

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2021-2022)

22 Aprile 2022

$$(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m})$$

Problema 1 (8 punti) Due cariche puntiformi $Q_1 = Q_2 = Q$ sono poste rispettivamente nei punti $P_1 = (-a, 0, a)$ [m] e $P_2 = (a, 0, a)$ [m] di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Sul piano xy è presente una distribuzione superficiale infinita di carica elettrica con densità uniforme σ [C/m²]. Sapendo che il potenziale totale V_t nell'origine è nullo e che nel punto $P = (0, 0, a)$ [m] vale $V_t(P) = -124.41$ [V] determinare il valore della densità di carica incognita σ , nell'ipotesi che $a = 1$ [m] e $Q = 30 \cdot 10^{-9}$ [C].

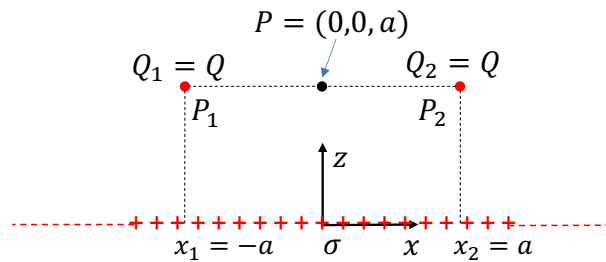


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

Figura 2: Geometria del problema 1

Il potenziale V_σ generato dalla distribuzione superficiale di carica σ in un punto di osservazione $\underline{r} = z\hat{z}$ dell'asse z è:

$$V_\sigma(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + V_0 \quad \text{V} \quad (1)$$

dove V_0 indica il potenziale in un punto di riferimento (essendo la distribuzione infinita, il potenziale è noto a meno di una costante). Il potenziale dovuto alle due cariche puntiformi in un punto di osservazione $\underline{r} = z\hat{z}$ dell'asse z è dato da:

$$V_q(\underline{r}) = \frac{k_e Q}{|\underline{r} - \underline{r}'_1|} + \frac{k_e Q}{|\underline{r} - \underline{r}'_2|} \quad (2)$$

$$= \frac{k_e 2Q}{\sqrt{a^2 + (z - a)^2}} \quad \text{V} \quad (3)$$

dove $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$, $\underline{r}'_1 = -a\hat{x} + a\hat{z}$ e $\underline{r}'_2 = a\hat{x} + a\hat{z}$.

Il potenziale totale per $z > 0$ è quindi:

$$V_t(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + V_0 + \frac{k_e 2Q}{\sqrt{a^2 + (z - a)^2}} \quad \text{V} \quad (4)$$

Imponendo la condizione $V_t(0) = 0$ si ottiene:

$$V_0 = -\frac{k_e 2Q}{\sqrt{2}a} = -\frac{k_e \sqrt{2}Q}{a} \quad \text{V} \quad (5)$$

L'espressione del potenziale totale assume quindi la seguente forma:

$$V_t(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z - \frac{k_e\sqrt{2}Q}{a} + \frac{k_e2Q}{\sqrt{a^2 + (z-a)^2}} \quad \text{V} \quad (6)$$

Nel punto di osservazione $\underline{r} = a\hat{z}$ dell'asse z si ha:

$$V_t(a) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}a + \frac{k_eQ}{a}[2 - \sqrt{2}] \quad \text{V} \quad (7)$$

Poiché il potenziale $V_t(a)$ è noto, possiamo ricavare dalla precedente la distribuzione superficiale σ in funzione di Q e $V_t(a)$:

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi a^2}[2 - \sqrt{2}] - \frac{2\epsilon_0 V_t(a)}{a} \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (8)$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\sigma \cong 5 \cdot 10^{-9} \cong 5 \quad \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2} \quad (9)$$

Problema 2 (8 punti) Si consideri il circuito di figura 3, dove $C_1 = C_3 = 3C_2$ e $C_4 = 2C_2$ e $C_2 = 100$ pF, sono inizialmente scarichi e gli interruttori aperti. Dapprima, chiudendo l'interruttore S_1 , si caricano C_1 e C_2 applicando una differenza di potenziale $\Delta V = 20$ V. Poi S_1 viene aperto e il condensatore carico C_2 viene collegato a restanti condensatori chiudendo l'interruttore S_2 . Calcolare le quantità di carica che si deposita sulle armature del condensatore C_2 , C_3 e C_4 alla fine del processo.

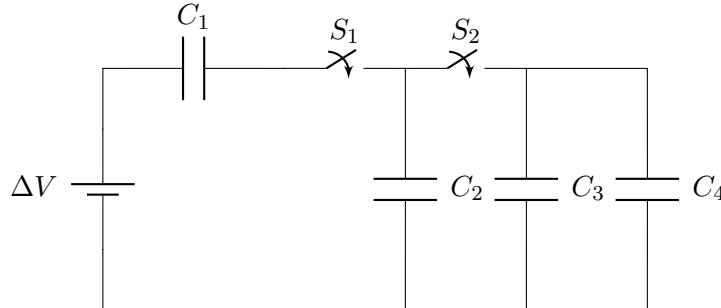


Figura 3: Circuito equivalente del problema 2

Soluzione del problema 2

Con l'interruttore S_1 chiuso e l'interruttore S_2 aperto il generatore carica i due condensatori C_1 e C_2 in serie. La capacità totale della serie è:

$$C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{3}{4} C_2 = 75 \text{ pF} \quad (10)$$

La quantità di carica che si deposita sulle armature di C_1 e C_2 è

$$Q = \frac{3}{4} C_2 \Delta V = 1.5 \cdot 10^{-9} \text{ C} \quad (11)$$

Successivamente l'interruttore S_1 viene aperto e l'interruttore S_2 chiuso. All'equilibrio, ai capi del parallelo tra C_2 , C_3 e C_4 si ha la stessa differenza di potenziale ΔV_p e la quantità di carica presente inizialmente sulle armature di C_2 si ridistribuisce anche sulle armature di C_3 e C_4 . Se indichiamo con Q_2 , Q_3 e Q_4 le cariche dei condensatori in parallelo si ha:

$$Q = (Q_2 + Q_3 + Q_4) = 1.5 \cdot 10^{-9} \text{ C} \quad (12)$$

La capacità totale del parallelo di condensatori è:

$$C_p = C_2 + C_3 + C_4 = 6C_2 = 600 \text{ pF} \quad (13)$$

La carica totale rimane invariata dopo la chiusura di S_2 perché il sistema è isolato. Si può quindi determinare differenza di potenziale ΔV_p nota la carica Q iniziale :

$$\Delta V_p = \frac{Q}{C_p} = \frac{3}{4} C_2 \Delta V \frac{1}{6C_2} = \frac{\Delta V}{8} = 2.5 \text{ V} \quad (14)$$

Nota la differenza di potenziale ai capi dei condensatori C_4 , la cariche risulteranno

$$Q_2 = C_2 \Delta V_p = C_2 \frac{\Delta V}{8} = 0.25 \cdot 10^{-9} \text{ C} \quad (15)$$

$$Q_3 = C_3 \Delta V_p = 3C_2 \frac{\Delta V}{8} = 0.75 \cdot 10^{-9} \text{ C} \quad (16)$$

$$Q_4 = C_4 \Delta V_p = 2C_2 \frac{\Delta V}{8} = 0.5 \cdot 10^{-9} \text{ C} \quad (17)$$

$$(18)$$

Problema 3 (8 punti) Un circuito percorso da corrente stazionaria I è costituito da quattro tratti rettilinei semi-infiniti disposti simmetricamente rispetto all'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale come mostrato in figura 6. I due punti sull'asse x dove i due tratti di conduttore formano un angolo retto sono rispettivamente $P_1 = (-a, 0, 0)$ e $P_2 = (a, 0, 0)$. Una seconda piccola spira circolare di filo conduttore di raggio $b \ll a$, è posizionata con il centro nell'origine e giace sul piano $x - y$. Ipotizzando che il vettore induzione magnetica calcolato nell'origine sia costante su tutto il piano della spira e sapendo che il flusso totale attraverso la spira è $\Phi(\underline{B}) = 1.2 \cdot 10^{-6}$ [Wb], calcolare il valore della corrente I . Si consideri $a = 40$ [cm] e $b = 4$ [cm]

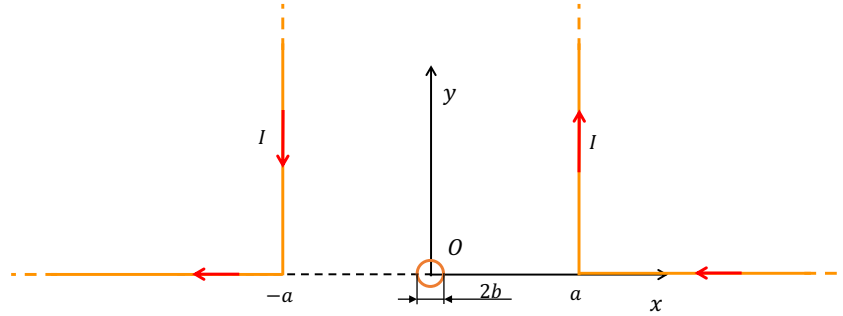


Figura 4: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3 ¹

Il vettore induzione magnetica generato nell'origine del sistema di riferimento può essere calcolato utilizzando la prima formula di Laplace, ed integrando lungo il cammino percorso dalla corrente I :

$$d\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\underline{l}(\underline{r}') \times (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \quad (19)$$

I due tratti rettilinei semi-infiniti coincidenti con l'asse x non contribuiscono al campo di induzione magnetica nell'origine, per cui si considerano solo i due tratti rettilinei paralleli all'asse y . Indichiamo con 1 il tratto rettilineo coincidente con la retta $y = a$ e con 2 il tratto rettilineo coincidente con la retta $y = -a$. Con riferimento alla figura 5 consideriamo il contributo elementare del campo di induzione magnetica nell'origine dovuto ad un elementino di corrente ad altezza y' sul tratto 1. Essendo $\underline{r} = 0$

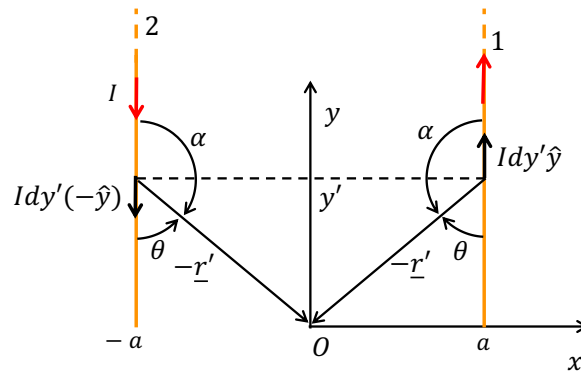


Figura 5: Geometria per il calcolo dei tratti rettilinei

$\underline{r}' = a\hat{x} + y'\hat{y}$ il contributo elementare è

$$d\underline{B}_1(0, 0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idy'y\hat{y} \times (-\underline{r}')}{|\underline{r}'|^3} \quad (20)$$

¹Vedi anche soluzione del problema 4 del compito scritto del 15/6/2021

Introducendo la variabile angolare α , angolo tra $\hat{y}$ e $(-\underline{r}')$, si ha:

$$\hat{y} \times (-\underline{r}') = a\hat{z} \quad (21)$$

$$\sin \theta = \sin \pi - \alpha = \sin \alpha \quad (22)$$

$$|(-\underline{r}')| = \frac{a}{\sin \theta} = \frac{a}{\sin \alpha} \quad (23)$$

$$y' = \frac{a}{\tan \theta} = -\frac{a}{\tan \alpha} \quad (24)$$

$$dy' = \frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha \quad (25)$$

$$(26)$$

Sostituendo:

$$dB_1(0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left(\frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha \right) \frac{a\hat{z} \sin^3 \alpha}{a^3} \quad (27)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \sin \alpha d\alpha \hat{z} \quad (28)$$

$$(29)$$

Integrando da $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ad $\alpha = \pi$ si ottiene

$$\underline{B}_1(0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \alpha d\alpha \hat{z} \quad (30)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} [-\cos \alpha]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \hat{z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \hat{z} \quad (31)$$

Applicando lo stesso procedimento al tratto 2 si ottiene lo stesso contributo diretto nello stesso senso, uscente dal foglio.

$$\underline{B}_2(0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \hat{z} \quad (32)$$

Sommando i due contributi si ottiene:

$$\underline{B}(0,0) = \underline{B}_1(0,0) + \underline{B}_2(0,0) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a} \hat{z} \quad \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \quad (33)$$

Poiché possiamo considerare il campo di induzione magnetica uniforme su tutto il piano della spira, il flusso è dato da:

$$\Phi(\underline{B}) = \underline{B} \cdot \hat{z} \pi b^2 = \frac{\mu_0 I b^2}{2a} \quad (34)$$

da cui si ottiene

$$I = \frac{2a\Phi(\underline{B})}{\mu_0 b^2} \quad (35)$$

Sostituendo i valori si ottiene $I = 477.46 \text{ A}$.

Problema 4 (8 punti) Una spira circolare di raggio $b = 12a$, giace sul piano $x - y$ di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, con centro nell'origine. La spira è percorsa da una corrente alternata $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$, orientata come in figura, con $I_0 = 300[\text{A}]$ e $\omega = 2\pi 10^4 [\text{rad/sec}]$. Una seconda spira circolare di filo conduttore, coassiale con la prima, ha raggio $a \ll b$, giace con il centro nell'origine ed è inclinata in modo tale che la normale al piano della spira formi un angolo di $\alpha = 60^\circ$ con l'asse z , come in figura. La resistenza totale della piccola spira è $R = 10 [\Omega]$. Si ipotizzi inoltre che il campo di induzione magnetica prodotto dalla spira di raggio b nell'origine sia costante su tutto il piano della spira di raggio a . Sapendo che la massima corrente indotta nella spira più piccola è $I_i^{max} = 1.55 [\text{mA}]$ si determinino i raggi a e b delle due spire.

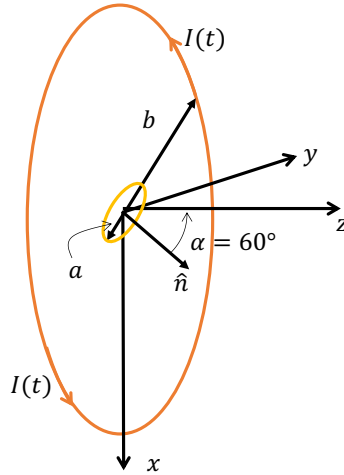


Figura 6: Geometria del problema 4

Soluzione del problema 3

a)

Il campo di induzione magnetica generato dalla spira di raggio b nell'origine è ricavabile dalla seconda legge di Laplace ed è dato da:

$$\underline{B}(0, 0, 0) = \frac{\mu_0}{2} \frac{I(t)}{b} \hat{z} \quad (36)$$

Considerando il campo magnetico costante su tutto il piano della spira di raggio a , il flusso totale concatenato è:

$$\Phi(B, I) = \underline{B}(0, 0, 0) \cdot \hat{n} S = \frac{\mu_0}{2} \frac{I(t)}{b} \hat{z} \cdot \hat{n} (\pi a^2) \quad (37)$$

$$= \frac{\mu_0}{24} I(t) \pi a \cos 60^\circ = \frac{\mu_0}{48} \pi a I_0 \cos(\omega t) \quad (38)$$

L'ampiezza della forza elettromotrice indotta nella seconda spira è data da

$$|\mathcal{E}_i| = \left| -\frac{dI_1(t)}{dt} \right| = \frac{\mu_0}{48} \pi a I_0 \omega \sin(\omega t) \quad (39)$$

L'ampiezza della corrente indotta è:

$$|I_i| = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R} = \frac{\mu_0}{48R} \pi a I_0 \omega \sin(\omega t) \quad (40)$$

Il massimo valore della corrente indotta è quindi:

$$|I_i|_{max} = \frac{\mu_0}{48R} \pi a I_0 \omega \quad (41)$$

Dalla precedente possiamo ricavare il raggio della piccola spira

$$a = \frac{48R|I_i|_{max}}{\mu_0\pi I_0\omega} \quad (42)$$

Sostituendo i valori si ottiene $a = 1$ cm e $b = 12$ cm.