove $V(B)$ e $V(A)$ sono i potenziali generati dalle cariche e dalla distribuzione uniforme di carica nei punti B ed A , rispettivamente. Il potenziale V_σ generato dalla distribuzione superficiale di carica σ in un punto a distanza h dal piano è :

$$V_\sigma(h) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}h + V_0 \quad (1)$$

dove V_0 indica il potenziale in un punto di riferimento (costante). Per simmetria, questo potenziale assume lo stesso valore in entrambi i punti A e B per cui nel calcolo della differenza di potenziale può essere trascurato. Si ha quindi che il potenziale nel punto A dovuto alle sole cariche puntiformi vale

$$V(A) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|y_A - y_1|} - \frac{1}{|y_A - y_2|} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right] = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{3} \quad (2)$$

Analogamente il potenziale nel punto B dovuto alle sole cariche puntiformi vale

$$V(B) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|y_B - y_1|} - \frac{1}{|y_B - y_2|} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{3} \quad (3)$$

Il lavoro W_{AB} vale quindi:

$$W_{AB} = \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} = \frac{QQ_0}{6\pi\epsilon_0} \text{ J} \quad (4)$$

da cui si ricava

$$Q = \frac{W_{AB}6\pi\epsilon_0}{Q_0} \cong 0.2837 \text{ C} \quad (5)$$

Il campo elettrico totale $\underline{E}_t(A)$ nel punto A è la somma dei campi elettrici dovuti alle cariche puntiformi e a quello dovuto alla distribuzione superficiale uniforme per cui:

$$\underline{E}_t(A) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|y_A - y_1|^2} \hat{y} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|y_A - y_2|^2} \hat{y} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{y} \quad (6)$$

Uguagliando a zero il modulo si ricava l'ampiezza della distribuzione superficiale di carica :

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|y_A - y_1|^2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|y_A - y_2|^2} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\sigma}{2} = -\frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{|y_A - y_1|^2} - \frac{1}{|y_A - y_2|^2} \right] \quad (8)$$

$$= -\frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{36} - \frac{1}{4} \right] \quad (9)$$

$$= \frac{Q}{18\pi} \quad (10)$$

$$(11)$$

Si ottiene infine

$$\sigma = \frac{Q}{9\pi} = 0.01 \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (12)$$

Problema 2 (8 punti) Soppeso per errore nel testo.

Problema 3 (8 punti) Nel vuoto, un conduttore cilindrico di raggio $a = 2$ cm, idealmente infinito ed asse di simmetria coincidente con l'asse z , è percorso dalla corrente stazionaria $\underline{I}_1 = -I_1 \hat{z}$, distribuita uniformemente su tutta la sezione. Un secondo conduttore cilindrico cavo di raggio interno $b = 4a$ e raggio esterno $c = 6a$ idealmente infinito con asse z è posizionato concentricamente al primo ed è percorso dalla corrente stazionaria $\underline{I}_2 = I_2 \hat{z}$, distribuita uniformemente su tutta la sezione. Il campo di magnetico $\underline{H}(\rho)$ a distanza $\rho = 10a$ dal centro O vale $|\underline{H}(\rho)| = 13.13$ [A/m]. La circuitazione del campo magnetico $\underline{H}$ lungo il cammino Γ indicato in figura 3 costituito da una semicirconferenza di raggio $10a$, da una semicirconferenza di raggio $(c - b)/2$ e da due tratti rettilinei lungo l'asse y è $\Gamma(\underline{H}) = 0$. Determinare l'intensità delle due correnti.

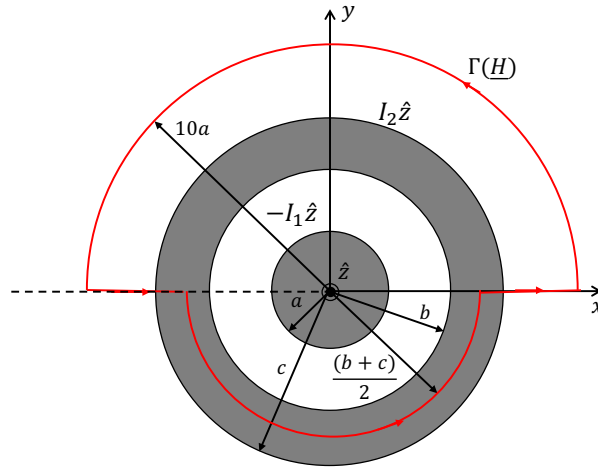


Figura 3: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

Poichè le due correnti sono distribuite uniformemente sulle sezioni dei due conduttori, le relazioni tra correnti e densità di corrente sono:

$$I_1 = J_1 \pi a^2 \quad (13)$$

$$I_2 = J_2 \pi (c^2 - b^2) = J_2 20 \pi a^2 \quad (14)$$

Consideriamo la circuitazione del campo magnetico lungo il cammino Γ . Sappiamo che per il teorema della circuitazione di Ampere la circuitazione del campo magnetico lungo il circuito chiuso orientato Γ che costituisce il bordo di una superficie aperta S dipende solo dalle correnti di conduzione, anche in presenza di materiali magnetizzati:

$$\oint_{\Gamma} \underline{H}(\underline{r}) \cdot d\underline{l} = \iint_S \underline{J}(\underline{r}) \cdot \hat{n} ds \quad (15)$$

Tenendo conto del verso delle correnti e del verso di percorrenza del percorso la precedente equazione diventa:

$$\left\{ J_2 \left[\frac{\pi(c^2 - b^2)}{2} + \pi \frac{(\frac{c+b}{2})^2 - b^2}{2} \right] - J_1 \pi a^2 \right\} = 0 \quad (16)$$

Sostituendo i valori di b e c si ottiene:

$$\frac{\pi(c^2 - b^2)}{2} = \frac{\pi(36a^2 - 16a^2)}{2} = \pi 10a^2 \quad (17)$$

$$\pi \frac{[(\frac{c+b}{2})^2 - b^2]}{2} = \pi \frac{(25a^2 - 16a^2)}{2} = \frac{\pi 9a^2}{2} \quad (18)$$

Utilizzando le precedenti l'equazione (19) diventa:

$$\left\{ J_2 \pi a^2 \left[10 + \frac{9}{2} \right] - J_1 \pi a^2 \right\} = \pi a^2 \left[\frac{29}{2} J_2 - J_1 \right] = 0 \quad (19)$$

Da questa si deduce che

$$J_1 = \frac{29}{2} J_2 \quad (20)$$

Utilizzando le espressioni (13) e (14) si deduce che

$$I_1 = \frac{29}{40} I_2 \quad (21)$$

Consideriamo adesso un cammino circolare di raggio $\rho = 8a$ percorso in senso antiorario. Data la simmetria del problema il campo magnetico $\underline{H}$ in tutti punti del cammino è esprimibile rispetto ad un sistema di riferimento cilindrico come

$$\underline{H}(\rho, \phi, z) = H_\phi(\rho) \hat{\phi} \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (22)$$

Utilizzando anche in questo caso il teorema della circuitazione di Ampere e tenendo conto del verso delle correnti si ha:

$$H_\phi(10a) 2\pi 10a = (I_2 - I_1) = \frac{11I_2}{40} \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (23)$$

L'intensità di I_2 è

$$I_2 = H_\phi(10a) \frac{800}{11} \pi a \text{ A} \quad (24)$$

Sostituendo i valori

$$\underline{I}_2 = 60 \hat{z} \text{ A} \quad (25)$$

$$\underline{I}_1 = -43.5 \hat{z} \text{ A} \quad (26)$$

Problema 4 (8 punti) Un solenoide infinito in aria di raggio a e un numero di spire per unità di lunghezza $N = 1286 \text{ spire/m}$ ha come asse del cilindro l'asse z di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (vedi figura 4). Il solenoide è percorso da una corrente stazionaria I_0 in senso antiorario rispetto all'asse z . All'interno del solenoide è disposta una piccola spira conduttrice quadrata, di lato $L = 3 \text{ cm}$, e resistenza elettrica totale $R = 5 \Omega$ inizialmente disposta in modo che la normale alla sua superficie coincida con l'asse z e il centro della spira coincida con l'origine del sistema di riferimento. Partendo da questa posizione iniziale la spira viene posta in rotazione con velocità angolare costante $\omega = 550 \text{ rad/sec}$ attorno all'asse x . Sapendo che la forza elettromotrice massima indotta nella spira è $|\mathcal{E}_i|_{\max} = 0.1 \text{ V}$, calcolare il valore dell'ampiezza della corrente I_0 e il valore della potenza media dissipata in un periodo sulla spira¹.

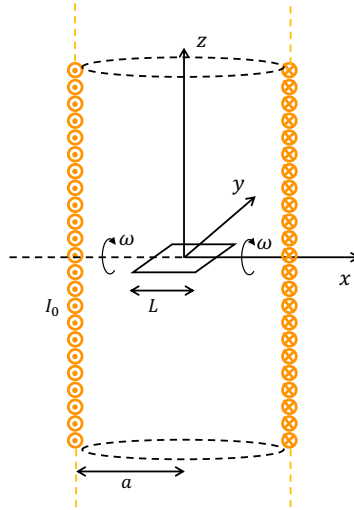


Figura 4: Geometria del problema 4

Soluzione del problema 4

L'induzione magnetica generata all'interno del solenoide infinito è

$$\underline{B} = \mu_0 N I_0 \hat{z} \quad \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \quad (27)$$

Essendo il campo di induzione magnetica costante all'interno del solenoide, il flusso dell'induzione magnetica attraverso la superficie della spira nella condizione iniziale è:

$$\Phi_0 = \underline{B} \cdot \hat{z} L^2 = \mu_0 N I_0 L^2 \quad \text{Wb} \quad (28)$$

Partendo da questa condizione iniziale la spira inizia a ruotare nel campo di induzione magnetica costante per cui il flusso dell'induzione magnetica attraverso la spira varia sinusoidalmente secondo la legge:

$$\Phi(t) = \mu_0 N I_0 L^2 \cos(\omega t) \quad \text{Wb} \quad (29)$$

dove ωt rappresenta l'angolo all'istante t fra $\underline{B}$ e la normale $\hat{n}$ al piano della spira. L'ampiezza $|\mathcal{E}_i(t)|$ della forza elettromotrice indotta nella spira è, per la legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$|\mathcal{E}_i(t)| = \left| -\frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = \mu_0 N I_0 L^2 \omega \sin(\omega t) \quad \text{V} \quad (30)$$

L'espressione del massimo valore di $|\mathcal{E}_i(t)|$ è dato da $|\mathcal{E}_i|_{\max} = \mu_0 N I_0 L^2 \omega$, da cui si ricava:

$$I_0 = \frac{0.1}{\mu_0 N L^2 \omega} \cong 125 \quad \text{A} \quad (31)$$

¹Data una funzione periodica di periodo T , $f(\alpha) = f(\alpha + T)$, il valor medio di $f(\alpha)$ sul periodo è $\frac{1}{T} \int_0^T f(\alpha) d\alpha$

La potenza istantanea dissipata sulla resistenza R è:

$$P(t) = \frac{|\mathcal{E}_i(t)|^2}{R} = \frac{\mu_0^2 N^2 I_0^2 L^4 \omega^2}{R} \sin^2(\omega t) = \frac{|\mathcal{E}_i|_{max}^2}{R} \sin^2(\omega t) \text{ W} \quad (32)$$

Poiché la funzione $f(\alpha) = \sin^2(\alpha)$ con $\alpha = \omega t$ è periodica di periodo $T = \pi$ il valor medio è:

$$F_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \quad (33)$$

Di conseguenza la potenza media dissipata sul periodo è:

$$P_m = \frac{|\mathcal{E}_i|_{max}^2}{2R} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ W} \quad (34)$$