

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2021-2022)

27 Giugno 2022

$$(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m})$$

Problema 1 (8 punti) Si consideri una sfera conduttrice di raggio esterno $R_a = 2$ cm su cui è presente una carica Q . La sfera conduttrice è rivestita esternamente da due gusci costituiti da materiale dielettrico, lineare, omogeneo, isotropo. Il guscio più interno è caratterizzato da una costante dielettrica relativa $\epsilon_r^a = 2$ e dai raggi R_a interno ed $R_b = 2R_a$ esterno. Il guscio più esterno è caratterizzato da una costante dielettrica relativa $\epsilon_r^b = 4$ e dai raggi R_b interno ed $R_c = 3R_a$ esterno. Sapendo che il potenziale a cui si trova la sfera conduttrice è $V(R_a) = 6180$ V, calcolare il valore della carica Q presente su di essa.

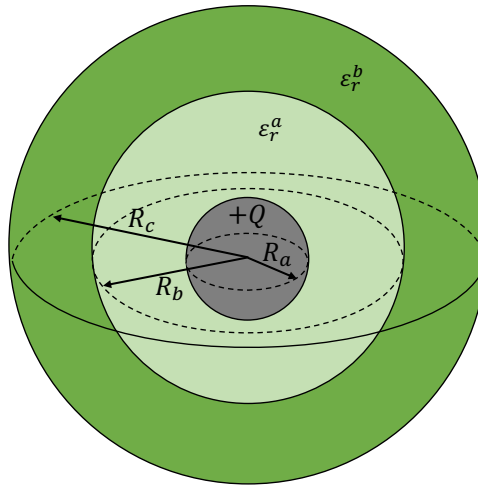


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 2

a) La sfera conduttrice è una regione equipotenziale per cui il potenziale può essere calcolato su un punto qualsiasi posto sulla superficie del conduttore stesso. Il calcolo del potenziale richiede anzitutto la determinazione del campo elettrostatico presente esternamente alla sfera, sia nelle regioni dielettriche che in aria.

Data la simmetria sferica del problema, è possibile determinare l'espressione della componente radiale D_r del vettore induzione elettrica all'interno delle due regioni di dielettrico utilizzando il teorema di Gauss in presenza di dielettrici. Considerando una superficie sferica di raggio $R_a < r < R_b$ si ha:

$$D_r^a 4\pi r^2 = Q \quad (1)$$

Il vettore induzione elettrica $\underline{D}^a(r)$ all'interno del primo guscio dielettrico è quindi:

$$\underline{D}^a(r) = D_r^a \hat{r} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad (2)$$

essendo $\hat{r}$ un versore diretto radialmente. Per un dielettrico omogeneo, isotropo, lineare si ha in tutti i punti interni al dielettrico $\underline{D}^a(r) = \epsilon_0 \epsilon_r^a \underline{E}^a(r)$. Quindi il campo elettrico all'interno del primo guscio dielettrico risulta essere:

$$\underline{E}^a(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r^a r^2} \hat{r} \quad (3)$$

Procedendo in modo analogo il campo elettrico all'interno del secondo guscio dielettrico risulta essere:

$$\underline{E}_d^b(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r^b r^2} \hat{r} \quad \frac{V}{m} \quad (4)$$

Per quanto riguarda il campo elettrico esterno alla guaina dielettrica, sempre sfruttando la simmetria sferica del problema ed applicando il teorema di Gauss ad una superficie sferica di raggio $r > R_c$ si ottiene facilmente:

$$\underline{E}_0(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \frac{V}{m} \quad (5)$$

Il potenziale $V(R_a)$ a cui si trova il conduttore si calcola integrando il lavoro elementare $-\underline{E}(r) \cdot d\underline{l}$ che si compie contro le forze del campo per spostare una carica positiva unitaria di un tratto $d\underline{l}$, lungo un cammino rettilineo radiale che si estende dall'infinito fino alla superficie esterna del conduttore:

$$V(R_a) = \int_{R_a}^{R_b} \underline{E}_d^a(r) \cdot \hat{r} dr + \int_{R_b}^{R_c} \underline{E}_d^b(r) \cdot \hat{r} dr + \int_{R_c}^{\infty} \underline{E}_0(r) \cdot \hat{r} dr \quad (6)$$

$$= \int_{R_a}^{R_b} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r^a r^2} dr + \int_{R_b}^{R_c} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r^b r^2} dr + \int_{R_c}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \quad (7)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r^a} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_a}^{R_b} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r^b} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_b}^{R_c} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_c}^{\infty} \quad (8)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r^a} \left[\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r^b} \left[\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_c} \right] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_c} \quad (9)$$

Sostituendo i valori noti:

$$V(R_a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{24} + \frac{1}{3} \right\} \quad (10)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a} \frac{5}{8} \quad (11)$$

da cui

$$Q = \frac{32\pi\epsilon_0 R_a}{5} V(R_a) \cong 22 \cdot 10^{-9} \text{ C} \quad (12)$$

Problema 2 (8 punti) Si consideri il circuito di figura 2, dove $R_1 = R_3 = R$, $R_2 = 2R$ e $C_2 = 3C_1$. La condizione di equilibrio iniziale si realizza a regime con l'interruttore in posizione A. All'istante $t = 0$ l'interruttore viene commutato nella posizione B con il condensatore C_2 scarico e, dopo un certo tempo (idealmente infinito) si realizza una nuova situazione di regime. Ricavare l'espressione della corrispondente variazione di carica ΔQ_1 sul condensatore C_1 in funzione di ΔV e C_1 , nel passare dalla condizione di equilibrio iniziale a quella finale.

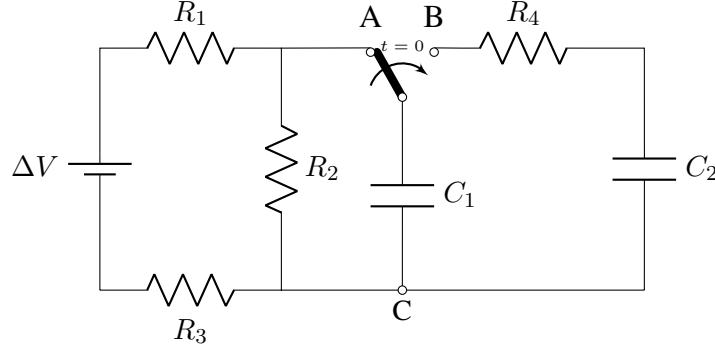


Figura 2: Circuito equivalente del problema 2

Soluzione del problema 2

Con l'interruttore in posizione A la differenza di potenziale ai capi del condensatore C_1 a regime è equivalente alla caduta di potenziale ai capi della resistenza R_2 . La corrente I che circola a regime nelle tre resistenze è

$$I = \frac{\Delta V}{R_1 + R_2 + R_3} \quad \text{V} \quad (13)$$

e quindi la differenza di potenziale è

$$\Delta V_{AC} = IR_2 = \frac{\Delta V R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{\Delta V}{2} \quad \text{V} \quad (14)$$

La quantità di carica che presente sulle armature di C_1 prima della commutazione dell'interruttore è

$$Q_1^0 = C_1 \Delta V_{AC} = C_1 \frac{\Delta V}{2} \quad \text{C} \quad (15)$$

Al tempo $t = 0$ l'interruttore viene commutato nella posizione B. All'equilibrio, ai capi del parallelo tra C_1 , C_2 si ha la stessa differenza di potenziale ΔV_{BC} . Inoltre, per la legge di conservazione della carica, se indichiamo con Q_1^∞ e Q_2^∞ le cariche dei due condensatori all'equilibrio finale, si ha

$$Q_1^0 = Q_1^\infty + Q_2^\infty \quad \text{C} \quad (16)$$

La quantità di carica presente inizialmente sulle armature di C_1 si ridistribuisce anche sulle armature di C_2 . Indicando con $C_p = C_1 + C_2$ la capacità totale del parallelo di condensatori, la differenza di potenziale finale ΔV_{BC} è:

$$\Delta V_{BC} = \frac{Q_1^0}{C_p} = \frac{C_1}{(C_1 + C_2)} \frac{\Delta V}{2} \quad (17)$$

$$= \frac{\Delta V}{8} \quad \text{V} \quad (18)$$

Nota la differenza di potenziale ai capi dei condensatori C_1 e C_3 , la cariche risulteranno

$$Q_1^\infty = C_1 \Delta V_{BC} = C_1 \frac{\Delta V}{8} \quad \text{C} \quad (19)$$

$$Q_2^\infty = C_2 \Delta V_{BC} = 3C_1 \frac{\Delta V}{8} \quad \text{C} \quad (20)$$

$$(21)$$

La differenza di carica su C_1 è pari alla carica presente su C_2 in condizioni di equilibrio finale per cui:

$$\Delta Q_1 = \frac{3}{8} C_1 \Delta V \quad \text{C} \quad (22)$$

Problema 3 (8 punti) Un solenoide di lunghezza l e raggio a , molto lungo rispetto al suo diametro $l \gg a$ (solenoido infinitamente lungo) e compatto con $n = 1000$ spire/m è percorso da una corrente stazionaria $I = 0.68$ A diretta come in figura 3. Al suo interno è inserita parallelamente all'asse una barra a sezione circolare di materiale ferromagnetico isotropo, lineare ed omogeneo di permeabilità $\mu_r = 148$ e raggio $b < a$. Calcolare le componenti del vettore di magnetizzazione all'interno della barra e determinare successivamente le componenti della densità superficiale $J_{ms}(\underline{r})$ di corrente di magnetizzazione sulla superficie laterale della barra. (Suggerimento: si consiglia di utilizzare il sistema di riferimento cilindrico indicato in figura).

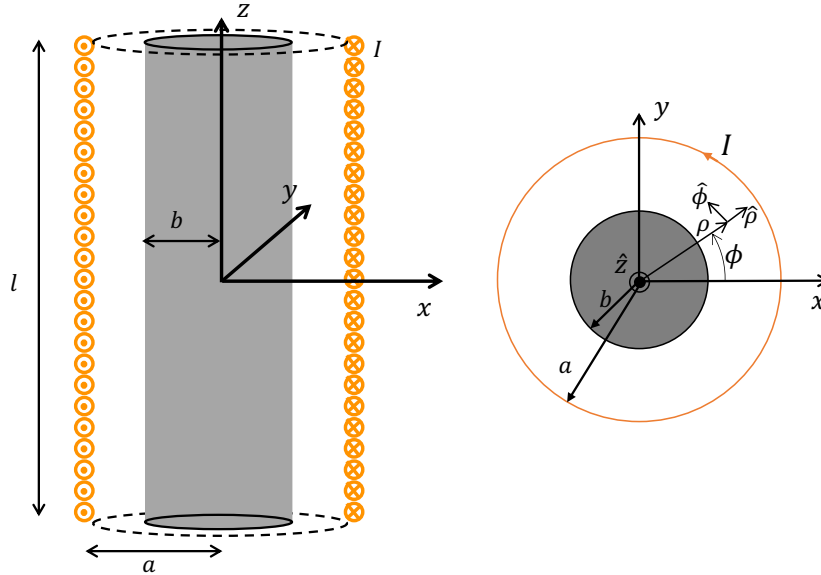


Figura 3: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

Poiché il solenoide è molto lungo rispetto al diametro, si può assumere che il campo magnetico generato all'esterno sia nullo mentre internamente esso è uniforme e diretto secondo l'asse del cilindro $\hat{z}$. In queste condizioni si trova (Esercizio E.6.2 Mencuccini) internamente al solenoide:

$$\underline{H} = nI\hat{z} = 680\hat{z} \quad \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (23)$$

Il vettore induzione magnetica in tutti i punti all'interno della barra ferromagnetica sarà quindi:

$$\underline{B} = \mu_0\mu_r nI\hat{z} \cong 0.1265\hat{z} \quad \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \quad (24)$$

Essendo per definizione $\underline{H}(\underline{r}) = \frac{\underline{B}(\underline{r})}{\mu_0} - \underline{M}(\underline{r})$ si trova all'interno della barra:

$$\underline{M} = \mu_r \underline{H} - \underline{H} = (\mu_r - 1)\underline{H} = (\mu_r - 1)nI\hat{z} = 9960\hat{z} \quad \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (25)$$

Essendo il vettore $\underline{M}$ uniforme, all'interno della barra non saranno presenti densità di correnti volumetriche di magnetizzazione. Le sole densità correnti di magnetizzazione presenti saranno di tipo superficiale $J_{ms}(\underline{r})$. Queste sono date da:

$$J_{ms}(\underline{r}) = \underline{M} \times \hat{n} \quad (26)$$

dove $\hat{n}$ è la normale alla superficie su cui scorre la densità superficiale di corrente di magnetizzazione. Utilizzando il sistema di riferimento cilindrico $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$ la normale alla superficie laterale è ovunque $\hat{n} = \hat{\rho}$. La densità di corrente di magnetizzazione superficiale è quindi

$$J_{ms}(\rho = b) = (\mu_r - 1)nI\hat{z} \times \hat{\rho} = (\mu_r - 1)nI\hat{\phi} \quad (27)$$

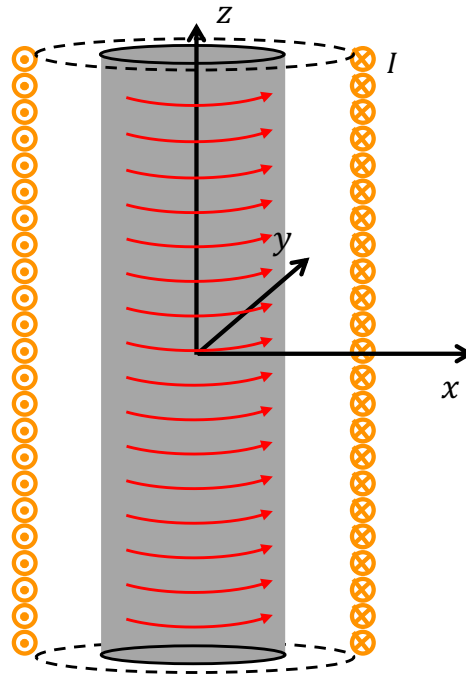


Figura 4: Densità superficiale di corrente di magnetizzazione

La densità di corrente è costante e scorre in senso azimutale come in figura 4
Sostituendo i valori.

$$J_{ms}(\rho = b) = (\mu_r - 1)nI\hat{\phi} = M\hat{\phi} = 9960\hat{\phi} \quad \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (28)$$

Sulle due superfici di base, essendo $\hat{n} = \pm\hat{z}$, le densità superficiali di corrente di magnetizzazione sono nulle.

Problema 4 (8 punti) Due sbarrette conduttrici rigide, ciascuna di resistenza R , si appoggiano su due binari conduttori rettilinei paralleli di resistenza trascurabile, posti sul piano $x - y$ di un sistema di riferimento cartesiano a distanza $L = 0.3$ m, come mostrato figura 5. Il sistema è immerso in un campo di induzione magnetica costante $\underline{B} = 2\hat{z}$ T. Al tempo $t = 0$ le due sbarrette sono entrambe posizionate in $x(0) = 0$. A partire da questa condizione iniziale, le due sbarrette iniziano a muoversi parallelamente a se stesse con velocità costante $\underline{v}_1 = 15\hat{x}$ m/s e $\underline{v}_2 = -8\hat{x}$ m/s. Sapendo che la quantità di carica totale Δq che è fluita attraverso la resistenza di una delle due sbarrette fino al tempo $t_1 = 10$ sec. è $\Delta q = 6.9$ C, calcolare la resistenza di ciascuna sbarretta.

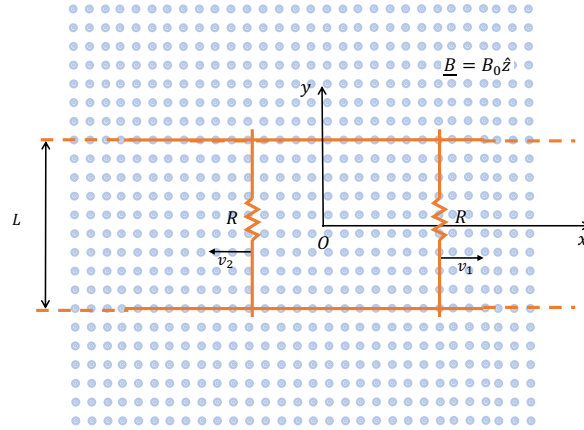


Figura 5: Geometria del problema 4

Soluzione del problema 4

a)

La distanza relativa tra le due sbarrette al tempo t durante il moto, considerando che le due sbarrette viaggiano in direzione opposta è :

$$d(t) = (v_1 + v_2)t \quad \text{m} \quad (29)$$

Essendo il campo di induzione magnetica costante e perpendicolare al piano della spira, il flusso totale all'istante t è quindi:

$$\Phi(t) = B_0 L d(t) = B_0 L (v_1 + v_2)t \quad \text{Wb} \quad (30)$$

Conseguentemente l'ampiezza della forza elettromotrice indotta nel circuito sarà:

$$|\mathcal{E}_i(t)| = \left| -\frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = B_0 L (v_1 + v_2) \cong 13.8 \quad \text{V} \quad (31)$$

La tensione indotta è costante nel tempo. Il flusso aumenta nel tempo per cui la corrente costante indotta I_i nella spira dalla forza elettromotrice circolerà in senso *orario* e la sua ampiezza sarà:

$$I_i = \frac{|\mathcal{E}_i|}{2R} = \frac{B_0 L (v_1 + v_2)}{2R} \quad \text{A} \quad (32)$$

Essendo la corrente indotta stazionaria, la quantità di carica che fluisce in un intervallo di tempo $\Delta t = 10$ sec è

$$\Delta q = I_i \Delta t = \frac{B_0 L (v_1 + v_2)}{2R} \Delta t \quad \text{C} \quad (33)$$

Da cui possiamo ricavare il valore della resistenza

$$R = \frac{B_0 L (v_1 + v_2)}{2\Delta q} \Delta t = 10 \quad \Omega \quad (34)$$